arXiv:2301.07930v1 [math.CA] 19 Jan 2023

由 Π-粗糙路径驱动的微分方程的泰勒估计

Danyu Yang

2023年1月20日

摘要

我们获得了由弱几何 Π-粗糙路径驱动的微分方程的截断泰勒展开的余项估计，其中$\Pi = (p_1, \cdots, p_k)$， $p_i \geq 1$。当存在 $p \geq 1$ 使得 $p_i = pk_i^{-1}$ 对某个 $k_i \in \{1, \ldots, [p]\}$成立时，我们得到一个改进的泰勒余项估计，其中包含阶乘衰减项。这些余项估计的阶数是恰当的，因为它们与泰勒展开中的下一项具有可比性。

1 引言

考虑如下微分方程

$$dy_t = \sum_{i=1}^{d} f_i(y_t)\, dx_t^i, y_0 = \xi,$$

其中，驱动路径 x 可能具有高度振荡性。在开创性论文 [1],中，Lyons 建立了粗糙路径理论。通过将 x 提升为群值路径，粗糙路径理论确立了解的存在唯一性，并证明了解关于粗糙路径度量下驱动信号的连续性。该理论的成功应用包括由一般随机过程驱动的微分方程、随机流、大偏差原理，以及粗糙微分方程的密度 [2] 等。

基于修正欧拉估计，Davie [3] 在 $p < 3$ 时提出了一种粗糙路径理论的替代方法，并构造了一些例子来说明结果的尖锐性。通过系统地运用次黎曼测地线，Friz 和 Victoir [4] 在 $p \geq 1$ 时得到了粗糙微分方程的欧拉估计，并为随机泰勒展开得到了强余项估计。

驱动粗糙路径可以是非齐次的 [5, 2, 6]。Lejay 和 Victoir [5] 以及 Friz 和 Victoir [2, 第 12] 章研究了 (p, q)-粗糙路径这一特殊且重要的情形。通过改进 Lyons的方法 [1], , Gyurk´o [6]证明了微分方程解的存在性、唯一性和连续性

由几何 Π-粗糙路径（非齐次几何粗糙路径）驱动的微分方程。

基于 Gyurk´o [6], 在引理 8 中得到的适定性结果，我们为由弱几何Π-粗糙路径驱动的微分方程得到泰勒余项估计，适用于 $\Pi = (p_1, \cdots, p_d)$，$p_i \geq 1$。除 $p_i \geq 1$外，对 p_i没有进一步限制。引理 8 的证明依赖于 Friz 和 Victoir [4] 提出的次黎曼测地线方法的一种非齐次对应形式，以及 Davie [3]引入的解析方法。

在特殊情形下，若存在 $p \geq 1$ 使得 $p_i = pk_i^{-1}$对某些 $k_i \in \{1, \ldots, [p]\}$, $i = 1, 2, \ldots, d$成立，我们在定理 9 中得到一个改进的泰勒余项估计，其中包含一个阶乘衰减项。定理 9 可用于研究由一般随机过程驱动、且漂移项几乎必然具有有限 $p\,[p]^{-1}$-变差的微分方程。定理 9 对处理由分支粗糙路径和准几何粗糙路径驱动的微分方程也可能有用，后者与弱几何 Π-粗糙路径[7, 8, 9]同构。定理 9 的证明基于新古典不等式 [1, 10]以及 [11]中提出的反向数学归纳法。

虽然当 p 足够大时，几何 Π-粗糙路径可以视为几何 p-粗糙路径，但这样做会对向量场提出不必要的要求。本文针对非齐次情形仔细调整了次黎曼几何工具和分析方法，以适应向量场较低的正则性。引理 8 和定理 9 中的余项估计阶数恰当，因为它们与泰勒展开中的下一项相当。

2 记号和结果

记号 1 取实数 $p_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, d$。记 $\Pi := (p_1, \cdots, p_d)$，并记 $p_{\max} := \max_{i=1}^{d} p_i$。

记号 2 令 W 表示由 $\{1, 2, \ldots, d\}$ 中元素组成的有限序列集合，其中包括记作 ε 的空序列。令 $|\varepsilon| := 0$。对于 $w = i_1 \cdots i_m \in W$，记

$$|w| := \frac{1}{p_{i_1}} + \cdots + \frac{1}{p_{i_m}}.$$

记号 3 令 G_Π 表示满足以下条件的映射集合 $a \colon \{w \in W \,|\, |w| \leq 1\} \to \mathbb{R}$

$$(a, w_1)\,(a, w_2) = (a, sh\,(w_1 \otimes w_2))$$

对每个 w_1、$w_2 \in W$、$|w_1| + |w_2| \leq 1$均成立，其中洗牌积 sh 定义于 *[12,*第 1.*4]* 节。

对于 a、$b \in G_\Pi$ 和 $w \in W$、$|w| \leq 1$，定义 $(ab, w) = \sum_{uv=w} (a, u)(b, v)$，其中 uv 表示 u 与 v 的拼接。于是，根据定理 3.2、推论 3.3]，G_Π 是一个群 [12, 。

记号 4 对于 $X:\ [0,T]\to G_{\Pi}$，记 $X_{s,\ t}:=X_s^{-1}X_t$，并定义

$$\omega_X(s,t):=\sum_{w\in W,0<|w|\leq 1}\left(\sup_{s=t_0<t_1<\cdots<t_n=t,n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\left(X_{t_k,t_{k+1}},w\right)\right|^{\frac{1}{|w|}}\right).$$

记号 5 X：如果 $[0,T]\to G_{\Pi}$是一个弱几何 Π-粗路径，则 X是连续的，并且 $\omega_X(0,T)<\infty$。

假设利普希茨函数和范数的定义如 [1, 定义 1.2.4] 中所述。

记号 6 假设 $X:\ [0,T]\to G_{\Pi}$且 $f_i:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是 $Lip(\gamma_i)$，$i=^{-}1,2,\ldots,d$。定义 $X:\ [0,T]\to G_{\Pi}$ 为

$$\left(\bar{X}_t,i_1\cdots i_k\right)=\|f_{i_1}\|_{Lip(\gamma_{i_1})}\cdots\|f_{i_k}\|_{Lip(\gamma_{i_k})}\left(X_t,i_1\cdots i_k\right).$$

对于 f、g、$\varphi:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，记 $f(\varphi):=(D\varphi)f$，并定义 $(f\circ g)(\varphi):=f(g(\varphi))$。令 I 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的恒等函数。

记号 7 对于充分光滑的 $f_i:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$、$i=1$、2、...、$d$ 和 $w=i_1\cdots i_m\in W$，记 $F^w:=(f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_m})(I)$。对于空序列 ε，记 $F^{\varepsilon}:=I$。

$^{-}$对于 X 中的记号 6，回顾 $\omega_{\bar{X}}$ 中的记号 4。

引理 8 设 X是一个弱几何 Π-粗糙路径，对应于 $\Pi=(p_1,\ldots,p_d),p_i\geq 1$，并设 $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是 $Lip(\gamma_i)$，其中 $\gamma_i>p_{\max}\left(1-p_i^{-1}\right)+1,i=1,\ldots,d$。令 $y:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 表示下列粗糙微分方程的唯一路径级解:

$$dy_t=\sum_{i=1}^{d}f_i(y_t)\,dX_t^i,y_0=\xi\in\mathbb{R}^n.$$

记 $\theta:=\min_{w\in W,|w|>1}|w|$。则存在一个常数 C，它仅依赖于 $p_1,\cdots,p_d,d$，使得

$$\left|y_t-y_s-\sum_{w\in W,0<|w|\leq 1}F^w(y_s)\left(X_{s,t},w\right)\right|\leq C\left(\omega_{\bar{X}}(s,t)^{\theta}\wedge\omega_{\bar{X}}(s,t)\right)$$

对每个 $0\leq s\leq t\leq T$，均有。

解 y 的存在性和唯一性由 [6, 定理 4.3][7, 引理 3.5]得出。f_i 上的利普希茨条件包含在 [6,定理 4.3] 的假设 h_2为利普希茨$^{\Gamma_2,\Pi_2}$ 中。事实上，$\gamma_i-1=p_{\max}\bar{\gamma}_i$其中 $\bar{\gamma}_i$表示 [6, 定理 4.3]中的 γ_i。引理 8 是证明定理 9 的一个中间步骤。

令 $[p]$ 表示小于或等于 p的最大整数，并令 $\lfloor\gamma\rfloor$ 表示严格小于 γ的最大整数。

定理 9 对于 $p \geq 1$，设 X 是定义在 $\Pi = (p_1, \ldots, p_d)$ 上的弱几何 Π-粗糙路径，且 $p_i = pk_i^{-1}$，其中某个 $k_i \in \{1, \ldots, [p]\}$成立。假设 $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$对于 $\gamma_i > p_{\max}\left(1 - k_i p^{-1}\right) + 1$是 $Lip(\gamma_i)$。令 y 表示粗糙微分方程的唯一路径级解

$$dy_t = \sum_{i=1}^{d} f_i(y_t)\, dX_t^i, y_0 = \xi \in \mathbb{R}^n.$$

记 $\gamma := \min_{i=1}^{d} \left\{(\gamma_i - 1) p p_{\max}^{-1} + k_i\right\}$，并记 $N := \lfloor \gamma \rfloor$。那么 $N \geq [p]$，且存在一个常数 C，它仅依赖于 p_1、$\cdots$、p_d、d，使得

$$\left| y_t - y_s - \sum_{w \in W, 0 < |w| \leq \frac{N}{p}} F^w(y_s)(X_{s,t}, w) \right| \leq C N! d^{N+1} \beta^N \frac{\omega_{\bar{X}}(s,t)^{\frac{N+1}{p}}}{\left(\frac{N+1}{p}\right)!} \quad (1)$$

对每个 $0 \leq s \leq t \leq T$，其中

$$\beta := p\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(2k^{-1}\right)^{\frac{[p]+1}{p}}\right).$$

估计式 (1) 正确地刻画了泰勒展开中下一项的阶：

$$\sum_{w \in W, |w| = \frac{N+1}{p}} F^w(y_s)(X_{s,t}, w). \quad (2)$$

1. 式 (1) 中的因子 $N!$ 源于向量场的迭代复合。记 $f^{\circ(k+1)} := D\left(f^{\circ k}\right) f$，其中 $f^{\circ 1} := f$。设 $f(y) = e^{-y}$，并考虑微分方程 $dy_t = e^{-y_t} dt$, $y_0 = 0$。那么在 $y \geq 0$ 上，对于$k = 1$、2、.....，有 $\|f\|_{Lip(k)} = 1$，且 $\left|f^{\circ(N+1)}(0)\right| = N!$

2. 当 $p_i = p$（X 是齐次的）时，(2) 中共有 d^{N+1} 项，这解释了 (1) 中的因子 d^{N+1}。

3. 基于新古典不等式 [10] 以及 [1, 定理 2.2.1]，关于 $w \in W$、$|w| = \frac{N+1}{p}$ 的非齐次类比，

$$\left|\left(\bar{X}_{s,t}, w\right)\right| \leq \beta^N \frac{\omega_{\bar{X}}(s,t)^{\frac{N+1}{p}}}{\left(\frac{N+1}{p}\right)!}$$

这解释了估计式 (1)。

3 证明

在记号 6 中将 X 替换为 $\bar{X}$，并将 f_i 替换为$\|f_i\|_{Lip(\gamma_i)}^{-1} f_i$，使得$\|f_i\|_{Lip(\gamma_i)} = 1$。微分方程保持不变。按照记号 4，将 $\omega(s,t) := \omega_{\bar{X}}(s,t)$ 记为。证明中的常数可能依赖于 $p_1, \cdots, p_d, d$。常数的确切取值可能有所不同。

记号 10 对于连续有界变差路径 $x:[0,T]\to\mathbb{R}^d$，将$S_\Pi(x):\{(s,t)|0\le s\le t\le T\}\to G_\Pi$记为

$$\left(S_\Pi(x)_{s,t},i_1\cdots i_m\right)=\int\cdots\int_{s<u_1<\cdots<u_m<t}dx_{u_1}^{i_1}\cdots dx_{u_m}^{i_m}$$

对于 $i_1\cdots i_m\in W,|i_1\cdots i_m|\le 1$。

定义 11 对于 $a\in G_\Pi$，定义

$$\|a\|':=\inf_x\sum_{i=1}^d\left\|x^i\right\|_{1-var,[0,1]}^{\frac{p_i}{p_{\max}}}$$

其中下确界取遍所有满足以下条件的连续有界变差路径 $x:[0,1]\to\mathbb{R}^d$

$$\left(S_\Pi(x)_{0,1},w\right)=(a,w)\ \textit{for every}\ w\in W,|w|\le 1.$$

下确界可以由一条连续有界变差路径达到，该路径称为与 $a\in G_\Pi$ 相关联的测地线。

测地线的存在性可仿照 [2, 定理 7.32] 证明。由于$p_ip_{\max}^{-1}\le 1$，$\|\cdot\|'$ 的次可加性和连续性可仿照[2, 命题 7.40]证明。对于 $a\in G_\Pi$，定义

$$\|a\|:=\sum_{w\in W,0<|w|\le 1}|(a,w)|^{\frac{1}{p_{\max}|w|}}.$$

对于 $\lambda>0$ 和 $a\in G_\Pi$，定义 $\delta_\lambda a\in G_\Pi$ 为

$$(\delta_\lambda a,w):=\lambda^{p_{\max}|w|}(a,w)\ \text{for every}\ w\in W,|w|\le 1.$$

$\|\cdot\|'$ 和 $\|\cdot\|$ 都是相对于 δ_λ的连续齐次范数。通过与 [2, 定理 7.44]中类似的论证，$\|\cdot\|'$ 和 $\|\cdot\|$ 在相差一个依赖于 p_1、$\cdots$、p_d、d的常数的意义下等价。

引理 12 设 $X:[0,T]\to G_\Pi$是一个弱几何 Π-粗糙路径。对于$0\le s<t\le T$，设 $x^{s,t}=\left(x^{s,t,1},\ldots,x^{s,t,d}\right):[s,t]\to\mathbb{R}^d$是与 $X_{s,t}$相关联的一条测地线。那么存在一个依赖于 p_1、$\cdots$、p_d、d的常数 C，使得对于 $i=1,\ldots,d$,

$$\left\|x^{s,t,i}\right\|_{1-var,[s,t]}\le C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_i}}.$$

证明。由于 $\|\cdot\|'$ 和 $\|\cdot\|$ 等价，因此我们有

$$\left\|x^{s,t,i}\right\|_{1-var,[s,t]}^{\frac{p_i}{p_{\max}}}\le\|X_{s,t}\|'\le C\|X_{s,t}\|\le C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_{\max}}}.$$

■

回顾记号 $F^{i_1\cdots i_m}:=(f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_m})(I)$。

引理 13 对于某个 $\alpha>0$，假设 f_i 对于 $\gamma_i>p_{\max}\left(\alpha-p_i^{-1}\right)+1$,$i=1,2,\ldots,d$ 是 $Lip(\gamma_i)$。那么对于 $w\in W,|w|\leq\alpha$, F^w，存在某个 $\eta>1$，使得其为 $Lip(\eta)$。

证明。固定满足 $|w|\leq\alpha$ 的 $w=i_1\cdots i_m\in W$。假设对于某个 $j\in\{1,\ldots,m\}$, $\gamma_{i_j}\leq j$。那么

$$|w|=\frac{1}{p_{i_1}}+\cdots+\frac{1}{p_{i_m}}\geq\frac{j-1}{p_{\max}}+\frac{1}{p_{i_j}}\geq\frac{\gamma_{i_j}-1}{p_{\max}}+\frac{1}{p_{i_j}}>\alpha,$$

这与 $|w|\leq\alpha$ 矛盾。因此，对于每个 $j\in\{1,\ldots,m\}$， $\gamma_{i_j}>j$，且 F^w 对某个 $\eta>1$ 是 $Lip(\eta)$。 ■

引理 14 假设对于 $\gamma_i>p_{\max}\left(1-p_i^{-1}\right)+1$, $i=1,2,\ldots,d$， f_i 是 $Lip(\gamma_i)$。那么对于 $w\in W,|w|\leq1$ 和 $i_0\in\{1,2,\ldots,d\}$，$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|F^{i_0w}(y)\right|\leq[p_{\max}]!$ 。

证明。根据引理 13（取 $\alpha=1$），当 $|w|\leq1$, F^w 是某个 $\eta>1$ 的 $Lip(\eta)$ 时。设 $w=i_1\cdots i_m$。则 $F^{i_0w}=(f_{i_0}\circ f_{i_1}\circ\cdots\circ f_{i_m})$（$I$）包含 m 个函数，它们是微分算子 $f_{i_j}D$，对于 $j=0,\ldots,m-1$，从 $\{f_{i_{j+1}},\ldots,f_{i_m}\}$ 中任选一个。由于 $\|f_i\|_{Lip(\gamma_i)}=1$, 这些函数的绝对值均不超过 1。因此，$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|F^{i_0w}(y)\right|\leq m!\leq[p_{\max}]!$。 ■

引理 15 设 $x=\left(x^1,\ldots,x^d\right):[0,1]\to\mathbb{R}^d$ 是一条连续有界变差路径。设 $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 对于 $\gamma_i>p_{\max}\left(1-p_i^{-1}\right)+1$,$i=1,2,\ldots,d$ 是 $Lip(\gamma_i)$。令 $y:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ 为常微分方程的唯一解

$$dy_t=\sum_{i=1}^{d}f_i(y_t)\,dx_t^i,y_0=\xi.$$

假设存在 $C>0$ 和 $K\in[0,1]$，使得 $\left\|x^i\right\|_{1-var,[0,1]}\leq CK^{\frac{1}{p_i}}$ 对于$i=1$、2、.....、d均成立。记 $\theta:=\min_{w\in W,|w|>1}|w|$。那么存在一个常数 C'，它依赖于 C、 p_1、$\cdots$、 p_d、 d，使得

$$\left|y_1-\xi-\sum_{w\in W,|w|\leq1}F^w(\xi)\left(S_\Pi(x)_{0,1},w\right)\right|\leq C'K^\theta.$$

证明。由微积分基本定理和引理 14,

$$\begin{aligned}&\left|y_1-\xi-\sum_{w\in W,|w|\leq1}F^w(\xi)\left(S_\Pi(x)_{0,1},w\right)\right|\\\leq&\sum_{\substack{|i_1\cdots i_m|\leq1\\|i_0i_1\cdots i_m|>1}}\int\cdots\int_{0<u_0<\cdots<u_m<1}\left|F^{i_0\cdots i_m}(y_{u_0})\right|\left|dx_{u_0}^{i_0}\right|\cdots\left|dx_{u_m}^{i_m}\right|\\\leq&C'K^\theta\end{aligned}$$

其中我们使用了 $\left\|x^i\right\|_{1-var,[0,1]}\leq CK^{\frac{1}{p_i}}$，其中 $K\in[0,1]$。 ■

引理 16 设 $x=\left(x^1,\ldots,x^d\right):[0,1]\to\mathbb{R}^d$ 是一条连续有界变差路径。假设 $f=(f_1,\ldots,f_d)$ 满足：$f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 对于 $\gamma_i>p_{\max}\left(1-p_i^{-1}\right)+1$, $i=1,2,\ldots,d$ 是 $Lip(\gamma_i)$。设 $y^j:[0,1]\to\mathbb{R}^n, j=1,2$ 是常微分方程的解

$$dy_t^j=\sum_{i=1}^d f_i\left(y_t^j\right)dx_t^i, y_0^j=\xi^j.$$

假设存在 $C>0$ 和 $K\in[0,1]$，使得 $\left\|x^i\right\|_{1-var,\ [0,1]}\le CK^{\frac{1}{p_i}}$ 对 $i=1,2,\ldots,d$ 均成立。那么存在一个常数 C'，它依赖于 C,d，使得

$$\left|y_1^1-\xi^1-\left(y_1^2-\xi^2\right)\right|\le C'\left|\xi^1-\xi^2\right|K^{\frac{1}{p_{\max}}}.$$

证明。记 $\overline{y}_t:=y_t^1-y_t^2$。那么

$$\begin{aligned}&|\overline{y}_t-\overline{y}_0|\\ \le&\sum_{i=1}^d\|f_i\|_{Lip(\gamma_i)}|\overline{y}_0|\left\|x^i\right\|_{1-var,[0,1]}+\sum_{i=1}^d\int_0^t\|f_i\|_{Lip(\gamma_i)}|\overline{y}_r-\overline{y}_0|\left|dx_r^i\right|.\end{aligned}$$

由于 $\|f_i\|_{Lip(\gamma_i)}=1$ 且 $\left\|x^i\right\|_{1-var,\ [0,1]}\le CK^{\frac{1}{p_i}}$ 对 $K\in[0,1]$ 成立，应用 Gron- wall 引理 [2, 引理 3.2]，即可得到所述估计。 ■

引理 8 的证明。首先，假设 $x:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ 连续且具有有界变差。令 $y:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ 表示常微分方程的解

$$dy_t=f(y_t)dx_t, y_0=\xi.$$

对于 $[s,t]\subset[0,T]$，令 $x^{s,t}:[s,t]\to\mathbb{R}^d$ 为与 $S_\Pi(x)_{s,t}$ 相关的测地线，并令 $y^{s,t}:[s,t]\to\mathbb{R}^n$ 表示常微分方程的解

$$dy_r^{s,t}=f\left(y_r^{s,t}\right)dx_r^{s,t}, y_s^{s,t}=y_s.$$

记为

$$\Gamma^{s,t}:=y_t-y_s-\left(y_t^{s,t}-y_s\right).$$

令 ω 为与记号 4 中的 $S_\Pi(x)$ 相关的控制。首先假设 $\omega(s,t)\le 1$。对于 $s\le u\le t$，令 $x^{s,u,t}:[s,t]\to\mathbb{R}^d$ 表示 $x^{s,u}$ 与 $x^{u,t}$ 的拼接，并令 $y^{s,u,t}:[s,t]\to\mathbb{R}^n$ 表示常微分方程的解

$$dy_r^{s,u,t}=f\left(y_r^{s,u,t}\right)dx_r^{s,u,t}, y_s^{s,u,t}=y_s.$$

根据引理 12,

$$\begin{aligned}\left\|x^{s,t,i}\right\|_{1-var,[s,t]}&\le C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_i}}.\\ \left\|x^{s,u,t,i}\right\|_{1-var,[s,t]}&\le\left\|x^{s,u,i}\right\|_{1-var,[s,u]}+\left\|x^{u,t,i}\right\|_{1-var,[u,t]}\le 2C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_i}}.\end{aligned}$$

然后根据引理 15 和引理 16,

$$\begin{aligned} & \left|\Gamma^{s,u}+\Gamma^{u,t}-\Gamma^{s,t}\right| \\ \leq & \left|y_t^{s,t}-y_t^{s,u,t}\right|+\left|y_t^{s,u,t}-y_u^{s,u}-\left(y_t^{u,t}-y_u\right)\right| \\ \leq & C_1\omega(s,t)^{\theta}+C_2\left|\Gamma^{s,u}\right|\omega(u,t)^{\frac{1}{p_{\max}}} \end{aligned}$$

Then

$$\left|\Gamma^{s,t}\right| \leq \left(1+C_2\omega(s,t)^{\frac{1}{p_{\max}}}\right)\left(\left|\Gamma^{s,u}\right|+\left|\Gamma^{u,t}\right|\right)+C_1\omega(s,t)^{\theta}. \tag{3}$$

令 (3) 中的 C_1 和 C_2，记为

$$\delta := \max\left((C_2)^{p_{\max}},(C_1)^{\frac{1}{\theta}}\right)\omega(s,t)$$

记 $\left[t_0^0,t_1^0\right]:=[s,t]$。将 $\left[t_j^n,t_{j+1}^n\right]=\left[t_{2j}^{n+1},t_{2j+1}^{n+1}\right]\cup\left[t_{2j+1}^{n+1},t_{2j+2}^{n+1}\right]$ 划分，使得

$$\omega\left(t_{2j}^{n+1},t_{2j+1}^{n+1}\right)=\omega\left(t_{2j+1}^{n+1},t_{2j+2}^{n+1}\right)\leq 2^{-1}\omega\left(t_j^n,t_{j+1}^n\right)$$

对于 $j=0,\ldots,2^n-1, n=0,1,2,\ldots$，这是可行的，因为 ω 是超可加且连续的，见命题 5.8]。通过迭代应用 (3)，当 $\omega(s,t)\leq 1$ 时，

$$\begin{aligned} \left|\Gamma^{s,t}\right| \leq & \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\sum_{j=0}^{n}\prod_{k=0}^{j}\left(1+\left(\frac{\delta}{2^k}\right)^{\frac{1}{p_{\max}}}\right)\frac{1}{2^{(j+1)(\theta-1)}}\right)\delta^{\theta} \\ & +\overline{\lim_{n\to\infty}}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\left(\frac{\delta}{2^k}\right)^{\frac{1}{p_{\max}}}\right)\left(\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1}\left|\Gamma^{t_j^n,t_{j+1}^n}\right|\right) \\ \leq & \exp\left(\frac{2^{\frac{1}{p_{\max}}}C}{2^{\frac{1}{p_{\max}}}-1}\right)\left(\frac{2^{\theta-1}}{2^{\theta-1}-1}\delta^{\theta}+\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{j=0}^{2^n-1}\left|\Gamma^{t_j^n,t_{j+1}^n}\right|\right). \end{aligned} \tag{4}$$

由于 x 连续且具有有界变差，并且 $x^{s,t}$ 是与 $S_\Pi(x)_{s,t}$ 相关联的测地线，因此我们有 $S_\Pi(x^{s,t})_{s,t}=S_\Pi(x)_{s,t}$ 和 $\|x^{s,t}\|_{1-var,[s,t]}\leq \|x\|_{1-var[s,t]}$ f_i Lip γ_i $\gamma_i>1$ $i=$, 。通过泰勒展开以 $1\ \ldots\ d$ 及，即对于，，，，

$$\left|\Gamma^{t_j^n,t_{j+1}^n}\right|\leq C\left\|x\right\|_{1-var,\left[t_j^n,t_{j+1}^n\right]}^2.$$

令 $n\to\infty$ 属于 (4),

$$\left|\Gamma^{s,t}\right|\leq C\omega(s,t)^{\theta}. \tag{5}$$

结合 (5)、引理 15 和 $\left\|x^{s,t}\right\|_{1-var,[s,t]}^{i}\leq C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_i}}$，当 $\omega(s,t)\leq 1$ 时，

$$\left|y_t-y_s-\sum_{w\in W,0<|w|\leq 1}F^w(y_s)\left(S_\Pi(x)_{s,t},w\right)\right|\leq C\omega(s,t)^{\theta} \tag{6}$$

其中，式（6）中的常数 C 关于 $\Pi=(p_1,\cdots,p_d)$ 在 Π 的某个邻域内连续。

到目前为止，我们假设 x 连续且具有有界变差。设 X 是一个弱几何 Π-粗糙路径，满足 $\Pi=(p_1,\cdots,p_d)$。那么，根据引理 3.5]， X 是一个几何 Π'-粗糙路径，满足 $\Pi'=(p_1',\cdots,p_d')$。应用通用极限定理 [6, 定理 4.3]，，并利用控制 ω 根据引理 5.13] 的连续性，以及式（6）中的常数 C 关于 Π 的连续性，当 $\omega(s,t)\leq 1$ 时，

$$\left|y_t-y_s-\sum_{w\in W,0<|w|\leq 1}F^w(y_s)(X_{s,t},w)\right|\leq C\omega(s,t)^{\theta}. \tag{7}$$

当 $\omega(s,t)>1$ 时，将 $[s,t]=[t_0,t_1]\cup[t_1,t_2]\cup\cdots\cup[t_{n-1},t_n]$ 划分为使得 $\omega(t_k,t_{k+1})=1$ 对于 $k=0,\ldots,n-2$ 以及 $\omega(t_{n-1},t_n)\leq 1$。由 ω 的超可加性，$n-1<\omega(s,t)$ 和 $n<\omega(s,t)+1$。由于 $\omega(t_k,t_{k+1})\leq 1$，根据 (7) 和引理 14，

$$\left|y_{t_{k+1}}-y_{t_k}\right|\leq C\omega(t_k,t_{k+1})^{\frac{1}{p_{\max}}}\leq C \text{ for } k=0,1,\ldots,n-1.$$

因此，

$$|y_t-y_s|\leq\sum_{k=0}^{n-1}\left|y_{t_{k+1}}-y_{t_k}\right|\leq Cn<C(\omega(s,t)+1)<2C\omega(s,t). \tag{8}$$

另一方面，根据引理 14 和 $|(X_{s,\ t},w)|\leq\omega(s,t)^{|w|}$, $|w|\leq 1$,

$$\left|\sum_{w\in W,0<|w|\leq 1}F^w(y_s)(X_{s,t},w)\right|\leq C\omega(s,t). \tag{9}$$

结合 (8) 和 (9)，当 $\omega(s,t)>1$ 时，我们有

$$\left|y_t-y_s-\sum_{w\in W,0<|w|\leq 1}F^w(y_s)(X_{s,t},w)\right|\leq C\omega(s,t).$$

■

在下文中，我们假设存在 $p\geq 1$ ，使得 X 是一个弱几何 Π-粗糙路径，满足 $\Pi=(p_1,\cdots,p_d)$，其中 $p_i=pk_i^{-1}$ 对某个 $k_i\in\{1,2,\cdots,[p]\}$成立。假设 $f=(f_1,\cdots,f_d)$，其中 $f_i\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 对某个 $\gamma_i>p_{\max}\left(1-k_ip^{-1}\right)+1$是 $Lip(\gamma_i)$。令 $y\colon\ [0,T]\to\mathbb{R}^n$ 表示粗糙微分方程的唯一解

$$dy_t=f(y_t)\,dX_t, y_0=\xi.$$

对于 $0\leq s<t\leq T$，假设 $x^{s,\ t}\colon\ [s,t]\to\mathbb{R}^d$ 是与 $X_{s,\ t}$相关联的测地线。令 $y^{s,\ t}$ 表示常微分方程的唯一解

$$dy_u^{s,t}=f\left(y_u^{s,t}\right)dx_u^{s,t}, y_s^{s,t}=y_s.$$

记 $\gamma:=\min_{i=1}^d\left\{(\gamma_i-1)pp_{\max}^{-1}+k_i\right\}$，并记 $N:=\lfloor\gamma\rfloor$。那么 $N\geq[p]$。

记号 17 设 $p_i = pk_i^{-1}$对于 $k_i \in \{1, \ldots, [p]\}$。对于 $w \in W$，记

$$\|w\| := p\,|w|\,.$$

那么，对于 $w = i_1 \cdots i_m$, $\|w\| = k_{i_1} + \cdots + k_{i_m}$。

引理 18 对于 $w \in W$, $\|w\| \le N$, $|F^w(y) - F^w(x)| \le \|w\|! \ |y - x|$对每个$x$, $y \in \mathbb{R}^n$ 以及对于 $i \in \{1, \cdots, d\}$, $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left|F^{iw}(y)\right| \le \|w\|!$
证明。由于 $\gamma := \min_{i=1}^{d} \left\{(\gamma_i - 1)\, p p_{\max}^{-1} + k_i\right\}$ 且 $N := \lfloor \gamma \rfloor < \gamma$，我们有

$$\gamma_i > (N - k_i)\, p^{-1} p_{\max} + 1 = p_{\max}\left(N p^{-1} - p_i^{-1}\right) + 1.$$

根据引理 13（取 $\alpha = Np^{-1}$），当 $\|w\| \le N$ 时， F^w是某个 $\eta > 1$的 $Lip(\eta)$。设 $w = i_1 \cdots i_m$。考虑 $F^w = (f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_m})\,(I)$。由于微分算子 $f_{i_j} D$可以对$j = 1$、2、.....、$m-1$各选一个$\{f_{i_{j+1}}, \cdots, f_{i_m}\}$，因此 $F^w = (f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \cdots \circ f_{i_m})\,(I)$ 中有 $(m-1)!$ 个函数。对于 DF^w，由于 D从 $\{f_{i_1}, \cdots, f_{i_m}\}$中选一个，因此还会多出一个因子 m，所以 DF^w 中总共有 $m!$ 个函数。由于$\|f_i\|_{Lip(\gamma_i)} = 1$，这些函数中的每一个都由
1 $\|DF^w\|_\infty \le m \le \|w\|$ $|F^w\ y\ - F^w\ x\ | \le$ 界定。因此，！$\|DF^w\|_\infty |y - x| \le \|w\|\ |y - x|$ $_{y \in \mathbb{R}^n} \left|F^{iw}\ y\ \right| =$
！和 ( ) ( ) !。对于第二个界，sup ( ) $\sup_{y \in \mathbb{R}^n} |DF^w(y)\ f_i(y)| \le \|DF^w\|_\infty \|f_i\|_\infty \le \|w\|!$

■

引理 19 假设 $\omega(s,t) \le 1$。对于 $w \in W$, $\|w\| = N - [p], \cdots, N$,

$$\left| F^w(y_t) - F^w(y_s) - \sum_{1 \le \|l\| \le N - \|w\|} F^{lw}(y_s)\,(X_{s,t}, l) \right| \tag{10}$$
$$\le \quad CN! \frac{\omega(s,t)^{\frac{N - \|w\| + 1}{p}}}{\left(\frac{N - \|w\| + 1}{p}\right)!}$$

当 $\|w\| = 0, \ldots, N - [p] - 1$ 时，

$$\left| F^w(y_t) - F^w(y_s) - \sum_{1 \le \|l\| \le [p]} F^{lw}(y_s)\,(X_{s,t}, l) \right| \tag{11}$$
$$\le \quad C\,(\|w\| + [p])!\,\omega(s,t)^{\frac{[p]+1}{p}}$$

证明。当 $\|w\| = N$ 时，根据引理 18、引理 8 和 $\omega(s,t) \le 1$,

$$|F^w(y_t) - F^w(y_s)| \le N!\,|y_t - y_s| \le CN!\omega(s,t)^{\frac{1}{p_{\max}}} \le CN!\omega(s,t)^{\frac{1}{p}}\,.$$

根据引理 18、引理 8、引理 15， $\left\|x^{s,\ t,\ i}\right\|_{1-var,\ [s,t]} \le C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_i}}$、$S_\Pi(x^{s,\ t})_{s,\ t} = X_{s,\ t}$ 以及 $\theta \ge ([p]+1)\,p^{-1}$，由于 $\omega(s,t) \le 1$,

$$\left|F^w(y_t) - F^w\left(y_t^{s,t}\right)\right| \le \|w\|!\left|y_t - y_t^{s,t}\right| \le C\,\|w\|!\omega(s,t)^{\frac{[p]+1}{p}}\,. \tag{12}$$

另一方面，由于 $\left\|x^{s,\ t,\ \ i}\right\|_{1-var,\ [s,t]} \leq C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_i}}$ 以及 $\omega(s,t) \leq 1$,

$$\max_{u\in[s,t]}\left|y_u^{s,t}-y_s\right| \leq \sum_{i=1}^{d}\left\|x^{s,t,i}\right\|_{1-var,[s,t]} \leq C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_{\max}}} \leq C\omega(s,t)^{\frac{1}{p}}. \quad (13)$$

那么，当 $\|w\| = N-[p],\cdots,N-1$ 时，根据微积分基本定理、引理 18、(13) 和 $\left\|x^{s,\ t,\ \ i}\right\|_{1-var,\ [s,t]} \leq C\omega(s,t)^{\frac{1}{p_i}}$，由于 $\omega(s,t) \leq 1$,

$$\begin{aligned}
&\left|F^w\left(y_t^{s,t}\right)-F^w(y_s)-\sum_{0<\|l\|\leq N-\|w\|}F^{lw}(y_s)(X_{s,t},l)\right| \quad (14)\\
\leq\ & \sum_{\|i_1\cdots i_k w\|=N}\int\cdots\int_{s<u_1<\cdots<u_k<t}\left|F^{i_1\cdots i_k w}\left(y_u^{s,t}\right)-F^{i_1\cdots i_k w}(y_s)\right|\left|dx_{u_1}^{s,t,i_1}\right|\cdots\left|dx_{u_k}^{s,t,i_k}\right|\\
&+\sum_{\substack{\|i_2\cdots i_k w\|<N\\ \|i_1\cdots i_k w\|>N}}\int\cdots\int_{s<u_1<\cdots<u_k<t}\left|F^{i_1\cdots i_k w}\left(y_u^{s,t}\right)\right|\left|dx_{u_1}^{s,t,i_1}\right|\cdots\left|dx_{u_k}^{s,t,i_k}\right|\\
\leq\ & CN!\omega(s,t)^{\frac{N-\|w\|+1}{p}}.
\end{aligned}$$

结合 (12) 和 (14)，估计式 (10) 成立。当 $\|w\| = 0,\ldots,N-[p]-1$ 时，同样的论证适用，且 (11) 成立。 ■

定理 9 的证明。由 $s<t$ 和 $l\in W$ 的非齐次类比结果 [1, Theorem 2.2.1]，可得 $\|l\| = 1, 2, \ldots$

$$|(X_{s,t},l)| \leq \beta^{\|l\|-1}\frac{\omega(s,t)^{\frac{\|l\|}{p}}}{\left(\frac{\|l\|}{p}\right)!} \quad (15)$$

首先假设 $\omega(s,t) \leq 1$。记 $Y_t^w := F^w(y_t)$。记 $\widetilde{\omega} := \beta^p d^p\omega$。归纳假设：假设对于 $s<t$, $\omega(s,t) \leq 1$ 以及 $w\in W$, $\|w\| = n+1,\cdots,N$, 有

$$\left|Y_t^w-Y_s^w-\sum_{1\leq\|l\|\leq N-\|w\|}Y_s^{lw}(X_{s,t},l)\right| \leq CN!\frac{\widetilde{\omega}(s,t)^{\frac{N-\|w\|+1}{p}}}{\beta\left(\frac{N-\|w\|+1}{p}\right)!} \quad (16)$$

根据 (10)，当 $n = N-[p]-1$ 时成立。

固定 $w\in W, \|w\| = n,\ n\leq N-[p]-1$。记

$$L_{s,t} = \sum_{1\leq\|l\|\leq N-\|w\|}Y_s^{lw}(X_{s,t},l)$$

于是，根据 (11)、引理 18 和 (15)，由于 $\omega(s,t) \le 1$,

$$\begin{aligned}
& |Y_t^w - Y_s^w - L_{s,t}| \\
\le\ & \left| Y_t^w - Y_s^w - \sum_{1\le\|l\|\le[p]} Y_s^{lw}(X_{s,t},l) \right| + \left| \sum_{[p]+1\le\|l\|\le N-\|w\|} Y_s^{lw}(X_{s,t},l) \right| \\
\le\ & CN!\omega(s,t)^{\frac{[p]+1}{p}}.
\end{aligned}$$

因此,

$$Y_t^w - Y_s^w = \lim_{|D|\to 0, D\subset[s,t]} \sum_{k, t_k\in D} L_{t_k,t_{k+1}}.$$

对于 $s < u < t$，利用 $\#\{w\in W|\,\|w\|=n\} \le d^n$、归纳假设 (16)、阶乘衰减 (15) 以及新古典不等式 [10],

$$\begin{aligned}
& |L_{s,u} + L_{u,t} - L_{s,t}| \\
=\ & \left| \sum_{1\le\|l\|\le N-\|w\|} \left(Y_u^{lw} - Y_s^{lw} - \sum_{1\le\|l_1\|\le N-\|lw\|} Y_s^{l_1 lw}(X_{s,u},l_1) \right)(X_{u,t},l) \right| \\
\le\ & \sum_{n=1}^{N-\|w\|} Cd^n N! \frac{\widetilde{\omega}(s,u)^{\frac{N-n-\|w\|+1}{p}}}{\beta\left(\frac{N-n-\|w\|+1}{p}\right)!} \frac{\beta^{n-1}\omega(u,t)^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!} \\
\le\ & \sum_{n=1}^{N-\|w\|} CN! \frac{\widetilde{\omega}(s,u)^{\frac{N-n-\|w\|+1}{p}}}{\beta\left(\frac{N-n-\|w\|+1}{p}\right)!} \frac{\widetilde{\omega}(u,t)^{\frac{n}{p}}}{\beta\left(\frac{n}{p}\right)!} \qquad (\text{since } \widetilde{\omega} := \beta^p d^p \omega) \\
\le\ & CN! \frac{p\widetilde{\omega}(s,t)^{\frac{N-\|w\|+1}{p}}}{\beta^2\left(\frac{N-\|w\|+1}{p}\right)!} \qquad (\text{based on neo-classical inequality})
\end{aligned}$$

然后，按照 [1, Theorem 2.2.1], 中的方法依次移除分割点，当 $\|w\| = n$ 时，(16) 成立，归纳也就完成了。令 w 为 ε空序列 $Y_t^\varepsilon = y_t$。于是 $\|\varepsilon\| = 0$，并且当 $\omega(s,t) \le 1$ 时，估计 (1) 成立。

设 $\omega(s,t) > 1$。根据引理 18，当 $\|w\| = j$ 时，$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} |F^w(y)| \le (j-1)!$。结合 $\#\{w\in W|\,\|w\|=j\} \le d^j$ 以及 (15) 中的阶乘衰减,

$$\left| \sum_{w\in W, \|w\|=j} F^w(y_s)(X_{s,t},w) \right| \le (j-1)! d^j \beta^{j-1} \frac{\omega(s,t)^{\frac{j}{p}}}{\left(\frac{j}{p}\right)!}$$

对于 $j = 1$、2、.....，记

$$a_j := \frac{(j-1)!}{\left(\frac{j}{p}\right)!}\beta^{j-1}$$

由于 $\beta > 1$ p [13, 1.3], $\lambda =$ 仅取决于，根据 Kersha $2^{-1}\left(\beta^{-1}+1\right) \in (0,1)$ $C_p > 0$ $a_j \le C_p \lambda^{N+1-j} a_{N+1}$ w 不等式（）对于（），存在使得对于

$j = 1, \ldots, N$和 $N = 1, 2, \ldots$。那么

$$\sum_{j=1}^{N} a_j \leq C_p \sum_{j=1}^{N} \lambda^{N+1-j} a_{N+1} \leq C_p' a_{N+1} \tag{17}$$

另一方面，由于 $\lim_{N\to\infty} a_{N+1} = \infty$ and $a_{N+1} > 0$，存在 $C_p > 0$，使得

$$1 \leq C_p a_{N+1} \tag{18}$$

根据引理 8 和引理 14，$|y_t - y_s| \leq C\omega(s,t)$，当 $\omega(s,t) > 1$。由于$d \geq 1$，$\omega(s,t)^{\frac{1}{p}} > 1$且 $\frac{N+1}{p} \geq \frac{[p]+1}{p} > 1$，结合 (17) 和 (18)，我们得到

$$\begin{aligned} & \left| y_t - y_s - \sum_{w\in W, 1\leq\|w\|\leq N} F^w(y_s)(X_{s,t}, w) \right| \\ \leq\ & C\omega(s,t) + \sum_{j=1}^{N} (j-1)! d^j \beta^{j-1} \frac{\omega(s,t)^{\frac{j}{p}}}{\left(\frac{j}{p}\right)!} \\ \leq\ & CN! d^{N+1} \beta^N \frac{\omega(s,t)^{\frac{N+1}{p}}}{\left(\frac{N+1}{p}\right)!}. \end{aligned}$$

■

参考文献

[1] Terry J Lyons. 由粗糙信号驱动的微分方程。Revista Matem´atica Iberoamericana，14(2):215–310，1998.[2] Peter K Friz 和 Nicolas B Victoir. 多维随机过程作为粗糙路径：理论与应用。剑桥大学出版社，2010. [3] Alexander M Davie. 由粗糙路径驱动的微分方程：一种通过离散近似实现的方法。Applied Mathematics Research eXpress，2008，2008.[4] Peter Friz 和 Nicolas Victoir. 粗糙微分方程的欧拉估计。微分方程杂志，244(2):388–412，2008.[5] Antoine Lejay 和 Nicolas Victoir. 关于 (p, q)-粗糙路径。微分方程杂志，225(1):103–133，2006.[6] Lajos Gergely Gyurk´o. 由 Π-粗糙路径驱动的微分方程。爱丁堡数学学会会刊，59(3):741–758，2016.[7] Horatio Boedihardjo 和 Ilya Chevyrev. 分支粗糙路径与几何粗糙路径之间的同构。Annales de l'Institut Henri Poincar´e，概率与统计，55(2):1131–1148，2019.

[8] Danyu Yang. 分支粗糙微分方程的余项估计。概率电子通信，27:1–12，2022.[9] Carlo Bellingeri. 准几何粗糙路径与粗变量替换公式。Annales de l’Institut Henri Poincar ´e B，即将出版，2022.[10] Keisuke Hara 和 Masanori Hino. 分数阶泰勒级数与新古典不等式。伦敦数学会通报，42(3):467–477，2010.[11] Horatio Boedihardjo、Terry Lyons 和 Danyu Yang. 受控微分方程的一致阶乘衰减估计。概率电子通信，20:1–11，2015.
[12] Christophe Reutenauer. 自由李代数。克拉伦登出版社，牛津，1993.
[13] D Kershaw. 伽马函数不等式的一些推广。计算数学，41(164):607–611，1983.