arXiv:2301.07937v1 [math.FA] 19 Jan 2023

最大范数汉克尔算子

OLE FREDRIK BREVIG 和 KRISTIAN SEIP

摘要。哈代空间 H^2 上的单位圆汉克尔算子 $\mathbf{H}_\varphi$，若其解析符号为 φ，则当 $\|\mathbf{H}_\varphi\| = \|\varphi\|_2$ 时具有最小范数；当 $\|\mathbf{H}_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$时具有最大范数。汉克尔算子 $\mathbf{H}_\varphi$ 同时具有最小范数和最大范数，当且仅当 $|\varphi|$ 在单位圆上几乎处处为常数，等价地，当且仅当 φ 是某个内函数的常数倍。我们证明，若 $\mathbf{H}_\varphi$ 达到范数且具有最大范数，则 $\mathbf{H}_\varphi$ 具有最小范数。若 $|\varphi|$ 连续但非常数，则 $\mathbf{H}_\varphi$ 具有最大范数，当且仅当满足 $|\varphi| = \|\varphi\|_\infty$ 的点集与 φ的内因子的谱有非空交集。我们还得到进一步结果，说明一般而言，最大范数的情形与 $\log|\varphi|$ 或 φ 的辐角在 $|\varphi|$的某个“最大值点”附近的“不规则”行为有关。文中还讨论了在前一种情形中某些称为顶点 Helson–Szeg˝o 权的正函数所起的作用。

1. 引言

本文与其前篇 [2] 均源于一个愿望：理解经典情形下，即复平面的单位圆 $\mathbb{T}$ 上汉克尔算子的基本范数估计中等号成立的情形。按照惯例，我们赋予 $\mathbb{T}$归一化的勒贝格弧长测度，并将哈代空间 H^p 定义为：对$1 \le p \le \infty$ 而言，它是 $L^p = L^p(\mathbb{T})$ 中由傅里叶系数支集包含于 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 的函数构成的子空间。为定义汉克尔算子，令 $\overline{H^2}$表示 L^2 中由 H^2 内函数的复共轭构成的子空间，并令 P 和 $\overline{P}$ 分别表示从 L^2 到H^2 和 $\overline{H^2}$的正交投影。每个符号 φ 属于 H^2，都会诱导一个（稠密定义的）汉克尔算子

$$\mathbf{H}_\varphi f := \overline{P}(\overline{\varphi} f) \tag{1}$$

从 H^2 到 $\overline{H^2}$。显然，

$$\|\varphi\|_2 \le \|\mathbf{H}_\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty, \tag{2}$$

我们的问题是根据 φ 的函数论性质，确定这两个范数估计中等号成立的情形。若下界在 (2) 中取到，则称汉克尔算子$\mathbf{H}_\varphi$ 具有最小范数；若上界在 (2) 中取到，则称其具有最大范数。

如果函数 I 在 H^2 中满足：在 $\mathbb{T}$上几乎处处有内函数 $|I| = 1$，则称其为内函数。显然，$\mathbf{H}_\varphi$ 同时具有最小范数和最大范数，当且仅当 $\|\mathbf{H}_\varphi\|_2 = \|\mathbf{H}_\varphi\|_\infty$。后一个等式等价于断言：$|\varphi|$ 在 $\mathbb{T}$上几乎处处为常数，或者等价地，$\varphi = CI$，其中 C 为常数，I为内函数。最小

日期：2023年1月20日。2020 数学主题分类。主要分类 47B35。次要分类 30H10。Seip 的研究得到挪威研究理事会 275113号拨款的支持。

范数汉克尔算子最近由第一作者进行了研究，并得到了以下结果。

定理1 ([2, 定理 1])。 若$\mathbf{H}_\varphi$ 具有最小范数，则$\mathbf{H}_\varphi$ 具有最大范数。

如果存在单位球面上的函数g ，使得 $\|\mathbf{H}_\varphi\| = \|\mathbf{H}_\varphi g\|_2$，我们就称汉克尔算子$\mathbf{H}_\varphi$ 达到范数。为将我们的结果置于背景之中，我们先给出以下观察。其证明与 Adamjan、Arov 和 Kreĭn 的一个结果类似（见 [1] ，例如 [7, 定理1.4]）。

定理 2. 若$\mathbf{H}_\varphi$ 达到范数且具有最大范数，则$\mathbf{H}_\varphi$ 具有最小范数。

由于紧算子达到范数，由 Hartman 定理 [4] 以及 Sarason 的一个结果 [8, 定理 1 (iv)] 可知，若符号 φ 具有消失平均振荡，则$\mathbf{H}_\varphi$ 达到范数。特别地，若 φ 在 $\mathbb{T}$上连续，且$\mathbf{H}_\varphi$ 具有最大范数，则 $\varphi = CB$ 等于某个常数 C 与有限Blaschke乘积 B的乘积。若 $\varphi = CI$ 等于某个常数 C 与内函数 I的乘积，则$\mathbf{H}_\varphi$ 显然达到范数，且 $g = I$。关于生成达到范数的汉克尔算子的符号的描述，参见 [9] 。

鉴于上述初步讨论，接下来需要找出那些不是最小范数汉克尔算子的最大范数汉克尔算子。本文的主要目的是开启对这类算子的研究。

我们首先借助尼哈里定理 [6], ，将问题改写为函数论术语，该定理指出

$$\|\mathbf{H}_\varphi\| = \inf_{\psi \in L^\infty} \left\{ \|\psi\|_\infty : P\psi = \varphi \right\} \tag{3}$$

对于每个符号 φ ，都有 H^2。令 H^∞_0表示 H^∞ 中在原点消失的函数所构成的子空间。由 (3) 可知，$\mathbf{H}_\varphi$ 具有最大范数，当且仅当

$$\|\varphi\|_\infty = \inf_{f \in H^\infty_0} \|\varphi - \overline{f}\|_\infty. \tag{4}$$

若 (4) 成立，我们就称 φ 是饱和的。陈述我们的结果前，需要引入一些术语。有界函数 φ 的超水平集和次水平集分别定义为

$$L^+_\varphi(\delta) := \left\{ e^{i\theta} \in \mathbb{T} : |\varphi(e^{i\theta})| \geq \|\varphi\|_\infty \delta \right\},$$
$$L^-_\varphi(\delta) := \left\{ e^{i\theta} \in \mathbb{T} : |\varphi(e^{i\theta})| < \|\varphi\|_\infty \delta \right\},$$

其中 $0 \leq \delta \leq 1$。照例，我们将 φ 分解为 $\varphi = \Phi I$，其中 I 是内函数， Φ 是由 $|\varphi|$ 在 $\mathbb{T}$ 上的取值所确定的外函数（见下文 (13)）。注意，$L^\pm_\varphi = L^\pm_\Phi$ ，因为 $|I| = 1$ 几乎处处成立于 $\mathbb{T}$上。回顾一下，内函数 I可写成 $I = BS$，其中 B 是布拉施克乘积， S 是奇异内函数。以下将 I的谱记作 $\sigma(I)$，它是 $\mathbb{T}$的子集，定义为 B 的零点的聚点与和 S相关联的奇异测度的支集之并。

到目前为止，我们已经看到， H^∞ 中具有常模的函数总是饱和的；而 H^∞ 中在 $\mathbb{T}$上具有消失平均振荡的函数，当且仅当它们具有常模时才是饱和的。根据 Sarason [8,的定理（定理 3], ），判断 φ 是否具有消失平均振荡的一个简单标准是： $|\varphi|$ 在闭单位圆盘上连续。特别要注意的是，在这种情况下， $\sigma(I) = \emptyset$。

我们的第二个结果如下，它完整刻画了H^∞ 中在 $\mathbb{T}$上连续但不具有常模的饱和函数。

定理 3. 设 $\varphi = \Phi I$ 是 H^∞ 中的函数，且 $|\varphi|$ 在 $\mathbb{T}$上连续但不是常数。那么，当且仅当 $L^+_\Phi(1) \cap \sigma(I) \neq \emptyset$时， φ 是饱和的。

不难构造出 H^∞ 中的饱和函数示例，它们并非定理 3 中的 $\varphi = CI$ 形式。最简单的可能形式之一是 $\varphi = \Phi I$，因为

$$\Phi(z) = 1 + z \qquad \text{and} \qquad I(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

显然， $L^+_\Phi(1) \cap \sigma(I) = \{1\}$，因此由定理 3 可知 $\|H_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty = \|\Phi\|_\infty = 2$。

定理 3 是两个一般结果的推论，其中第一个结果如下。

定理 4. 设 $\varphi = \Phi I$ 属于 H^∞。若对每个 $0 < \delta < 1$， $L^+_\Phi(\delta)$ 的内部与 $\sigma(I)$有非空交集，则 φ 是饱和的。

在陈述下一个结果之前（它是定理 4 的一个部分逆命题），我们回顾一下：若正函数 w 在 $\mathbb{T}$ 上满足

$$w = \exp(u + \tilde{v}), \tag{5}$$

其中 u 和 v 属于 L^∞，且 $\|v\|_\infty < \pi/2$。在 (5) 中以及下文中， $\tilde{v}$ 表示 v的共轭函数。在我们的问题中，只需在 $|\varphi|$ 接近 $\|\varphi\|_\infty$的点上对 v 作出界定。因此，我们作如下定义：若有某个 $0 < \delta < 1$ 使得有界函数 w 满足顶端 ***Helson–Szeg˝o*** 权重 的条件

$$w = \exp(u + v), \tag{6}$$

其中 u 属于 L^∞， v 属于 L^1，并且

$$\operatorname*{ess\,sup}_{L^+_w(\delta)} |\tilde{v}| < \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

注意，从 (5) 到 (6) 时，我们将 $\tilde{v}$ 改成了 v，因为现在对 w 的全局条件仅仅是要求 $\log w$ 可积。显然，普通的有界 Helson–Szeg˝o 权重也是顶端 Helson–Szeg˝o 权重，但反之则远非如此。例如，当 w 是顶端 Helson–Szeg˝o 权重时，$\log w$ 可能不具有有界平均变差。若要说明估计 (7) 对哪些 $0 < \delta < 1$ 成立，我们称 w 是顶端 ***Helson–Szeg˝o*** 水平 δ权重。

定理 5. 假设 $\varphi = \Phi I$ 属于 H^∞，并且存在某个 $0 < \delta < 1$，使得

(i) $|\varphi|$ 是水平为 δ 的顶点 ***Helson–Szeg˝o*** 权；

(ii) $L^-_\Phi(\delta)$ 的内部非空，且包含 $\sigma(I)$。

那么 φ 不是饱和的。

定理 5 的条件 (i) 实质上要求 $|\varphi|$ 在其接近最大值的点附近与 0 保持一定距离。不过，非消失性的精确程度可能远不如通常的 Helson– Szeg˝o 权重那样严格，下面我们将举例说明。

我们的最后一个定理揭示了一种在 $|\varphi|$ 的最大值点附近的消失方式，它确实能保证 φ 饱和。在这一结果中，我们用记号 $\Gamma(\vartheta)$ 表示弧 $\Gamma(\vartheta) \coloneqq \{e^{i\theta} : |\theta| \le \vartheta\}$，其中 $0 < \vartheta \le \pi$。

定理 6. 设 φ 是 H^∞ 中的一个函数，满足

$$\lim_{\vartheta \to 0^+} \operatorname*{ess\,sup}_{\Gamma(\vartheta) \cap L^-_\varphi(1)} |\varphi| = 0 \tag{8}$$

并且存在一个序列 $(\vartheta_n)_{n \ge 1}$，其中 $\vartheta_n \to 0^+$，满足

$$|\Gamma(\vartheta_n) \cap L^-_\varphi(1)| \ge a|\Gamma(\vartheta_n)| \qquad and \qquad |\Gamma(\vartheta_n) \cap L^+_\varphi(1)| \ge b|\Gamma(\vartheta_n)| \tag{9}$$

其中正数常数为 a 和 b。那么 φ 是饱和的。

可以将定理 6 看作定理 4 的对应结果：论证中的不连续性（由 $\sigma(I)$ 中的一个点表示）被 $\log|\varphi|$ 中一种特定的不连续性所取代。然而遗憾的是，这种对应关系还只是初步的；例如，对于仅在一点不连续的饱和外函数，我们远未能给出完整的描述。

下一节给出上述结果的证明，论文的第三节也是最后一节则简要讨论了在 H^∞ 中研究饱和函数可能采取的后续步骤。

2. 证明

为证明定理 2，我们记录柯西–施瓦茨不等式及 (2) 中上界的以下推论。若 φ 是 H^∞ 中的非零函数，且 g 属于 H^2的闭单位球，则函数

$$f \coloneqq \|\varphi\|_\infty^{-1} \, g\,\overline{\mathbf{H}_\varphi g}$$

属于 H^1的闭单位球。

定理 2 的证明。 不失一般性，假设 $\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty \neq 0$。若 $\mathbf{H}_\varphi$ 达到范数且具有最大范数，则存在 g 属于 H^2 的单位球面，使得

$$\|\varphi\|_\infty^2 = \|\mathbf{H}_\varphi\|^2 = \|\mathbf{H}_\varphi g\|_2^2 = \langle \mathbf{H}_\varphi g, \mathbf{H}_\varphi g\rangle = \langle \overline{\varphi} g, \mathbf{H}_\varphi g\rangle = \langle g\overline{\mathbf{H}_\varphi g}, \varphi\rangle, \tag{10}$$

这里用到了 (1) 中$\mathbf{H}_\varphi$ 的定义。由于 g 是 H^2中的非零函数，且$\mathbf{H}_\varphi g$ 是 $\overline{H^2}$中的非零函数，因此我们发现 $f = \mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty^{-1} g \mathbf{H}_\varphi g$ 是 H^1闭单位球中的非零函数。由此以及 (10) 可得

$$\|\varphi\|_\infty = \langle f, \varphi\rangle \le \|f\|_1 \|\varphi\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty,$$

这意味着 $\mathrm{h}f, \varphi\mathrm{i} = \mathrm{k}f\mathrm{k}_1\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty$。由于 f是 H^1中的非平凡函数，因此它只能在 $\mathbb{T}$ 的一个零测度子集上消失。这意味着 $\varphi = \mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty f|f|^{-1}$几乎处处成立于 $\mathbb{T}$ 上，进而有 $\varphi = CI$，其中 $C \neq 0$ 为常数， I为内函数。因此 $\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_2 = \mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty$，故$\mathbf{H}_\varphi$ 具有最小范数。□

由于定理 3 依赖于定理 4 和定理 5，我们将先证明后两条结果。在证明定理 4 之前，我们先回顾一些关于哈代空间中的函数跨越 $\mathbb{T}$解析延拓的结果（例如见 [3, 第 II 节6]）。设 f 是 H^1 中的一个函数，且Γ 是 $\mathbb{T}$上的一个开弧。若 f 可跨越 Γ解析延拓，则其内因子 I 和

其外因子 F 也可跨越 Γ解析延拓。此外，内函数 I 在 $\mathbb{T}$ 上不与谱 $\sigma(I)$相交的每个开弧 Γ 上都可解析延拓。

定理 4 的证明。我们用反证法，并假设存在某个f 属于 H_0^∞，使得 $\|\varphi - \overline{f}\|_\infty < \|\varphi\|_\infty$。这个不等式的左边显然非零，因此存在某个 $0 < \varepsilon < 1$，使得

$$\|\varphi - \overline{f}\|_\infty = \varepsilon \|\varphi\|_\infty. \tag{11}$$

我们取 $\delta := (1+\varepsilon)/2$。由于假设 $L^+_\Phi(\delta)$的内部与 $\sigma(I)$有非空交集，因此在 $L^+_\Phi(\delta)$中存在一个开弧 Γ，它与 $\sigma(I)$有非空交集。根据定义，我们知道 $|\varphi| \geq \delta\|\varphi\|_\infty$ 在 Γ 上成立，因此由 (11) 可得，几乎处处在 Γ上有 $|f| \geq (1-\varepsilon)/2\|\varphi\|_\infty$。显然，$\|f\|_\infty \leq (1+\varepsilon)\|\varphi\|_\infty$也成立。展开 $|\varphi - \overline{f}|^2$ 并利用这些估计，由 (11) 可推出

$$|\operatorname{Arg} \varphi f| \leq \arccos \frac{1-\varepsilon}{4} < \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

几乎处处于 Γ上。令 ν 为单位圆盘内由边界值定义的调和函数

$$\nu := \begin{cases} -\operatorname{Arg} \varphi f, & \text{on } \Gamma; \\ 0, & \text{on } \mathbb{T} \setminus \Gamma. \end{cases}$$

函数 $g := \exp(-\tilde{\nu} + i\nu)$在单位圆盘内解析，并且由于（12），它将单位圆盘映射到右半平面内的一个锥形区域。因此，g 属于 H^1。根据构造，外函数 H^1 函数 $h := \varphi f g$ 在 Γ上为正，因此它可解析延拓穿过该弧（参见例如 [3, 引理 IV.1.10]）。特别地，h 的内因子可解析延拓穿过 Γ。这意味着 φ的内因子 I 也可解析延拓穿过 Γ，因为$I(\sigma)$是 h的内因子谱的子集。由此我们得到了矛盾，因为$I(\sigma)$与 Γ有非空交集。□

回想一下（例如参见 [3, 第 II.5]节），$\varphi = \Phi I$ 的外因子可以由 φ 在 $\mathbb{T}$ 上的模通过以下公式恢复

$$\Phi(z) = \exp\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log|\varphi(e^{i\theta})| \, \frac{d\theta}{2\pi} \right). \tag{13}$$

特别地，如果 $|\Phi| = |\varphi|$ 是 Helson–Szeg˝o 权，那么由 (5) 和 (13) 可得 $\Phi = \exp(u + i\tilde{u} + \tilde{v} - iv)$，其中 u 和 v 属于 L^∞，且 $\|v\|_\infty < \pi/2$。类似地，如果 $|\Phi| = |\varphi|$ 是在水平 δ上的顶点型 Helson–Szeg˝o 权，那么由 (6) 和 (13) 可得 $\Phi = \exp(u + i\tilde{u} + v + i\tilde{v})$，其中 u 属于 L^∞，且 $\tilde{v}$ 满足 (7)。

定理 5 的证明。 我们的任务是构造一个函数 f，使其属于 H_0^∞，满足

$$\|\varphi - \overline{f}\|_\infty < \|\varphi\|_\infty. \tag{14}$$

为了满足 f 属于 H_0^∞这一要求，我们考虑形如$f(z) = zg(z)$的函数，其中 g 属于 H^∞。函数 g 将由两个因子构成，分别来自 $\varphi = \Phi I$的内因子和外因子。我们先考虑 I。根据假设，存在某个 $0 < \delta < 1$，使得 $\sigma(I)$是$L^-_\Phi(\delta)$内部的子集。由于后者是非空开集，它可以表示为若干开弧的并。由 $\sigma(I)$的紧致性，我们可以选取有限个这样的弧，使其覆盖 $\sigma(I)$。令 Γ 表示这些弧的并，我们便可以定义其辐角

$h(z) := zI(z)$，使其在 $\mathbb{T}\setminus\Gamma$上成为 C^∞ 函数。因此，由于 Γ 是有限个开弧的并，我们可以在 $\mathbb{T}$ 上找到一个 C^∞ 函数 ν，使得

$$\nu = -\arg h$$

在 $\mathbb{T}\setminus\Gamma$ 上。由于 ν 是光滑的，函数 $g_1 := \exp(-\tilde{\nu} + i\nu)$ 属于 H^∞，且 $|g_1|$ 在 $\mathbb{T}$ 上有下界。对于 φ 的外因子部分，我们假设 $|\Phi|$ 是水平为 δ 的顶点型 Helson–Szeg″o 权，并选择 $g_2 := \exp(-u - i\tilde{u})$。由于 u 属于 L^∞，可知 g_2 属于 H^∞，且 $|g_2|$ 在 $\mathbb{T}$ 上有下界。令

$$f := \varepsilon z g_1 g_2,$$

对某个 $\varepsilon > 0$ 成立。若 $\varepsilon \le (1-\delta)\|\varphi\|_\infty/(2\|g_1\|_\infty\|g_2\|_\infty)$，则 $|\varphi - \overline{f}| \le (1+\delta)/2\,\|\varphi\|_\infty$ 在 $L^-_\Phi(\delta)$ 上。反过来，由于 $L^+_\Phi(\delta)$ 包含于 $\mathbb{T}\setminus\Gamma$，我们有

$$\left|\varphi - \overline{f}\right| = \left||\varphi| - \varepsilon e^{-i\tilde{v}}|g_1||g_2|\right|$$

根据构造，在 $L^+_\Phi(\delta)$ 上。利用 (7) 以及 $|g_1|$ 和 $|g_2|$ 在 $\mathbb{T}$ 上都有下界这一事实，可知存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得 $|\varphi - \overline{f}| < \|\varphi\|_\infty$ 在 $L^+_\Phi(\delta)$ 上几乎处处成立。结合 $L^-_\Phi(\delta)$ 上和 $L^+_\Phi(\delta)$ 上的估计，可得 (14) 成立。□

以下这个判定权函数为顶点型 Helson–Szeg″o 权函数的充分条件，或许本身也有一定的研究价值。我们主要将在定理 3 的证明中应用它。

引理 7. 设 w 是单位圆上的有界正函数，且对数 w 可积，并固定 $0 < \delta < 1$。若存在一个 ε 属于 $(0,\delta)$，使得

$$\operatorname{dist}\left(L^+_w(\delta), L^-_w(\varepsilon)\right) > 0, \tag{15}$$

那么 w 是水平为 δ 的顶点型 *Helson–Szeg″o* 权函数。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\|w\|_\infty = 1$。令

$$u_R := \max(\log w, -R) \qquad \text{and} \qquad v_R := R + \min(\log w, -R)$$

对 $R > 0$。注意，对每个固定的 R，u_R 属于 L^∞。由于 $\log w$ 可积，显然，对每个固定的 R，v_R 属于 L^1，并且当 $R \to \infty$时，$\|v_R\|_1 \to 0$。令 $E_R := \{\theta \in [-\pi,\pi] : e^{i\theta} \in L^-_w(e^{-R})\}$。根据 v_R 的定义，我们得到

$$\tilde{v}_R(e^{it}) = \text{p.v.}\int_{E_R} \cot\left(\frac{t-\theta}{2}\right) v_R(e^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

我们取 R 充分大，使得 $e^{-R} \le \varepsilon$。由此可知，存在一个常数 $C > 0$，它仅取决于 (15) 中的距离，使得在 $L^+_w(\delta)$ 上有 $|\tilde{v}_R| \le C\|v_R\|_1$。将 $w = \exp(u_R + v_R)$ 写作 R，其中 R 充分大，我们看到 w 是水平为 δ的顶点型 Helson–Szeg″o 权。□

定理 *3* 的证明。我们首先注意到，若 $L^+_\Phi(1)\cap\sigma(I) \neq \emptyset$，则定理 4 适用，因此 φ 是饱和的。另一方面，若 $L^+_\Phi(1)\cap\sigma(I) = \emptyset$，则利用 $|\Phi| = |\varphi|$ 的连续性以及 $\sigma(I)$ 的闭性，可以推知存在一个 $0 < \delta < 1$，使得我们还有 $L^+_\Phi(\delta)\cap\sigma(I) = \emptyset$。由于假设 $|\Phi|$ 不是常数，我们还可以假设 $L^-_\Phi(\delta)$ 非空。由 $|\Phi|$ 的连续性可知，$L^-_\Phi(\delta)$ 本身是一个开集，且包含 $\sigma(I)$。因此，为了应用定理 5，剩下只需验证 $|\Phi|$ 是水平 δ 上的一个顶点 Helson–Szeg″o 权。然而，这由 $|\Phi|$ 的连续性和引理 7 立即可得。□

证明定理 6 需要两个预备结果。第一个是以下由 (4) 直接推出的结论。

引理8. 如果 φ 是饱和的，那么对于任意内函数 I， $I\varphi$ 也饱和。

证明。假设 $I\varphi$ 不是饱和的。那么存在函数 f 属于 H_0^∞，使得 $\mathrm{k}I\varphi - \overline{f}\mathrm{k}_\infty < \mathrm{k}I\varphi\mathrm{k}_\infty$。然而，这等价于 $\mathrm{k}\varphi - \overline{If}\mathrm{k}_\infty < \mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty$，因此$\varphi$ 不是饱和的。□

第二个预备结果由 Muckenhoupt定理 [5] 得出。

引理 9. 设 w 是 *Helson–Szeg˝o* 权重。则存在一个正数常数C 和 $1 < p < 2$，使得

$$\int_\Gamma w \le C\frac{|\Gamma|^p}{|E|^p}\int_E w,$$

对于每条弧 Γ 和每个可测集 $E \subseteq \Gamma$。

证明。 由于 w 是 Helson–Szeg˝o 权，或者等价地说，是一个 (A_2) 权，我们知道 w 满足某个 $1 < p < 2$ 对应的 (A_p) 条件（参见例如 [3, Cor. VI.6.10 (b)]）。对函数 χ_E应用 Muckenhoupt定理（参见 [5] 或例如 [3, Thm. VI.6.1]），即可得到所述结果。□

在定理 6 的证明中，我们将多次用到引理 9。不过，只有在最后一次应用时，我们才需要使用某个 $1 < p < 2$ 对应的 (A_p) 条件，而不能仅使用 (A_2) 条件。在定理 6 的证明中，我们将在局部采用记号 $f \ll g$，这表示存在一个正数常数B，使得对所有相关的 x，都有 $|f(x)| \le Bg(x)$。常数 B 可以依赖于 φ。

定理 *6* 的证明。 根据引理8，只需考虑 φ 是外函数的情形。我们用反证法，假设存在某个 f 属于 H_0^∞，以及某个 $0 < \varepsilon < 1$，使得

$$\|\varphi - \overline{f}\|_\infty = \varepsilon\|\varphi\|_\infty.$$

与定理 4 的证明中一样，可得

$$|f| \ge (1-\varepsilon)\|\varphi\|_\infty \qquad \text{and} \qquad |\operatorname{Arg}(\varphi f)| \le \arccos\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) < \frac{\pi}{2}$$

在 $L^+_\varphi(1)$ 上几乎处处成立。此外，如果

$$\nu := \begin{cases} -\operatorname{Arg}(\varphi f), & \text{on } L^+_\varphi(1);\\ 0, & \text{on } L^-_\varphi(1), \end{cases}$$

那么 $g := \exp(-\tilde{\nu} + i\nu)$ 属于 H^1。显然，由 (5) 可知，$|g|$ 是一个 Helson–Szeg˝o 权，且 H^1 函数 $h := \varphi f g$在 $L^+_\varphi(1)$ 上为正。由于 f属于 H_0^∞，我们知道$h(0) = 0$。因此，我们可以写成 $h = u + iv$，其中 $u = -\tilde{v}$。

接下来，我们设

$$E_n := \Gamma(\vartheta_n) \cap L^{-1}_\varphi(1) \qquad \text{and} \qquad F_n := \Gamma(\vartheta_n) \cap L^+_\varphi(1)$$

并断言

$$\int_{E_n} |u| \ll \operatorname*{ess\,sup}_{E_n} |\varphi| \int_{F_n} |u|. \tag{16}$$

为验证这一点，我们首先使用平凡估计 $\mathrm{k}f\mathrm{k}_\infty \le (1+\varepsilon)\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty \le 2\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty$，可得

$$|u| \le |h| = |\varphi f g| \le \left(\operatorname*{ess\,sup}_{E_n} |\varphi|\right) 2\|\varphi\|_\infty |g| \tag{17}$$

关于 E_n。接下来，我们利用 E_n 是 $\Gamma(\vartheta_n)$ 的子集这一事实，然后针对 $\Gamma(\vartheta_n)$ 的子集 F_n 应用引理 9，从而推得

$$\int_{E_n} |g| \le \int_{\Gamma(\vartheta_n)} |g| \ll \int_{F_n} |g| \le \frac{1}{(1-\varepsilon)\|\varphi\|_\infty^2} \int_{F_n} |u|. \tag{18}$$

这里我们用到了 (9) 中的假设 $|F_n| \ge b|\Gamma(\vartheta_n)|$；在最后的估计中，还用到了 $|h| \ge (1-\varepsilon)\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty^2 |g|$ 几乎处处成立于 $L^+_\varphi(1)$ 上，以及 $h = u$ 在 $L^+_\varphi(1)$ 上成立。现在，(16) 由 (17) 和 (18) 得出。

接下来我们断言，如果 n 足够大，t hen

$$\int_{F_n} |u| \ll \int_{E_n} |u|. \tag{19}$$

如果我们能够证明 (19)，那么就大功告成了，因为 (16) 和 (19) 合在一起与假设 (8) 矛盾。（注意，对于每个固定的 $n \ge 1$，(19) 的左边都不为零，因为 u 在 F_n 上为正，且 $|F_n| > 0$。）

为证明 (19)，我们先写出 $u = u_0 + u_1$，其中 u_0 是 $-v\chi_{\Gamma(2\vartheta_n)}$ 的共轭函数。由共轭函数的弱型 L^1 估计可得，对于$\lambda > 0$，

$$|\{|u_0| > \lambda\}| \ll \frac{1}{\lambda}\|v\chi_{\Gamma(2\vartheta_n)}\|_1 \le \frac{1}{\lambda}\|h\chi_{\Gamma(2\vartheta_n)\cap L^{-1}_\varphi(1)}\|_1, \tag{20}$$

其中我们先用到了 $v \equiv 0$ 在 $L^+_\varphi(1)$ 上成立，随后用到了 $|v| \le |h|$。按照上文证明 (16) 时所用的同一论证，我们接下来得到

$$\|h\chi_{\Gamma(2\vartheta_n)\cap L^{-1}_\varphi(1)}\|_1 \ll \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\Gamma(2\vartheta_n)\cap L^-_\varphi(1)} |\varphi|\right) \int_{F_n} |u|. \tag{21}$$

由 (8)，我们可以选取足够大的 n，使得 (21) 中的本性上确界任意小。特别地，我们取足够大的 n，使得 (20) 和 (21) 合起来给出

$$|\{|u_0| > \lambda\}| \le \frac{\min(a,b)}{2\pi\lambda} \int_{F_n} |u|. \tag{22}$$

令 $\lambda_n := c\vartheta_n^{-1}\int_{F_n}|u|$，其中 $c > 0$ 是一个稍后选定的常数，并将 (22) 与 (9) 中的估计 $|F_n| \ge b\vartheta_n/\pi$ 结合，便可推出

$$|F_n \cap \{|u_0| \le \lambda_n\}| \ge b\vartheta_n/(2\pi). \tag{23}$$

利用 $|u| \ge (1-\varepsilon)\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty^2 |g|$ 在 $L^+_\varphi(1)$ 上几乎处处成立，然后应用引理 9，并 d (23)，最后由 $\mathrm{k}u\mathrm{k}_\infty \le 2\mathrm{k}\varphi\mathrm{k}_\infty^2 |g|$，我们得到

$$\int_{F_n\cap\{|u_0|\le\lambda_n\}} |u| \gg \int_{\Gamma(\vartheta_n)} |g| \ge \int_{F_n} |g| \gg \int_{F_n} |u|. \tag{24}$$

令 C 表示不等式链 (24) 中的总隐含常数；我们强调，该常数不依赖于接下来对 c 的选择。根据估计 $u_1 \ge u - |u_0|$、L^+_φ 上的 $u = |u|$ (1) 这一事实以及 (24)，可得

$$\int_{F_n\cap\{|u_0|\le\lambda_n\}} u_1 \ge \int_{F_n\cap\{|u_0|\le\lambda_n\}} \big(|u| - \lambda_n\big) \ge \left(\frac{1}{C} - c\frac{|F_n \cap \{|u_0| \le \lambda_n\}|}{\vartheta_n}\right) \int_{F_n} |u|.$$

由于 $|F_n| \le |\Gamma(\vartheta_n)| = \vartheta_n/\pi$，我们可以选择 $c \le \pi/(2C)$，以确保

$$\int_{F_n \cap \{|u_0| \le \lambda_n\}} u_1 \ge \frac{1}{2C} \int_{F_n} |u| \tag{25}$$

对所有充分大的 n。下一步是估计 $|t| \le \vartheta_n$ 时的差值 $u_1(e^{it}) - u_1(1)$。令 $I_n := \{2\vartheta_n < |\theta| \le \pi\}$，则有

$$u_1(e^{i\theta}) = -\mathrm{p.v.} \int_{I_n} \cot\left(\frac{t-\theta}{2}\right) v(e^{i\theta}) \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

我们将 I_n 分解为二进区间 $I_{n,\,k} := \{2^k\vartheta_n \le |\theta| \le 2^{k+1}\vartheta_n\}$，其中 $k = 1, 2, \ldots\ldots, K$，并注意到若 $|t| \le \vartheta_n$ 且 θ 属于 $I_{n,\,k}$，则

$$\left|\cot\left(\frac{t-\theta}{2}\right) - \cot\left(\frac{-\theta}{2}\right)\right| \ll \frac{1}{\vartheta_n 2^k}.$$

因此，

$$|u_1(e^{it}) - u_1(1)| \ll \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\vartheta_n 2^k} \int_{\Gamma(2^{k+1}\vartheta_n)} |v|.$$

为了估计此积分，我们首先利用 v 的支集为 $L_\varphi^-(0)$，然后利用 $|v| \le |h|$，可得

$$\int_{\Gamma(2^{k+1}\vartheta_n)} |v| \le 2\|\varphi\|_\infty \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\Gamma(2^{k+1}\vartheta_n) \cap L_\varphi^-(1)} |\varphi|\right) \int_{\Gamma(2^{k+1}\vartheta_n)} |g|.$$

利用引理 9，可得

$$\int_{\Gamma(2^{k+1}\vartheta_n)} |g| \ll \left(\frac{|\Gamma(2^{k+1}\vartheta_n)|}{|F_n|}\right)^p \int_{F_n} |g| \le \left(\frac{2^{k+1}}{b}\right)^p \frac{1}{(1-\varepsilon)\|\varphi\|_\infty^2} \int_{F_n} |u|.$$

结合这些估计，我们得到

$$|u_1(e^{it}) - u_1(1)| \ll \left(\frac{1}{\vartheta_n} \int_{F_n} |u|\right) \sum_{k=1}^{K} 2^{k(p-2)} \operatorname*{ess\,sup}_{\Gamma(2^{k+1}\vartheta_n) \cap L_\varphi^-(1)} |\varphi|.$$

当 $n \to \infty$ 时，该和趋于 0；例如，利用 (8) 对 $2^{k+1}\vartheta_n \le \sqrt{\vartheta_n}$ 即可看出这一点。因此我们可以假设

$$|u_1(e^{it}) - u_1(1)| \le \frac{\pi}{8C\vartheta_n} \int_{F_n} |u|$$

对于 $|t| \le \vartheta_n$，以及所有充分大的 n，其中 C 是 (25) 中的常数。将此估计代入 (25)，并利用 $|F_n| \le \vartheta_n\pi$，我们得到

$$u_1(1) \ge \frac{3\pi}{8C\vartheta_n} \int_{F_n} |u| \qquad \text{and} \qquad u_1(e^{it}) \ge \frac{\pi}{4C\vartheta_n} \int_{F_n} |u|$$

对于 $|t| \le \vartheta_n$，以及所有充分大的 n。最后，我们在 λ_n 的定义中选取 $c = \pi/(8C)$，以确保

$$\int_{E_n} |u| \ge \int_{E_n \cap \{|u_0| \le \lambda_n\}} |u| \ge \int_{E_n \cap \{|u_0| \le \lambda_n\}} \frac{u_1}{2} \ge \frac{a}{16C} \int_{F_n} |u|.$$

在最后的估计中，我们还用到了 $|E_n \cap \{|u_0| \le \lambda_n\}| \ge a\vartheta_n/(2\pi)$，这一点可由 (9) 和 (22) 得出，与上文证明 (23) 的方式类似。至此，(19) 的证明完成。□

3. 结论

尽管我们未能完整描述 H^∞ 中的饱和函数，但本文最后想提出两个可能更易处理的问题。

问题 1. 描述 H^∞ 中饱和的外函数。

根据定理 4，若存在 $0<\delta<1$，使得 $|\varphi|$ 是水平为 δ 的顶点型 Helson–Szeg″o 权，且 $L^-_\varphi(\delta)$ 的内部非空，则外函数 φ 不饱和。自然会想到，若 φ 不饱和，这两个条件中是否也有必要条件；如果有，是哪一个?

无论如何，深入理解顶点型 Helson–Szeg″o 权是值得的。我们将通过给出定理 4 下方提及的例子，引出第二个关于这类权的问题。为此，设 U 是 $\mathbb{T}$ 的一个开子集，且满足 $0<|U|<1$。那么 U 是有限个或可数个两两不相交的开弧之并

$$U=\bigcup_{n\geq 1}\Gamma_n.$$

对于 $0<\varepsilon\leq 1$，我们令 $\varepsilon\Gamma_n$ 表示与 Γ_n 同心、满足 $|\varepsilon\Gamma_n|=\varepsilon|\Gamma_n|$ 的开弧。若满足以下条件，我们称 U 是稀疏的

$$\sup_{e^{i\theta}\in\mathbb{T}\setminus U}\sum_{n\geq 1}\frac{|\Gamma_n|}{\operatorname{dist}\left(e^{i\theta},\frac{1}{2}\Gamma_n\right)}<\infty. \tag{26}$$

例如，当且仅当 $b<1/2$ 时，集合 $\bigcup_{n\geq 1}\left\{e^{i\theta}:\ \ 2^{-n}<\theta<2^{-n}+ab^n\right\}$ 对于 $0<a\leq 1$ 和 $0<b\leq 1/2$ 是稀疏的。

令 $e^{i\theta_n}$ 为 Γ_n 的中点。对于正数 κ，我们定义权

$$w_\kappa(e^{i\theta}):=\begin{cases}\left(\frac{|\theta-\theta_n|}{\pi|\Gamma_n|}\right)^\kappa, & e^{i\theta}\in\Gamma_n;\\ 1, & e^{i\theta}\in\mathbb{T}\setminus U.\end{cases}$$

我们作两点观察。首先，在最有趣的情形下，也就是存在无穷多个弧 J_n 时，我们有

$$\operatorname{dist}\left(L^+_w(\delta),L^-_w(\varepsilon)\right)=0$$

对所有 $0<\delta<\varepsilon<1$ 都成立，因此引理 7 无济于事。其次，显然，w_κ 是 Helson–Szeg″o 权，当且仅当 $0<\kappa<1$。然而，与此相反，我们现在将证明以下结论。

断言。 如果 U 是稀薄的，那么对于每个$\kappa>0$，w_κ 都是水平为 $1/2$ 的顶点 Helson–Szeg″权重。

断言的证明。 存在一个数 $\varepsilon_\kappa>0$，使得如果 $0<\varepsilon\leq\varepsilon_\kappa$，那么对于所有 $n\geq 1$，$\varepsilon\Gamma_n$ 都是 $L^-_w(1/4)$ 的子集。令 $U_\varepsilon:=\bigcup_{n\geq 1}\varepsilon\Gamma_n$，

$$u_\varepsilon:=\begin{cases}0, & \text{on } U_\varepsilon;\\ \log w, & \text{on } \mathbb{T}\setminus U_\varepsilon,\end{cases}$$

以及 $v_\varepsilon:=\log w-u_\varepsilon$。计算可得

$$\int_{\varepsilon\Gamma_n}|v_\varepsilon|\leq C\kappa\varepsilon|\log\varepsilon||\Gamma_n|,$$

其中 C 与 κ 和 ε无关。根据 $\tilde{v}_\varepsilon$ 的定义以及假设 (26) 成立，我们因此得到存在一个常数 C，与 κ 和 ε 无关，使得

$$|\tilde{v}_\varepsilon| \le C\kappa\varepsilon|\log\varepsilon|$$

在 $J_w^-(1/2)$ 上。因此，$w = \exp(u_\varepsilon + v_\varepsilon)$ 是所需的 w 表示，对所有足够小的 ε 均成立。□

上述证明以及引理 7 的证明引出了下面的问题。

问题2。对于所有正数 κ，w 是顶点型 Helson–Szeg˝o 权，当且仅当 w^κ 是顶点型 Helson–Szeg˝o 权，这是否成立?

换言之，我们想知道能否将 (7) 简化为

$$\operatorname*{ess\,sup}_{L_w^+(\delta)} |\tilde{v}| < \infty. \tag{27}$$

特别是，这将意味着，只要 $\log w$ 具有有界平均振荡，w 就是顶点型 Helson–Szeg˝o 权。

有人可能会反驳说，我们可以构造更复杂的例子，在这些例子中，要找到 v 使得（27）式左端任意小，并不那么容易。不过也应当考虑到，在上述两种情形下，我们构造 v 的方法都相当简单。

参考文献

1. V. M. Adamjan、D. Z. Arov 和 M. G. Kreˇın，《无限汉克尔矩阵与广义 Carath*éodory-Fej ´ér ´*问题及 *F. Riesz*》，Funkcional. Anal. i Prilo˘zen. **2** (1968)，第 1 期，1–19。2. O. F Brevig，《最小范数汉克尔算子》，《Proc. Amer. Math. Soc.》**150** (2022)，4383–4391。3. J. B. Garnett，《有界解析函数》，第 1 版，《数学研究生教材》第 236 卷，Springer，纽约，2007。4. P. Hartman，《关于完全连续汉克尔矩阵》，《Proc. Amer. Math. Soc.》**9** (1958)，862–866。5. B. Muckenhoupt，《Hardy极大函数的加权范数不等式》，《Trans. Amer. Math. Soc.》**165** (1972)，207–226。6. Z. Nehari，《关于有界双线性形式》，《Ann. of Math.》(2) **65** (1957)，153–162。7. V. V. Peller，《汉克尔算子及其应用》，《Springer数学专著》，Springer-Verlag，纽约，2003。8. D. Sarason，《消失平均振荡函数》，《Trans. Amer. Math. Soc.》**207** (1975)，391–405。9. T. Yoshino，《范数取到的 Toeplitz 算子与汉克尔算子的结构》，《Nihonkai Math. J.》**13** (2002)，43–55。

数学系，奥斯陆大学，0851奥斯陆，挪威电子邮件地址： obrevig@math.uio.no

数学科学系，挪威科技大学（NTNU），7491 特隆赫姆，挪威电子邮件地址：kristian.seip@ntnu.no