arXiv:2301.07940v1 [math.CA] 19 Jan 2023

希尔伯特型不等式中的最佳常数

OLE FREDRIK BREVIG

摘要。我们证明

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m\overline{a_n}\frac{mn}{(\max(m,n))^3} \leq \frac{4}{3}\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2$$

对每个复数平方可和序列 $a=(a_1,\ a_2,\ .....)$ $4/3$ 都成立，且常数 $4/3$ 不能被任何更小的数取代。我们的证明根植于舒尔 1911 年一篇关于双线性型的开创性论文；为便于阐述，我们还详细介绍了他的方法。

1. 引言

设 $\mathbb{R}_+=(0,\ \infty)$。假设 K 是定义在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 上的函数，具有连续、正、对称的性质，且为 -1次齐次，即满足

$$K(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{-1}K(x,y)$$

对所有 $x,\ y,\ \lambda>0$均成立。我们要研究的问题是，确定使不等式成立的最小实数 $C=C(K)$:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m\overline{a_n}\,K(m,n)\leq C\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2 \tag{1}$$

该不等式对每个由复数构成的平方可和序列 $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots)$都成立。形式如 (1) 的不等式的典型例子是希尔伯特不等式，其核为 $K(x,\ y)=(x+y)^{-1}$。在此情形下，希尔伯特证明了该不等式以常数 $C=2\pi$ 成立，之后舒尔 [9] 证明了最佳常数为 $C=\pi$。因此，形式如 (1) 的不等式通常被称为希尔伯特型不等式。

舒尔实际上证明了一个更一般的结果。我们上面列出的假设中有一处可提示其方法：要求 K 是定义在 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ 上的连续函数，这似乎不太协调，因为在 (1) 中，我们只在正整数对处取其值。舒尔的主要思路是先研究 (1) 的连续类比，再将连续情形化归为离散情形。

为陈述他的结果，我们引入辅助函数

$$k(y)=\frac{K(1,y)}{\sqrt{y}} \tag{2}$$

对于 $0<y<\infty$。当 k 具有某些单调性时，从连续情形到离散情形的约化便可实现。

日期：2023年1月20日。2020 数学主题分类。主要分类26D07。次要分类11B68、40A25。

定理 1（舒尔，1911）。设 K 是一个齐次性为 -1 的连续、正且对称的核，并设 k 如（2）所示。

(a) 若 k 在区间 $(1,\infty)$ 上递减，则

$$C(K) \geq \int_0^\infty k(y)\,dy.$$

(b) 若 k 在区间 $(0,\infty)$ 上递减，则

$$C(K) \leq \int_0^\infty k(y)\,dy.$$

请读者验证，$K(x,y) = (x+y)^{-1}$ 满足定理 1(b)的假设，并检查 $C(K)$ 的积分确实等于 π。

哈代、利特尔伍德和 P´olya [5] 所著的经典专著《不等式》第 IX 章致力于进一步发展舒尔的思想。该书中的定理 318 是 (b) 的推广，而 (a) 则隐含在第 IX.5 节中。然而，作者清楚地认识到舒尔方法的局限性：

> 如果读者尝试用类似的方法从定理 *328* 推导出定理 *331*，就会发现有些困难。从积分过渡到级数时会有所损失，而且最终结果并非总能像这里这样，在不造成损害的情况下完成这一过渡。
>
> 哈代、利特尔伍德和 P´olya [5, p. 249]。

关于定理 1 在各个方向上的扩展和推广，已有大量文献（本文不打算一一列举）；其中一个共同点是，舒尔的方法只需稍作表面上的修改便可奏效。相反，我们将考察一族能够体现上述现象的核，即

$$K_\alpha(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}} \frac{(xy)^\alpha}{(\max(x,y))^{2\alpha}}$$

对于 $0 < \alpha < \infty$。相应地，我们用 $C_\alpha = C(K_\alpha)$ 表示不等式 (1) 在核为 $K = K_\alpha$ 时的最佳常数。由于

$$k_\alpha(y) = \begin{cases} y^{\alpha-1} & \text{if } 0 < y \leq 1, \\ y^{-\alpha-1} & \text{if } 1 < y < \infty, \end{cases}$$

显然，对于所有 $0 < \alpha < \infty$，K_α 满足定理 1(a) 的假设；而仅当 $0 < \alpha \leq 1$ 时，才满足定理 1(b) 的假设。因此，对于所有 $0 < \alpha < \infty$，最佳常数满足 $C_\alpha \geq 2/\alpha$；当 $0 < \alpha \leq 1$ 时，还满足 $C_\alpha = 2/\alpha$。我们感兴趣的是，后一个结论是否对某些 $\alpha > 1$ 也成立。

若 $K = K_\alpha$，则 (1) 的左侧可表示为积分形式

$$\alpha \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_m \overline{a_n}\, K_\alpha(m,n) = \int_{-\infty}^\infty \left| \sum_{m=1}^\infty a_m m^{-\frac{1}{2}-it} \right|^2 \frac{\alpha^2}{\alpha^2+t^2}\,\frac{dt}{\pi}, \tag{3}$$

通过将绝对值展开为双重求和即可证明这一点。类似的公式也可通过梅林变换得到其他希尔伯特型不等式（例如参见 [10, 第 IV 节]）。对于每个固定的平方可和序列 a，(3) 的右端是 α 的递增函数。左端也必然如此，因此函数 $\alpha \mapsto \alpha C_\alpha$ 是递增的。由此可知，如果$C_\alpha \leq 2/\alpha$ 对某个 α成立，那么同一估计对所有 $0 < \beta \leq \alpha$ 也成立。

为了证明 $C_\alpha = 2/\alpha$ 在 $\alpha = 1$之外仍成立，我们将借助舒尔在其开创性论文 [9], 中的另一项创新，即舒尔检验。关于舒尔检验的历史介绍，见 [4, 第 3] 节。最简单的形式下，舒尔检验就是带有未指定权函数的加权柯西–施瓦茨不等式。其策略是先使用这个不等式，再分析由此得到的表达式，并尝试找出一个合适的权函数。遗憾的是，一旦找到合适的权函数，人们往往在写出由此得到的不等式证明时，完全不提权函数是如何找到的。事实上，舒尔本人在 [9] 第 7 节证明定理 1 时，完全没有提及他在同一篇论文第 3 节首次引入的舒尔检验。

因此，本文的首要目标是完整阐述定理 1，并清楚解释如何找到权函数。在分析定理 1(b) 的证明在核 K_α when $\alpha > 1$ 时为何失效之后，舒尔检验进一步引导我们得到关于 $C_\alpha \le 2/\alpha$ 的一个充分条件。最后，我们将利用欧拉–麦克劳林求和证明该条件对 $\alpha = 3/2$ 成立，从而回答本文作者在 [1, 第 5 节2] 中提出的问题。

定理 2。 对于每个平方可和序列 $a = (a_1, a_2, \dots)$ ，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m\overline{a_n}\,\frac{mn}{(\max(m,n))^3} \le \frac{4}{3}\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2$$

且常数 $4/3$ 不能被任何更小的数取代。

根据上文讨论的 $\alpha \mapsto \alpha C_\alpha$ 递增这一事实以及定理 1(a)，我们还可得到以下结论。

推论3。 假设 $0 < \alpha \le 3/2$。对于每个平方可和序列$a = (a_1, a_2, \dots)$ ，有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m\overline{a_n}\,K_\alpha(m,n) \le \frac{2}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|^2$$

且常数 $2/\alpha$ 不能被任何更小的数替代。

推论3改进了本文作者提出的 [1, 定理 1] ，该定理蕴含对于 $0 < \alpha \le \alpha_0 = 1.48\dots$有 $C_\alpha = 2/\alpha$。这里， α_0 表示方程 $\alpha\zeta(1+\alpha) = 2$ 的唯一正解，其中 ζ 是黎曼ζ函数。黎曼ζ函数的出现源于关系式

$$\zeta(1+\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} k_\alpha(n). \tag{4}$$

由于对于每个 $0 < \alpha < \infty$， $K_\alpha(1,\ 1) = k_\alpha(1) = 1$ ，显然 $C_\alpha \ge 1$。因此，一般而言，$C_\alpha = 2/\alpha$ 并不成立。

最后，我们简要提及常数 C_α 的一些有趣性质，以此结束本引言。确定 C_α 等价于一个源自狄利克雷级数的哈代空间上复合算子理论的问题，见[6, 命题 3] 和 [1, 定理 2]。与复合算子的联系立即给出下界 $C_\alpha \ge \zeta(1+2\alpha)$。关于 $C_\alpha = 2/\alpha$的问题，通过 [2, 定理 C], 与某些雅可比矩阵的离散谱相关；而这又通过 [7, 第 5] 节和 [2, 第 5] 节中的材料，与某些复合算子的再生核论题相关。关于狄利克雷级数的哈代空间上复合算子理论的一般介绍，参见 [8, 第 8] 章。

2. 舒尔检验

我们遵循舒尔 [9, 第 2] 页概述的策略，首先考察（1）的连续类比。假设核 K 连续、正、对称，且为 -1次齐次。考虑不等式

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)\overline{f(y)}\,K(x,y)\,dydx \leq B\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx. \tag{5}$$

我们要找出最小常数 $B = B(K)$，使得对定义在 $\mathbb{R}_+$上的每个平方可积复值函数 f，不等式 (5) 都成立。

由于核 K具有对称性和正性，不失一般性，我们可以假设 f 在 $\mathbb{R}_+$上非负。观察 (5) 后，自然会想到这类估计的证明会用到柯西–施瓦茨不等式。一个简单的初步尝试是利用 K 的对称性和正性，写出

$$f(x)f(y)\,K(x,y) = f(x)\sqrt{K(x,y)}\,f(y)\sqrt{K(y,x)}$$

然后应用柯西–施瓦茨不等式。事实证明，这里需要稍微精细一些的方法。下文将把连续函数 $\omega\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 称为权函数 。对于一个未指定的权函数 ω，我们记

$$f(x)f(y)\,K(x,y) = f(x)\sqrt{K(x,y)\frac{\omega(y)}{\omega(x)}}\,f(y)\sqrt{K(y,x)\frac{\omega(x)}{\omega(y)}}. \tag{6}$$

由柯西–施瓦茨不等式和对称性，根据 (5) 和 (6) 可得

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)\overline{f(y)}\,K(x,y)\,dydx \leq \int_0^\infty |f(x)|^2\frac{1}{\omega(x)}\int_0^\infty K(x,y)\,\omega(y)\,dydx. \tag{7}$$

如果我们能找到一个权函数 ω 和一个常数 A，使得估计式

$$\int_0^\infty K(x,y)\,\omega(y)\,dy \leq A\omega(x) \tag{8}$$

对每个 $0 < x < \infty$都成立，那么显然有 $B(K) \leq A$。这就是舒尔检验。

现在的计划是研究（8）左侧的积分，以确定一个合适的权函数 ω。由于 K的齐次性，我们可以写成

$$\int_0^\infty K(x,y)\,\omega(y)\,dy = \int_0^\infty K(1,y)\,\omega(xy)\,dy.$$

由此可见，要得到估计式（8），最简单的方法是选择一个满足 $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$的权函数，其中每个 x 和 y 都属于 $\mathbb{R}_+$。根据 ω 连续这一假设，只有当 $\omega(x) = x^r$ （其中 r为固定实数）时，这才可能成立。

现在我们希望选取 r，使所得积分最小。再次利用 K 的齐次性，我们得到

$$\int_0^\infty K(1,y)\,y^r\,dy = \int_1^\infty K(1,y)\left(y^r + y^{-r-1}\right)\,dy.$$

右侧被积函数的最小值在每个固定的 $1 < y < \infty$下于 $r = -1/2$ 处取得。因此可得

$$B(K) \leq 2\int_1^\infty \frac{K(1,y)}{\sqrt{y}}\,dy = \int_0^\infty \frac{K(1,y)}{\sqrt{y}}\,dy. \tag{9}$$

这是最佳常数吗？我们唯一用到的估计是式（7）中的柯西–施瓦茨不等式。要使非平凡函数在这里取到等号，必须

存在一个常数 $C \neq 0$ 使得 $f = C\omega$。然而，这是不允许的，因为 ω 在 $\mathbb{R}_+$上不是平方可积的。为了解决这个问题，我们固定 $\varepsilon > 0$ 并令

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < x \leq 1, \\ x^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} & \text{if } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

鉴于（9）中的最后一个等式，只需考虑支集包含于 $1 < x < \infty$ 上的试验函数。显然，f_ε 在 $\mathbb{R}_+$ 上的平方积分等于 $(2\varepsilon)^{-1}$。利用 K 的齐次性和分部积分，我们得到

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f_\varepsilon(x)\overline{f_\varepsilon(y)}\, K(x,y)\, dydx = \frac{1}{\varepsilon}\int_1^\infty K(1,y)\, y^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\, dy.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，我们发现（9）中的估计确实给出了（5）中的最佳常数。因此，我们得到以下结果。

定理 4. 假设核 K 连续、为正、对称，且为 -1 次齐次。对于 $\mathbb{R}_+$ 上的任意平方可积函数 f，

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)\overline{f(y)}\, K(x,y)\, dydx \leq B\int_0^\infty |f(x)|^2\, dx, \qquad B = \int_0^\infty \frac{K(1,y)}{\sqrt{y}}\, dy,$$

且常数 B 不能被任何更小的数替代。

接下来我们转向离散情形，并证明定理 1。虽然证明中不会明确用到定理 4，但上文所选取的权函数和试验函数对我们有所启发。

定理 *1 (a)* 的证明。如果 $a = (a_m)_{m\geq 1}$ 由 $a_m = m^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ 定义，其中 $\varepsilon > 0$，那么 $\sum_{m\geq 1} |a_m|^2 = \zeta(1+2\varepsilon)$。此外，

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_m\overline{a_n}\, K(m,n) = -K(1,1)\sum_{m=1}^\infty m^{-2-2\varepsilon} + 2\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=m}^\infty (mn)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} K(m,n).$$

第一个求和在 $\varepsilon \to 0^+$ 时仍有界，因而可以忽略。我们需要从下方估计这个双重求和，并利用齐次性将其改写，得到

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=m}^\infty (mn)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} K(m,n) = \sum_{m=1}^\infty m^{-1-2\varepsilon} \sum_{n=m}^\infty \frac{1}{m}\frac{K(1,n/m)}{(n/m)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}.$$

我们将内层求和识别为一个左黎曼和，其均匀分割的长度为 m^{-1}，对应的积分为

$$I_\varepsilon = \int_1^\infty \frac{K(1,y)}{y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\, dy = \int_1^\infty \frac{k(y)}{y^\varepsilon}\, dy.$$

结合假设 k 在区间 $(1,\infty)$ 上递减，以及函数 $y \mapsto y^{-\varepsilon}$ 在同一区间上递减这一事实，再运用几何论证，可知 I_ε 是每个左黎曼和的下界（示例见图 1）。因此，

$$\sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty a_m\overline{a_n}\, K(m,n) \geq -K(1,1)\zeta(2+2\varepsilon) + 2I_\varepsilon\zeta(1+2\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，我们得到 $C(K) \geq 2I_0$。如式 (9) 所示，利用 K 的齐次性即可完成证明。□

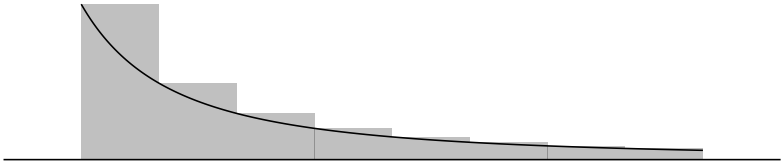


图 1. 在区间 (1，5) 上，函数 $y \mapsto y^{-\varepsilon}k_\alpha(y)$ 的均匀分割大小为 m^{-1} 时的左黎曼和。这里 $m = 2$、$\alpha = 1/2$ 和 $\varepsilon = 1/4$。

现在我们转向离散情形下的舒尔检验。如上所述，若存在一个权函数 $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ 以及一个常数 A，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} K(m,n)\,\omega(n) \le A\omega(m) \tag{10}$$

若对每个 $m \ge 1$ 都成立，则希尔伯特型不等式 (1) 中的最佳常数 C 满足 $C \le A$。

定理 *1(b)* 的证明。根据上面对连续情形的分析，自然可以对 $m \ge 1$ 选取权函数 $\omega(m) = 1/\sqrt{m}$。由 (10)，我们得到

$$C(K) \le \sup_{m\ge1} \frac{1}{\omega(m)} \sum_{n=1}^{\infty} K(m,n)\,\omega(n) = \sup_{m\ge1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{K(1,n/m)}{\sqrt{n/m}}. \tag{11}$$

我们认出，(11) 右侧是均匀分割大小为 m^{-1} 时，下列积分的右侧黎曼和

$$I = \int_0^\infty \frac{K(1,y)}{\sqrt{y}}\,dy = \int_0^\infty k(y)\,dy.$$

假设 k 在区间 (0，∞) 上递减，并通过几何论证（示例见图 2）可知，(11) 中的上确界在 $m \to \infty$ 时取到，且等于 I。因此，由舒尔检验可得 $C(K) \le I$。□

从（11）出发，采用类似的黎曼和论证，并假设k在（0，1）上递增、在（1，∞）上递减，可得

$$C(K) \le k(1) + \int_1^\infty k(y)\,dy. \tag{12}$$

一般而言，这个估计不太可能是锐利的，因为我们必须选择 $m = 1$，使其在区间（0，1）上的积分达到上确界，并选择 $m \to \infty$，使其在区间（1，∞）上的积分达到上确界。对于核 K_α，估计（12）变为 $C_\alpha \le 1 + 1/\alpha$。当且仅当 $\alpha = 1$ 在$k_1(y) = 1$ 对所有 $0 < y < 1$ 都成立时，这个估计才是锐利的。这种情形见图 2。

$\alpha > 1$ 的典型情形见图 3。改进（12）的一种可能策略是，对每个固定的 $m \ge 1$，跟踪 (0，1) 上的高估和 (1，∞) 上的低估，并尝试计算（11）中的上确界。[1, 引理 8] 采用了这一方案，并由此证明了引言中提到的 $C_\alpha = 2/\alpha$ for$0 < \alpha \le 1.48\ldots$。我们将改用另一种方法；这种方法不仅能给出更强的结果，而且从计算角度来看也更容易处理。

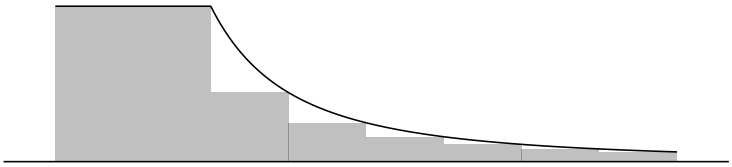


图 2. 函数 k_α 在区间 (0，4) 上、分割大小为 m^{-1} 的均匀分割的右黎曼和。这里 $m = 2$ 且 $\alpha = 1$。

我们的方法基于这样一个观察： $K_\alpha(1，1) = k_\alpha(1) = 1$，因此随着 α 增大，这一项将越来越占主导地位。因此，我们计划相应地调整舒尔检验中的权函数。下一个结果的关键思想是，我们要求 未指定的权函数 ω 满足（10），其中 $A = 2/\alpha$。随后，我们尝试在权函数中选取一个参数，以满足这一要求。

引理 5. 假设 $0 < \alpha < 2$。若

$$\zeta(1+\alpha) \le \frac{2}{\alpha} + \left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) m^\alpha \left(\frac{2}{\alpha} - \sqrt{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_\alpha(m,n)}{\sqrt{n}}\right) \tag{13}$$

对每个 $m \ge 2$ 都成立，则 $C_\alpha = 2/\alpha$。

证明. 根据定理 1 (a)，我们已经知道 $C_\alpha \ge 2/\alpha$ ，因此只需考虑上界 $C_\alpha \le 2/\alpha$。我们将使用舒尔检验 (10)，其权函数为

$$\omega_\alpha(m) = \begin{cases} \delta_\alpha & \text{if } m = 1, \\ 1/\sqrt{m} & \text{if } m \ge 2, \end{cases}$$

对于某个参数 $\delta_\alpha > 0$。要得出 $C_\alpha \le 2/\alpha$，我们需要证明

$$\sum_{n=2}^{\infty} K_\alpha(m,n)\, \omega_\alpha(n) \le \frac{2}{\alpha} \omega_\alpha(m) \tag{14}$$

对每个 $m \ge 1$ 都成立。分两种情况。首先，若 $m = 1$，则由 (14) 得到所需条件

$$\delta_\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{K_\alpha(1,n)}{\sqrt{n}} \le \frac{2}{\alpha} \delta_\alpha.$$

注意，对于 $0 < \alpha < 2$ ，我们可以选取一个正的 δ_α ，使其满足此估计，这正是舒尔检验所要求的。其次，若 $m \ge 2$，则由 (14) 得到所需条件

$$\frac{\delta_\alpha}{m^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{K_\alpha(m,n)}{\sqrt{n}} \le \frac{2}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

只要满足以下条件，我们就能找到一个同时满足这两个要求的 $\delta_\alpha > 0$

$$\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right)^{-1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{K_\alpha(1,n)}{\sqrt{n}} \le \frac{2}{\alpha} m^\alpha - m^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{K_\alpha(m,n)}{\sqrt{n}}$$

对每个 $m \ge 2$ 都成立。通过涉及 (4) 的计算，这等价于 (13)。 □

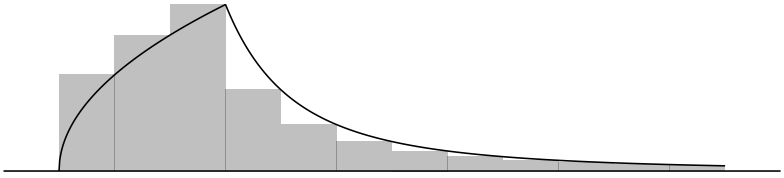


图 3. 函数 k_α 在区间 $(0,\ 4)$ 上，均匀分割大小为 m^{-1} 时的右黎曼和。这里 $m = 3$ 且 $\alpha = 3/2$。

3. 欧拉–麦克劳林求和

为了证明引理 5 中的条件 (13) 对 $\alpha = 3/2$ 成立，我们需要两个估计。这些估计可从 [1, 第 4], 节中提取，但为确保本文自成一体，我们在此给出完整说明。虽然在定理 2 的证明中，我们只会对 $\alpha = 3/2$ 使用这两个估计，但这里仍以较一般的形式陈述。关于欧拉–麦克劳林求和，我们需要了解的内容可见 [3, 第 11.5] 节。

引理 6。 固定 $0 < \alpha < \infty$。对于每个 $m \geq 1$，都有

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-\alpha-1} \leq \frac{1}{\alpha} m^{-\alpha} - \frac{1}{2} m^{-\alpha-1} + \frac{(\alpha+1)}{12} m^{-\alpha-2}.$$

证明。 设 f 是定义在区间 $[m, \infty)$ 上的函数，且在该区间上具有三阶连续导数。若 f 和 f' 均在无穷远处趋于零，则应用一步欧拉–麦克劳林求和公式可得

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) = \int_m^{\infty} f(x)\,dx - \frac{f(m)}{2} - \frac{f'(m)}{12} + \frac{1}{3!} \int_m^{\infty} b_3(\{x\}) f^{(3)}(x)\,dx, \tag{15}$$

其中 $\{x\}$ 表示 x 的小数部分，且

$$b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

是第三伯努利多项式。若 $0 \leq x \leq 1/2$，则 $b_3(1-x) = -b_3(x)$ 且 $b_3(x) \geq 0$。若 $f^{(3)}$ 在区间 $[m, \infty)$ 上是递增函数，则根据对称性可知

$$\int_m^{\infty} b_3(\{x\}) f^{(3)}(x)\,dx \leq 0. \tag{16}$$

将 (15) 和 (16) 应用于 $f(x) = x^{-\alpha-1}$，即可得到所述结果。 □

引理 7. 固定 $1 \leq \alpha \leq 2$。对于每个 $m \geq 1$，都有

$$\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\alpha} m^{\alpha} + \frac{1}{2} m^{\alpha-1} + \frac{\alpha-1}{12} m^{\alpha-2} - \frac{(3-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)(8+\alpha)}{720\alpha}.$$

证明。 设 f 是定义在区间 $[1, m]$ 上的函数，且在同一区间上具有五阶连续导数。应用两步欧拉–麦克劳林

求和公式可得

$$\sum_{n=1}^{m} f(n) = \int_1^m f(x)\,dx + \frac{f(1)+f(m)}{2} + \frac{f'(m)-f'(1)}{12} - \frac{f^{(3)}(m)-f^{(3)}(1)}{720} + \frac{1}{5!}\int_1^m b_5(\{x\})f^{(5)}(x)\,dx, \tag{17}$$

其中 $\{x\}$ 再次表示 x 的小数部分，且

$$b_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$$

是第五个伯努利多项式。若 $0 \le x \le 1/2$，则 $b_5(1-x) = -b_5(x)$，且 $b_5(x) \le 0$。若 $f^{(5)}$ 在 $[1,m]$ 上是递减函数，则根据对称性可知

$$\int_1^m b_5(\{x\})f^{(5)}(x)\,dx \le 0. \tag{18}$$

若 $1 \le \alpha \le 2$ 且 $f(x) = x^{\alpha-1}$，则对任意 $m \ge 2$，$f^{(5)}$ 在 $[1,m]$ 上递减。因此，由 (17)、(18) 以及估计式可得所述结果

$$-\frac{f^{(3)}(m)}{720} = -\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{720}m^{\alpha-4} \le 0,$$

该式在 $1 \le \alpha \le 2$ 时成立。 □

现在，我们可以由引理 5、引理 6 和引理 7 推导出主要结果。

定理 2 的证明。 由引理 5 可知，只需对$\alpha = 3/2$ 及任意 $m \ge 2$证明估计式 (13)。首先，利用引理 6，取 $\alpha = 3/2$ 和 $m = 4$，对 (13) 左端进行上界估计，得到

$$\zeta(\tfrac{5}{2}) \le 1 + 2^{-5/2} + 3^{-5/2} + 4^{-5/2} + 4^{-3/2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8} + \frac{5}{384}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{1127}{1024}.$$

为估计 (13) 的右端，我们先计算

$$\sqrt{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_\alpha(m,n)}{\sqrt{n}} = m^{-\alpha}\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha-1} + m^{\alpha}\sum_{n=m+1}^{\infty} n^{-\alpha-1},$$

然后对 $1 \le \alpha \le 2$ 使用引理 6、引理 7，最后利用 $m \ge 2$，得到

$$\begin{aligned} &\le \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{6}\frac{1}{m^2} - \frac{(3-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)(8+\alpha)}{720\alpha}\frac{1}{m^\alpha} \\ &\le \frac{2}{\alpha} + \left(\frac{\alpha}{6}2^{\alpha-2} - \frac{(3-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)(8+\alpha)}{720\alpha}\right)\frac{1}{m^\alpha}. \end{aligned}$$

将此估计代入 (13) 的右端，并令 $\alpha = 3/2$，得到

$$\frac{2}{3/2} + \left(\frac{2}{3/2} - 1\right)m^{3/2}\left(\frac{2}{3/2} - \sqrt{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K_{3/2}(m,n)}{\sqrt{n}}\right) \ge \frac{2693}{1920} - \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

至此证明完毕，因为

$$\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{1127}{1024} < \frac{2693}{1920} - \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

□

这对引理 5 的证明中的参数 δ_α 意味着什么？将引理 6 和引理 7 的估计直接代入要求中，我们发现，满足条件的一个可行选择为

$$1.0245\ldots = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{27}+\frac{103}{1024}\right) \le \delta_{3/2} \le \frac{773}{640}-\frac{\sqrt{2}}{8} = 1.0315\ldots$$

引理 5 无法再进一步推广多少：数值计算表明，当 $\alpha \ge 1.5069$ 时，**(13)** 对 $m=2$ 并不成立。

参考文献

1. Ole Fredrik Brevig，复合算子的精确范数估计与希尔伯特型不等式，伦敦数学会会刊**49**（2017），第 6 期，965–978。2. Ole Fredrik Brevig、Karl-Mikael Perfekt 和 Alexander Pushnitski，某些 *Hardy* 核矩阵的谱，即将发表于傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）（arXiv:2003.11346）。3. Peter Duren，经典分析导论，纯粹与应用本科生教材，第 17 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2012。4. Harry Dym 和 Victor Katsnelson，*Issai Schur* 对分析学的贡献，《纪念 Issai Schur 研究文集》（Chevaleret/Rehovot，2000），数学进展，第 210 卷，Birkh¨auser Boston，马萨诸塞州波士顿，2003，第 xci–clxxxviii 页。5. G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. P´olya，《不等式》，剑桥数学丛书，剑桥大学出版社，剑桥，1988，重印 1952 年版。6. H˚akan Hedenmalm，狄利克雷级数与泛函分析，《尼尔斯·亨里克·阿贝尔的遗产》，施普林格，柏林，2004，第 673–684 页。7. Perumal Muthukumar、Saminathan Ponnusamy 和 Herv´e Queff´elec，*Hardy–Dirichlet* 空间上复合算子的范数估计，积分方程与算子理论**90**（2018），第 1 期，论文编号 11，共 12 页。8. Herv´e Queffelec 和 Martine Queffelec，丢番图逼近与狄利克雷级数，第 2 版，数学文本与读物，第 80 卷，印度斯坦图书机构，新德里；施普林格，新加坡，2020。9. J. Schur，关于有界双线性型理论的注记¨（变量无限多个）¨，纯粹与应用数学杂志**140**（1911），1–28。10. Herbert S. Wilf，关于狄利克雷级数与托普利茨型，数学分析及其应用杂志**8**（1964），45–51。

挪威奥斯陆 0851，奥斯陆大学数学系电子邮箱： obrevig@math.uio.no