arXiv:2301.07948v1 [math.RA] 19 Jan 2023

接近周期环及其在矩阵环、内自同态环和群环中的应用

ADEL N. ABYZOV、RUHOLLAH BARATI 和 PETER V. DANCHEV*

Abstract. 我们考察以具有某些附加性质的周期环为元素的矩阵环。具体而言，我们证明，著名的 Diesl 问题——对于所有 $n \geq 1$， R 是幂零清洁是否蕴含 $\mathbb{M}_n(R)$ 是幂零清洁——与（阿贝尔、局部）周期环的相应蕴含关系相似。此外，我们研究阿贝尔群 G 的自同态环 E(G) 何时为周期环。具体来说，我们证明 E(G) 为周期环当且仅当 G 是有限群；同时，我们还找到了阿贝尔群上的自同态环为强 m幂零清洁环的充要条件，其中 m 为某个自然数，从而细化了关于强幂零洁净自同态环的一项“旧”结果。针对群环何时为周期环这一问题，我们证明，若 R 是右（分别为左）完备周期环，且 G 是局部有限群，则群环 RG 也是周期环。最后，我们给出了若干判据，说明在特定条件下，交换环上的两个周期代数的张量积仍为周期代数。此外，我们还研究了其他一些非常接近周期环的环，即所谓的弱周期环。

Introduction and Motivation

在本文中，所有环均为含幺结合环。几乎所有概念和记号都是标准的，与著名著作[48], 一致；下文将明确说明更具体的术语。

我们分别用符号$J(R)$、Nil$_*(R)$、Nil$^*(R)$、 $L\text{-}rad(R)$、Nil(R) 和 C(R)表示环 R 的雅各布森根、下幂零根、上幂零根、列维茨基根、幂零元集合和中心。此外，注意以下包含关系成立：

$$\mathrm{Nil}_*(R) \subseteq L\text{-}rad(R) \subseteq \mathrm{Nil}^*(R) \subseteq \mathrm{Nil}(R) \cap J(R).$$

回顾一下，若环 R 满足 Nil$_*(R)$ =Nil(R)，则称其为 2-原环。例如，每个交换环或约化环都是 2-原环。仿照这一概念，环 R 称为弱

2010 年数学主题分类。16S34；16U99；16E50；16W10；13B99。关键词与短语。周期环、矩阵环、内自同态环、群环、域、矩阵、幂零元、雅各布森根。*通讯作者。

2-原环，若等式 Nil(R) $= L\text{-}rad(R)$ 成立。显然，每个 2-原环都是弱 2-素环。然而，反向推论并不成立，因为存在不是 2-原环的弱 2-素环（例如，参见 [51, 例 2。2]）。此外，若环 R 的 Nil(R) 集合构成一个理想，则称其为 NI 环。

文献 [8, Lemma 3.12] 指出，若 R 是一个 m-幂等环，其中 $m > 1$ 是任意但固定的整数，即对所有 $x \in R$ 都有 $x^m = x$，那么对于所有自然数 $n \geq 1$，$\mathbb{M}_n(R)$ 都是一个周期环。文献 [11, Corollary 2.22] 对此作了大幅推广，其中 $m \geq 2$ 不再固定，而是依赖于元素 x。这一方面的其他一些重要结果包括[11, Proposition 2.18、Theorem 2.19 和 Theorem 2.21]。同样，文献[22] 将“周期性”推广至所谓的 π-UU 环的概念；回顾一下，若对每个可逆元 $u \in U$（R，即 R 的单位群），都存在一个依赖于 u 的整数 $i > 0$，使得 $u^i \in 1 + Nil(R)$，则称环 R 为 π-UU 环（对于固定的 $i = 1$ 情形，参见文献 [27]，其中将其简称为 UU 环）。显然，所有周期环都立即是 π-UU 环，但这一蕴含显然不可逆；然而，文献 [19, Theorem 3.4 (7)] 证明，强 π-正则的 π-UU 环本身就是周期环——关于环的强 π-正则性的更多信息和性质，感兴趣的读者可参阅文献 [36] 和 [65]。

另一方面，[30] 和 [13]（另可参见 [27] 和 [45]）分别研究了环的经典洁净性的若干变体，这一概念由 W.K. Nicholson 在 [55],中提出，例如幂零洁净性、强幂零洁净性和弱幂零洁净性。值得注意的是，强幂零洁净环总是强 π-正则的，后者的概念定义见 [48]。[40] 及其中引用的文献中可以找到一些这类环的非平凡例子。此外，与这一主题相关的论文还有[8] 和 [31]，它们讨论了元素可表示为可交换的幂等周期元与幂零元之和的环。

同样，[8, 推论 3.10] 证明，对于所有 $n \geq 1$，只要前一个环 R 是弱 2-素的强幂零洁净环，矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$就总是幂零洁净的——事实上，作者在未假设“弱 2-素”的情况下，借助[41, 命题 2.7]陈述了这一结论，而该命题似乎是错误的。（关于 2-原环的部分情形，感兴趣的读者可参阅 [23] 和 [12] 以了解更多信息。）此外，[59], 研究了与 [8] 类似的主题，但遗憾的是，当整数$m \geq 2$ 不是素数时，[59, 引理 3.3] 的证明有误——事实上，环 $\mathbb{Z}_4$ 明显地证明了我们的结论，简单计算即可验证。不过，可以应用 [43] 中的某些适当结果来避免这些缺陷。具体而言，应用[43, 定理 8], ，令 R 为一个环，其中 $m-1$ 是单位元，则 R的每个幂零理想 N 模上的 m-幂等元都可提升。

为了统一这两个方向，文献[19, 第 9 页的问题] 曾提出：幂零清洁 π-UU 环是否总是周期的。本文旨在通过考察周期环及其

更接近周期性的版本，以一种更具吸引力的方式，进一步探讨这一领域的结果及相互关系。具体而言，本文后续工作安排如下：

在第一节中，我们找到了任意群环具有周期性的一个令人满意的判据。我们在此成功证明了一些重要结论（见定理 1.2、1.6）。此外，我们还通过部分回答 Danchev 在 Mat. Stud.（2020）中提出的问题，探讨了群环何时具有周期性。具体而言，我们证明：若 R 是右（分别地，左）完美周期环，且 G是局部有限群，则群环 RG 也具有周期性。

第二部分旨在研究周期环上的矩阵环的性质。我们在此取得的成果是定理 2.4、2.10、2.20。具体而言，我们证明，对于所有自然数 $n \times n$，当基环 $\mathbb{M}_n(R)$ 为弱 2-素周期环时，全 n阶矩阵环 R 具有周期性。这在相当程度上改进了该领域近期的研究成果，这些成果分别由 Cui-Danchev 于 J. Algebra & Appl.（2020）以及 Bouzidi-Cherchem-Leroy 于《Communications in Algebra》（2021）中给出。

第三部分的核心主题，是为阿贝尔群上的任意自同态环在何种条件下为周期环或强 m-幂零清洁，找出充要条件，其中 $m \geq 1$ 为某个整数（注意，后一类环总是包含于周期环类中）。我们证明了，自同态环为周期环当且仅当前述阿贝尔群有限；此外，这样的环为强 m-幂零清洁，当且仅当阿贝尔群有限且其 p-初级分量具有某些特殊性质（参见定理 3.5、3.6 以及推论3.7）。由此，我们进一步发展并强化了 Fuchs-Rangaswamy 在 Math. Z. (1968) 中关于 π-正则自同态环的著名早期结果，也改进了 Breaz-C˘alug˘areanu-Danchev-Micu 在 Lin. Algebra & Appl. (2013) 中关于强幂零清洁自同态环的近期结果。

在第四部分中，我们在周期性背景下考察代数的张量积；我们的基本结果分别列于定理4.2 和4.4中。因此，我们的结果补充了[60]的相关成果。

在第五部分中，我们讨论所谓的弱周期环，并介绍其一些基本性质。我们这样做的出发点是：这些环处于 [30]中的著名幂零洁净环类与[67], 中的半洁净环类之间；此外，正如下文将要证明的，弱周期环类严格包含著名的周期环类。这里的结果分别列于定理5.6 和5.14中，可视为对 Cui-Danchev 在《J. Algebra & Appl.》（2020）中所得结果的自然延续。

我们在第六部分以提出六个经过精心设计、颇有趣味且重要的问题作为全文结尾，并希望这些问题能推动对所研究对象开展进一步深入研究。

秉持各节的主旨，结合已有结果，我们将尝试说明其中一些内容之间的逻辑关系。

1. Group Rings

定理 [24, 1] 指出，交换群环 RG 是周期的，当且仅当 R 是周期环且 G 是挠群，前提是 R 是交换局部环，且 $p \cdot 1 \in \mathrm{Nil}(R)$ 对某个素数 p 成立，并且 G 是阿贝尔群。

在本节尝试证明将改进所引用结果的主要结论之前，我们需要先约定以下几点。

首先，我们再次回顾一些众所周知的定义：如果一个环 R （相应地，一个群 G）的任意有限生成子环 R（相应地，任意有限生成子群 G）都是有限环（相应地，有限群），则称该环为局部有限。又，如果存在正整数 n，使得对于 R 中的任意幂零元 a，都有 $a^n = 0$，则称环 R 具有幂零指数有界性。最后，如果 R 的每个有限生成子环都具有幂零指数有界性，则称环 R 具有局部有界指数。

根据 [11, 引理 2, 1], 如果 R 是周期环，则其特征总是正的。因此，我们将[39, 推论 2]重述如下。

引理 1.1（[39, 推论 2]）。环 R 是局部有限的，当且仅当 R 是局部有界指数的周期环。

现在我们可以陈述并证明基本结论了。在此之前，我们先指出 (*)：如果群环 RG 是周期的，那么作为它的满同态像，前一个环 R 也是周期的。此外，已知周期群环 RG 是强 π-正则的，因此利用[17, 命题 3.4]，我们可以推出 G 是一个挠群。下文中，我们将采用不同的方法证明陈述 (*)。此外，在对 R 和 G 作出一些额外假设后，我们还将证明该陈述的逆命题。

定理 1.2. 如果 R 是弱 2-素周期环，且 G 是局部有限群，那么群环 RG 是周期的。

证明。取任意元素 $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i \in \mathrm{Nil}(R)G$。由于 $\mathrm{Nil}(R)$ 是局部幂零的，对于有限元素集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，存在一个自然数 N，使得取自 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的任意 N 个元素的乘积均为零。但 $(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i)^N$ 是各项 $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_N} g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_N}$ 之和。因此可得 $(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i)^N = 0$。于是，$\mathrm{Nil}(R)G$ 是 RG 的幂零理想。由于商环 $R/\mathrm{Nil}(R)$ 是幂等环，由引理 1.1 可知它是局部有限环。然而，根据 [40,命题 2.12], ，群环 $(R/\mathrm{Nil}(R))G$ 也是局部有限的。现在，结合同构 $^{RG}\ \mathrm{Nil(R)}_G \cong (\ ^{R}\ \mathrm{Nil}_{(R)}\ )G$ 、引理 1.1 和 [19, 推论 3.6], ，即可得出所需结论。□

As 由最后一个断言可立即推出以下两个结果 .

推论 1.3. 若 R 是一个 2-素周期环，且 G 是一个局部有限群，则群环 RG 是周期的。

推论 1.4. 设 R 是一个交换环， G 是一个阿贝尔群。那么，群环 RG 是周期的，当且仅当 R 是周期的且 G是挠的。

最后一个结果可能存在一个非平凡的推广，但我们目前无法证明或证伪，具体如下：若 R 是一个周期环，使得 $J(R)$ 局部幂零，且 G 是一个局部有限群，那么群环 RG 是周期的。事实上，如果 R 中不含任何由非零两两同构的正交幂等元组成的有限子集，那么根据[66, 定理 2.8]，商环 $R/J(R)$ 的幂零指数将有界。现在，由引理 1.1 和 [40, 命题 2.12]可知，群环 $(R/J(R))G$ 将是局部有限的。因此，$(R/J(R))G$ 必为周期的。此外，众所周知， $J(R)G$ 是幂零的。因此，同构 $RG/J(R)G \cong (R/J(R))G$ 将推出所需结果。

在 [57] 和 [28], 中，分别找到了关于任意环何时为幂等环的判据，其表述涉及有限域的次直积。接下来，我们将完整刻画群环 RG 何时为幂等环。仿照 [56],，令 $\pi(R) = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$为 R的正特征的所有素因子所组成的集合。因此，我们有以下定理。

定理 1.5. 群环 RG 是幂等环，当且仅当环 R 是幂等环，且 G是一个挠阿贝尔群，并且 G 的任意有限子群的阶都不被任何 $p \in \pi(R)$整除。

证明。($\Rightarrow$)。设群环 RG 是幂等环。由于 R 是 RG的子环，因此它也是幂等环，且其特征为正。此外，由推论1.4 可知 G 是一个挠阿贝尔群。若现在 $p \in \pi(R$，则由 [56, 定理 III]可知，群 G 没有阶被 p整除的有限子群。

($\Leftarrow$)。根据推论1.4，群环 RG 是周期的，而且根据[56, 定理 I]，它同时也是约化的。因此，借助 [19,定理 3.4 (1),(2)], ，我们可以推出群环 RG 是幂等周期的，正如所声称的那样。□

回顾一下，若环的理想 $J(R)$ 在右侧消失（也就是说，对于 $J(R)$ 中任意元素序列 $a_1, a_2, \cdots$，存在一个整数，比如 k，使得它们的乘积为零，即 $a_1 \cdots a_k = 0$），且商环 $R/J(R)$ 是半单的，则称该环为右完美环。

定理 1.6. 设 R 是右（分别为左）完美周期环，且 G 是局部有限群。则 RG 是周期环。

证明。 如果 R 是右（分别为左）完美环，那么 $J(R)$ 是局部幂零的这一事实由 [48, 命题 2315]保证（另见 [48, 习题 231]）。现在，类似于上文提到的定理 1.2的证明，我们推得 $J(R)G$是幂零的。由于 $R/J(R)$ 是半单的，根据著名的阿廷–韦德伯恩定理，我们可以写成 $R/J(R) \cong \prod_{i=1}^{k} \mathbb{M}_{n_i}(D_i)$，其中 D_i是某些除环。作为一个周期的

环，因子环 $R/J(R)$ 表明每个 D_i 也都是周期的，因此根据引理 1.1，它是一个局部有限域。因此，应用 [40, 推论 2.3]， $\mathbb{M}_{n_i}(D_i)$ 是一个局部有限环。现在，由 [40, 命题 2.12] 可知，环 $\mathbb{M}_{n_i}(D_i)$ 上的每个群环 $[\mathbb{M}_{n_i}(D_i)]G$ 都是局部有限的，因此根据引理 1.1，它是周期的。此外，同构 $(\frac{R}{J(R)})G \cong \prod_{i=1}^{k} \mathbb{M}_{n_i}(D_i)G$ 和 [11, 引理 2.12] 表明，$\frac{RG}{J(RG)} \cong (\frac{R}{J(R)})G$ 也是一个周期环。最后，应用 [19, 推论 3.6] 即得所需结果。□

注记 1.7. 请注意，定理 1.2 和定理 1.6 仅对 [24,问题 1]给出了部分解答。

2. 矩阵环

参见 [11, 推论 2.25] （ [19] 亦可参见），可知若 R 是一个环，其元素满足方程 $x^m = x^n$，其中 $m > n$ 是两个固定的自然数，则对任意整数 $k \geq 1$，全矩阵环 $\mathbb{M}_k(R)$ 仍然是周期的。现将这些环 R 刻画如下（亦参见 [25, 命题 4] ）。

命题 2.1. 对于环 R 及给定的两个自然数 $m > n$，以下两个条件等价：

(1) 对所有 $x \in R$， $x^m = x^n$。(2) 在环 R 中，每个元素 x 都可表示为 $x = a + b$，其中 b 是一个（$m - n + 1$）-幂等周期的， $a^n = 0$， $ab = ba = 0$，且 R 的特征有限。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2). 对于任意非负整数 $m > n$，我们有如下同构

$$\mathbb{Z}[x]/(x^m - x^n) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^n) \times \mathbb{Z}[x]/(x^{m-n} - 1)$$

利用中国剩余定理。因此，元素 x 自动分解为一个幂零元（指数不大于 n）与一个（$m - n + 1$）幂等周期元之和，且二者彼此交换。事实上，它们的左乘积和右乘积均为零。此外，当等式 $x^m = x^n$ 对每个 $x \in R$ 都成立时（其中 m 和 n 可能依赖于 x），只需取 $x = 2$，便可知这种情形必然使 R 具有有限特征 d。

(2) $\Rightarrow$ (1). 给定一个元素 $x = a + b$，其中 $ab = ba = 0$、 $a^n = 0$ 和 $b^{m-n+1} = b$，通过直接计算即可迅速得到 $x^m = x^n$。□

注2.2。 (1) 在命题 2.1 中，当 $m = n + 2$，我们得到

$$\mathbb{Z}_d[x]/(x^{m-n} - 1) = \mathbb{Z}_d[x]/(x^2 - 1) \cong \mathbb{Z}_d[x]/(x - 1) \times \mathbb{Z}_d[x]/(x + 1) \cong \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_d.$$

因此，类似的论证也适用于这里。由此我们推断， d 是 $2^{n+2} - 2^n = 2^n 3$的因数。(2) 在命题 2.1中，若 $x^m = x^n$ 对所有 $x \in R$ 和 m 以及 n 具有相反的奇偶性，则 R 根据推论 2 是一个幂等环[5, 。2]。

称一个环 为右（分别为左）拟除环，如果每个极大右（分别为左）理想都是双边理想（参见，例如，[68]）。弱周期环在第 5节中引入。在下一个命题中，若 R 是弱周期的，则该结论成立。

Prop命题 2.3. 对于环 R，以下三个陈述等价。

(1) $J(R)$ 是幂零的，且 $R/J(R)$ 是幂等环。(2) R 是右（左）拟对偶（弱）周期环。(3) R 是（弱）周期 NI 环。

证明。 这是显然的。我们只需证明蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1)。显然， $J(R)$ 是幂零的。由于 R是右（左）拟对偶的，因此根据 $R/J(R$是约化的。由 [68, 推论 24]可知，商 $R/J(R)$ 是幂等周期的，证毕。 □

接下来 这个结果在某种程度上可视为 [26, 定理 2.6] 的推广 .

定理 2.4. 设 R 是一个弱 2-素周期环。那么，对于所有 $n \geq 1$，全矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 都是周期的。

证明. 由于 $J(R)$ 是幂零的， $J(R) = \text{Nil}(R) = L\text{-}rad(R)$。现在，结合以下结果：同构 $\mathbb{M}_n(R)/\mathbb{M}_n(J(R)) \cong \mathbb{M}_n(R/J(R))$、命题 2.3, [11,推论 2.22], [9, 命题 1.1] 以及 [19, 推论 3.6] ，即可得到所需结果。□

因此，我们直接得到以下结论：

推论 2.5. 如果 R 是一个 2-素周期环，那么对于所有 $n \geq 1$，矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 都是周期的。

现在我们打算考虑所谓的 Armendariz 环及其如下推广：

定义 2.6（[54, 定义 2.1]）。设 R 是一个带有自同态 α的环。若对于任意两个多项式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 和 $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ 属于 $R[x;\alpha]$，等式$f(x)g(x) = 0$ 成立当且仅当 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$时，我们称 R 为斜 Armendariz 环。特别地，若 $\alpha = id_R$，则称环 R 为 Armendariz 环。

因此，我们可以得到以下结果。

推论 2.7。若 R 是斜 Armendariz 周期环，则全矩阵环$\mathbb{M}_n(R)$ 是周期的。

证明。 众所周知，每个 斜 Armendariz 环都是阿贝尔的。另一方面，每个阿贝尔周期环总是 NI 环。现在，[54, 定理 2。8] 适用，由此可得环 R 是 2-素的。因此，推论 2.5 意味着全矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是周期的，证毕。 □

接下来的两个观察结果也颇为有趣，值得记录下来。

例 2.8. 设 p 是素数， m 是一个自然数。那么，对于每个满足$[\frac{m}{2}] \leq s \leq m$的 s ，全矩阵环 $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}_{p^m} \propto p^s\mathbb{Z}_{p^m})$ 都是周期的。

证明。根据 [11, 定理 2。13]， $\mathbb{Z}_{p^m} \propto p^s\mathbb{Z}_{p^m}$ 是一个周期环。然而，由 [50, 推论 2。8] 可知 $\mathbb{Z}_{p^m} \propto p^s\mathbb{Z}_{p^m}$ 是 Armendariz 环。现在，推论 2.7 给出了所需结果。□

例 2.9。在[9, 例 1.7], 若 R 是幂等环，且 $S \in \{A_n(R)\ A_n(R)\ +^{RE_{1,\ k}}, T(R,n)\ S_n^k(R)\}$, 那么对于任意 $t \geq 1$，环 $\mathbb{M}_t(S)$ 都是周期的。

接下来我们继续讨论以下结果，该结果对后续研究颇有意义且十分重要。

定理 2.10. 若 R 是右（分别为左）完美周期环，则全矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是周期的。

证明. 若 R 是右（分别为左）完美环，则由 [48,命题 23.15] （另见 [48, 例 23.1]），$J(R)$ 是局部幂零的。但利用 [9, 命题 1.1], ，我们知道 $J(\mathbb{M}_n(R))$ 是幂零的。其余论证与 [11, 命题 2.18] 中的论证类似。□

以下观察揭示了前一节的结果与本节之间的联系。

注记 2.11. 若 R 是特征 2 的右（分别为左）完美周期环，则结合定理 1.6 和同构 $R\mathbb{S}_3 \cong RC_2 \oplus \mathbb{M}_2(R)$，其中 $\mathbb{S}_3$是对称群 S_3，而 C_2 是 2 阶循环群——例如参见 [15, 引理 4.4]——可知环 $\mathbb{M}_2(R)$ 是周期的。

由此可立即得到：

推论 2.12（[11, 命题 2.18]）。若 R 是阿廷周期环，则对任意 $n \geq 1$，环 $\mathbb{M}_n(R)$ 都是周期的。

我们还在此提出以下猜想，它与上述定理 2.10 有关；若该猜想得以肯定解决，我们便能肯定地解决 Diesl 提出的关于幂零洁净矩阵环的难题——参见下文评注 2.21 ，更多详情亦见 [30]。

猜想 1：若 R 是周期半完美环，则矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是周期的。

另一个值得关注、且与目前为止所得结果密切相关的结论如下：

命题 2.13. (1) 若 R 是幂等环，则对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $\mathbb{M}_n(R)$ 中的每个矩阵都可表示为一个三幂等元与一个幂等周期的和。(2) 若 R 是幂等环且 $3 \in U(R)$，则对于所有 $n \in \mathbb{N}$， $\mathbb{M}_n(R)$ 中的每个矩阵都可表示为一个幂等元与一个幂等周期的和。

证明。令 n 为任意一个自然数，并取 $A \in \mathbb{M}_n(R$。现在考虑由矩阵 S 的元素生成的 R 子环 A。容易验证，环 S 必为有限环。因此，可以写成 $S \cong P_1 \times \cdots \times P_m$其中 P_i 是有限域，且 $1 \leq i \leq m$； $m \in \mathbb{N}$于是，结合[2, 定理 1] 和 [1, 定理 14], ，即可直接得到该定理的两个断言。□

因此，随即会产生一个非平凡的问题（另请参见上文提出的猜想 1）：假设 R 是任意一个周期环。那么，对于每个 $n \geq 1$，环 $\mathbb{M}_n(R)$ 中的任意矩阵是否都是两个幂等势元之和？沿着这个方向，命题 2.13(1) 最终或许可以推广到弱 2-素周期环：事实上，参照命题 2.3，商环 $R/J(R)$ 是幂等周期的，而理想 $J(R)$ 是局部幂零的。因此，对于任意大小 n，因子环 $\mathbb{M}_n(R)/\mathbb{M}_n(J(R)) \cong \mathbb{M}_n(R/J(R))$ 中的每个矩阵都是一个三幂等元与一个幂等元之和。此外，参照 [9], ，理想 $J(\mathbb{M}_n(R)) = \mathbb{M}_n(J(R))$ 是幂零的。因此，唯一尚待证明的是，这种分解能否在整个环 $\mathbb{M}_n(R)$ 中得以保留；但提升幂等幂元乃至三幂等元的过程，比提升幂等元的标准技巧复杂得多（可比较 [26] 和 [43]中所述的方法）。目前，我们还无法做到这一点，因此这应视为一个悬而未决的问题。

设 A、 B 是两个环， M 和 N 分别是 (A, B)-双模和 (B, A)-双模。另外，我们考虑双线性映射 ϕ: $M \otimes_B N \to A$ 和 ψ: $N \otimes_A M \to B$，它们满足以下性质

$$Id_M \otimes_B \psi = \phi \otimes_A Id_M, \qquad Id_N \otimes_A \phi = \psi \otimes_B Id_N.$$

对于 $m \in M$ 和 $n \in N$，我们定义 $mn := \phi(m \otimes n)$ 和 $nm := \psi(n \otimes m)$.

因此，四元组 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ 构成一个配备显然的矩阵运算的结合环，称为 Morita 环境环。分别将双边理想 $Im\phi$ 和 $Im\psi$ 记为 MN 和 NM，它们称为该 Morita 环境的迹理想。

现在我们可以证明以下命题了，它的两种不同证明都比 [16, 定理 10.1.16] 更简单，也更具概念性。

定理 2.14. 设 $R=\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ 是一个 Morita 环境环，其中 MN 和 NM 分别是 A 和 B 的幂零理想。那么， R 是周期的，当且仅当 A 和 B 都是周期的。

证明。方法 1:
设 $\begin{pmatrix} a & m \\ n & b \end{pmatrix}\in R$。此外，设 $\overline{a}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{m}=\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{n}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$和 $\overline{b}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.。由于 MN和 NM是幂零理想，且环 A和 B是周期的，因此以下集合 $\{\overline{a}^t \mid t\in\mathbb{N}\}$, $\{\overline{b}^t \mid t\in\mathbb{N}\}$, $\{\overline{a}^{t_1}\overline{m}\overline{b}^{t_2}\overline{n}\ldots\overline{m}\overline{b}^{t_k} \mid k\in\mathbb{N}, t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{N}_0\}$, $\{\overline{a}^{t_1}\overline{m}\overline{b}^{t_2}\overline{n}\ldots\overline{n}\overline{a}^{t_k} \mid k\in\mathbb{N}, t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{N}_0\}$, $\{\overline{b}^{t_1}\overline{n}\overline{a}^{t_2}\overline{m}\ldots\overline{n}\overline{a}^{t_k} \mid k\in\mathbb{N}, t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{N}_0\}$和 $\{\overline{b}^{t_1}\overline{n}\overline{a}^{t_2}\overline{m}\ldots\overline{m}\overline{b}^{t_k} \mid k\in\mathbb{N}, t_1,\ldots,t_k\in\mathbb{N}_0\}$都是有限的。因此，集合 $\{A^t \mid t\in\mathbb{N}\}$ 也有限；由此经过简单计算可知，对于某些不同的 $m,n\in\mathbb{N}$，等式 $A^n=A^m$ 成立。

方法 2:
($\Rightarrow$)。由于 A 和 B 都是 R的子环，因此它们显然是周期的。
($\Leftarrow$)。如果 A 和 B 都是周期的，那么它们就是强 π-正则的。利用 [64,定理 3.5], 环 R 也强 π-正则。因此， $J(R)$ 是幂零的。但是，根据 [64,引理 3.1],，我们有 $R/J(R)\cong A/J(A)\times B/J(B)$。因此，我们的假设和[11, 引理 2.12] 意味着 $R/J(R)$ 是周期的。最后， [11, 命题 2.4] 得出所需结果。□

设 R、 S 为两个环，并设 M 为一个 (R,S)-双模，使得对于所有 $r\in R$、 $m\in M$ 和 $s\in S$，运算 $(rm)s=r(ms)$ 都是有效的。给定这样的双模 M，我们可以设

$$T(R,S,M)=\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} : r\in R, m\in M, s\in S\right\},$$

其中，它在通常的矩阵运算下构成一个环。上述形式矩阵$T(R,\ S,\ M)$ 称为 形式三角矩阵环。在定理 2.14 中，若令 $N=\{0\}$，则可得到以下推论。

推论 2.15 ([11, 定理 2.13])。 设 $R,\ S$ 是两个环，且设 M 是一个 $(R,\ S)$- 双模。那么，形式三角矩阵环 $T(R,\ S,\ M)$ 是周期的，当且仅当 R 和 S 都是周期环。

通过简单归纳法，这个推论可以推广到更一般的广义三角矩阵环情形。这类环记作 $T(R_i,M_{ij})|1\leq i\leq j\leq n)$，其中 R_i 和 M_{ij} 分别是周期环和 (R_i,R_j)-双模，并配备了相应的映射，以保证矩阵的乘法定义良好且

满足标准的结合律。不过，如果 $n = 3$，则可得广义三角矩阵环

$$S = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & M_{13} \\ 0 & R_2 & M_{23} \\ 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix}$$

是周期的，因为 $S = \begin{pmatrix} A & M \\ 0 & R_3 \end{pmatrix}$ 与 $A = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$ 和 $M = \begin{pmatrix} M_{13} \\ M_{23} \end{pmatrix}$，其中 R_1、R_2 和 R_3 是周期的，而 M_{12}、M_{23}、M_{13} 分别是配备映射 $\varphi: M_{12} \times M_{23} \to M_{13}$的 (R_1, R_2)-、(R_2, R_3)-、(R_1, R_3)-双模。

照例，记号 $\mathbb{T}_n(R)$表示任意环 R上的（上）三角形 $n \times n$ 矩阵环。现在，我们有以下简单推论。

推论 2.16. 设 R 是一个环，且 $n \geq 1$ 是一个自然数。那么， $\mathbb{T}_n(R)$是周期的，当且仅当 R 是周期的。

给定一个环 R 和其中的一个中心元 s，四元组 $\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ 在加法按分量定义、乘法定义如下时构成一个环

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_1 \\ y_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & x_2 \\ y_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + sx_1y_2 & a_1x_2 + x_1b_2 \\ y_1a_2 + b_1y_2 & sy_1x_2 + b_1b_2 \end{pmatrix}.$$

这个环记作 $K_s(R)$。满足 $A = B = M = N = R$的 Morita 环境 $\begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ 称为 R 上的广义矩阵环。在 [46] 中指出，环 S 是 R 上的广义矩阵环，当且仅当存在某个 $s \in C(R)$，使得 $S = K_s(R)$。这里$MN = NM = sR$，因此 $MN \subseteq J(A) \Leftrightarrow s \in J(R)$， $NM \subseteq J(B) \Leftrightarrow s \in J(R)$，并且 MN、NM是幂零元， $\Leftrightarrow s$是幂零元。因此，定理 2.14 也有如下推论。

推论 2.17. 设 R是一个环，且 $s \in C(R) \cap \mathrm{Nil}(R)$。那么，形式矩阵环$K_s(R)$ 是周期的，当且仅当 R 是周期的。

对于 $n \geq 2$ 以及对于 $s \in C(R)$， $n \times n$ 在 R上与 s相关联的形式矩阵环记作 $\mathbb{M}_n(R; s)$，其定义与[63]中的定义相同。现在，我们有以下结果，其证明比[16, 推论 10.117]的证明更加直观。

定理 2.18. 设 R是一个环，满足 $s \in C(R) \cap \mathrm{Nil}(R)$ 且 $n \geq 2$。那么， $\mathbb{M}_n(R; s)$ 是周期的，当且仅当 R 是周期的。

证明。 我们对 n 作归纳。若 $n = 2$，则 $\mathbb{M}_2(R; s) = K_{s^2}(R)$。因此，根据推论 2.17，结论成立。现在假设 $n > 2$，并假定结论对 $\mathbb{M}_{n-1}(R; s)$ 成立。令 $A = \mathbb{M}_{n-1}(R; s)$，我们注意到 $\mathbb{M}_n(R; s) = \begin{pmatrix} A & M \\ N & R \end{pmatrix}$ 是一个 Morita 环境，其中

$$M=\begin{pmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ \vdots \\ M_{n-1,n} \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} M_{n1}M_{n2}\dots M_{n,n-1} \end{pmatrix}, \quad M_{in}=M_{ni}=R \quad 1\leq i\leq n-1.$$

Moreover, for $x=\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{n-1,n} \end{pmatrix}$ and $y=\begin{pmatrix} y_{n1}y_{n2}\dots y_{n,n-1} \end{pmatrix}$, we calculate that

$$xy=\begin{pmatrix} s^2x_{1n}y_{n1} & sx_{1n}y_{n2} & \dots & sx_{1n}y_{n,n-1} \\ sx_{2n}y_{n1} & s^2x_{2n}y_{n2} & \dots & sx_{2n}y_{n,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ sx_{n-1,n}y_{n1} & sx_{n-1,n}y_{n2} & \dots & s^2x_{n-1,n}y_{n,n-1} \end{pmatrix}\in A, \tag{2.1}$$

$$yx=\begin{pmatrix} y_{n1}y_{n2}\dots y_{n,n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{n-1,n} \end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n-1}s^2y_{nk}x_{kn}\in R. \tag{2.2}$$

但是由（2.1）可得 $MN\subseteq sA$，由（2.2）可得 $NM=s^2R$。然而，显然 MN和 NM 是 A和 R的幂零理想，分别对应。现在，将归纳假设与定理 2.14结合，即可得到该结论。□

Th以下技术性内容有助于证明下面陈述的主要结果 .

引理 2.19。设 R 是一个阿贝尔周期环。若对于某个自然数 n， $J(\mathbb{M}_n(R))$ 是 $\mathbb{M}_n(R)$ 的幂零理想，则环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是周期的。

证明。方法 1：令 $f\colon R\to R/J(R)$ 为一个自然同态，并令 $\phi\colon \mathbb{M}_n(R)\to\mathbb{M}_n(R/J(R))$ 为由 f 诱导的相应环同态。给定 $A\in\mathbb{M}_n(R)$，并考虑由矩阵 A 的各分量生成的环 R 的子环 S。由于 $R/J(R)$ 是一个幂等环，可知 $f(S)$ 是 $R/J(R)$ 的有限幂等子环。因此， $f(S)=e_1f(S)\oplus\ldots\oplus e_kf(S)$，其中 $e_1,\dots,e_k\in f(S)$ 是一族两两正交幂等元，且 $e_if(S)$ 是一个有限域。此外，存在两两正交幂等元，例如 $f_1,\dots,f_n\in S$，使得 $S=f_1S\oplus\ldots\oplus f_nS$，并且对每个 $1\leq i\leq n$，都有 $\phi(f_i)=e_i$。因此，$A=A_1+\ldots+A_k$，其中 $A_i\in\mathbb{M}_n(f_iS)$。现在令

$$\begin{aligned} q=&[[\mid e_1f(S)\mid -1,\dots,\mid e_1f(S)\mid^n-1],\dots, \\ &[[\mid e_kf(S)\mid -1,\dots,\mid e_kf(S)\mid^n-1]]]+1. \end{aligned}$$

由于 $J(R) = \text{Nil}(R)$，容易看出，对每个 $1 \leq i \leq n$，等式 $\text{Nil}(f_iS) = J(f_iS)$ 成立。因此，

$$J(\mathbb{M}_n(f_iS)) = \mathbb{M}_n(\text{Nil}(f_iS)) \subseteq \mathbb{M}_n(J(R))$$

且 $J(\mathbb{M}_n(f_iS))$ 是一个幂零理想。因此，应用 [3, 定理 8], 对每个 $1 \leq i \leq n$，我们可以推得 $A_i^q - A_i \in \text{Nil}(\mathbb{M}_n(f_iS))$。因此，对每个 $A \in \mathbb{M}_n(R)$，我们得到 $A^q - A \in \text{Nil}(\mathbb{M}_n(R))$，从而由 [19, 定理 3。4], 我们可以得出结论$\mathbb{M}_n(R)$ 是一个周期环，证毕。

方法 2：若 R 是阿贝尔周期环，则 $J(R) = Nil(R)$，由 [7,引理5]可知。现在，同构 $\mathbb{M}_n(R)/\mathbb{M}_n(Nil(\{v35'>)) \cong \mathbb{M}_n(R/Nil(R))$ 、引理 1.1 及假设表明 $\mathbb{M}_n(R)$ 是周期的。□

现在我们提出以下命题，它在某种程度上与 [52] 平行。

定理 2.20。以下各点等价：

(1) 如果 R 是一个周期的阿贝尔环，那么 $\mathbb{M}_2(R)$ 是一个周期环。(2) 如果 R 是一个周期的局部环，那么 $\mathbb{M}_2(R)$ 是一个周期环。(3) K ¨othe 猜想对于所有有限域上的代数都有肯定解。

证明。 等价性 (1) $\Leftrightarrow$ 到 (2) 直接由引理 2.19的证明得到。

现在我们处理蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3)。取有限域 $\mathbb{F}$ 上的一个幂零代数 A。记 A^* 为 $\mathbb{F}$ 上的一个代数，其中 A 是 Dorroh 扩环（例如参见 [30]）。根据 [19, 定理 3.4], A^* 是一个周期环。在条件 (2) 下，代数 $M_2(A^*)$ 是一个周期环。因此，$J(\mathbb{M}_2(A^*)) = \mathbb{M}_2(J(A^*)) = \mathbb{M}_2(A)$ 是一个幂零代数。

现在考虑逆向蕴含 (3) $\Rightarrow$ (2)。设 R 是一个周期的局部环。那么，$J(R)$ 是幂零的，且商 $R/J(R)$ 是一个有限域。令 $\text{char}(R/J(R)) = p$，则条件 (3) 蕴含 $\mathbb{M}_2(J(R/pR)) = \mathbb{M}_2(J(R/pR))$ 是幂零的。由于 $(pR)^n = 0$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，可推知 $J(\mathbb{M}_2(R)) = \mathbb{M}_2(J(R))$ 也同样是幂零的。现在，由引理 2.19 可得所需结论。□

以下评论或许会有所帮助。

备注 2.21。令人惊讶的是，与 [52, 定理 3.1] 以及我们上一个定理的第 (3) 点相一致，Diesl 著名的[30] 问题—— R 是幂零清洁是否意味着对所有 $n \geq 1$，$\mathbb{M}_n(R)$都是幂零清洁——与（阿贝尔、局部）周期环中的相应蕴含关系相呼应。另一方面，关于最终成功解决 Diesl 问题，我们也提出如下策略：设 R是一个（局部、阿贝尔）周期环。若能证明 $J(R)$是局部幂零的，那么我们便知道 $J(\mathbb{M}_n(R))$是幂零的，因此根据引理 2.19，$\mathbb{M}_n(R)$是周期的。接下来，结合 [52, 定理 3.1]应用我们的定理 2.20，最终即可得到所需的解答。

3. Endomorphism Rings

在其开创性论文中， [34], Fuchs 与 Rangaswamy 未能对任意阿贝尔群G的自同态环 E(G 是 π正则的情形给出完整刻画，但挠情形除外（更多详情见[33] 以及 [47], ）。事实上，他们在一般混合情形以及无挠群情形中确立了一些深刻结果，并通过证明挠群必须具有特殊的有界性，完整描述了 G 为挠群时的情形。作者尚不清楚，阿贝尔群的自同态环是否已经有人研究过（更强的）强 π正则这一性质。关于阿贝尔群的更一般的洁净自同态环情形，请参见[35]。在此，我们仅提及 [12, 命题 10]证明了，任意阿贝尔群的自同态环是强幂零清洁的，当且仅当该群是循环2群；此外，[12,命题 9] 证明了，有限秩阿贝尔群的自同态环是幂零清洁的，当且仅当它是有限2-群。

我们从以下两个陈述开始本文的讨论，它们揭示了前一节的结果与本节结果之间的一些联系。

定理 3.1. 对于环 R，以下两个条件等价：

(1) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，环 $\mathbb{M}_n(R)$ 都是周期的；(2) 每个有限生成右 R-模 M 的内自同态环 E(M) 都是周期环。

证明. 蕴含关系 (2) ⇒(1) 相当明显，因此留给感兴趣的读者验证。

(1) ⇒ (2). 设 M 是有限生成右 R-模。那么，对于某个有限生成自由右 R-模 F，显然存在一个满同态（即满射同态） $f\colon F \to M$。此外，若 $\phi \in$E(M)，则对某个 $\phi' \in$E(F)，等式 $f\phi' = \phi f$成立。因此，根据我们的假设，对某个 $m, n \in \mathbb{N}$，等式 $\phi'^m = \phi'^n$ 成立。由此可见，以下等式

$$\phi^n f = f\phi'^n = f\phi'^m = \phi^m f$$

成立。然而，由于 f 是满同态，因此可得 $\phi^n = \phi^m$，如所需。

□

以下推论可由前述定理和定理2.10（另见推论 2.12）立即推出。

推论 3.2. 若 R 是右（分别地，左）完美周期环（特别地，是周期阿廷环），且 M 是有限生成右 R-模，则环 E(M) 是周期的。

下一个技术性陈述至关重要。

引理 3.3. 设 V 是域 F 上的向量空间。那么，E(V) 是周期环，当且仅当 V 是有限维向量空间，且 F 是有限域的代数扩张。

证明。我们用反证法证明：若 V 是无限维向量空间，则 E(V)不是周期环。显然，只需考虑V是可数维空间的情形。设 V的基为 $e_1, e_2, \ldots, e_k$。现在考虑线性算子 $f: V \to V$，它在基向量上的作用满足等式 $f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2, \ldots, f(e_k) = e_{k-1}$。因此，容易通过技术性验证得出，对任意自然数 $m \neq n$，都有 $f^n \neq f^m$，如所需。

现在证明第二部分，即 F 是有限域的代数扩张。首先注意到，域 F 是周期环。因此显然，该域的特征非零，且等于某个素数，记作 p。此外，由于域 F 中的每个元素都是周期的，域 F 确实是有限单域 $\mathbb{F}_p$的代数扩张，证毕。□

由于对于有界阿贝尔 p-群 G，环 E(G)/pE(G) 总是同构于以简单域 $\mathbb{F}_p$ 为底的行有限矩阵环，因此可直接由前一个引理推出以下断言。

引理 3.4. 对任意有界阿贝尔 p-群 G，环 E(G) 是周期的，当且仅当 G 是有限群。

这里的主要结果如下。我们用两种方法证明它。

定理 3.5. 对任意阿贝尔群 G，环 E(G) 是周期的，当且仅当 G 是有限群。

证明。方法 1：

(⇒). 设 E(G) 是周期的。取自同态 $\varphi: G \to G$，定义为 $\varphi(x) = 2x$。由于 E(G) 是周期的，因此存在两个自然数，记为 n 和 m，使得$\varphi^n = \varphi^m$ ($n > m$)。于是，对于任意 $x \in G$，都有 $(2^n - 2^m)x = 0$，即 G 的指数有限。然而，根据[32, 定理 8.4]， G 是由若干有界 p_i-群 G_{p_i} 构成的有限直和，其中对应的素数 p_i互不相同。因此，同构 E(G) $\cong \prod_{i=1}^{n}$E(G_{p_i}) 可得 E(G_{p_i}) 是周期的。最后，参见引理 3.4， G_{p_i} 是有限群。因此， G 是有限群，证毕。

方法 2：

（⇒）。设 E（G）是周期的。与上面展示的第一种方法类似， G具有有限指数。根据[11, 命题 2。5], 环 E（G）是 Dedekind 有限的（换句话说，是直接有限的）。现在，[47, 习题 15，第121]页意味着 G 是有限的。

（⇐）。如果 G 是有限的，那么 E(G) 是有限的。现在，根据引理 1.1，环 E(G) 是周期的，如前所述。□

为了拓展上述关于 [12] 的 E(G) 强幂零清洁性的结果，我们现在考虑更广泛的一类强 m-幂零洁净环，其中某个整数 $m > 1$ 使得这些环中的每个元素都可表示为一个m-幂等周期元与一个彼此可交换的幂零元之和。显然，强 m-幂零洁净环总是周期的。特别地，如果 $m = 2$，这些环就是强幂零清洁环。

设 R 是一个环。若 $r \in R$ 是幂零元，我们用 In(r) =min$\{k \mid r^k = 0\}$ 表示其幂零指数；若 r 不是幂零元，则令 In(r) $= 0$。因此， R 的幂零度 In(R) 定义为 In(R) =sup$_{r\in R}$ In(r)。

定理 3.6. 设 $m > 1$ 是一个自然数， G 是一个阿贝尔群。那么，以下命题等价：

(1) E(G) 是一个强 m-幂零洁净环；(2) G 是一个有限群，并且对于群 G 的每个 p-主分量 G_p ，都必须有 $(p^i - 1) \mid (m - 1)$ 对每个 $1 \le i \le$ In(E(G_p)/J(E(G_p)) 成立。

证明。 由于每个强 m-幂零洁净环都是周期的，结合定理3.5 在证明等价关系 (1) 时，我们不妨假设 $\Leftrightarrow$ (2) 中的群 G 是有限的。

因此，设 G_p 是 p-主分量，属于 G. 根据 [32], 可以写成 $G_p \cong \mathbb{Z}(p^{k_1})^{(n_1)} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p^{k_t})^{(n_t)}$，其中 $k_1 < \ldots < k_t$。现在很容易看出

$$\mathrm{E}(G_p)/J(\mathrm{E}(G_p)) \cong \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{F}_p) \times \ldots \times \mathbb{M}_{n_t}(\mathbb{F}_p)$$

并且 J(E(G_p)) 是一个幂零理想。因此，由[3, 定理 8]可知，E(G_p) 是强 m-幂零洁净环，当且仅当对每个$1 \le i \le$max$\{n_1, \ldots, n_t\}$ =In(E(G_p)/J(E(G_p)), $(p^i - 1) \mid (m - 1)$。由同构 E(G) $\cong \prod_p$E(G_p) 成立这一事实，所需的等价关系便直接得出。□

最后一个结果的一些特殊情形也值得关注。尽管下面的陈述可由前一定理的证明和 [3, 推论19], 自动得出，但我们更愿意直接证明以下结果，以展示一种更清晰、更具概念性的证明。

推论 3.7. 设 m 为满足 $m \not\equiv 1$ (模 3)、 $m \not\equiv 1$ (模 8)的正整数。那么，环 E(G) 强 m-幂零洁净，当且仅当$G \cong \oplus_{i=1}^{n} \oplus_{j=1}^{t_i} \mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}}$，其中$p_1$、$p_2$、$\cdots$、$p_n$是 $|G|$ 的素因子，并且对于任意 $1 \le i \le n$，$(p_i - 1) | (m - 1)$。

证明。 ($\Rightarrow$)。假设 E(G) 是强 m-幂零洁净的。因此，根据定理 3.5 可知G是一个有限群。因此，$G = \oplus_{i=1}^{n} G_{p_i}$，其中 $G_{p_i} \cong \mathbb{Z}(p_i{}^{k_1})^{(n_1)} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}(p_i{}^{k_{t_i}})^{(n_{t_i})}$且 $k_1 < \ldots < k_{t_i}$。显然， n是 $|G|$的素因子个数。但是

$$\mathrm{E}(G_{p_i})/J(\mathrm{E}(G_{p_i})) \cong \mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{F}_{p_i}) \times \ldots \times \mathbb{M}_{n_{t_i}}(\mathbb{F}_{p_i}).$$

假设可得 $\mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{F}_{p_i})$.....， $\mathbb{M}_{n_{t_i}}(\mathbb{F}_{p_i})$ 都是强 m-幂零洁净的。因此，由 [3, 推论 19] 可得 $n_1 = n_2 = \ldots = n_{t_i} = 1$。因此， $G \cong \oplus_{i=1}^{n} \oplus_{j=1}^{t_i} \mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}}$。

($\Leftarrow$)。设 $G \cong \oplus_{i=1}^{n} \oplus_{j=1}^{t_i} \mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}}$，其中对任意 $1 \leq i \leq n$，$(p_i - 1) | (m-1)$。因此，$\mathrm{E}(G) \cong \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{t_i} \mathrm{E}(\mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}})$。由于同构 $\mathrm{E}(\mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}}) \cong \mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}}$ 成立，可知该环

$$\frac{\mathrm{E}(\mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}})}{p_i \mathrm{E}(\mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}})} \cong \frac{\mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}}}{p_i \mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}}} \cong \mathbb{F}_{p_i}$$

是强 m-幂零洁净的。考虑分母，它显然是一个幂零理想，[8, 定理 1.11] 保证 $\mathrm{E}(\mathbb{Z}_{p_i{}^{k_j}})$ 是一个强 m- 幂零洁净环。因此，正如所承诺的，$\mathrm{E}(G)$ 也强 m- 幂零洁净。□

推论 3.8. 对于满足 $m \neq 1 \pmod 3$ 的偶整数 m，环 $\mathrm{E}(G)$ 是强m-幂零洁净的，当且仅当 $G \cong \oplus_{j=1}^{t} \mathbb{Z}_{2^j}$。

证明。考虑到 $2 \in \mathrm{Nil}(\mathrm{E}(G))$，群 G 必定是有限 2-群。此外，推论 3.7给出了所需结果。□

4. Tensor Product of Algebras

在本节中，我们假设 k 是一个交换环。我们从以下技术约定开始讨论。

引理 4.1. 设 A 和 B 是两个 k-代数，并且作为环，它们都是周期交换环。那么，张量积 k-代数 $A \otimes_k B$ 是周期的。

证明。只需证明$(A \otimes_k B)/Nil(A \otimes_k B)$是一个周期 k-代数。设$\overline{\sum_{i=1}^{t} x_i \otimes y_i}$ 是$(A \otimes_k B)/\mathrm{Nil}(A \otimes_k B)$中的任意元素。由于 A 和 B 是周期的，$x_i = e_i + a_i$，其中 ${e_i}^{n_i} = e_i$ 对某个 $n_i \in \mathbb{N}$成立，$a_i \in \mathrm{Nil}(A)$，且 $y_i = f_i + b_i$，其中 ${f_i}^{m_i} = f_i$ 对某个 $m_i \in \mathbb{N}$成立，$b_i \in \mathrm{Nil}(B)$，对于 $1 \leq i \leq t$。容易验证 $\overline{\sum_{i=1}^{t} x_i \otimes y_i} = \sum_{i=1}^{t} \overline{e_i \otimes f_i}$。此外，由引理 2.3] 可得，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，${e_i}^{k(n_i-1)+1} = e_i$，${f_i}^{k(m_i-1)+1} = f_i$。若 $l_i = (n_i - 1)(m_i - 1) + 1$，则${e_i}^{l_i} = e_i$，${f_i}^{l_i} = f_i$。因此，$\overline{(e_i \otimes f_i)}^{l_i} = \overline{{e_i}^{l_i} \otimes {f_i}^{l_i}} = \overline{e_i \otimes f_i}$。所以，$\overline{e_i \otimes f_i}$ 是一个幂等元。但是

$$(\overline{e_i \otimes f_i})(\overline{e_j \otimes f_j}) = \overline{e_i e_j \otimes f_i f_j} = \overline{e_j e_i \otimes f_j f_i} = (\overline{e_j \otimes f_j})(\overline{e_i \otimes f_i}).$$

因此，结合 [11, 引理 2.6], ，元素 $\overline{\sum_{i=1}^{t} x_i \otimes y_i} = \sum_{i=1}^{t} \overline{e_i \otimes f_i}$ 是周期的。因此，$(A \otimes_k B)/Nil(A \otimes_k B)$作为环是周期的，证毕。□

由此我们得到如下结论。

定理 4.2. 设 A 和 B 是两个 k-代数，且作为环，它们都是弱 2-素周期环。那么， $A \otimes_k B$ 是一个周期的 k-代数。

证明。 给定的假设意味着 $A/\mathrm{Nil}(A)$ 和 $B/\mathrm{Nil}(B)$ 是两个幂等周期的 k-代数。现在，引理 4.1 使我们可以推得 $(A/\mathrm{Nil}(A)) \otimes_k (B/\mathrm{Nil}(B))$ 是一个周期的 k-代数。其余论证与 [8, 定理 23] 中的论证相当类似。 □

接下来我们给出如下技术约定。

引理 4.3. 设 A 和 B 是两个 k-代数，且它们作为环都是局部有限的。那么，张量积 k-代数 $A \otimes_k B$ 是局部有限的。

证明。设 $S = \{\sum_{i=1}^{n_1} a_{i1} \otimes b_{i1}, \sum_{i=1}^{n_2} a_{i2} \otimes b_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{n_t} a_{it} \otimes b_{it}\}$ 是$A \otimes_k B$的一个有限子集。此外，设 A' 是由这些元素生成的子代数

$$\{a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n_1 1}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n_2 2}, \cdots, a_{1t}, a_{2t}, \cdots, a_{n_t t}\}$$

并且 B' 是由.....生成的子代数

$$\{b_{11}, b_{21}, \cdots, b_{n_1 1}, b_{12}, b_{22}, \cdots, b_{n_2 2}, \cdots, b_{1t}, b_{2t}, \cdots, b_{n_t t}\}.$$

由于显然 A 和 B 都是局部有限的，因此 A' 和 B' 必定是有限的。所以， $A' \otimes_k B'$ 本身也有限。但 $S \subseteq A' \otimes_k B'$ ，因此由 S 生成的子代数也有限。由此可知， $A \otimes_k B$ 是局部有限的，正如所要证明的那样。□

我们以如下结果结束本小节。

定理 4.4. 假设 A 和 B 是两个 k-代数，且它们是右（分别为左）完美周期环。那么，张量积 k-代数 $A \otimes_k B$ 作为一个环是周期的。

证明. 根据假设， $A/J(A)$ 和 $B/J(B)$ 是半单 k-代数。现在，根据代数的著名韦德伯恩结构定理（例如，参见[58, 定理 3.5]），我们有

$$\frac{A}{J(A)} \cong \prod_{i=1}^{t} \mathbb{M}_{n_i}(D_i) \ , \ \frac{B}{J(B)} \cong \prod_{j=1}^{l} \mathbb{M}_{m_j}(D'_j).$$

分别对应某些除环 D_i 和 D'_j。由 A 和 B 的周期性可知， D_i、 D'_j 是周期的，因此，对于任意 $1 \leq i \leq t$和 $1 \leq j \leq l$，它们都是幂等域。因此，根据 [40, 推论 2.3]， $\mathbb{M}_{n_i}(D_i)$ 和 $\mathbb{M}_{m_j}(D'_j)$ 是局部有限的 k-代数。此外，引理 4.3 表明，对于任意 $1 \leq i \leq t$ 和 $1 \leq j \leq l$， $\mathbb{M}_{n_i}(D_i) \otimes_k \mathbb{M}_{m_j}(D'_j)$ 是局部有限的 k-代数。

然而，根据 [11, 引理 2.12] 可知

$$\frac{A}{J(A)} \otimes_k \frac{B}{J(B)} \cong \prod_{i=1}^{t}\prod_{j=1}^{l} \mathbb{M}_{n_i}(D_i) \otimes_k \mathbb{M}_{m_j}(D_j')$$

是一个周期的 k-代数。若此时 A 和 B 是右（分别地，左）完备的，那么根据 [48, 命题 23.15] （另见 [48, 练习 23.1]），$J(A)$ 和 $J(B)$ 是局部幂零的。仿照 [8, 定理 2.3], 的证明，我们可以推知 $(i \otimes 1)(J(A) \otimes_k B)) + (1 \otimes j)(A \otimes_k J(B))$ 是 $A \otimes_k B$的一个幂零理想。此外，借助 [8, 命题 2.2], ，我们得到以下同构

$$\frac{A \otimes_k B}{(i \otimes 1)(J(A) \otimes_k B) + (1 \otimes j)(A \otimes_k J(B))} \cong \frac{A}{J(A)} \otimes_k \frac{B}{J(B)}.$$

最后，[11, 推论 3.6]给出了所需结果，正如预期。 □

值得注意的是，关于（弱）幂零洁净环的张量积的一些重要结果已在 [60] 中得到。

5. Weakly Periodic Rings

众所周知，根据 [19] ，若 R 是一个周期环，则每个元素 $x \in R$ 都可以写成 $x = e + b$，其中 $e^n = e$ 对某个自然数 $n \geq 2$ 成立，且 b 是一个幂零元，满足 $eb = be$。同样，文献[10] 证明，若 R 中的每个元素都可表示为一个幂等周期元与一个幂零元之和，且 Nil(R) 是交换的，则 R 是周期的。后来，作者将每个元素都能表示为一个幂等周期元与一个幂零元之和的环称为弱周期环。显然，每个周期环都是弱周期环，但反过来显然不成立——事实上，根据[62, 例 3.1、3.2],，我们可以举出一个幂零洁净环（因此也是弱周期环），它不是强 π-正则的，因而也不是周期环，从而回答了文献 [39]中提出的相应问题。

此外，对于固定的自然数 $m \geq 2$，若元素 $x \in R$ 满足 $x^m = x$ ，则称其为 m-幂等周期元。因此，根据 [8], ，如果环 R 中的每个元素都可以表示为一个 m-幂等周期元与一个幂零元之和，则称该环为 m-幂零洁净环。因此，每个m-幂零洁净环都是弱周期环。特别地，根据 [29] 和 [13], 中的定义，每个弱幂零洁净环都是 3-幂零洁净环，因为只要e 是幂等元，元素 $\pm e$ 显然就是三幂等元，因此这些环也都是弱周期环（如需采用另一种更具概念性的方式来证明这一事实，我们请感兴趣的读者参阅 [21] 和 [61], 中的主要结果；这两个结果分别证明，每个弱幂零洁净环R 都可分解为 $R \cong R_1 \times R_2$，其中 R_1 是幂零洁净环，而 R_2 要么是 (0)，要么是 $J(R_2)$ 为幂零，使得 $R_2/J(R_2) \cong \mathbb{Z}_3$。因此，我们可以直接结合下文列出的命题 5.3 和 5.4，最终得到所需结论）。关于这类环的另一项重要研究，请参阅 [31]。

另一方面，在 [67] 中引入了 半洁净环 这一概念。回顾一下，环 x 中的元素 R 若满足 周期的 条件，即 $x^m = x^n$，其中 m 和 n 是自然数，且 $m \neq n$。因此，如果环 R 中的每个元素都可以表示为一个周期元素与一个单位元之和，则称该环为半洁净环。容易看出，任何弱周期环都是半洁净环。然而，反之则不成立，正如下文所示。

此外，众所周知，每个周期环都是强 π-正则的，因此一个合乎逻辑的问题是：每个弱周期环是否都是 π-正则的？但遗憾的是，再次利用 [62, 例 3.2]，可以说明，弱周期环未必是 π-正则的，因为存在一个不是 π-正则的幂零洁净环。因此，另一个颇具挑战性的问题是，弱周期环是否在 [55]的意义下是洁净的。尽管如此，我们也希望答案是否定的，但目前还没有具体的例子。

受上述讨论启发，本节将尝试介绍一些关于弱周期环的基本事实，从而最终推动对它们展开更深入的探究。具体而言，如上所述，我们的主要出发点是以下论断，它明确表明，弱周期环这一类所具有的性质可能比更大的半洁净环类要少得多。

例5.1. 存在一个半洁净环，它不是弱周期的。

证明。 根据[67] (另见 [53])，群环 $\mathbb{Z}_{(p)}C_3$ 是半洁净的。然而，如果我们反证假设 $\mathbb{Z}_{(p)}C_3$ 是弱周期的，那么根据下文引用的定理 $\mathbb{Z}_{(p)}$ ， 5.14 ， $J(\mathbb{Z}_{(p)}) = p\mathbb{Z}_{(p)}$ 将是幂零的，这就产生了矛盾。

或者，如果 R 是弱周期环，那么根据 $R[[x]]$命题3，幂级数环 [67, 3], 是半洁净的；但正如我们将在下一个例子中看到的， $R[[x]]$ 并非弱周期的。 □

例5.2. 对任意环 R，劳朗多项式环 $R[x, x^{-1}]$ 和幂级数环 $R[[x]]$ 都不是弱周期的。此外，多项式环 $R[x]$ 不是周期的。

证明。 反设环 $R[x, x^{-1}]$ 是弱周期的，那么同构 $R[x, x^{-1}] \cong RG$，其中 G 是一个无限循环群，再结合下文陈述并证明的定理 5.14 (2)，将推出 G 是一个挠群，这与我们的假设矛盾，从而得到所需结论。

现在假设 $R[[x]]$ 是弱周期的，我们知道 $J(R[[x]]) = \{a + xf(x) \mid a \in J(R)$ 和 $f(x) \in R[[x]]\}$(例如，参见 [48]中的练习 5.6)，因此显然 $x \in J(R[[x]])$。因此，$J(R[[x]])$ 不是幂零的，矛盾，由此得到所需结论。

接下来，如果 $R[x]$ 是周期的，那么根据[11, 命题 2.5], ，它是强清洁的，因此 $R[x]$ 必定是洁净的。但这与 [42, 注记 2.8], 矛盾，因此如所声称的那样， $R[x]$ 不可能是周期的。□

自然会产生这样一个问题：多项式环 $R[x]$ 是否是弱周期的。目前，我们尚无法证明或否定这一问题。

本节继续讨论我们的工作，介绍以下有用的技术结果，它们揭示了弱周期环的一些基本性质（其他背景材料可见[16]）。

命题 5.3. 设 R 是一个弱周期环。那么，以下三个结论成立：

(1) R 具有正特征。(2) 若 $\mathrm{char}(R) = {p_1}^{n_1}{p_2}^{n_2}\cdots{p_k}^{n_k}$，则 $R \cong \prod_{i=1}^{k} R_i$，其中 $R_i \cong R/({p_i}^{n_i}R)$ 对每个指标 i均成立。(3) 弱周期环的有限直积仍是弱周期的。

证明。(1) 由于 $J(R)$ 是幂零的，因此 R 的特征是有限的，从而为正。

(2) 由于 ${p_i}^{n_i}R + {p_j}^{n_j}R = R$和 ${p_i}^{n_i}R \cap {p_j}^{n_j}R = (0)$，利用中国剩余定理可得 $R \cong \prod_{i=1}^{k} R_i$，其中对于每个指标 i，都有 $R_i \cong R/({p_i}^{n_i}R)$。(3) 设 $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$，其中对于任意 $1 \le i \le n$，直因子 R_i 都是弱周期的。给定 $r = (r_1, r_2, \cdots r_n) \in R$ 且满足 $r_i \in R_i$。于是，$r_i = e_i + b_i$，其中对于任意 $1 \le i \le n$，都有 ${e_i}^{n_i} = e_i$和 ${b_i}^{m_i} = 0$。结合 [11, 引理 2.3(1)]，，可知对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 ${e_i}^{k(n_i-1)+1} = e_i$。然而，若我们令 $l = \prod_{j=1}^{n}(n_j - 1) + 1$ 和 $m = max\{m_j\}_{j=1}^{n}$，那么对于任意 $1 \le i \le n$，可得 ${e_i}^{l} = e_i$, $b_i^{m} = 0$。这立即推出 $r = e + b$，其中 $e = (e_1, e_2, \cdots e_n)$、$b = (b_1, b_2, \cdots b_n)$ 且 $e^l = e$,$b^m = 0$。因此，R 是弱周期的，证毕。□

命题 5.4. 设 R 是一个环，且 I 是 R的幂零理想。那么，环 R 是弱周期环，当且仅当商环 R/I 是弱周期环。

证明。(⇒)。显然，因此省略细节。

(⇐)。假设 $a \in R$。根据假设，$\overline{a} = \overline{e} + \overline{b}$，其中 $\overline{e}^m = \overline{e}$，对某个 $m \in \mathbb{N}$且 $\overline{b} \in \mathrm{Nil}(R/I)$ 成立。利用 [43, 推论 6]，，存在一个幂等元 $f \in R$，使得 $\overline{f} = \overline{e}$。现在，由于 I 是一个幂零理想，关系 $a - f \in \mathrm{Nil}(R)$成立。由于$a = f + (a - f)$，$f$是一个幂等元，而 $a - f$是一个幂零元，因此我们推得a 是弱周期的。因此，R 是一个弱周期环，如前所述。□

现在我们将通过证明以下断言来讨论 Morita 环境。在此之前，下面这个技术性命题成立。

引理 5.5. 设 T 是一个环，使得 $T = S + K$，其中 S 是 R 的子环，而 K 是 T 的幂零理想。若 S 是弱周期的，则 T 是弱周期的。

证明。设 $t \in T$。根据假设，我们可以写成 $t = s + x$，其中 $s \in S$和 $x \in K$。由于 S是弱周期的，可写成 $s = a + b$，其中 $a^n = a$，对于某个整数 $n > 1$

并且 $b^l = 0$，对于某个整数 $l > 1$。因此， $t = a + b + x$。设 $c = b + x$。在 R/K中运算并提升到 R，我们得到 $c^l \in K$。由于 K 是幂零的，我们有 $(c^l)^m = 0$，其中某个 $m \geq 1$。因此， T 是弱周期的。□

现在我们可以得到以下结论。

定理 5.6. 设 $R = \begin{pmatrix} A & M \\ N & B \end{pmatrix}$ 是一个 Morita 环境环，且 MN 和 NM 分别是 A 和 B 的幂零理想。那么， R 是弱周期的，当且仅当 A 和 B 都是弱周期的。

证明. ($\Rightarrow$). 假设 R 是弱周期的。显然， $MN \subseteq J(A)$ 且 $NM \subseteq J(B)$。利用引理 3.1], 我们有 $J(R) = \begin{pmatrix} J(A) & M \\ N & J(B) \end{pmatrix}$，且 $R/J(R) \cong A/J(A) \times B/J(B)$。由于 $J(R)$ 是幂零的，显然 $J(A)$ 和 $J(B)$ 都是幂零的。此外，根据假设， $A/J(A)$ 和 $B/J(B)$ 都是弱周期的。因此，由命题 5.4 可知， A 和 B 都是弱周期的，证毕。

($\Leftarrow$)。我们有 $R = S + K$，其中 $S = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是 R 的子环，而 $K = \begin{pmatrix} MN & M \\ N & NM \end{pmatrix}$ 是 R 的幂零理想。

事实上，计算可得 $K^{2l} = \begin{pmatrix} (MN)^l(MN)^l M(NM)^l N(NM)^l & \end{pmatrix}$。但容易验证 $S \cong A \times B$。现在，根据假设和命题 5.3 可知 S是弱周期的。最后，引理 5.5保证了所需结论。□

接下来的三个推论显然成立。

推论 5.7。设 R、 S 是两个环，且 M 是一个 (R, S)-双模。那么，形式三角矩阵环 $T(R, S, M)$ 是弱周期环，当且仅当 R 和 S 都是弱周期环。

推论 5.8. 设 R 是一个环， $n \geq 1$ 是一个自然数。那么， $\mathbb{T}_n(R)$ 是弱周期的，当且仅当 R 是弱周期的。

推论 5.9. 设 R 是一个满足 $s \in C(R) \cap \mathrm{Nil}(R)$ 的环。那么，形式矩阵环$K_s(R)$ 是弱周期的，当且仅当 R 是弱周期的。

定理 5.10. 设 R 是一个满足 $s \in C(R) \cap \mathrm{Nil}(R)$ 和 $n \geq 2$ 的环。那么， $\mathbb{M}_n(R; s)$ 是弱周期的，当且仅当 R 是弱周期的。

证明。 按照定理 2.18 的证明方法进行论证，并利用定理 5.6 以及推论5.9，即可得出所述结论。□

注 5.11。 在定理 5.6、推论 5.7、推论 5.8、推论5.9以及定理5.10 若将“幂零清洁”这一要求替换为更一般的“弱周期的”，

那么这些断言仍然成立。在这种情况下，推论 5.9 和定理 5.10可分别视为 [45, 推论 3。5] 和 [45, 定理 3。6],的推广。

关于幂零洁净环上矩阵环的幂零洁净性之 Diesl 问题，有一个新的小小进展（见 [30]）：

推论 5.12。形式矩阵环 $K_2(R)$ 是幂零洁净的，当且仅当环 R 是幂零洁净的。

证明。若 $K_2(R)$ 是幂零洁净的，那么根据[30, 命题 3.14], $2.I_2$ 是幂零元。因此可推出 $2 \in C(R) \cap Nil(R)$。若 R 是幂零洁净的，那么根据所引命题，同样有 $2 \in C(R) \cap Nil(R)$。因此，无论哪种情况，都有 $2 \in C(R) \cap Nil(R)$。现在应用推论 5.9 和注 5.11，即可得到所需结论。□

此外，本着以下结果的精神 [12] 和 [44], 可以提出如下猜想：

猜想 2：设 D 是一个除环， $n \geq 1$ 是一个整数。那么，矩阵环 $\mathbb{M}_n(D)$ 是弱周期的，当且仅当 D 是一个有限（因而也是幂等周期的）域。

如果该陈述成立，那么定理 2.10 可以推广到弱周期环：若 R 是右（分别为左）完美弱周期环，则矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是弱周期的。

关于备注 2.21 中这些内容的一些新看法，或许能为目前看来无法解决的 Diesl 问题带来一些启示；正如我们上文所示，该问题在某种程度上取决于著名的 K¨othe 猜想。具体如下：合理地说，我们可以提出这样的问题：如果 R 是一个（强）幂零洁净环，且 $n \geq 1$ 是任意整数，那么矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是否弱周期? 事实上，根据 [27] （另见 [45]），在“强”情形下，我们可以写出因子环 $R/J(R)$ 是布尔环，而 $J(R)$ 是幂零的。因此，可以应用 [12]或 [23]，从而推出 $\mathbb{M}_n(R/J(R)) \cong \mathbb{M}_n(R)/\mathbb{M}_n(J(R))$ 是幂零洁净的。现在假设 K¨othe 猜想成立。[48] 中的习题 10.25 保证 $J(\mathbb{M}_n(R)) = \mathbb{M}_n(J(R))$ 是幂零的。由此可知，根据[30,命题 3.15]，$\mathbb{M}_n(R)$ 是幂零洁净的。因此，可以说，以下问题的解决也取决于 K¨othe 猜想：若 R 是一个强幂零洁净环，则矩阵环 $\mathbb{M}_n(R)$ 是幂零洁净的。

我们继续探讨弱周期群环的一些结论。

引理 5.13. 设群环 RG 是弱周期的。那么， R 是一个弱周期环，且群 G 的中心 Z(G) 是一个挠群。

证明。 作为.....的同态像 RG，环 R 也是弱周期的。由命题 5.3 (2) 可知，$RG \cong \prod_{i=1}^{k} R_iG$ 使得 $p_i \in J(R_i)$，其中每个 p_i 都是一个素数。由满同态 $R_iG \to (J^{R_i}(R_i))G$可知，$(J^{R_i}(R_i))G$是弱周期的，且 $\overline{\text{char}(J^{R_i}(R_i))} = p_i$。因此，~~不失~~一般性，我们可以假设环 $\overline{R}$ ~~具~~有素特征 p。

现在假设 $g \in \mathbf{Z}(G)$。显然， g 是一个周期元素。因此，对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $g^n - g \in \mathbf{Nil}(RG)$，于是存在一个整数 $k \geq 2$，使得 $(g^n - g)^k = 0$。也就是说，$(g^{n-1} - 1)^k = 0$。现在，取一个足够大的自然数 l，使得 $p^l \geq k$。因此，$(g^{n-1} - 1)^{p^l} = 0$。由于 RG 的特征为 p，我们有等式 $g^{(n-1)p^l} = 1$。因此，正如所述，$\mathbf{Z}(G)$ 是一个挠群。□

现在我们打算证明关于群环弱周期性的主要结论。

定理 5.14。以下两个命题成立：

(1) 设 R 是满足 $p \in \mathbf{Nil}(R)$ 的弱周期环，并设 G 是局部有限p-群，其中 p 是素数。那么，群环 RG 是弱周期的。(2) 设 R 是一个环， G 是一个幂零群。如果群环 RG 是弱周期的，那么 R 是弱周期环，且 G 是挠群。

证明。 (1) 由于 G 是局部有限的 p-群，且 $p \in Nil(R)$，由 [18, 命题 16] 可知，增广理想 $\Delta(RG)$ 是 RG 的幂零理想。由于 $\frac{RG}{\Delta\, RG()} \cong R$，由命题 5.4 可得 RG 是弱周期的。

(2) [8, 定理 5.2] 的证明稍作论证上的改动后，在此情形下同样适用。 □

现在，我们准备采用另一种方法来证明第 1 节中提到的命题 (*)。

推论 5.15。以下两个陈述成立：

(1) 设 R 是一个周期环，且 $p \in \mathbf{Nil}(R)$；设 G 是一个局部有限的 p-群，其中 p 是素数。那么，群环 RG 是周期的。(2) 设 R 是一个环， G 是一个群。如果群环 RG 是周期的，那么 R 是一个周期环，且 G 是一个挠群。

证明。 (1) 可仿照定理 5.14 中的第 (1) 项证明。

(2) 显然， R 是一个周期环。任取元素 $g \in G$。但是$R\langle g\rangle$是 RG的一个周期子环。因此，定理 5.14 使我们可以得出结论： $\langle g\rangle$是一个挠群。因此， G 也如所述，是一个挠群。 □

6. Open Questions

最后，以下六个额外问题有望推动该主题的进一步发展，并为我们后续可能开展的研究提供动力。

问题 1：如果 R 是周期环，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\mathbb{M}_n(R)$ 是否也是周期环?

如果不是，我们可以提出以下两个问题（与前面列出的定理 2.4对照）：

问题 2：如果 R 是一个周期环，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，是否可以推出 $\mathbb{M}_n(R)$ 是一个弱周期环?

问题 3：如果 R 是周期环，那么是否可推出对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\mathbb{M}_n(R)$ 都是 π-UU 环?

如果答案是肯定的，这将与 [19, 例 29] 中确立的结论形成对比：若 R 是一个π-UU 环（具体来说，整数环 $\mathbb{Z}$），那么 $\mathbb{M}_n(R)$ 对任意 都不是周期环 $n \geq 2$。

我们还可以考察接下来的三个相关问题：

问题 4：如果 R 是 UU环，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\mathbb{M}_n(R)$ 是否为 π-UU 环?

问题 5：如果 R 是一个 π-UU 环，那么 $J(R)$ 是否幂零?

问题 6：如果 F 是一个具有挠元的素特征 p 域，并且 G 是一个不一定为阿贝尔群的挠群，那么群环 $FG\,\pi$ 是否为 UU 环?

我们只知道，如果 G 是一个阿贝尔挠群，那么域 F 上的群环 FG 只有挠元。

资助：第一作者的科研工作得到了伏尔加地区数学中心发展计划的资助（协议编号：075-02-2020-1478）。第三作者（Peter V. Danchev）的科研工作部分得到了保加利亚国家科学基金的资助，资助项目为 2019 年 12 月 7 日的 KP-06 编号 32/1，同时还得到了安达卢西亚自治区 FQM 264 项目的资助。

References

[1] A.N. Abyzov 和 D.T. Tapkin，关于每个矩阵都可表示为幂等矩阵与q-幂矩阵之和的环，《西伯利亚数学杂志》62 (2021)，第1期，1–13。[2] A.N. Abyzov 和 D.T. Tapkin，环上的每个矩阵何时都是两个三幂等元之和?，Lin. Algebra & Appl. 630 (2021)，316–325。[3] A.N. Abyzov 和 D.T. Tapkin，关于具有 $x^n - x$ 幂零元的环，J. Algebra & Appl. 21 (2022)，第6期。[4] S.A. Amitsur，多项式环的根，《加拿大数学杂志》8 (1956)，355–361。[5] D. D. Anderson 和 P. V. Danchev，关于 Jacobson 的一个与周期环有关的定理的注记，《美国数学会会刊》148 (2020)，第12期，5087–5089[6] G. Baccella，半阿廷 V-环与半阿廷冯·诺伊曼正则环，《代数杂志》173 (1995)，第3期，587–612。[7] A. Badawi，关于阿贝尔 π-正则环，《Communications in Algebra》25(4) (1997)，1009–1021。[8] R. Barati、A. Mousavi 和 A.N. Abyzov，元素可表示为 m-幂元与幂零元之和的环，《Communications in Algebra》50 (2022)，第10期，4437–4459。[9] R. Barati 和 A. Mousavi，关于弱幂零洁净环的注记，《地中海数学杂志》20 (2023)。[10] H.E. Bell 和 H. Tominaga，关于周期环及相关环，《冈山大学数学杂志》28 (1986)，101–103。

[11] A.D. Bouzidi、A. Cherchem 和 A. Leroy，周期环上的斜多项式的指数，《Co mmunications in Algebra》49 (2021)，第4期，1639–1655。[12] S. Breaz、G. C˘alug˘areanu、P. Danchev 和 T. Micu，幂零洁净矩阵环，Lin. Algebra & Appl. 439 (2013)，第10期，3115–3119。[13] S. Breaz、P. Danchev 和 Y. Zhou，每个元素都可表示为幂零元与幂等元之和或之差的环，J. Algebra & Appl. 15 (2016)，第8期。[14] W. Chen 和 S. Cui，关于弱半交换环，《数学研究通讯》27 (2011)，179–192。[15] J. Chen、Y. Li 和 Y. Zhou，形态群环，《Journal of Pure and Applied Algebra》205 (2006)，第3期，621–639。[16] H. Chen 和 M. Sheibani，《洁净环与矩阵理论》，Word Scientific Publishing Com- pany，2022，692页。https://doi.org/10.1142/12959 [17] A.Y.M. Chin 和 H.V. Chen，关于强 π-正则群环，《东南亚数学通报》26 (2002)，第3期，387–390。[18] I.G. Connell，关于群环，《加拿大数学杂志》15 (1963)，650–685。[19] J. Cui 和 P. Danchev，周期环的一些新刻画，J. Algebra & Appl. 19 (2020)，第12期。[20] P.V. Danchev，交换群环中单位群的判据，《巴比什-博雅伊大学数学学报》51 (2006)，43–61。[21] P.V. Danchev，弱 UU 环，《筑波数学杂志》40 (2016)，第1期，101–118。[22] P.V. Danchev，关于交换 π-UU 幺环，《富山数学杂志》39 (2017)，1–7。[23] P.V. Danchev，强幂零洁净角环，《伊朗数学学会通报》43 (2017)，第5期，1333–1339。[24] P.V. Danchev，交换周期群环，Mat. Stud. 53 (2020)，218–220。[25] P.V. Danchev，弱三幂等环的刻画，《都灵理工大学数学研讨会报告》79 (2021)，第1期，21–32。[26]P. Danchev、E. Garc´ıa 和 M. G´omez Lozano，矩阵分解为幂等周期矩阵与平方零矩阵，《国际代数与计算杂志》32 (2022)，第2期，251–263。[27] P.V. Danchev 和 T.-Y. Lam，具有幺幂单位的环，《德布勒森数学出版物》88 (2016)，第3-4期，449–466。[28] P. Danchev 和 J. Matczuk，n-挠洁净环，《当代数学》727 (2019)，71–82。[29] P.V. Danchev 和 W.Wm. McGovern，交换弱幂零洁净幺环，《代数杂志》425 (2015)，410-422。[30] A.J. Diesl，幂零洁净环，《代数杂志》383 (2013)，197–211。[31] A.J. Diesl，环中可交换的幂等周期元与幂零元之和，J. Algebra & Appl. 22 (2023)。[32] L. Fuchs，《无限阿贝尔群》，第一卷，学术出版社，纽约和 Lodon，1970。[33] L. Fuchs，《无限阿贝尔群》，第二卷，学术出版社，纽约和伦敦，1973。[34] L. Fuchs 和 K.M. Rangaswamy，关于广义正则环，Math. Z. 107 (1968)，71–81。[35] B. Goldsmith 和 P. Vamos，关于洁净阿贝尔群的注记，《帕多瓦大学数学研讨会报告》117 (2007)，181–191。[36] K.R. Goodearl，《冯·诺伊曼正则环》，《数学专著与研究》第4卷，Pitman（高级出版计划），马萨诸塞州波士顿（1979）；第2版，Robert E. Krieger 出版公司，佛罗里达州马拉巴尔（1991）。[37] J. Grosen、H. Tominagaand 和 A. Yaqub，关于弱周期环、周期环与交换性定理，《冈山大学数学杂志》32 (1990)，77–81。[38] Y. Hirano、H. Tominaga 和 A. Yaqub，关于每个元素都可唯一表示为幂零元与某个特定幂元之和的环，《冈山大学数学杂志》30 (1988)，33–40。

[39] Y. Hirano，关于周期 PI 环和局部有限环，《冈山大学数学杂志》33 (1991), 115–120.[40] C. Huh, N.K. Kim 和 Y. Lee，强 π-正则环的例子，《Journal of Pure and Applied Algebra》189 (2004), no. 1-3, 195–210.[41] S.U. Hwang, Y.C. Jeon 和 Y. Lee，NI 环的结构与拓扑条件，《代数杂志》302 (2006), 186–199.[42] P. Kanwar, A. Leroy 和 J. Matczuk，多项式环中的洁净元，《当代数学》634 (2015), 197–204.[43] D. Khurana，模幂零理想提升幂等幂元，《Journal of Pure and Applied Algebra》225 (2021), no. 11.[44] M.T. Ko¸san, T.-K. Lee 和 Y. Zhou，除环上的每个矩阵何时都是一个幂等元与一个幂零元之和？Lin. Algebra & Appl. 450 (2014), no. 11, 7–12.[45] M.T. Ko¸san, Z. Wang 和 Y. Zhou，幂零洁净环与强幂零洁净环，《Journal of Pure and Applied Algebra》220 (2016), no. 2, 633–646.[46] P.A. Krylov，广义矩阵环的同构，代数与逻辑 47 (2008), no. 4, 258–262.[47] P. Krylov, A. Mikhalev 和 A.A. Tuganbaev，《阿贝尔群的端同态环》，施普林格科学与商业媒体 (2013).[48] T.-Y. Lam，《非交换环初级教程》，第二版，数学研究生教材，第131卷，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约，2001.[49] C.I. Lee 和 S.Y. Park，当幂零元包含于雅各布森根中时，《韩国数学会会刊》55 (2018), no. 5, 1193–1205.[50] T.-K. Lee 和 Y. Zhou，Armendariz 环与约化环，《Communications in Algebra》32 (2004), no. 6, 2287–2299.[51] G. Marks，关于2-素 Ore 扩张，《Communications in Algebra》29 (2001), no. 5, 2113–2123.[52] J. Matczuk，共轭（幂零）洁净环与 K ¨othe 问题，J. Algebra & Appl. 16 (2017), no. 4.[53] W.Wm. McGovern，群环 $\mathbb{Z}_{(p)}C_q$ 与 Ye 定理，J. Algebra & Appl. 17 (2018), no. 6.[54] A.R. Nasr-Isfahani，斜 Armendariz 环上斜多项式环和斜 Laurent 多项式环的根，《Communications in Algebra》42 (2014), no. 3, 1337–1349.[55] W.K. Nicholson，幂等元提升与交换环，美国数学会会刊229 (1977), 269–278.[56] D.S. Passman，群环中的幂零理想，密歇根数学杂志9 (1962), no. 4, 375–384.[57] V. Peri´c，关于满足多项式恒等式 $x^n - x = 0$的环，贝尔格莱德数学研究所出版物34(48) (1983), 165–167.[58] R.S. Pierce，结合代数，数学研究生教材，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约 (1982).[59] S. Purkait, T.K. Dutta 和 S. Kar，关于 m-洁净环和强 m-洁净环，《Co mmunications in Algebra》48 (2020), no. 1, 218–227.[60] A. Stancu，交换弱幂零洁净环札记，J. Algebra & Appl. 15 (2016), no. 10.[61] J. ˇSter，幂零洁净二次元，J. Algebra & Appl. 16 (2017), no. 10.[62]J. ˇSer，关于将 $\mathbb{Z}_2$ 上的矩阵表示为一个幂等元与一个幂零元之和，《线性代数与应用》544 (2018), 339–349.[63] G. Tang 和 Y. Zhou，一类形式矩阵环，Lin. Algebra & Appl. 438 (2013), 4672–4688.[64] G. Tang, C. Li 和 Y. Zhou，Morita 环境研究，《Communications in Algebra》42 (2014), no. 4, 1668–1681.

[65] A. Tuganbaev，《接近正则的环》，数学及其应用，第545卷，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特 (2002).[66] T. Wu，关于幂零指数有界的交换环，《Communications in Algebra》29 (2001), no. 7, 3089–3098[67] Y. Ye，半洁净环，《Communications in Algebra》31 (2003), no. 11, 5609-5625.[68] H.P. Yu，关于拟二侧环，Glasgow Math. J. 37 (1995), no. 1, 21–31.

Department of Algebra and Mathematical Logic, Kasan Federal University, VolgaRegion, Russian Federation
电子邮箱：adel.abyzov@kpfu.ru

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran电子邮箱：baratirooholla h@gmail.com; ruhollahbarati@modares.ac.ir

Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia,Bulgaria电子邮箱：danchev@math.bas.bg; pvdanchev@yahoo.com