arXiv:2301.07953v1 [math.CO] 19 Jan 2023

# 接近平均度的顶点度

Johannes Pardey DieterRautenbach

德国乌尔姆乌尔姆大学优化与运筹研究所{johannes.pardey,dieter.rautenbach}
@uni-ulm.de

摘要

设 $G$ 为一个有限、简单、无向图，其阶为 $n$，平均度为 $d$。在忽略低阶项的意义下，我们刻画了包含 $d$ 且必定含有某个顶点度的最小区间 $I$。特别地，对于 $d_+ \in \left(\sqrt{dn}, n-1\right]$，，我们证明 $G$ 中存在一个顶点，其度介于 $d_+ - \left( \frac{d_+ - d\ n}{n - d_+ + \sqrt{d_+^2 - dn}} \right)$ 和 $d_+$ 之间。

关键词：平均度；度序列

## 1 引言

一个显而易见的观察是，对于有限、简单、无向图，每个具有 $n$ 个顶点且平均度为 $d$ 的图 $G$ 都有一个度至多为 $d$ 的顶点，以及一个度至少为 $d$ 的顶点；也就是说，存在顶点度分别落在区间 $[0,d]$ 和 $[d,n-1]$ 内的顶点。本文研究包含 $d$ 的最小区间 $I$，使得每个这样的图 $G$ 必然包含某个顶点 $u$，其度 $d_G(u)$ 落在 $I$ 内。显然，哪些区间具有这一性质，已隐含在度序列的各种刻画中，例如著名的 Erd˝os-Gallai 刻画 [1,2]。本文旨在明确给出这样的区间；我们的研究动机最初源于一些依赖于本文所述结果特殊情形的嵌入问题 [3,4]。

我们的第一个结果给出了一个自然的区间，其长度约为图的阶的一半，并以平均度为中心；我们保证该区间中包含某个顶点度。证明中的一些估计（参见下文的 (6) 和 (7)）对应于 Erd˝os-Gallai 刻画 [1]中的不等式。

定理 1. 若 $G$ 是一个有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边的图，则存在一个顶点 $u$ 属于 $G$，使得

$$d - \frac{n-2}{2(n-1)}d \leq d_G(u) \leq d + \frac{n-2}{2(n-1)}\overline{d}, \tag{1}$$

其中，$d = \frac{2m}{n}$ 是 $G$ 的平均度，而 $\overline{d} = n-1-d$ 是 $G$的补图 $\overline{G}$的平均度。

此外，若 $G$没有顶点 $u$满足 $d - {}_2{}^{n-2}{}_{n-1()}d < d_G(u) < d + {}_2{}^{n-2}{}_{n-1()}\overline{d}$，则

- $G$ 的顶点集是不交并为两个集合 $V_+$ 和 $V_-$,
- $V_+$ 是一个阶为 $\frac{dn}{n-1}$的团,
- $V_-$ 是一个阶为 $\frac{\overline{d}n}{n-1}$的独立集,
- $V_+$ 中的每个顶点都恰好与 $V_-$中的一半顶点相邻，并且
- $V_-$ 中的每个顶点都恰好与 $V_+$中一半的顶点相邻。

定理 1 在一个特定情形下给出了相当精确的答案，其中区间取决于 $n$ 和$d$；这使得相应极值图的刻画成为可能。我们的第二个结果适用于更一般的情形；它给出的精确答案仅相差低阶项。

定理 2. 若 $G$ 是一个阶为 $n$ 、平均度为 $d$ 且满足 $0 < d < n-1$ 的图，并且 $d_+ \in \left(\sqrt{dn}, n-1\right]$,，则在 $G$ 中存在一个顶点 $u$，使得

$$d_+ - \frac{(d_+ - d)n}{n - d_+ + \sqrt{d_+^2 - dn}} \le d_G(u) \le d_+.$$

令 $d_-$ 表示定理 2 中给出的 $d_G(u)$ 的下界。对于 $d_+ \le \sqrt{dn}$，下面的引理 3 表明，关于 $d_-$ 实际上无法得出任何非平凡的结论；更准确地说，在这种情况下， $d_-$ 将为 0。定理 2 给出了 $d_-$ 的估计，并且除低阶项外，该估计是最佳可能的；可以构造适当的近极值图，使其逼近下文（17）中的数值。将定理 2 应用于 $G$ 的补图可得一个对称结果：先指定 $d_-$ 对于 $d_G(u)$ 的下界，再据此确定上界 $d_+$；也就是说，在这种情况下，将 $d_+$ 视为 $n$、$d$ 和 $d_-$ 的函数。对于定理 2 中给定的 $n$ 和 $d$，长度

$$\ell_{\min}(d_+) = d_+ - d_- = \frac{(d_+ - d)n}{n - d_+ + \sqrt{d_+^2 - dn}} = \left( \frac{\frac{d_+}{n} - \frac{d}{n}}{1 - \frac{d_+}{n} + \sqrt{\left(\frac{d_+}{n}\right)^2 - \frac{d}{n}}} \right) n$$

在指定区间内满足 $\min\left\{\ell_{\min}(d_+) : d_+ \in \left(\sqrt{dn}, n-1\right]\right\} \le \frac{n}{2}$，对每个 $d \in (0, n-1)$ 均成立。忽略低阶项，定理 1 对应于取值 $\frac{d_+}{n} = \frac{n+d}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{d}{2n}$，此时$\ell_{\min}(d_+) = \frac{n}{2}$；也就是说，忽略低阶项，定理 2 蕴含定理 1。对于 $d \ne \frac{n}{2}$ 以及 $d_+$ 的适当取值，定理 2 能保证存在一个顶点度，其所在区间比定理 1 中围绕 $d$ 的区间更小，参见图 1。

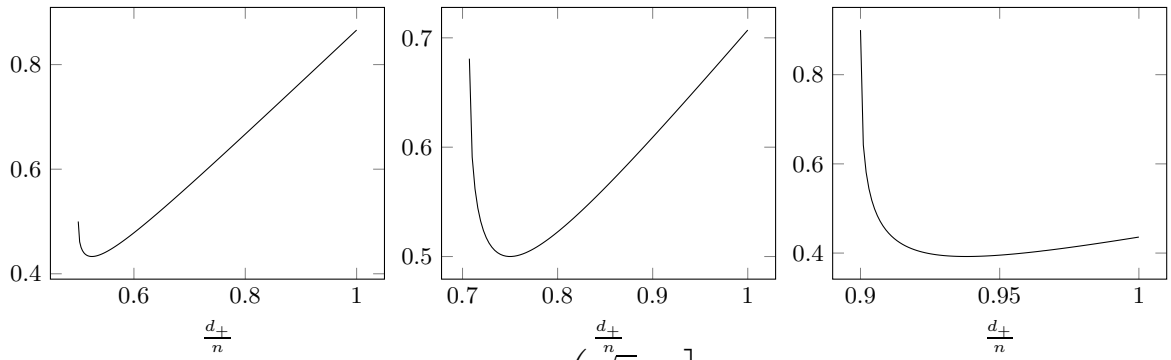


图 1：三幅图展示了 $\ell_{\min}(d_+)$ $n$ 随 $\frac{d_+}{n} \in \left(\sqrt{\frac{d}{n}}, 1\right]$ 的变化，其中 $\frac{d}{n} \in \{0.25, 0.5, 0.81\}$。

对给定的图反复应用我们的结果，每次移除一个度接近当前平均度的顶点，便可得到若干个顶点，它们的度必定落在围绕原始平均度缓慢变化的区间内。

证明见下一节。

## 2 证明

接下来我们给出两个结果的证明。

定理 1 的证明。设 $G$、 $n$、 $m$、 $d$ 和 $\overline{d}$ 如题述。由于当 $d \in \{0, n-1\}$ 时结论显然成立，我们可以假设 $0 < d < n-1$。令

$$V_- = \left\{ u \in V(G) : d_G(u) \leq d - \frac{n-2}{2(n-1)} d \right\} \quad \text{and} \quad V_+ = \left\{ u \in V(G) : d_G(u) \geq d + \frac{n-2}{2(n-1)} \overline{d} \right\}.$$

鉴于所需证明的结论，我们可以假设 $V(G)$ 是 $V_+$ 与 $V_-$ 的不交并。由于 $G$ 的平均度为 $d$，集合 $V_+$ 和 $V_-$ 均非空，因此对于 $x = \frac{|V_+|}{n}$，有 $\frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}$。$V_+$ 中顶点的度数和 $\sum d_G(u)$ 至多为以下两项之和：

- $G$ 中 $V_+$ 内部顶点之间的边数的两倍。该数量至多为 $xn(xn-1)$，且当且仅当 $V_+$ 是一个团时取等号。
- $G$ 中连接 $V_+$ 与 $V_-$ 的边数。该数量至多为 $\sum d_G(u)$，且当且仅当 $V_-$ 是一个独立集时取等号。

这意味着

$$\begin{aligned} dn &= \sum_{u \in V_+} d_G(u) + \sum_{u \in V_-} d_G(u) \\ &\leq xn(xn-1) + 2 \sum_{u \in V_-} d_G(u) \qquad (2) \\ &\leq xn(xn-1) + 2 \underbrace{(1-x)n}_{=|V_-|} \underbrace{\left( d - \frac{n-2}{2(n-1)} d \right)}_{\geq d_G(u) \text{ for } u \in V_-}. \qquad (3) \end{aligned}$$

对 $\overline{G}$ 应用完全相同的计数论证可得

$$\begin{aligned} (n-1-d)n &= \sum_{u \in V_-} d_{\overline{G}}(u) + \sum_{u \in V_+} d_{\overline{G}}(u) \\ &\leq (1-x)n((1-x)n-1) + 2 \sum_{u \in V_+} (n-1-d_G(u)) \qquad (4) \\ &\leq (1-x)n((1-x)n-1) + 2xn \underbrace{\left( n-1-d - \frac{n-2}{2(n-1)} \overline{d} \right)}_{\geq d_{\overline{G}}(u) \text{ for } u \in V_+}. \qquad (5) \end{aligned}$$

由（3）和（5），可得

$$f_1(x) := x(xn-1) + 2(1-x)\left( d - \frac{n-2}{2(n-1)} d \right) - d = \frac{(xn-1)(x(n-1)-d)}{n-1} \geq 0 \text{ and} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &:= (1-x)((1-x)n-1) + 2x\left( n-1-d - \frac{n-2}{2(n-1)} \overline{d} \right) - (n-1-d) \\ &= \frac{(x(n-1)-d)((x-1)n+1)}{n-1} \geq 0. \qquad (7) \end{aligned}$$

回想一下 $x \in \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$。由于 $f_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0$、$f_2\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$、$f_1\left(\frac{d}{n-1}\right) = f_2\left(\frac{d}{n-1}\right) = 0$ 和 $f_1\ x \qquad f_2\ x \qquad \{f_1\ x \quad f_2\ x\ \} < 0 \qquad x \in \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \setminus ( )$ 以 $\left\{\frac{1}{n}\ \frac{d}{n-1}\ 1-\frac{1}{n}\right\} \qquad 6 \qquad 7$ 及 ( ) 都是严格凸的，因此对于 , , , 有 min ( ) ( )。由 ( ) 和 ( )，可得

$$x \in \left\{\frac{1}{n}, \frac{d}{n-1}, 1-\frac{1}{n}\right\} \qquad \text{and} \qquad \min\left\{f_1(x), f_2(x)\right\} = 0.$$

为了证明存在一个顶点 $u$ 属于 $G$，满足 (1)，我们反设 $V_+$ 中没有顶点的度为 $d + {}_2{}^{n-2}_{n-1()}\overline{d}$，且 $V_-$ 中没有顶点的度为 $d - {}_2{}^{n-2}_{n-1()}d$。由于~~$V_+$ 和~~ $V_-$ 都非空，不等式 (3) 和 (5) 均变为严格~~不等式~~，由此得到矛盾 $\min\{f_1(x)\ f_2(x)\} > 0$。因此，存在某个顶点 $u$ 属于 $G$，满足 (1)。

接下来证明命题的第二部分。注意，假设 $G$没有满足 $d - {}_2{}^{n-2}_{n-1}( )\, d < d_G(u) < d + {}_2{}^{n-2}_{n-1}( )\overline{d}$ 的顶点 $u$，等价于假设 $V($~~$G$) 是~~ $V_+$ 和 $V_-$ 的不交~~并。若~~ $V_+$ 不是团，或 $V_-$ 不是独立集，则 (2) 和 (4) 变为严格不等式，从而得到矛盾 $\min\{f_1(x)\ f_2(x)\} > 0$。类似地，若 $V_+$ 中某个顶点的度严格大于 $d + \frac{n-2}{2\ n-1}( )\overline{d}$，且 $V_-$ 中某个顶点的度严格小于 $d - {}_2{}^{n-2}_{n-1}( )d$，则 (3) 和 (5) 变为严格不等式，再次得到矛盾 $\min\{f_1(x)\ f_2(x)\} > 0$。若 $V_+$ 是团，$V_-$ 是独立集，$V_-$中的所有顶点的度都恰好为 $d - {}_2{}^{n-2}_{n-1}( )d$，且 $V_+$ 中~~某个顶~~点的度严格大于 $d + {}_2{}^{n-2}_{n-1}( )\,\overline{d}$，那么

$$\begin{aligned} dn &= \sum_{u\in V_+} d_G(u) + \sum_{u\in V_-} d_G(u) \\ &> \left(d + \frac{n-2}{2(n-1)}\overline{d}\right)xn + \left(d - \frac{n-2}{2(n-1)}d\right)(1-x)n \\ &= \frac{(n-2)n}{2}x + \frac{n^2 d}{2(n-1)} \end{aligned}$$

这意味着矛盾 $x < \frac{d}{n-1}$。因此，根据 $G$ 与 $\overline{G}$之间的对称性，不妨设 $V_+$ 是一个团，$V_-$ 是一个独立集，$V_-$ 中的所有顶点的度恰好为 $d - \frac{n-2}{2\ n-1()}d$，而 $V_+$ 中的所有顶点的度恰好为 $d + {}_2{}^{n-2}_{n-1()}\overline{d}$。如上所述，这意味着 $x = \frac{d}{n-1}$，由~~此很容~~易得出，$V_+$ 中的每个顶点都恰好与 $V_-$ 中一半的顶点相邻，且 $V_-$ 中的每个顶点都恰好与 $V_+$ 中一半的顶点相邻。证明完毕。

□

区间

$$\left[d - \frac{n-2}{2(n-1)}d, d + \frac{n-2}{2(n-1)}\overline{d}\right]$$

由定理 1 得到的区间长度 $\frac{n-2}{2}$ 始终不变，但会随着 $d$的变化而自然移动。现在，对于 $[d, n-1]$中的给定值 $d_+$，我们考虑 $[0, d]$ 中最大的 $d_-$，使得 $d$ 周围的区间$I = [d_-, d_+]$ 必然包含某个顶点度；也就是说，我们指定 $I$ 的上端点 $d_+$，并将 $I$ 的下端点 $d_-$ 视为 $n$、$d$和 $d_+$的函数。很自然，如果 $d_+$ 足够接近 $d$，那么 $d_-$ 必定为 0，由此便得到了本文开头最显而易见的观察。

现在，设 $n$ 和 $m$ 为整数，满足 $0 < m < \binom{n}{2}$，且设 $d = \frac{2m}{n}$。

对于 $d_+ \in (d, n-1)$，令

$$d_- = d_-(n, d, d_+)$$

为满足以下条件的 $d_- \in [0,d]$ 的最小可能值：存在一个阶为 $n$ 、平均度为 $d$ 的图 $G$ ，其顶点集 $V(G)$ 被划分为两个集合

$$V_- = \{u \in V(G) : d_G(u) \le d_-\} \qquad \text{and} \qquad V_+ = \{u \in V(G) : d_G(u) \ge d_+\}.$$

显然， $d_-$ 和 $G$ 的选取意味着 $G$ 中存在一个度为 $d_-$的顶点；特别地， $d_-$ 是一个整数。

根据此定义，

- 每个阶为 $n$ 且平均度为 $d$ 的图都有一个度属于 $[d_-, d_+]$的顶点，而
- 存在这样一个图，其中没有顶点的度属于$(d_-, d_+)$，

也就是说， $[d_-, d_+]$ 确实是具有所需性质的最小区间。我们的目标是估计$d_- = d_-(n, d, d_+)$。

令 $G$ 如上所述。
与定理 1 的证明类似，条件 $d_+ > d$ 意味着 $V_-$ 和 $V_+$ 均非空。

对于 $V_-$ 和 $V_+$ 内的平均度 $\overline{d}_\pm = \frac{1}{|V_\pm|} \sum\limits_{u \in V_\pm} d_G(u)$ ，分别有

$$0 \le \overline{d}_- \le d_- \le d < d_+ \le \overline{d}_+ \le n-1. \tag{8}$$

对于 $x = \frac{|V_+|}{n} \in (0,1)$ ，有

$$(1-x)n\overline{d}_- + xn\overline{d}_+ = dn. \tag{9}$$

由于 $V_-$ 与 $V_+$ 之间的边数至少为 $\left(\overline{d}_+ - xn + 1\right) xn$，我们得到以下 Erd˝os-Gallai 型不等式

$$(1-x)n\overline{d}_- \ge \left(\overline{d}_+ - xn + 1\right) xn. \tag{10}$$

由此可得

$$d_-(n, d, d_+) \ge \mathrm{OPT}(P) \tag{11}$$

对于以下优化问题（$P$）：

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\text{最小化 } d_- \\ &s.th.\ (1-x)\overline{d}_- + x\overline{d}_+ = d && (12)\\ &\qquad (1-x)\overline{d}_- \ge \left(\overline{d}_+ - xn\right) x && (13)\\ &\qquad 0 \le \overline{d}_- \le d_- && (14)\\ &\qquad d_+ \le \overline{d}_+ \le n && (15)\\ &\qquad 0 \le x \le 1 && (16)\\ &\qquad d_-, \overline{d}_-, \overline{d}_+, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

注意，$(P)$ 是通过放宽 (8)、(9) 和 (10) 中的某些条件以及 $d_-$ 的整数性要求得到的。对于 $(P)$， $n$、$d$ 和 $d_+$ 的值被视为固定参数。

引理 3. 在上述设定下,

$$\mathrm{OPT}(P)=\begin{cases}0 & ,\ if\ d_+\le\sqrt{dn}\\ d_+-\frac{(d_+-d)n}{n-d_++\sqrt{d_+^2-dn}} & ,\ if\ d_+>\sqrt{dn}.\end{cases}$$

证明。注意，根据 (14)，$\mathrm{OPT}(P)\ge 0$。

如果 $d_+\le\sqrt{dn}$，那么 $\left(d_-,\overline{d}_-,\overline{d}_+,x\right)=\left(0,0,\sqrt{dn},\sqrt{\frac{d}{n}}\right)$ 是 $(P)$ 的一个最优解。

现在，令 $d_+>\sqrt{dn}$。

由于 $\left(d_-,\overline{d}_-,\overline{d}_+,x\right)$ 等于

$$\left(d_+-\frac{(d_+-d)n}{n-d_++\sqrt{d_+^2-dn}},d_+-\frac{(d_+-d)n}{n-d_++\sqrt{d_+^2-dn}},d_+,\frac{1}{n}\left(d_+-\sqrt{d_+^2-dn}\right)\right)\tag{17}$$

是 $(P)$ 的一个可行解，因此我们有

$$\mathrm{OPT}(P)\le d_+-\frac{(d_+-d)n}{n-d_++\sqrt{d_+^2-dn}}<d.$$

事实上，最终将证明 (17) 是一个最优解。

设 $\left(d_-,\overline{d}_-,\overline{d}_+,x\right)$ 是 $(P)$ 的一个最优解。特别地，$d_-<d$。根据目标函数，(14) 蕴含 $d_-=\overline{d}_-$。由于 $\overline{d}_-<d<\overline{d}_+$，(12) 和 (16) 蕴含 $0<x<1$。若 $d_-=0$，则 (13) 蕴含 $\overline{d}_+\le xn$；再结合 (12) 和 (15)，便得到矛盾 $d_+\le\overline{d}_+\le\sqrt{dn}$。因此，$d_->0$。若 (13) 不取等号，则将 $d_-$ 和 $\overline{d}_-$ 都减少一个充分小的 $\epsilon>0$，并将 $x$ 增加 $\delta=\frac{(1-x)\epsilon}{\overline{d}_++\epsilon-\overline{d}_-}\le\frac{\epsilon}{d_+-d}$，便可得到一个更优的可行解，这与假设矛盾。因此，(13) 取等号。结合 (12)，可得 $d-x\overline{d}_+=(\overline{d}_+-xn)x$。解出 $x$ 得

$$x\in\left\{\frac{1}{n}\left(\overline{d}_++\sqrt{\overline{d}_+^2-dn}\right),\frac{1}{n}\left(\overline{d}_+-\sqrt{\overline{d}_+^2-dn}\right)\right\}.$$

由（13）式取等号可得 $\overline{d}_+\ge xn$，因此 $x=\frac{1}{n}\left(\overline{d}_+-\sqrt{\overline{d}_+^2-dn}\right)$。

现在，将此值代入 $x$，可解出（12）式中的 $d_-$，得到

$$\begin{aligned}d_-&=\overline{d}_+-\frac{\left(\overline{d}_+-d\right)n}{n-\overline{d}_++\sqrt{\overline{d}_+^2-dn}}\\&=n\left(z-\frac{z-z_0}{1-z+\sqrt{z^2-z_0}}\right)\ \text{for } z=\frac{\overline{d}_+}{n}\text{ and }z_0=\frac{d}{n}.\end{aligned}$$

由于 $d_+>\sqrt{dn}$，我们有 $z\ge\frac{d_+}{n}>\sqrt{z_0}$。

对于函数,

$$f:\left(\sqrt{z_0},1\right]\to\mathbb{R}:z\mapsto z-\frac{z-z_0}{1-z+\sqrt{z^2-z_0}},$$

我们得到

$$f'(z)=\frac{(1-z)\left(2z^2-z_0-2z\sqrt{z^2-z_0}\right)}{\sqrt{z^2-z_0}\left(1-z+\sqrt{z^2-z_0}\right)^2}.$$

由于 $f'(z) \geq 0$ 对于 $z \in \left(\sqrt{z_0}, 1\right]$，因此在 $z \in \left[\frac{d_+}{n}, 1\right]$ 的条件下，$d_- = nf(z)$ 的最小可能值在 $z = \frac{d_+}{n}$ 时取得，这意味着

$$d_- = d_+ - \frac{(d_+ - d)n}{n - d_+ + \sqrt{d_+^2 - dn}}.$$

综上可知，$\left(d_-, \overline{d}_-, \overline{d}_+, x\right)$ 恰如 (17) 所示，证明至此完成。 □

现在，由 (11) 和引理 3 可得定理 2。

## 参考文献


[1] P. Erd˝os 和 T. Gallai，具有指定顶点度数的图（匈牙利语），Mat. Lapok 11 (1960) 264–274。

[2] S.L. Hakimi 和 E.F. Schmeichel，图及其度序列：综述，数学讲义 642 (1978) 225–235。

[3] E. Mohr、J. Pardey 和 D. Rautenbach，零和完全图中的生成森林的零和副本，Graphs and Combinatorics 38 (2022) 132。

[4] J. Pardey 和 D. Rautenbach，《利用条件期望高效查找零和完全图中生成森林的低权重副本》，Discrete Applied Mathematics 328 (2023年) 108–116。