arXiv:2301.07954v2 [nlin.SI] 3 May 2023

# 大初始数据下第一类 Painlevé 超越函数的连接问题

Wen-Gao Long* 和 Yu-Tian Li†

**摘要**

在先前工作中，Bender 和 Komijani（2015年《物理学杂志*A*：数学与理论》48, 475202）研究了第一 Painlevé（PI）方程，并证明可利用一个 $\mathcal{PT}$-对称哈密顿量渐近地确定产生分界线解的初始条件序列。在本研究中，我们在更一般的情形下考察 PI 方程的初值问题。我们证明，位于一系列曲线$\Gamma_n$, $n = 1$，2，.....上的初始条件（$y(0)$ $y'(0)$）$=(a,\ b)$将产生分界线解。这些曲线将 PI 的奇异解与振荡解分隔开来。我们推导出曲线 $\Gamma_n$ 在 $n \to \infty$ 时的极限形式方程 $b^2/4 - a^3 = f_n \sim An^{6/5}$，其中 $A$ 为正常数。离散集合 $\{f_n\}$ 可视为非线性特征值。我们的 $\Gamma_n$ 解析渐近公式与数值结果高度吻合，即使在 $n$较小时也是如此。主要工具是 Bassom 等人（1998年《*Arch. Rational Mech. Anal.*》143, 241–271）在研究第二 Painlevé 方程时提出的一致渐近方法。

*2010*年数学主题分类：33E17；34M55；41A60。关键词：Painlevé 方程、分界线、特征值、连接问题、一致渐近、艾里函数。

*中华人民共和国湘潭市湖南科技大学数学与计算科学学院，邮编 411201

†中华人民共和国广东省深圳市香港中文大学（深圳）科学与工程学院，邮编 518172。通讯作者。

# 1 引言

Painlevé 方程是一组六个具有 Painlevé 性质的非线性二阶常微分方程（ODE），即解的可动奇点必须是极点，而不能是支点或本性奇点。Painlevé 及其同事最初从纯数学角度研究这些 ODE，以对非线性方程进行分类；但它们后来在数学物理的诸多领域中找到了重要应用，包括统计物理 [1, 2, 3, 4, 5], 伊辛模型 [6, 7],和可积系统 [8]；另见 [9] 及其中的参考文献。

由于没有精确公式可用，渐近分析是研究 Painlev´e 方程解的行为时通常采用的方法。这自然引出了一个问题：如何关联同一解在不同区域内的行为，例如 $x \to -\infty$和 $x \to \infty$的渐近公式之间的联系。这就是所谓的连接问题。Painlev´e 方程的一些特殊情形已得到研究，其他情形仍有待进一步探讨。

本文着重研究第一 Painlev´e 方程的初值问题

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 + t, \tag{1.1}$$

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b. \tag{1.2}$$

众所周知，所有第一 Painlevé 方程解都是不可约的，也就是说，它们无法用任何初等函数或经典特殊函数表示。Holmes 和 Spence [10], 最早研究了初值问题，并证明当 $a = 0$时，存在 $\kappa_1 < 0 < \kappa_2$，使得满足 $\kappa_1 < b < \kappa_2$ 的第一 Painlevé 方程解在抛物线 $y = -\sqrt{-t/6}$附近振荡；而当 $b < \kappa_1$ 或 $b > \kappa_2$时，该解在负实轴上有无穷多个极点。根据 Kapaev [11]（另见 [12] 和 [13]），第一 Painlevé 方程解的渐近行为可分为以下三种类型。

(A) 振荡解：一族以抛物线 $y = -\sqrt{-t/6}$ 为中心振荡的二参数解；

(B) 分界线解：满足以下条件的一参数解族

$$y(t) = \sqrt{\frac{-t}{6}} + \frac{h}{4\sqrt{\pi}} 24^{-\frac{1}{8}} (-t)^{-\frac{1}{8}} \exp\left\{-\frac{4}{5} 24^{\frac{1}{4}} (-t)^{\frac{5}{4}}\right\} + \mathcal{O}\left(|t|^{-\frac{5}{2}}\right) \tag{1.3}$$

当 $t \to -\infty$ 时，其中

$$h = s_1 - s_4; \tag{1.4}$$

(C) 奇异解：一个双参数解族，在负实轴上具有无穷多个二阶极点。

上述三类解由斯托克斯乘子$s_k$, $k = 0$、1、2、3、4刻画，

$$\begin{aligned} &1 + s_2 s_3 > 0 \quad \text{for type (A)}, \\ &1 + s_2 s_3 = 0 \quad \text{for type (B)}, \\ &1 + s_2 s_3 < 0 \quad \text{for type (C)}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

这里，斯托克斯乘子定义见下文公式 (2.5)，另见 [14]。B 型分界线解也称为$tronqu\acute{e}e$ 解，因为这些解在复$t$平面的五个扇形区域中有两个扇形区域内没有极点。

一个自然的问题是如何将上述行为与初始数据 $(a,\ b)$ 联系起来。这是 Clarkson 曾多次提出的一个开放问题 [15, 16, 17]。多项研究运用渐近分析和数值模拟探讨了这一问题 [9, 13, 18, 19, 20, 21]。具体而言，Fornberg 和 Weidemann [21] 给出了 PI 实解在 $(a,\ b)$ 平面上的相图 [21, 图 4。5] 他们发现，$(a,\ b)$ 平面上存在一系列曲线，可产生 tronqu´ee 解，即 B 型解。这些曲线将 $(a,\ b)$ 平面划分为若干互不相连的区域，数值模拟表明，当初始数据 $(a,\ b)$ 在这些区域之间连续变化时，PI 解会在 A 型和 C 型之间交替。因此，这一现象的严格证明以及对这些分界曲线的解析研究仍有待开展，值得深入探究。

在先前的一项工作中，Bender–Komijani [9] 证明，对于固定的初始条件，例如 $y(0) = 0$，存在一列初始斜率 $y'(0) = b_n$，由此产生分界线解；类似地，当 $y'(0) = 0$时，存在一列初始值 $y(0) = a_n$，由此产生分界线解。序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 称为非线性特征值。受 Bender–Komijani [9], 的结果启发，Long 等人 [13] 使用复 WKB 方法（也称为一致渐近法），对非线性特征值 $a_n$ 和 $b_n$ 的渐近公式给出了严格证明。

Bender–Komijani [9]和 Long 等人 [13] 研究了当初始数据（$a,\ b$）沿相平面中的水平线变化时，PI 解如何演化

或沿相平面中的垂直线变化时，PI 解如何演化。尚待研究、或许更有意思的是，当 $y(0)$ 和 $y'(0)$ 同时变化时，解会如何演化。为了描述 [21, 图 4.5],中的曲线，我们应考虑这个更一般的情形，而不是固定其中一个初始数据。

注意到，第一 Painlevé 方程的哈密顿量为 $H(t) := \frac{y_t^2}{4} + \frac{ty}{2} - y^3$；因此 $H(0) = \frac{b^2}{4} - a^3$。这一量表明，我们可以将 $\frac{b^2}{4} - a^3$ 视为一个整体项——只需假设该项很大，便可据此对 PI 解进行渐近分类 $\frac{b^2}{4} - a^3$。从这个意义上说，所研究的问题转化为：当 $H(0)$ 很大时，第一 Painlevé 方程的哈密顿量$H(t)$ 在 $t = 0$ 和 $t \to -\infty$ 之间的连接问题。

利用复 WKB 方法（又称一致渐近方法），在假设 $a^3 \left| \frac{b^2}{4} - a^3 \right|^{-1}$ 有界的条件下，我们推导出 [21, 图 4.5] 中曲线的极限形式方程（当 $\frac{b^2}{4} - a^3 \to \pm\infty$时）。特别地，我们发现，位于曲线序列上的初始数据 $(y(0)\ y'(0)) = (a, b)$

$$\frac{b^2}{4} - a^3 = f_n(a,b) \sim A\, n^{6/5}, \qquad A = \left[ \frac{5\pi}{2\sqrt{3}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)} \right]^{6/5}, \tag{1.6}$$

导致分界线解；参见下文定理 1。根据 Bender–Komijani [9], ，分界线解起到特征函数的作用，而相应的初始数据可视为非线性方程的特征值。因此，我们可以将离散集 $\{f_n(a,\ b)\}$ 视为第一 Painlevé 方程的非线性特征值。人们或许会想知道，当 $\left| \frac{b^2}{4} - a^3 \right| \ll a^3$ 趋于 $a \to +\infty$时，第一 Painlevé 方程的解如何演化。值得一提的是这种情形中的一个特殊情况。假设 $a \to +\infty$ 且满足 $\frac{b^2}{4} - a^3 = 0$。从 [21, 图 4.5], 中，人们可能会猜测曲线 $\Gamma_0 : \frac{b^2}{4} - a^3 = 0$ 是指纹区域边界的一种极限形式，其中 $a \to +\infty$；也就是说，当 $a$ 足够大时， [21, 图 4.5]中的所有曲线都位于 $\Gamma_0$ 的左侧。然而，数值证据表明，沿着$\Gamma_0 : \frac{b^2}{4} - a^3 = 0$增加时，三种类型的第一 Painlevé 方程解会交替出现，其中 $a,\ b$ 。换言之，曲线 $\Gamma_0$ 会穿过 [21, 图 4.5]中绘出的所有曲线。我们还发现，当 $a,\ b$ 足够大且沿曲线 $\tilde{\Gamma}_0 : \frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a} = 0$变化时，上述交替现象消失，所有第一 Painlevé 方程解在负实轴上都有无穷多个极点，即所有解都属于 C 型。

上述讨论提示我们将 $\frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a}$ 视为一个整体项，并假设当 $\left|\frac{b^2}{4} - a^3\right| \ll a^3$ 时它很大。基于这一假设，我们成功建立了在 $\left|\frac{b^2}{4} - a^3\right| \ll a^3$ 情况下这些曲线的极限形式方程。

我们分析的主要工具是 Bassom 等人在研究第二 Painlevé 方程连接问题时提出的一致渐近方法。 [23] Long 等人随后将同一方法成功应用于第一 Painlevé 方程。 [13]本文的大部分分析沿袭了 [13] 中的工作，并作了一些必要的修改，见下文引理 1 的证明。

总之，本文旨在研究初始数据较大时，第一 Painlevé 方程在 $t = 0$ 与 $t = -\infty$ 之间的连接问题。我们拟根据 $a$ 和 $b$，对至少其中一个量较大的情形下的第一 Painlevé 方程解进行渐近分类。主要步骤是证明 [21, 图 4.5]中曲线的存在性，并推导其极限形式方程。分析分为两种情形：(i) $a^3 \leq M_1 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$；以及 (ii)$a^3 \geq M_2 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$，其中 $M_1$ 和 $M_2$ 是满足 $0 < M_2 < M_1$的两个常数。在情形 (i) 中，结果推广了 [13], 中的主要定理，这与 [22]给出的第二 Painlevé 方程结果相似。在情形 (ii) 中，我们得到了第一 Painlevé 方程解的一些新性质。特别是，我们发现了当 $a$ 在 $\frac{b^2}{4} - a^3 = 0$的条件下趋于无穷大时，第一 Painlevé 方程解如何演化。

## 2 第一 Painlevé 方程的单值化理论

本文的分析从第一 Painlevé 方程的以下 Lax 对开始

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \left\{ (4\lambda^4 + t + 2y^2)\sigma_3 - i(4y\lambda^2 + t + 2y^2)\sigma_2 - \left(2y_t\lambda + \dfrac{1}{2\lambda}\right)\sigma_1 \right\} \Psi \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ \left(\lambda + \dfrac{y}{\lambda}\right)\sigma_3 - \dfrac{iy}{\lambda}\sigma_2 \right\} \Psi \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

是泡利矩阵，且 $y_t = dy/dt$。相容条件 $\Psi_{\lambda t} = \Psi_{t\lambda}$ 表明，$y = y(t)$ 满足第一 Painlev´e 方程；例如，

见 [14]。在变换下

$$\Phi(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{4}\sigma_3} \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{\sqrt{2}} \Psi\big(\sqrt{\lambda}\big), \tag{2.2}$$

(2.1) 的第一个方程变为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} y_t & 2\lambda^2 + 2y\lambda - t + 2y^2 \\ 2(\lambda - y) & -y_t \end{pmatrix} \Phi. \tag{2.3}$$

显然，方程 (2.3) 唯一的奇点是不规则奇点$\lambda = \infty$，且规范解 $\Phi_k(\lambda)$、 $k \in \mathbb{Z}$ 满足

$$\Phi_k(\lambda, t) = \lambda^{\frac{1}{4}\sigma_3} \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{\sqrt{2}} \left( I + \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{\lambda}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) e^{\left(\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}} + t\lambda^{\frac{1}{2}}\right)\sigma_3}, \quad \lambda \in \Omega_k, \tag{2.4}$$

当 $\lambda \to \infty$ 时，其中 $\mathcal{H} = -(\frac{1}{2}y_t^2 - 2y^3 - ty)\sigma_3$，且

$$\Omega_k = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \ : \ \arg \lambda \in \left( -\frac{3\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right\}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

这些规范解由斯托克斯矩阵联系起来，

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k S_k, \tag{2.5}$$

其中斯托克斯矩阵为三角矩阵，形式如下

$$S_{2k-1} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2k-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2k} & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

且 $s_k$ 是斯托克斯乘子，满足以下约束

$$s_{k+5} = s_k \quad \text{and} \quad s_k = i(1 + s_{k+2}s_{k+3}), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.7}$$

此外，将 $s_k$ 视为 ($t$, $y(t)$ $y'(t)$) 的函数时，它们也满足

$$s_k\left(t, y(t), y'(t)\right) = -\overline{s_{-k}\left(\bar{t}, \overline{y(t)}, \overline{y'(t)}\right)}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{2.8}$$

其中，$\zeta$ 表示复数 $\zeta$ 的复共轭；参见 [11,式 (13)]。由式 (2.7) 可直接看出，一般而言，两个斯托克斯乘子

即可确定其余所有乘子。关于式 (2.4)、(2.5) 和 (2.7) 的推导，以及有关 Lax 对的更多细节，请参阅 [12]。

我们用来计算斯托克斯乘子的主要方法是复 WKB 方法，也称为 Bassom 等人 [23]提出的一致渐近方法。推导分为两个步骤。第一步，我们将 Lax 对 (2.1) 的第一个方程变换为二阶薛定谔方程。记

$$\Phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

并定义 $Y(\lambda;\, t) = (2(\lambda - y))^{-\frac{1}{2}}\phi_2$，则有

$$\frac{d^2Y}{d\lambda^2} = \left[ y_t^2 + 4\lambda^3 + 2\lambda t - 2yt - 4y^3 - \frac{y_t}{\lambda - y} + \frac{3}{4}\frac{1}{(\lambda - y)^2} \right] Y. \tag{2.9}$$

当 $t = 0$ 时，方程 (2.9) 可简化为

$$\frac{d^2Y}{d\lambda^2} = \left[ 4\lambda^3 + 4\left( \frac{b^2}{4} - a^3 \right) - \frac{b}{\lambda - a} + \frac{3}{4}\frac{1}{(\lambda - a)^2} \right] Y. \tag{2.10}$$

可以将 (2.10) 视为标量方程，也可以视为 $1 \times 2$ 向量方程。全文中，我们假设 $a$ 和 $b$ 至少有一个较大。

在情形 (i) 中，$a^3 \leq M_1 \left| \frac{b^2}{4} - a^3 \right|$。由于我们假设 $a$ 和 $b$ 至少有一个较大，因此可得出 $\frac{b^2}{4} - a^3$ 是较大的正数或负数。为应用一致渐近方法，我们引入一个大参数 $\xi \to +\infty$，使得

$$\frac{b^2}{4} - a^3 = \pm\xi^{\frac{6}{5}} \tag{2.11}$$

并设

$$\lambda = \eta\xi^{\frac{2}{5}}, \qquad a = A(\xi)\xi^{\frac{2}{5}}, \quad b = B(\xi)\xi^{\frac{3}{5}}. \tag{2.12}$$

那么，

$$\begin{cases} \frac{B(\xi)^2}{4} - A(\xi)^3 &= 1, \\ \frac{B(\xi)^2}{4} - A(\xi)^3 &= -1. \end{cases} \tag{2.13}$$

且当 $\xi \to +\infty$ 时，$A(\xi)$ $B(\xi) = \mathcal{O}(1)$。此外，方程 (2.10) 变为

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{d\eta^2} =& \xi^2 \left[ 4\eta^3 + 4\left( \frac{B(\xi)^2}{4} - A(\xi)^3 \right) - \frac{B(\xi)}{\xi(\eta - A(\xi))} + \frac{3}{4}\frac{1}{\xi^2(\eta - A(\xi))^2} \right] Y \\ :=& \xi^2 \left[ 4\eta^3 + 4\left( \frac{B(\xi)^2}{4} - A(\xi)^3 \right) - \varphi(\eta, \xi) \right] Y, \end{aligned} \tag{2.14}$$

其中，当 $\xi \to +\infty$ 时， $\varphi(\eta,\xi) = \mathcal{O}(\xi^{-1})$，且对于所有远离 $\eta = A(\xi)$ 的 $\eta$ 以及所有有界的 $A(\xi)$ $B(\xi)$，该结果均一致成立。

在情形 (ii) 中，当 $a^3 \gg \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$ 时，我们有 $b^2 \sim 4a^3$；因此当 $\xi \to +\infty$ 时， $\frac{b}{a} \sim 2a^{\frac{1}{2}} \gg \xi^{\frac{1}{5}}$，并且可能支配 $\left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$。所以，情形 (i) 中使用的大参数不再合适，取而代之的是，我们引入另一个大参数 $\mu \to +\infty$，使得

$$\frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a} = \pm\mu^{\frac{6}{5}} \tag{2.15}$$

并令

$$\lambda = \tilde{\eta}\mu^{\frac{2}{5}}, \qquad a = \tilde{A}(\mu)\mu^{\frac{2}{5}}, \quad b = \tilde{B}(\mu)\mu^{\frac{3}{5}}. \tag{2.16}$$

Then

$$\begin{cases} \frac{\tilde{B}(\mu)^2}{4} - \tilde{A}(\mu)^3 + \frac{\tilde{B}(\mu)}{4\tilde{A}(\mu)} & = 1, \\ \frac{\tilde{B}(\mu)^2}{4} - \tilde{A}(\mu)^3 + \frac{\tilde{B}(\mu)}{4\tilde{A}(\mu)} & = -1, \end{cases} \tag{2.17}$$

且当 $\mu \to +\infty$ 时， $|\tilde{A}(\mu)|^{-1}$， $|\tilde{B}(\mu)|^{-1} = \mathcal{O}(1)$。用新变量 $\tilde{\eta}$ 表示，方程 (2.10) 变为

$$\begin{aligned} \frac{d^2Y}{d\tilde{\eta}^2} =& \mu^2 \left[ 4\tilde{\eta}^3 + 4\left( \frac{\tilde{B}(\mu)^2}{4} - \tilde{A}(\mu)^3 + \frac{\tilde{B}(\mu)}{4\mu\tilde{A}(\mu)} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\tilde{B}(\mu)\tilde{\eta}/\tilde{A}(\mu)}{\mu(\tilde{\eta} - \tilde{A}(\mu))} + \frac{3/4}{\mu^2(\tilde{\eta} - \tilde{A}(\mu))^2} \right] Y \\ =: & \mu^2 \left[ 4\tilde{\eta}^3 + 4\left( \frac{\tilde{B}(\mu)^2}{4} - \tilde{A}(\mu)^3 + \frac{\tilde{B}(\mu)}{4\mu\tilde{A}(\mu)} \right) - \tilde{\varphi}(\tilde{\eta},\mu) \right] Y, \end{aligned} \tag{2.18}$$

其中，对于所有远离 $\tilde{\eta} = \tilde{A}(\mu)$ 的 $\tilde{\eta}$，以及所有 $|\tilde{A}(\mu)|^{-1}$， ，都有 $\tilde{\varphi}(\tilde{\eta},\ \mu) = \mathcal{O}(\mu^{-1})$ 当 $\mu \to +\infty$ 时一致成立； $|\tilde{B}(\mu)|^{-1} = \mathcal{O}(1)$。

在后续分析中，我们的任务是推导该方程的解在上述两种情况下的统一渐近行为。在每种情况下，我们都得到了斯托克斯乘子在 $\xi \to +\infty$ 或 $\mu \to +\infty$ 时的渐近行为。将相应结果代入 (1.3)，我们便得到以 $a$ 和 $b$ 表示的 PI 解的渐近分类。

本文其余部分安排如下。第2节陈述主要结果，包括斯托克斯乘子的主导渐近行为

以及用$a$ 和 $b$表述的第一 Painlevé 方程解的渐近分类。部分引理的证明见第3节，其中将采用一致渐近方法。最后一节给出总结性评论和讨论。

# 3 主要结果

回顾一下，第一 Painlevé 方程的三类解由式 (1.5) 中的斯托克斯乘子分类。我们的主要任务是推导斯托克斯乘子与初始数据 $a$ 和 $b$之间的关系。虽然难以找到用 $a$ 和 $b$表示斯托克斯乘子的精确公式，但受 [13]和 [24], 中的思想启发，我们似乎可以得到斯托克斯乘子的主导渐近行为。

## 3.1 斯托克斯乘子的主导渐近行为

当初始数据满足 $a^3 \leq M_1 \left| \frac{b^2}{4} - a^3 \right|$时，我们发现 $A(\xi)\ B(\xi) = \mathcal{O}(1)$，当 $\xi \to +\infty$时。根据 (2.13)，我们将讨论分为两种情况，相应的结果分别陈述于以下两个引理中。

**引理 1**。 当 $\frac{B(\xi)^2}{4} - A(\xi)^3 = 1$，即 $\frac{b^2}{4} - a^3 = \xi^{\frac{6}{5}} \to +\infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} s_1 =& i \exp\left\{2\xi E_0 - 2\, E_1 + o(1)\right\}, \\ s_{-1} = -\overline{s_1} =& i \exp\left\{2\xi F_0 - 2\, F_1 + o(1)\right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

对于所有 $A(\xi)\ B(\xi) = \mathcal{O}(1)$，一致地成立，其中

$$\begin{aligned} E_0 = \overline{F_0} =& \frac{3}{5}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}i}{5}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \\ E_1 = \overline{F_1} =& \frac{1}{4}\int_{e^{\frac{\pi i}{3}}}^{\infty e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{B(\xi)}{(s^3+1)^{\frac{1}{2}}\,(s - A(\xi))} ds. \end{aligned} \tag{3.2}$$

**引理 2.** 当 $\frac{B(\xi)^2}{4} - A(\xi)^3 = -1$，即 $\frac{b^2}{4} - a^3 = -\xi^{\frac{6}{5}} \to -\infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} s_2 =& i \exp\left\{-2\xi G_0 + 2G_1 + o(1)\right\}, \\ s_3 = s_{-2} =& i \exp\left\{-2\xi H_0 + 2H_1 + o(1)\right\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

对所有 $A(\xi)\ B(\xi)\ = \mathcal{O}(1)$均一致成立，其中

$$\begin{aligned} G_0 = \overline{H_0} =& \frac{2}{5} e^{\frac{2\pi i}{3}} \mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \\ G_1 = \overline{H_1} =& \frac{1}{4} \int_{e^{\frac{2\pi i}{3}}}^{\infty e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{B(\xi)}{(s^3-1)^{\frac{1}{2}}\,(s - A(\xi))} ds. \end{aligned} \tag{3.4}$$

当初始数据满足 $a^3 \geq M_2 \left| \frac{b^2}{4} - a^3 \right|$时，我们还根据 (2.17) 将讨论分为两种情况，并在以下引理中陈述 Stokes 乘子的相应主导渐近行为。

**引理 3.** 当 $\tilde{B}(\mu^2 - \tilde{A}(\mu))^3 + \tilde{B}(\mu)\, 4\mu\tilde{A}(\mu) = 1$，即 $\frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a} = \mu^{\frac{6}{5}} \to +\infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} s_1 =& i \exp\left\{ 2\mu E_0 - 2\,\tilde{E}_1 + o(1) \right\}, \\ s_{-1} = -\overline{s_1} =& i \exp\left\{ 2\mu F_0 - 2\,\tilde{F}_1 + o(1) \right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

对所有 $|\tilde{A}(\mu)|^{-1}, |\tilde{B}(\mu)|^{-1} = \mathcal{O}(1)$，均一致成立，其中 $E_0, F_0$ 在.....中给出 (3.2)

$$\tilde{E}_1 = \overline{\tilde{F}_1} = \frac{1}{4} \int_{e^{\frac{\pi i}{3}}}^{\infty e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{s\tilde{B}(\mu)}{(s^3+1)^{\frac{1}{2}}\,\tilde{A}(\mu)(s - \tilde{A}(\mu))} ds. \tag{3.6}$$

**引理 4.** 当 $\tilde{B}(\mu^2 - \tilde{A}(\mu))^3 + \tilde{B}(\mu)\, 4\mu\tilde{A}(\mu) = -1$，即 $\frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a} \equiv -\mu^{\frac{6}{5}} \to -\infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} s_2 =& i \exp\left\{ -2\mu G_0 + 2\tilde{G}_1 + o(1) \right\}, \\ s_3 = -\overline{s_2} =& i \exp\left\{ -2\mu H_0 + 2\tilde{H}_1 + o(1) \right\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

对所有 $|\tilde{A}(\mu)|^{-1}, |\tilde{B}(\mu)|^{-1} = \mathcal{O}(1)$均一致成立，其中 $G_0, H_0$ 由引理 *2* 给出，且

$$\tilde{G}_1 = \overline{\tilde{H}_1} = \frac{1}{4} \int_{e^{\frac{2\pi i}{3}}}^{\infty e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{\tilde{B}(\mu)s}{(s^3-1)^{\frac{1}{2}}\,\tilde{A}(\mu)(s - \tilde{A}(\mu))} ds. \tag{3.8}$$

注记 1。 (i) 当 $a$ 或 $b \to \infty$ 且满足 $M_2 \leq a^3 \left| \frac{b^2}{4} - a^3 \right|^{-1} \leq M_1$时，有 $\left| \frac{b^2}{4} - a^3 \right| = \xi^{\frac{6}{5}}$和 $\frac{b}{4a} = \mathcal{O}(\xi^{\frac{1}{5}})$。因此 $\frac{b}{4a} \ll \frac{b^2}{4} - a^3$，这意味着$\xi \sim \mu$ 并且

$$\begin{aligned} \mu E_0 - \tilde{E}_1 =& \xi E_0 - E_1 + o(1), \\ \mu F_0 - \tilde{F}_1 =& \xi F_0 - F_1 + o(1) \end{aligned} \tag{3.9}$$

当 $\xi \to +\infty$ 时。

(ii) 当 $\frac{b^2}{4} - a^3 \to -\infty$ 满足 $M_2 \le a^3 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|^{-1} \le M_1$时，我们还有

$\xi \sim \mu$ 和

$$\begin{aligned} \mu G_0 - \tilde{G}_1 &= \xi G_0 - G_1 + o(1), \\ \mu H_0 - \tilde{H}_1 &= \xi H_0 - H_1 + o(1). \end{aligned} \tag{3.10}$$

这意味着，在 $(a,\ b)$ 的重叠区域 $M_2 \le a^3 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|^{-1} \le M_1$ 中，引理 1 和 2 分别与引理 3 和 4 相一致。

## 3.2 PI 解的分类

结合方程 (3.1)、(3.5) 和 (1.5)，可得以下结果。

**定理 1.** 设 $y(t;\ a, b)$ 是第一 *Painlevé* 方程的一个解，满足 $y(0) = a, y'(0) = b$，且 $M_1, M_2$ 是满足 $0 < M_2 < M_1$ 的两个任意常数。那么存在一个曲线序列

$$\Gamma_n : \begin{cases} \frac{b^2}{4} - a^3 = f_n(a,b), & a^3 \le M_1 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|, \\ \frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a} = g_n(a,b), & a^3 \ge M_2 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right| \end{cases} \tag{3.11}$$

*with*

$$f_n(a,b) = \left[\frac{5}{2\sqrt{3}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}\left(n\pi - \frac{\pi}{2} - \mathrm{Im}(E_1 - F_1) + o(1)\right)\right]^{\frac{6}{5}} \tag{3.12}$$

*and*

$$g_n(a,b) = \left[\frac{5}{2\sqrt{3}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}\left(n\pi - \frac{\pi}{2} - \mathrm{Im}(\tilde{E}_1 - \tilde{F}_1) + o(1)\right)\right]^{\frac{6}{5}}, \tag{3.13}$$

如 $n \to \infty$，使得相应的解 $y(t; a, b)$ 与 $(a, b) \in \Gamma_n$属于 ***B*** 型，且

$$h := h_n = \begin{cases} (-1)^{n-1} 2 \exp\left\{f_n(a,b)P_0 + o(1)\right\}, & a^3 \le M_1 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|, \\ (-1)^{n-1} 2 \exp\left\{g_n(a,b)P_0 + o(1)\right\}, & a^3 \ge M_2 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right| \end{cases} \tag{3.14}$$

当 $n \to +\infty$ 时，其中 $P_0 = \frac{6}{5}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ 和 $E_1, F_1, \tilde{E}_1, \tilde{F}_1$ 在(3.2)和(3.6)中给出。此外，我们有

(i) 如果$(a, b)$ 位于 $\Gamma_{2m}$ 和 $\Gamma_{2m+1}$之间的区域，则解 $y(t; a, b)$属于 *A* 型，

(ii) 若$(a, b)$ 位于 $\Gamma_{2m-1}$ 与 $\Gamma_{2m}$ 之间的区域，则解 $y(t; a, b)$属于 *C* 型。

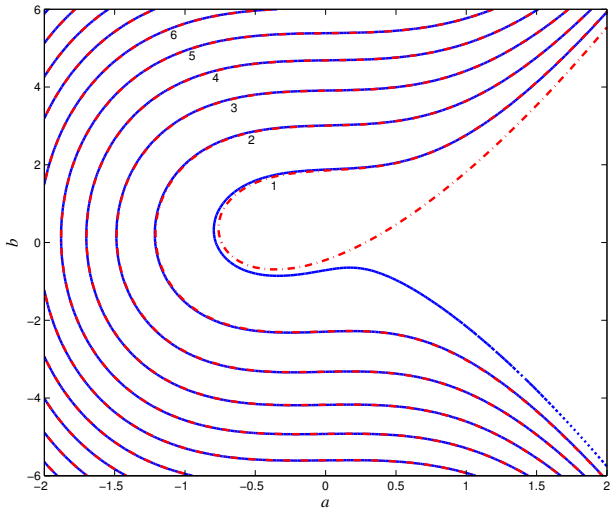


图 1：$(a, b)$ 的曲线 $\Gamma_n$，它们产生第一 Painlevé 方程的实 tronquée 解。蓝线是式 (3.11) 中给出的 $\Gamma_n$ 的大-$n$ 渐近式，红色点划曲线是通过数值模拟得到的 $\Gamma_n$ 的精确值。

证明。 这里我们假设 $a^3 \le M_1 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$，而 $a^3 \ge M_2 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$的情形可以用类似的方法证明。

注意到由式 (2.7) 得到的 $s_k = i(1 + s_{k+2}s_{k+3})$，我们有

$$s_0 = \frac{s_1 + s_{-1} - i}{-s_1 s_{-1}}. \tag{3.15}$$

将引理 1 中给出的 $s_1$ 和 $s_{-1}$ 在 $\xi \to +\infty$下的主导渐近行为代入 (3.15)，得到

$$s_0 = ie^{\mathrm{Re}(E_0+F_0)\xi+\mathrm{Re}(E_1+F_1)+o(1)} \left[\cos\left(-\mathrm{Im}(E_0 - F_0)\xi + \mathrm{Im}(E_1 - F_1)\right) + o(1)\right] \tag{3.16}$$

当 $\xi \to +\infty$时。将 $s_0 = s_0(\xi)$视为 $\xi$的函数，显然 $s_0$ 有一列零点。令 $\{\xi_n\}$ 表示 $s_0(\xi)$中靠近正实轴上 (3.16) 中余弦函数第 $n$个零点的那个零点。那么，

$$\xi_n = \frac{n\pi - \frac{\pi}{2} - \mathrm{Im}(E_1 - F_1) + o(1)}{-\mathrm{Im}(E_0 - F_0)}, \qquad n \to +\infty. \tag{3.17}$$

这证明了 $\Gamma_n$的存在性。将 (3.1) 代入 (1.4)，得到 (3.14) 中 $h_n$ 的渐近式。此外，我们还有

$$\mathrm{Im}s_0 \begin{cases} > 0, & \xi \in (\xi_{2m}, \xi_{2m+1}), \\ < 0, & \xi \in (\xi_{2m-1}, \xi_{2m}), \end{cases} \tag{3.18}$$

结合 (1.5)，这意味着 (i) 和 (ii)；由此完成证明 f. □

注 2。 在定理 1 中，我们只证明了 $\Gamma_n$ 的存在性，并推导出当 $n \to +\infty$时 $\Gamma_n$ 的极限形式方程。这是因为我们已经得到了当 $\xi \to +\infty$时 $s_0(\xi)$ 的主导渐近行为。尽管当 $n \to +\infty$ 时 $\Gamma_n$ 的极限形式方程针对 $a^3 \le M_1 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$和 $a^3 \ge M_2 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$ 分别分为两部分，但从注 1 可以看出，它们在重叠区域 $M_2 \le a^3 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|^{-1} \le M_1$内是一致的。需要注意的是，我们不能说 $\xi_n$ 恰好是 $s_0(\xi)$ 的第 $n$ 个零点，因为我们只在 (3.16) 中得到了当 $\xi \to +\infty$ 时 $s_0(\xi)$ 的渐近行为。尽管如此，数值证据表明， $\xi_n$ 确实是 $s_0(\xi)$ 的第 $n$ 个零点。这纯属巧合。

根据引理2和引理4，我们得到以下定理。

**定理 2.** 设 $y(t; a, b)$ 是满足 $y(0) = a, y'(0) = b$ 的第一 *Painlevé* 方程的一个解，则存在两个常数 $M_3, M_4 > 0$，使得 $y(t; a, b)$ 属于 *C* 型，前提是 $a^3 - \frac{b^2}{4} - \frac{b}{4a} > M_3$ 和 $a > M_4$。

证明。 根据 (1.5)，我们只需证明当 $a \to +\infty$ 和 $\frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a} \to -\infty$ 时，$\mathrm{Im}s_0 < 0$。由 (2.7) 可知， $s_0 = i(1 + s_2 s_3) = i(1 - |s_2|)$，因此等价于证明当 $a$ 和 $a^3 - \frac{b^2}{4} - \frac{b}{4a}$ 均为较大的正数时， $|s_2| > 1$。

当 $a \to +\infty$满足 $a^3 \le M_1 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$时，我们有 $\left|\frac{b^2}{4} - a^3\right| \to +\infty$和 $\frac{b}{4a} \ll \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$；结合 $a^3 - \frac{b^2}{4} - \frac{b}{4a} \to +\infty$，可推出$\frac{b^2}{4} - a^3 \to -\infty$。根据引理 2，我们得出 $|s_2| > 1$。

当 $a \to +\infty$ 满足 $a^3 \geq M_2 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$ 时，由引理 4 可立即得出，当 $a^3 - \frac{b^2}{4} - \frac{b}{4a}$ 足够大时，$|s_2| > 1$。

这就完成了定理 2 的证明。 □

上述定理 1 和定理 2 是当前工作的主要结果。它们将先前工作中的若干重要结果作为特殊情形涵盖在内：(i) 当 $a$ 和 $b$ 中一个固定、另一个增大时，我们可以从定理 1 推导出 [13, 定理 1]和 [13, 定理 2] 中的相应结果；(ii) [13, 定理 3] 是上述定理 2 的直接推论。

定理 1 和定理 2 也能给出新的结果和现象。例如，作为定理 1 和定理 2 的特殊情形，我们发现当 $(a, b)$ 沿曲线 $\frac{b^2}{4} - a^3 = 0$ 移动时，第一 Painlevé 方程的解如何演变。$b \to +\infty$和 $b \to -\infty$ 这两种情形存在显著差异。

**推论 1.** 存在一个正递增序列 $0 < c_1 < c_2 < \cdots$，满足

$$c_n = 4\left[\frac{5\sqrt{3}}{6\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)\right)\right]^{\frac{12}{5}}, \quad n \to +\infty \tag{3.19}$$

使得 $y(t; c_n, 2(c_n)^{3/2})$ 属于 *B* 型。此外，当 $a \in (c_{2m}, c_{2m+1})$ 时，解$y(t; a, 2a^{3/2})$ 属于 *A* 型；当$a \in (c_{2m-1}, c_{2m})$时，属于 *C* 型。

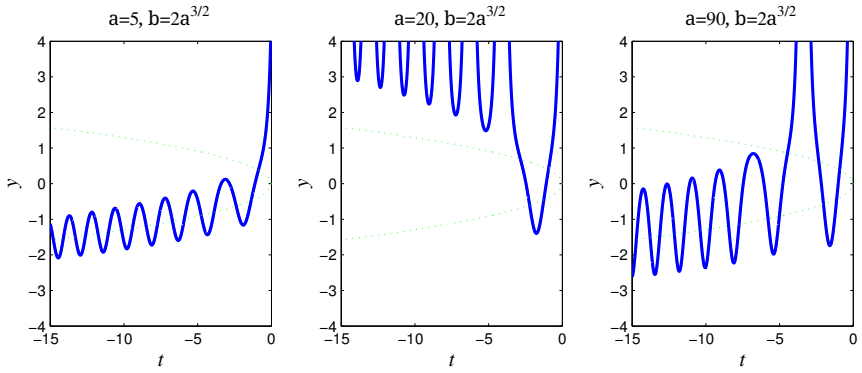


图 2： $a = 5$，20，90 和 $b = 2a^{\frac{3}{2}}$ 对应的 PI 解。

证明。当 $b \to +\infty$ 且 $\frac{b^2}{4} - a^3 = 0$ 时，我们有 $a \to +\infty$ 和 $a^{-3}\left|\frac{b^2}{4} - a^3\right| \leq M_2$，这意味着 $b \sim 2a^{\frac{3}{2}}$。根据定理 1，存在一个序列 $\{c_n\}$，满足

$$c_n = 4\left[\frac{5\sqrt{3}}{6\mathbf{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)}\left(n\pi - \frac{\pi}{2} - \mathrm{Im}(\tilde{E}_1 - \tilde{F}_1) + o(1)\right)\right]^{\frac{12}{5}}, \quad n \to +\infty \tag{3.20}$$

使得解 $y(t;\, c_n,\, 2(c_n)^{3/2})$ 属于 B 型。

由于我们假设 $\frac{b^2}{4} - a^3 = 0$，利用 (2.15) 中的 $\frac{b^2}{4} - a^3 + \frac{b}{4a} = \mu^{\frac{6}{5}}$，可得 $\frac{b}{4a} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2} = \mu^{\frac{6}{5}}$。由此再根据 (2.16) 可知，$\tilde{A}(\mu) \sim 4\mu^2$ 并且 $\tilde{B}(\mu) \sim 16\mu^3$，当 $\mu \to +\infty$ 时。由 (3.6) 经过繁琐但直接的计算可得

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_1 - \tilde{F}_1 &= \frac{1}{4}\int_{e^{\frac{\pi i}{3}}}^{\infty e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{s\tilde{B}(\mu)/\tilde{A}(\mu)}{(s^3+1)^{\frac{1}{2}}(s-\tilde{A}(\mu))}ds - \frac{1}{4}\int_{e^{-\frac{\pi i}{3}}}^{\infty e^{-\frac{\pi i}{3}}} \frac{s\tilde{B}(\mu)/\tilde{A}(\mu)}{(s^3+1)^{\frac{1}{2}}(s-\tilde{A}(\mu))}ds \\
&= -\frac{2\pi i\tilde{B}(\mu)}{4(\tilde{A}(\mu)^3+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4}\int_{e^{-\frac{\pi i}{3}}}^{e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{s\tilde{B}(\mu)/\tilde{A}(\mu)}{(s^3+1)^{\frac{1}{2}}(s-\tilde{A}(\mu))}ds \\
&= -\pi i + \mathcal{O}(\mu^{-1})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

当 $\mu \to +\infty$ 时。将最后一个方程代入 (3.20)，立即得到 (3.19)。

推论 1 的其余部分是定理 1 的直接推论。 □

**推论 2.** 存在一个常数 $M_5 > 0$，使得每当 $a > M_5$ 时，相应的 $y(t;\ a, -2a^{\frac{3}{2}})$ 是一个 C 型解。

证明。根据定理 2，存在两个正常数 $M_2$ 和 $M_3$，使得只要满足 $a^3 - \frac{b^2}{4} - \frac{b}{4a} > M_2$ 和 $a > M_3$，$y(t; a,\ b)$ 就属于 C 型。当 $b = -2a^{\frac{3}{2}}$ 时，第一个不等式等价于 $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} > M_2$。因此，只要选取某个 $M_4 > \max\{4M_2^2, M_3\}$，推论 2 即得。 □

# 4 一致渐近及引理的证明

本节重点证明引理 1 和 2。引理 3 和 4 也可以用类似的方法证明，只需做少量修改。

当 $\frac{b^2}{4} - a^3 \to \infty$与 $a^3 \le M_1 \left|\frac{b^2}{4} - a^3\right|$时，我们将详细运用一致渐近方法进行分析，并将分析分为两种情况。

## 4.1 情形 I: $B(\frac{\xi^2}{4} - A)(\xi)^3 = 1$

在此情形下，方程 (2.18) 化为

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y}{d\eta^2} =&\xi^2\left[4(\eta^3+1) - \frac{B(\xi)}{\xi(\eta - A(\xi))} + \frac{3}{4}\frac{1}{\xi^2(\eta - A(\xi))^2}\right]Y \\ =&\xi^2 Q(\eta,\xi)Y,\end{aligned} \tag{4.1}$$

这是一个薛定谔方程，具有三个简单转向点，分别记为 $\eta_j, j = 1, 2, 3$，且分别靠近 $\eta = e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}$和 $-1$；见图 3。根据 [25], ，二次型 $Q(\eta,\xi)d\eta^2$ 的斯托克斯几何极限状态如图 3 所示，其中斯托克斯曲线由 $\mathrm{Re}(\int_{\eta_j}^{\eta}\sqrt{Q(s,\xi)}ds) = 0, j = 1, 2, 3$ 定义。注意，势函数$Q(\eta,\xi)$ 在 $\eta = A(\xi)$ 处也有一个极点，记为 $P$，而 $P$可能位于曲线 $\ell_{12}$的左侧或右侧。当 $P$ 位于 $\ell_{12}$的右侧时，似乎难以在整个扇形区域 $\arg\lambda \in \left[-\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right]$内得到 $Y$ 的一致渐近行为。因此，我们无法直接导出斯托克斯乘子 $s_0$。不过，通过分析转向点 $\eta_1$ 和 $\eta_2$附近的一致渐近行为，我们可以计算出 $s_1$ 和 $s_{-1}$。注意到 $s_{-1} = -s_1$，我们只需计算 $s_1$。

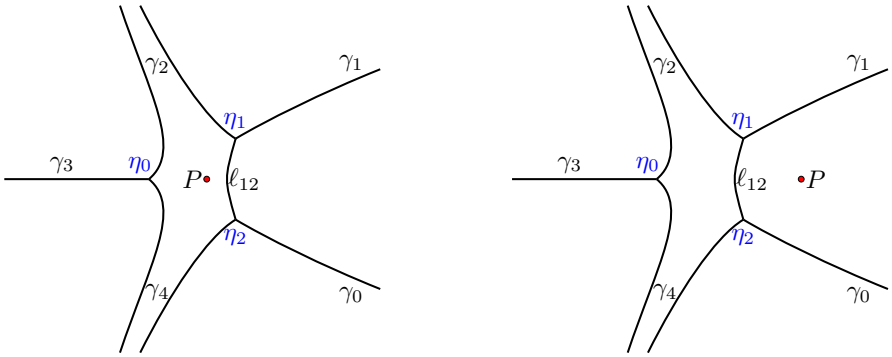


图 3： $Q(\eta,\xi)d\eta^2$ 的斯托克斯几何。

沿用 [23], 中的主要思路，我们可以分别利用艾里函数在 $\eta_1$ 和 $\eta_2$ 附近近似 (4.1) 的解。定义两个共形

映射 $\zeta(\eta)$ 和 $\omega(\eta)$:

$$\int_0^{\zeta} s^{\frac{1}{2}} ds = \int_{\eta_1}^{\eta} F(s,\xi)^{\frac{1}{2}} ds \tag{4.2}$$

and

$$\int_0^{\omega} s^{\frac{1}{2}} ds = \int_{\eta_2}^{\eta} F(s,\xi)^{\frac{1}{2}} ds, \tag{4.3}$$

分别从 $\eta = \eta_1$ 和 $\eta = \eta_2$ 的邻域映射到原点的邻域。本文中，所有平方根均取主值分支。于是，共形性可以延拓至斯托克斯曲线，以下引理是 [23, 定理 2] 的推论。

**引理 5.** 设 $Y$ 是 (4.1) 的任意解，则存在常数 $C_1$、$C_2$，使得

$$Y = \left(\frac{\zeta}{F(\eta,\ \xi)}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{ [C_1 + r_1(\eta,\xi)]\,\mathrm{Ai}(\xi^{\frac{2}{3}}\zeta) \ + [C_2 + r_2(\eta,\xi)]\,\mathrm{Bi}(\xi^{\frac{2}{3}}\zeta) \right\}, \tag{4.4}$$

其中 $r_1(\eta,\xi)$ $r_2(\eta,\xi) = o(|C_1| + |C_2|)$ 当 $\eta$ 沿从 $\eta_1$ 出发且远离 $P$ 的任意两条相邻斯托克斯线时，关于 $\xi \to +\infty$ 一致成立。类似地，存在常数 $C_1$、$C_2$，使得

$$Y = \left(\frac{\omega}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{ \left[\tilde{C}_1 + \tilde{r}_1(\eta,\xi)\right] \mathrm{Ai}(\xi^{\frac{2}{3}}\omega) + \left[\tilde{C}_2 + \tilde{r}_2(\eta,\xi)\right] \mathrm{Bi}(\xi^{\frac{2}{3}}\omega) \right\}, \tag{4.5}$$

其中，当 $\tilde{r}_1(\eta,\xi)$ $\tilde{r}_2(\eta,\xi) = o(|C_1| + |C_2|)$ 时，对于 $\eta$，在从 $\eta_2$ 发出的任意两条相邻斯托克斯线上且远离 $P$处，一致成立。

注 3. 从 [23, 定理 2] 的证明可知，当 $\arg\eta \sim (2k-1)\frac{\pi}{5}$，$k = 1, 2$ 时，极限值 $\lim_{\eta\to\infty} r_i(\eta,\xi)$，$i = 1,2$ 均存在。类似性质~~也适用于~~ $\tilde{r}_1(\eta,\xi)$ 和 $\tilde{r}_2(\eta,\xi)$。为方便起见，我们分别用 $r_{i,k}(\xi)$ $\tilde{r}_{i,k}(\xi)$，$i = 1,2$, $k = 1, 2$ 表示这些极限值。

此外，我们得到 $\zeta(\eta)$ 和 $\omega(\eta)$ 在 $\xi, \eta \to \infty$ 时的渐近行为。

**引理 6.** 当 $\eta \to \infty$ 时，共形映射 $\zeta(\eta)$ 和 $\omega(\eta)$ 满足

$$\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{5}\eta^{\frac{5}{2}} + E_0 - \frac{E_1}{\xi} + \epsilon_1(\xi) + \mathcal{O}(\eta^{-\frac{1}{2}}), \qquad \arg\eta \in \left(-\frac{\pi}{5}, \pi\right), \tag{4.6}$$

*and*

$$\frac{2}{3}\omega^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{5}\eta^{\frac{5}{2}} + F_0 - \frac{F_1}{\xi} + \epsilon_2(\xi) + \mathcal{O}(\eta^{-\frac{1}{2}}), \qquad \arg\eta \in \left(-\pi, \frac{\pi}{5}\right), \tag{4.7}$$

其中，当 $\xi \to \infty$ 时，$\epsilon_1(\xi)$ $\epsilon_2(\xi) = o(\xi^{-1})$，而 $E_0$、$F_0$、$E_1$ 和 $F_1$ 由式 *(3.2)* 给出。

该引理的证明与 [13, 引理 5] 的证明相同，只需将 $E_1, F_1$ 在 [13, 式 (28)–(29)] 中的精确值替换为式 (3.2)中的值。

**引理 1 的证明** 与 [23], 本文中 $s_k$斯托克斯乘子 $s_k$不同，本文的斯托克斯乘子依赖于 $\xi$，因此我们只会在艾里函数与 $\Phi_k$之间进行渐近匹配时取极限$\eta \to \infty$ 。根据 [27, 式 (9.2.12)、(9.7.5) 和 (9.2.10)], ，我们有

$$\begin{cases} \mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & \arg z \in (-\pi, \pi), \\ \mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} + \frac{i}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & \arg z \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \\ \mathrm{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} - \frac{i}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & \arg z \in \left(-\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \tag{4.8}$$

and

$$\begin{cases} \mathrm{Bi}(z) \sim \frac{i}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & \arg z \in \left(-\frac{\pi}{3}, \pi\right), \\ \mathrm{Bi}(z) \sim \frac{i}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & \arg z \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \\ \mathrm{Bi}(z) \sim -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}, & \arg z \in \left(-\pi, \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \tag{4.9}$$

当 $\eta \to \infty$且 $\arg\eta \sim \frac{\pi}{5}$时，由 (4.6) 可得 $\arg\zeta \sim \frac{\pi}{3}$。将 (4.6) 代入 (4.8) 和 (4.9)，并注意到由 (2.12) 有 $\lambda = \xi^{\frac{2}{5}}\eta$，我们得到

$$\begin{cases} \sqrt{2(\lambda - a)} \left(\frac{\zeta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{Ai}(\xi^{\frac{2}{3}}\zeta) \sim c_1 \frac{-1}{\sqrt{2}} \lambda^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}, \\ \sqrt{2(\lambda - a)} \left(\frac{\zeta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{Bi}(\xi^{\frac{2}{3}}\zeta) \sim i c_1 \frac{-1}{\sqrt{2}} \lambda^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}} + 2c_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}} \end{cases} \tag{4.10}$$

当 $\lambda \to \infty$ （相应地为 $\eta \to \infty$ ）时，其中

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^{\frac{2}{15}} e^{-\xi E_0 + E_1 + \epsilon_1(\xi)}, \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^{\frac{2}{15}} e^{\xi E_0 - E_1 - \epsilon_1(\xi)}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

由（2.4）可直接计算得到

$$((\Phi_k)_{21},(\Phi_k)_{22}) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}},\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}\right), \qquad k\in\mathbb{Z} \tag{4.12}$$

当 $\lambda\to\infty$ 时。将 (4.10) 代入 (4.4)，再将所得方程与 (4.12) 比较，得到

$$\begin{aligned}&\sqrt{2(\lambda-a)Y}\\ =&[C_1+r_{1,1}(\xi)]c_1(\Phi_1)_{22}+[C_2+r_{2,1}(\xi)][ic_1(\Phi_1)_{22}+2c_2(\Phi_1)_{21}]\\ =&[C_2+r_{2,1}(\xi)]2c_2(\Phi_1)_{21}+\{[C_1+r_{1,1}(\xi)]c_1+[C_2+r_{2,1}(\xi)]ic_1\}(\Phi_1)_{22}\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $\lambda\in\Omega_{1\circ}$

当 $\eta\to\infty$ 且 $\arg\eta\sim\frac{3\pi}{5}$ 时，有 $\arg\zeta\sim\pi$。利用 (4.8) 和 (4.9) 中 $\arg z\sim\pi$ 时艾里函数的渐近行为，得到

$$\begin{cases}\sqrt{2(\lambda-a)}\left(\frac{\zeta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{Ai}(\xi^{\frac{2}{3}}\zeta)\sim c_1\frac{-1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}+ic_2\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}},\\ \sqrt{2(\lambda-a)}\left(\frac{\zeta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{Bi}(\xi^{\frac{2}{3}}\zeta)\sim ic_1\frac{-1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}+c_2\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}\end{cases} \tag{4.14}$$

当 $\lambda\to\infty$ ($\eta\to\infty$) 时。将 (4.14) 代入 (4.4)，并将所得方程与 (4.12) 比较，得到

$$\begin{aligned}\sqrt{2(\lambda-a)}Y=&\{[C_1+r_{1,2}(\xi)]ic_2+[C_2+r_{2,2}(\xi)]c_2\}(\Phi_2)_{21}\\ &+\{[C_1+r_{1,2}(\xi)]c_1+[C_2+r_{2,2}(\xi)]ic_1\}(\Phi_2)_{22}\end{aligned} \tag{4.15}$$

$\lambda\in\Omega_{2\circ}$ 结合 (4.13) 与 (4.15)，并注意到

$$((\Phi_2)_{21},(\Phi_2)_{22})=((\Phi_2)_{21},(\Phi_2)_{22})\begin{pmatrix}1 & s_1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

我们进一步得到

$$r_{1,1}(\xi)-r_{1,2}(\xi)=i(r_{2,2}(\xi)-r_{2,1}(\xi)) \tag{4.16}$$

and

$$\begin{aligned}s_1&=\frac{(C_2-iC_1)c_2+(2r_{2,1}(\xi)-ir_{1,2}(\xi)-r_{2,2}(\xi))c_2}{(C_1+iC_2)c_1+r_{1,2}(\xi)c_1+r_{2,2}(\xi)ic_1}\\ &=-\frac{ic_2}{c_1}+\frac{2(r_{2,1}(\xi)-r_{2,2}(\xi))c_2}{(C_1+iC_2+r_{1,2}(\xi)+ir_{2,2}(\xi))c_1}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

由于 $r_{i,k}(\xi) = o(|C_1| + |C_2|)$ 在 $\xi \to +\infty$ 时对所有 $i = 1,2$ 和 $k = 1, 2$ 都成立。因此

$$s_1 = ie^{2\xi E_0 - 2E_1 - 2\epsilon_1(\xi)}\,(1 + o(1)) = ie^{2\xi E_0 - 2E_1 + o(1)} \tag{4.18}$$

如 $\xi \to +\infty$。

注意到 $s_{-1} = \overline{s_1}$ 和 $F_j = \overline{E_j}$, $j = 0$, 1。因此，取 $s_1$ 主导渐近行为的复共轭，即可得到 (3.1) 中 $s_{-1}$的主导渐近行为。

## 4.2 情形 II: $B(\frac{\xi^2}{4} - A)(\xi)^3 = -1$

在这种情形下，方程 (2.18) 变为

$$\begin{aligned}\frac{d^2Y}{d\eta^2} =& \xi^2\left[4(\eta^3 - 1) - \frac{B(\xi)}{\xi(\eta - A(\xi))} + \frac{3}{4}\frac{1}{\xi^2(\eta - A(\xi))^2}\right]Y \\ =& \xi^2\tilde{Q}(\eta, \xi)Y,\end{aligned} \tag{4.19}$$

这是一个具有三个简单转向点的薛定谔方程，分别记为 $\tilde{\eta}_j$, $j = 1$, 2, 3，它们分别位于 $\eta = e^{2\pi i/3}$, $e^{-2\pi i/3}$ 和 1 附近；见图 4。根据 [25], , 二次型 $Q(\eta, \xi)d\eta^2$ 的斯托克斯几何的极限状态在 $\xi \to +\infty$ 时如图 4 所示，其中斯托克斯曲线定义为

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\tilde{\eta}_j}^{\eta} \sqrt{\tilde{Q}(s, \xi)}ds\right) = 0, \qquad j = 1, 2, 3.$$

注意，在 $\gamma_0$ 和$\gamma_1$之间的扇形区域内， $Q$ 有一个极点 $P(A(\xi), 0)$。此外，我们发现，当 $A(\xi) > 1$时，极点 $P$ 远离 $\eta_0$；见图 4 左侧子图。在这种情况下，可以利用艾里函数在 $\gamma_0$和 $\gamma_1$附近一致地逼近方程 (4.19) 的解。当 $A(\xi) \to 1$ 趋于 $\xi \to +\infty$时，极点 $P$ 与转向点 $\eta_0$合并；见图 4 右侧子图。在这种情况下，根据 [26]或 [13], , 需要用到贝塞尔函数。尽管在上述两种情况下，都可以选取适当的特殊函数，在 $\gamma_0$ 和 $\gamma_1$附近一致地逼近方程 (4.19) 的解，但我们倾向于以统一的方式分析这两种情况，因为我们希望以统一形式计算所有满足 $A(\xi) \geq 1$ 且$B(\xi^2 - A)(\xi)^3 = -1$的情形下，斯托克斯乘子 $s_0$ 的主导渐近行为。根据一致渐近方法，我们

应当在$\gamma_0$ 和 $\gamma_1$附近一致地逼近方程 (4.19) 的解，并且这种逼近应在两种情况下都成立，这目前看来颇为困难。幸运的是，回想由 (2.7) 和 (2.8) 可知 $s_0 = i(1 + s_2 s_3)$ 和 $s_2 = s_{-3} = s_3$，我们只需处理 $s_2$。因此，只需推导方程 (4.19) 在从 $\eta_1$发出的斯托克斯曲线附近的一致渐近式。

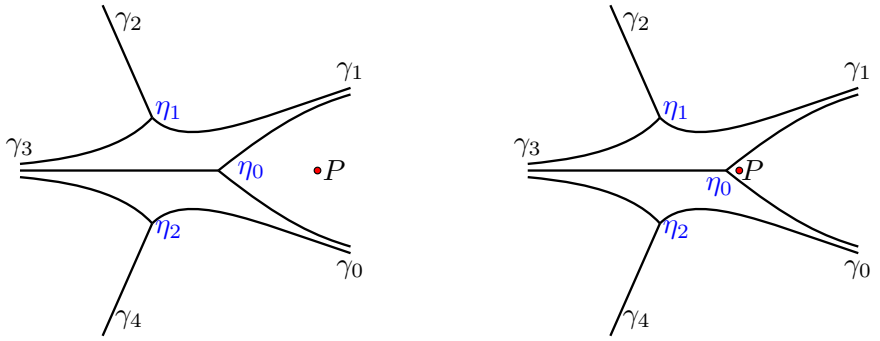


图 4： $\tilde{Q}(\eta, \xi)d\eta^2$ 的斯托克斯几何。

定义共形映射 $\theta(\eta)$ 如下

$$\int_0^{\theta} s^{\frac{1}{2}} ds = \int_{\eta_1}^{\eta} \tilde{Q}(s,\xi)^{\frac{1}{2}} ds, \tag{4.20}$$

该映射将 $\eta = \eta_1$ 的邻域映射到原点的邻域。随后，共形性可延伸至从 $\eta_1$ 发出并趋于无穷远的斯托克斯曲线，以下引理是 [23, 定理 2] 的推论。

**引理 7**。 设 $Y$ 是 (4.19) 的任意解，则存在常数 $D_1$、$D_2$，使得

$$Y = \left(\frac{\theta}{\tilde{Q}(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}} \left\{[D_1 + \bar{r}_1(\eta,\xi)]\,\mathrm{Ai}(\xi^{\frac{2}{3}}\theta) + [D_2 + \bar{r}_1(\eta,\xi)]\,\mathrm{Bi}(\xi^{\frac{2}{3}}\theta)\right\}, \tag{4.21}$$

其中 $\bar{r}_1(\eta,\xi)$ $\bar{r}_2(\eta,\xi) = o(|D_1| + |D_2|)$ 当 $\xi \to +\infty$ 时，对于从 $\eta_1$ 发出的任意两条相邻斯托克斯线上的 $\eta$，该结论一致成立。

注 4. 显然，$\bar{r}_i(\eta,\xi)$ $i = 1,2$ 具有与注 3 中提到的 $r_i(\eta,\xi)$ 类似的性质，因此我们令 $\bar{r}_{i,k}(\xi) = \lim_{\eta\to\infty} \bar{r}_i(\eta,\xi)$，其中 $\arg \eta \sim \frac{(2k-1)}{5}\pi$，$k = 2,3$。

与引理 6 类似，我们也可以得到 $\theta(\eta)$ 在 $|\eta|\to\infty$ 时的渐近行为。

**引理 8.** 共形映射 $\theta(\eta)$ 满足

$$\frac{2}{3}\theta^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{5}\eta^{\frac{5}{2}}+G_0-\frac{G_1}{\xi}+\epsilon_3(\xi)+\mathcal{O}(\eta^{-\frac{1}{2}}),\qquad \arg\eta\in\left(-\frac{\pi}{5},\pi\right),\tag{4.22}$$

当 $|\eta|\to\infty$ 时，其中 $\epsilon_3(\xi)=o(\xi^{-1})$ 当 $\xi\to+\infty$ 时，以及 $G_0=\frac{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}{5}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$。

证明。 推导斯托克斯乘子$s_2$ 渐近式的论证与情形 I $\frac{B}{4}(\xi^{\frac{2}{3}}-A)(\xi)^3=1$中推导 $s_1$ 的论证类似。唯一的区别在于，我们应当在 $z\to\infty$ 时，且 $\arg z\sim\pi$ 和 $\arg z\sim\frac{5\pi}{3}$ 的条件下，应用艾里函数 Ai($z$) 和 Bi($z$) 的一致渐近式。

当 $\eta\to\infty$ 且 $\arg\eta\sim\frac{3\pi}{5}$ 时，有 $\arg\theta\sim\pi$。将 (4.22) 代入 (4.8) 和 (4.9) 中 $\arg z\sim\pi$ 条件下的艾里函数渐近式，并回顾 (2.12) 中的变换 $\lambda=\xi^{\frac{2}{3}}\eta$，可得

$$\begin{cases}\sqrt{2(\lambda-a)}\left(\frac{\theta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{Ai}(\xi^{\frac{2}{3}}\theta)\sim d_1\frac{-1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}+id_2\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}},\\ \sqrt{2(\lambda-a)}\left(\frac{\theta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}}\mathrm{Bi}(\xi^{\frac{2}{3}}\theta)\sim id_1\frac{-1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}+d_2\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}\end{cases}\tag{4.23}$$

当 $\lambda\to\infty$ （相应地， $\eta\to\infty$ ）且 $\lambda\sim\frac{3\pi}{5}$ 时，其中

$$\begin{aligned}d_1&=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi^{\frac{2}{15}}e^{-\xi G_0+G_1+\epsilon_3(\xi)},\\ d_2&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\xi^{\frac{2}{15}}e^{\xi G_0-G_1-\epsilon_3(\xi)}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

综合式 (4.12)、(4.21) 和 (4.23)，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{2(\lambda-a)}Y=&\{[D_1+\bar{r}_{1,2}(\xi)]id_2+[D_2+\bar{r}_{2,2}(\xi)]d_2\}(\Phi_2)_{21}\\ &+\{[D_1+\bar{r}_{1,2}(\xi)]d_1+[D_2+\bar{r}_{2,2}(\xi)]id_1\}(\Phi_2)_{22}\end{aligned}\tag{4.25}$$

其中 $\lambda\in\Omega_2$。

当 $\eta\to\infty$，且 $\arg\eta\sim\pi$ 时，我们有 $\arg\theta\sim\frac{3\pi}{5}$。注意到 Ai($z$) =Ai($ze^{-2\pi i}$)，且 Bi($z$) =Bi($ze^{-2\pi i}$)，由 (4.8) 和 (4.9) 可得

$$\mathrm{Ai}(z)\sim\frac{i}{2\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}},\quad \mathrm{Bi}(z)\sim\frac{i}{\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}}\tag{4.26}$$

当 $z \to \infty$，且 $\arg z \sim \frac{5\pi}{3}$ 时。将 (4.22) 代入 (4.26)，可得

$$\begin{cases} \sqrt{2(\lambda-a)}\left(\frac{\theta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{Ai}(\xi^{\frac{2}{3}}\theta) \sim id_2\frac{-1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}}, \\ \sqrt{2(\lambda-a)}\left(\frac{\theta}{F(\eta,\xi)}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{Bi}(\xi^{\frac{2}{3}}\theta) \sim 2id_1\frac{-1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}} + d_2\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{4}{5}\lambda^{\frac{5}{2}}} \end{cases} \tag{4.27}$$

当 $\lambda \to \infty$ ($\eta \to \infty$) 且 $\lambda \sim \pi$ 时。结合 (4.12)、(4.21) 和 (4.27)，得到

$$i(\bar{r}_{1,2} - \bar{r}_{1,3}) + (\bar{r}_{2,2} - \bar{r}_{2,3}) = 0 \tag{4.28}$$

and

$$\begin{aligned} \sqrt{2(\lambda-a)}Y =& \{[D_1 + \bar{r}_{1,3}(\xi)]id_2 + [D_2 + \bar{r}_{2,3}(\xi)]d_2\}(\Phi_3)_{21} \\ &+ [D_2 + \bar{r}_{2,3}(\xi)]2id_1(\Phi_3)_{22} \end{aligned} \tag{4.29}$$

当 $\lambda \in \Omega_3$ 时。结合 (4.25) 与 (4.29)，并注意到

$$((\Phi_3)_{21}, (\Phi_3)_{22}) = ((\Phi_2)_{21}, (\Phi_2)_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix},$$

我们有

$$\begin{aligned} s_2 =& \frac{[D_1 + \bar{r}_{1,2}(\xi)]d_1 + [D_2 + \bar{r}_{2,2}(\xi)]id_1 - [D_2 + \bar{r}_{2,3}(\xi)]2id_1}{[D_1 + \bar{r}_{1,3}(\xi)]id_2 + [D_2 + \bar{r}_{2,3}(\xi)]d_2} \\ =& \frac{d_1}{id_2} + \frac{d_1}{id_2}\frac{2i(\bar{r}_{2,2}(\xi) - \bar{r}_{2,3}(\xi))}{D_1 - iD_2 + \bar{r}_{1,3}(\xi) - i\bar{r}_{2,3}(\xi)}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

鉴于 $\bar{r}_{i,k}(\xi) = o(|D_1| + |D_2|)$ $i = 1, 2, k = 2, 3$ 当 $\xi \to +\infty$ 时，我们立即得到 (3.3) 中 $s_2$ 的主导渐近行为。注意到 $s_3 = -s_2$，$s_3$ 的主导渐近行为可由对 $\overline{s_2}$ 取复共轭得到。

□

# 5 讨论

本文研究了第一 Painlevé 方程中初始数据与大负值渐近行为之间的连接问题。我们考察了令 $y(0) = a$ 和 $y'(0) = b$变化时解的演化情况。具体而言，我们证明，在（$a, b$）平面上存在一列曲线 $\Gamma_n$,$n = 1$，2，.....，它们对应于实 tronquée 解，即分界线解。

当（$a$，$b$）位于两条曲线 $\Gamma_{2m}$ 和 $\Gamma_{2m+1}$, $m = 1$，2，$\cdots$之间时，解 $y(t; a, b)$ 围绕 $y(t) = -\sqrt{-t/6}$振荡；当（$a$，$b$）位于 $\Gamma_{2m-1}$ 和 $\Gamma_{2m}$, $m = 1$，2，$\cdots$之间时，解 $y(t; a, b)$ 在负实轴上有无穷多个极点。

可以将我们的结果与先前工作 [13]中的结果进行比较。请注意，在 [13], 中，作者假设初始数据 $a$ 和 $b$ 中一个固定、另一个较大，因此 [13] 研究 PI 解 $y(t; a, b)$ 在初始数据 $(a, b)$ 沿 $(a, b)$-平面上的水平线或垂直线变化时如何演化。而在本文中，我们假设 $|\frac{b^2}{4} - a^3|$ 较大,_并研究初始数据 $(a, b)$ 沿任意方向变化时解如何演化。因此，本文结果将 [13] 中的结果作为特例包含在内，同时也提供了新的结果。

在 [22]中也对第二 Painlev´e 方程进行了类似研究。他们假设 $b^2 - a^4 \to \pm\infty$，对具有大初值 $(a, b)$ 的 PII 解给出了渐近分类。然而，他们只研究了 $a^4|b^2 - a^4|^{-1}$ 有界时 PII 解的分类问题，这与本文中的第一种情况 $a^3|\frac{b^2}{4} - a^3|^{-1} \le M_1$ 类似。我们认为，PII 还有另一种值得分析的有趣情况，并期待得到类似于 PI 结果的 PII 结果。在 Bender–Komijani 关于第一和第二 Painlev´e 超越函数的工作 [9], 之后，他们又获得了与第四 Painlev´e 方程 PVI [28]相关的类似结果。将本文的同样分析应用于更一般情形下 PVI 的初值问题也很有意义；具体而言，可以考虑 $a$ 和 $b$ 都较大的情况，而不是仅其中一个较大。

Bender 等人 [29] 提出了一个有趣的问题，针对广义 Painlev´e 方程，他们发现了产生分界线解的非线性特征值。由于我们的方法从 Lax 对或薛定谔方程出发，而广义 Painlev´e 方程目前尚无已知的 Lax 对或薛定谔方程，因此这种方法暂时无法应用于广义 Painlev´e 方程。

本文得到的 PI 解的分类是渐近分类，也就是说，我们假设初始数据（$a$，$b$）较大，并且只得到曲线 $\Gamma_n$ as $n \to +\infty$ 的极限形式方程。对于有限 $n$ 时求出 $\Gamma_n$ 的精确方程这一问题，完整的解仍是一个开放问题，值得进一步研究。

# 致谢

所有作者谨向审稿人和编辑致以诚挚谢意，感谢他们提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议显著提升了本文的可读性。本研究得到国家自然科学基金委员会 [Grant nos. 12071394], 湖南省自然科学基金 [Grant no. 2020JJ5152], 、湖南省教育厅一般项目 [Grant no. 19C0771], 以及湖南科技大学博士启动基金 [Grant no. E51871] 的资助。

# 参考文献

[1] B. M. McCoy，自旋系统、统计力学与 Painlevé 函数，载于：Painlevé 超越函数：其渐近式与物理应用，D. Levi 和 P. Winternitz（编），*NATO* 科学研究所高级研究系列 *B*：物理学，第 278 卷，（1992）第 377–391 页。

[2] M. Jimbo、T. Miwa、Y. Mˆori 和 M. Sato，不可穿透玻色气体的密度矩阵与第五 Painlevé 超越函数。物理学 *D* **1** （1）（1980），第 80–158 页。

[3] F. H. L. Essler, H. Frahm, A. R. Its 和 V. E. Korepin，Painlev´e 超越函数描述了反铁磁体偏离自由费米子点时的量子关联函数。《物理学杂志*A*》**29** (17) (1996)，第 5619–5626 页。[4] E. Kanzieper，复制场论、Painlev´e 超越函数与精确关联函数，《物理评论快报》**89** (25) (2002)，文章编号 250201。[5] C. A. Tray 和 H. Widom，统计物理中的 Painlev´e 函数，《京都大学数理科学研究所出版物》**47** (2011)，361–374。[6] E. Barouch、B. M. McCoy 和 T. T. Wu，$T_c$ 附近二维伊辛模型的零场磁化率。《物理评论快报》**31** (1973)，第 1409–1411 页。[7] T. T. Wu、B. M. McCoy、C. A. Tracy 和 E. Barouch，二维伊辛模型的自旋-自旋关联函数：标度区域中的精确理论。《物理评论*B*》**13** (1976)，第 316–374 页。[8] B. Grammaticos、A. Ramani 和 V. Papageorgiou，可积映射是否具有 Painlev´e 性质？《物理评论快报》**67** (14) (1991)，第 1825–1828 页。

[9] C. M. Bender 和 J. Komijani，Painlev´e 超越函数与 $\mathcal{PT}$-对称哈密顿量，《物理学杂志A：数学与理论》，48 (2015年)，475202，共 15 页。[10] P. Holmes 和 D. Spence，关于一个 Painlev´e 型边值问题，《力学与应用数学杂志》，37 (1984)，525–538。[11] A. A. Kapaev，第一类 Painlev´e 方程解的渐近行为，《微分方程》，24 (1988)，1684–1695（俄文）。[12] A. S. Fokas、A. R. Its、A. A. Kapaev 和 V. Y. Novokshenov，《Painlev´e 超越函数：黎曼–希尔伯特方法》，美国数学会，罗得岛州，2006年。[13] W.-G. Long、Y.-T. Li、S.-Y. Liu 和 Y.-Q. Zhao，大初值下第一 Painlev´e 方程的实解，《应用数学研究》，139 (2017)，505–532。[14] A. A. Kapaev 和 A. V. Kitaev，复数域中第一 Painlev´e 超越函数的连接公式，《数学物理快报》，27 (1993)，243–252。[15] P. A. Clarkson，Painlev´e 方程——非线性特殊函数，《计算与应用数学杂志》，153 (2003)，127–140。[16] P. A. Clarkson，Painlev´e 方程——非线性特殊函数，载于《正交多项式与特殊函数》，施普林格，柏林和海德堡，(2006)，331–411。[17] P. A. Clarkson，Painlev´e 方程的开放问题，SIGMA，15 (2019)，006，共 20 页。[18] N. Joshi 和 M. D. Kruskal，Painlev´e 连接问题：渐近方法 I。《应用数学研究》86 (1992)，315–376。[19] A. V. Kitaev，第一和第二 Painlev´e 方程的对称解，《数学科学》，73 (1995)，494–499。[20] A. A. Kapaev，第一 Painlev´e 方程的准线性 Stokes 现象，《物理学杂志A：数学与理论》，37 (2004)，11149–11167。[21]B. Fornberg 和 J. A. C. Weideman，Painlev´e 方程的数值方法，《计算物理学杂志》，230 (2011)，5957–5973。[22] W.-G. Long、Z.-Y. Zeng，大初值下第二 Painlev´e 方程的连接问题，《构造逼近》，55 (2022)，861–889。

[23] A. P. Bassom、P. A. Clarkson、C. K. Law 和 J. B. McLeod，利用一致渐近分析研究第二 Painlev´e 超越函数，《*Arch. Rational Mech. Anal.*》，**143** （1998年），241–271。[24] Y. Sibuya，微分方程 $y'' - (x^3 + \lambda)y = 0$ 的次主导解的斯托克斯乘子，《*Proc. Amer. Math. Soc.*》**18** （1967年），238–243。[25] A. Eremenko、A. Gabrielov 和 B. Shapiro，具有多项式势的一维 Schr¨odinger 算子的高能本征函数，*Comput. Meth-ods Funct. Theory*，**8** （2008年），513–529。[26] T. M. Dunster，具有二阶极点、复指数和合并转向点的二阶线性微分方程的一致渐近解，《*SIAM J. Math. Anal.*》，**21** （1990年），1594–1618。[27] F. Olver、D. Lozier、R. Boisvert 和 C. Clark，《*NIST Handbook of Mathematical Functions*》，剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[28] C. M. Bender 和 J. Komijani，补遗：Painlev´e 超越函数与 $\mathcal{PT}$-对称哈密顿量（2015年《物理学杂志A：数学与理论》48 475202），《物理学杂志*A*：数学与理论》，**48** （2015年），475202，15页。[29] C. M. Bender、J. Komijani 和 Q.-h. Wang，广义 Painlev´e 方程的非线性特征值问题，《物理学杂志*A*：数学与理论》，**52** （2019年），315202，24页。