arXiv:2301.07982v2 [math.RT] 7 Feb 2023

例外李超群 D(2,1; α) 的超幺正 Fock 模型

SIGISWALD BARBIER 和 SAM CLAEREBO UT

Abstract. 我们构造了例外李超群 D(2, 1, α) 的极小表示的 Fock 模型。通过将作者先前构造的李超代数D(2, 1, α)的 Fock 模型积分到群层面，给出了作用的显式表达式。我们还证明，该表示在 de Goursac–Michel 的意义下是超酉的。

1. Introduction

本文的主要结果是构造李超群 D(2, 1, α) 的极小表示的 Fock 模型。我们通过将 [1]中讨论的李超代数 D(2, 1, α) 的表示积分到群层面来实现这一点。从这个意义上说，本文可视为 [1]的续篇。我们还证明，该 Fock 模型在 [2]的意义下是超酉的。

李群的极小表示由来已久，可以在许多不同的框架中构造 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]。按照轨道方法的理念，极小表示对应于李群在对偶李代数上余伴随作用的最小幂零轨道。它们是“较小”的无限维表示；更准确地说，它们在所有可能的无限维表示中具有最小的 Gelfand–Kirillov 维数 [5]。这意味着它们的实现中存在大量对称性，从而带来丰富的表示论。

近年来，人们致力于将极小表示的框架推广至李超群和李超代数的情形 [10, 11, 12, 1]。尽管这在逻辑上是顺理成章的下一步，但其中存在许多技术和概念上的障碍。例如，许多用于李群的工具尚未发展起来，或者在超情形下变得复杂得多。另一个障碍是，文献 [13] 表明，按照超酉表示的标准定义 [14] ，很大一类李超群不存在超酉表示。这促使人们发展超酉表示的替代定义 [2, 15, 16]。然而，目前还没有找到令人满意的定义。因此，构造一些“应当”是超酉的表示的具体模型十分重要，本文将进行这项工作。

对于正交辛李超群 $OSp(p, q|2n)$，文献 [11] 在文献 [6] 所发展的约当（超）代数框架下，构造了极小表示的 Schr¨odinger 模型。这推广了文献

Date：2023年2月8日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 17B10，17B60，22E46，58C50。*Key words and phrases.* 极小表示，Fock模型，薛定谔模型，Bessel算子，李超代数，Jordan超代数，Bessel-Fischer 乘积。

$O(p,q)$ 中研究的极小表示。随后，文献 [12] 还为 $OSp(p,q|2n)$ 构造了 Fock模型和交织 Segal-Bargmann变换。

最近，人们构造了李超代数 $D(2,1,\alpha)$ 的 Schr¨odinger 模型、Fock模型和 Segal-Bargmann 变换 [1]。论文 [1] 完全在代数层面上展开。特别是，文中没有涉及酉性。不过，论文证明存在一种超厄米内积，使得 Fock模型在该内积下保持不变。本文旨在将 [1] 中讨论的 Fock模型提升到群层面。我们将证明，超厄米内积可以扩展到希尔伯特空间，并且我们的表示可以扩展为 [2] 意义下的超酉表示。

1.1. 内容。下面介绍本文的内容。我们首先在第2节回顾李超代数 $D(2,1,\alpha)$ 的定义，并给出 [1] 中讨论的 Fock模型的显式表达式。在第3节，我们引入李超群 $\mathrm{D}(2,1,\alpha)$，并推导出将表示积分化所需的一些性质；在第4节，我们回顾 [1] 中讨论的多项式福克空间的必要性质，并将其完备化为一个希尔伯特超空间。

第5节包含本文的主要内容。我们首先在定理5.1中给出李超群 $\mathrm{D}(2,1,\alpha)$ 表示的显式形式。我们还给出两种呈现该表示的替代方式（推论5.2和5.3）。然而请注意，对于 $\mathrm{D}(2,1,\alpha)$ 的一个生成元，我们只能在 $\alpha>0$ 时给出其显式形式。

我们回顾 [2] 第5.3小节中引入的超酉表示（SUR）的定义，并证明当 $\alpha<0$ 时，Fock 模型是这样的超酉表示（定理 5.10 ）。在 [2], 中还定义了强超酉表示的概念。然而，我们证明 Fock模型永远不是强超酉表示（定理5.12）。

1.2. 记号。域 K 始终表示实数 R 或复数 C。函数空间始终定义在 C 上。我们采用约定 $\mathrm{N}=\{0,1,2,\ldots\}$，并用 $\imath$ 表示复单位。

超向量空间是一个 $\mathrm{Z}/2\mathrm{Z}$-分次向量空间 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$。元素$v\in V$ 若满足 $v\in V_i$, $i\in\mathrm{Z}/2\mathrm{Z}$，则称为齐次元素。我们称 i 为其奇偶性，并记作 $|v|$。在公式中使用 $|v|$ 时，我们所考虑的是齐次元素，并默认公式可通过线性延拓推广到任意元素。若 $\dim(V_i)=d_i$，则记作 $\dim(V)=(d_{\bar{0}}|d_{\bar{1}})$。我们将具有 $V_{\bar{0}}=\mathrm{K}^m$ 和 $V_{\bar{1}}=\mathrm{K}^n$ 的超向量空间 V 记作 $\mathrm{K}^{m|n}$。超代数是一个超向量空间 $A=A_{\bar{0}}\oplus A_{\bar{1}}$，其中 A 是一个代数，且 $A_iA_j\subseteq A_{i+j}$。

2. The Lie superalgebra $D(2,1;\alpha)$

2.1. $D(2,1;\alpha)$ 的构造。我们可以对 $D(2,1)=\mathfrak{osp}(4|2)$ 进行变形，从而得到一个由 $(9|8)$ 维、秩 3 的李超代数组成的单参数族。我们将按照与 [1] 中相同的方式，使用 Scheunert 的一种构造来定义这些李超代数。我们将使用与 [20] 中相同的记号。

考虑一个二维向量空间 V，其基为 u_+ 和 u_-。定义一个非退化斜对称双线性形式 ψ，使得 $\psi(u_+,u_-)=1$。我们需要三副 (V_i,ψ_i)、$i=1$、2、3 的 (V,ψ)，以及保持 ψ_i 的线性变换对应的李代数 $\mathfrak{sl}(V_i)=\mathfrak{sp}(\psi_i)$。

我们使用以下数据来定义一个李超代数：

- 一个李代数 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$，

- 一个 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-模 $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$,
- 一个 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-态射 p： $S^2(\mathfrak{g}_{\bar{1}}) \to \mathfrak{g}_{\bar{0}}$，其中 $S^2(\mathfrak{g}_{\bar{1}})$ 是对称张量幂,
- 对于所有 $a, b, c \in \mathfrak{g}_{\bar{1}}$， 态射 p 满足

$$[p(a,b),c] + [p(b,c),a] + [p(c,a),b] = 0, \tag{1}$$

其中我们将 $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 上的 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-作用记为 $[\cdot,\cdot]$。

那么 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 是一个李超代数 [21, 备注 1.5]。

我们定义

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\bar{0}} &= \mathfrak{sp}(\psi_1) \oplus \mathfrak{sp}(\psi_2) \oplus \mathfrak{sp}(\psi_3) \\ \mathfrak{g}_{\bar{1}} &= V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \end{aligned}$$

并通过外张量积定义 $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ 在 $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 上的作用

$$(A,B,C)\cdot x\otimes y\otimes z = A(x)\otimes y\otimes z + x\otimes B(y)\otimes z + x\otimes y\otimes C(z).$$

$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$-态射 p 由下式给出

$$\begin{aligned} p(x_1\otimes x_2\otimes x_3, y_1\otimes y_2\otimes y_3) = {}& \sigma_1\psi_2(x_2,y_2)\psi_3(x_3,y_3)p_1(x_1,y_1) \\ &+ \sigma_2\psi_3(x_3,y_3)\psi_1(x_1,y_1)p_2(x_2,y_2) \\ &+ \sigma_3\psi_1(x_1,y_1)\psi_2(x_2,y_2)p_3(x_3,y_3), \end{aligned}$$

其中 $\sigma_i \in \mathbf{K}$ 和 p_i： $V_i \times V_i \to \mathfrak{sp}(\psi_i)$ 定义如下

$$p_i(x,y)z = \psi_i(y,z)x - \psi_i(z,x)y.$$

那么，当态射 p 满足雅可比恒等式 (1) 时， $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{1}}$ 是一个李超代数。当且仅当 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ 时，情况如此，见 [20, 引理 4.2.1]。若将 $\mathfrak{g}$ 记为 $\Gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$，则有

$$\Gamma(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) \cong \Gamma(\sigma_1',\sigma_2',\sigma_3')$$

当且仅当存在一个非零标量 c 和 (1, 2, 3) 的一个置换 π， 使得$\sigma_i' = c\sigma_{\pi(i)}$ [20, 引理 5.5.16]。

我们令

$$D(2,1;\alpha) := \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-\alpha}{2}\right).$$

李超代数 $D(2,1;\alpha)$ 是单的，除非 $\alpha = 0$ 或 $\alpha = -1$。此外，我们有同构

$$D(2,1;\alpha) \cong D(2,1;\beta)$$

当且仅当 α 和 β 在变换 $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$和 $\alpha \mapsto -1-\alpha$作用下属于同一轨道。

考虑矩阵

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

它们给出了 $\mathfrak{sl}(V_i)$ 的一个实现，其中向量空间 V_i 定义为

$$u_+^i = (1,0)^t, \quad u_-^i = (0,1)^t.$$

我们还可由 p 得到

$$p_i(u_+^i, u_+^i) = 2E_i, \quad p_i(u_+^i, u_-^i) = -H_i, \quad p_i(u_-^i, u_-^i) = -2F_i.$$

对于 $D(2,1;\alpha)$ 的奇基元素 $u_\pm^1 \otimes u_\pm^2 \otimes u_\pm^3$，我们引入一种更简洁的记法

$$u_{\pm\pm\pm} := u_\pm^1 \otimes u_\pm^2 \otimes u_\pm^3.$$

我们给出了 $\mathfrak{sl}(2)$ 在 $D(2,1,\alpha)$ 中的如下实现

$$\{E_2+E_3, H_2+H_3, F_2+F_3\}.$$

由 $\mathrm{ad}(H_2+H_3)$ 的特征子空间给出的相应三重分次为

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_+ &= \{E_3, E_2, u_{-++}, u_{+++}\}\\ \mathfrak{g}_- &= \{F_3, F_2, u_{+--}, u_{---}\}\\ \mathfrak{g}_0 &= \{H_1, H_2, H_3, E_1, F_1, u_{-+-}, u_{++-}, , u_{+-+}, u_{--+}\}.\end{aligned} \tag{2}$$

2.2. 福克表示。在 [1] 中，依赖参数 $\lambda \in \{1,\alpha\}$ 的福克表示 $\mathrm{d}\rho$ 是在所谓的多项式福克空间 F_λ 上构造的。我们将在此简要重构该表示，更多细节请参阅 [1, 第4节。3] 请注意，从现在起我们将排除 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$，因为在这种情况下，情况会大不相同。注意，$\alpha=1$ 对应于非变形情形 $D(2,1,1)=\mathfrak{osp}(4|2)$；而对于 $\alpha=0$，代数 $D(2,1,0)$ 不是单代数。更详细的解释请参阅 [1, 第4节。2]

令 z_1、z_2 和 z_3、z_4 分别为坐标在 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2|2})$ 上的偶代表元和奇代表元。我们定义

$$\begin{aligned}V_\alpha &:= \{a(2z_1z_2+z_3z_4)+bz_2^2+cz_2z_3+dz_2z_4 \mid a,b,c,d\in\mathbb{K}\}\subset\mathcal{P}_2 \quad \text{if } \lambda=\alpha \text{ and}\\ V_1 &:= \{a(2\alpha z_1z_2+z_3z_4)+bz_1^2+cz_1z_3+dz_1z_4 \mid a,b,c,d\in\mathbb{K}\}\subset\mathcal{P}_2 \quad \text{if } \lambda=1.\end{aligned}$$

定义 2.1. 假设 $\lambda\in\{1,\alpha\}$，则多项式福克空间定义为超空间

$$F_\lambda := \mathcal{P}(\mathbb{C}^{2|2})/\mathcal{I}_\lambda,$$

其中 $\mathcal{I}_\lambda := \mathcal{P}(\mathbb{C}^{2|2})V_\lambda$。

如 [1, 第 5 节1], 所示，若 $p\in F_\alpha$，则存在 $p_{i,k}\in\mathbb{C}$ 使得

$$p = p_{1,0}+\sum_{k=1}^{\infty} z_1^{k-1}(p_{1,k}z_1+p_{2,k}z_2+p_{3,k}z_3+p_{4,k}z_4).$$

Fock 表示 $\mathrm{d}\rho$ 在 F_λ 上的显式表达式如下。对于 $\mathfrak{g}_-$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho(F_2) &= -\frac{\imath}{2}(z_1+\mathcal{B}_\lambda(z_1))-\frac{\imath}{2}(-\lambda+2z_1\partial_{z_1}+z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4}),\\ \mathrm{d}\rho(F_3) &= -\frac{\imath}{2}(z_2+\mathcal{B}_\lambda(z_2))-\frac{\imath}{2}(-\frac{\lambda}{\alpha}+2z_2\partial_{z_2}+z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4}),\\ \mathrm{d}\rho(u_{---}) &= \frac{\imath}{2}(z_3+\mathcal{B}_\lambda(z_3))+\frac{\imath}{2}(z_3\partial_{z_1}+2\alpha z_2\partial_{z_4}+z_3\partial_{z_2}+2z_1\partial_{z_4}),\\ \mathrm{d}\rho(u_{+--}) &= \frac{\imath}{4}(z_4+\mathcal{B}_\lambda(z_4))+\frac{\imath}{4}(z_4\partial_{z_1}-2\alpha z_2\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_2}-2z_1\partial_{z_3}).\end{aligned}$$

对于 $\mathfrak{g}_+$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\rho(E_2) &= -\frac{\imath}{2}(z_1+\mathcal{B}_\lambda(z_1))+\frac{\imath}{2}(-\lambda+2z_1\partial_{z_1}+z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4}),\\
\mathrm{d}\rho(E_3) &= -\frac{\imath}{2}(z_2+\mathcal{B}_\lambda(z_2))+\frac{\imath}{2}(-\frac{\lambda}{\alpha}+2z_2\partial_{z_2}+z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4}),\\
\mathrm{d}\rho(u_{\text{-}++}) &= -\frac{\imath}{2}(z_3+\mathcal{B}_\lambda(z_3))+\frac{\imath}{2}(z_3\partial_{z_1}+2\alpha z_2\partial_{z_4}+z_3\partial_{z_2}+2z_1\partial_{z_4}),\\
\mathrm{d}\rho(u_{+++}) &= -\frac{\imath}{4}(z_4+\mathcal{B}_\lambda(z_4))+\frac{\imath}{4}(z_4\partial_{z_1}-2\alpha z_2\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_2}-2z_1\partial_{z_3}).
\end{aligned}$$

对于 $\mathfrak{g}_0$，我们有

$$\begin{gathered}
\mathrm{d}\rho(F_1)=2z_3\partial_{z_4},\quad \mathrm{d}\rho(E_1)=2^{-1}z_4\partial_{z_3},\quad \mathrm{d}\rho(H_1)=z_4\partial_{z_4}-z_3\partial_{z_3},\\
\mathrm{d}\rho(H_2)=z_1-\mathcal{B}_\lambda(z_1),\quad \mathrm{d}\rho(H_3)=z_2-\mathcal{B}_\lambda(z_2),\\
\mathrm{d}\rho(u_{\text{--}+}+u_{\text{-}+\text{-}})=-(z_3-\mathcal{B}_\lambda(z_3)),\quad \mathrm{d}\rho(u_{+\text{-}+}+u_{++\text{-}})=-2^{-1}(z_4-\mathcal{B}_\lambda(z_4)),\\
\mathrm{d}\rho(u_{\text{--}+}-u_{\text{-}+\text{-}})=-z_3\partial_{z_1}-2\alpha z_2\partial_{z_4}+z_3\partial_{z_2}+2z_1\partial_{z_4},\\
\mathrm{d}\rho(u_{+\text{-}+}-u_{++\text{-}})=2^{-1}(-z_4\partial_{z_1}+2\alpha z_2\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_2}-2z_1\partial_{z_3}).
\end{gathered}$$

这里，$\mathcal{B}_\lambda(z_i)$ 表示 z_i 的贝塞尔算子，且它们的显式形式为

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\lambda(z_1) &= (-\lambda+z_1\partial_{z_1}+z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4})\partial_{z_1}-2\alpha z_2\partial_{z_3}\partial_{z_4},\\
\mathcal{B}_\lambda(z_2) &= (-\frac{\lambda}{\alpha}+z_2\partial_{z_2}+z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4})\partial_{z_2}-2z_1\partial_{z_3}\partial_{z_4},\\
\mathcal{B}_\lambda(z_3) &= (-2\lambda+2z_1\partial_{z_1}+2\alpha z_2\partial_{z_2}+2(1+\alpha)z_3\partial_{z_3})\partial_{z_4}+z_3\partial_{z_1}\partial_{z_2},\\
\mathcal{B}_\lambda(z_4) &= (2\lambda-2z_1\partial_{z_1}-2\alpha z_2\partial_{z_2}-2(1+\alpha)z_4\partial_{z_4})\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_1}\partial_{z_2}.
\end{aligned}$$

2.3. 附加表示。如第 2.1 节所述，当且仅当 β 在变换 $\alpha\mapsto\alpha^{-1}$ 和 $\alpha\mapsto-1-\alpha$ 作用下与 α 属于同一轨道时，我们有同构 $D(2,1;\alpha)$ 与 $\cong D(2,1;\beta)$，即

$$\beta\in\{\alpha,-1-\alpha,-1-\alpha^{-1},\alpha^{-1},(-1-\alpha)^{-1},(-1-\alpha^{-1})^{-1}\}$$

这些同构给出了 $D(2,1;\alpha)$的附加表示。直接验证可知，$D(2,1;\alpha)$与 $D(2,1;\alpha^{-1})$ 之间的同构保持方程 2 中引入的三重分次，而$D(2,1;\alpha)$与 $D(2,1;-1-\alpha)$之间的同构通常并不保持该分次。

令 $\mathsf{d}\rho^\alpha_\lambda$ 表示对应于 $D(2,1;\alpha)$、参数为 $\lambda\in\{1,\alpha\}$ 的 Fock 表示。$D(2,1;\alpha)$ 与 $D(2,1;\alpha^{-1})$ 之间的同构诱导出参数为 $\lambda=\alpha$ 的 $\mathsf{d}\rho^\alpha_\lambda$ 与带有 $\lambda=1$ 的 $\mathsf{d}\rho^{\alpha^{-1}}_\lambda$ 之间的等价。因此，不失一般性，我们可以选择 $\lambda=\alpha$ 并令 $\mathsf{d}\rho^\alpha:=\mathsf{d}\rho^\alpha_\alpha$。

对于任意的 α，我们现在发现，将 $\mathsf{d}\rho^\beta$ 与同构$D(2,1;\alpha)\to D(2,1;\beta)$ 对所有可能的 β 值进行前复合，可得

$$\mathrm{d}\rho^{\alpha},\quad \mathrm{d}\rho^{-1-\alpha},\quad \mathrm{d}\rho^{-1-\alpha^{-1}}\quad \mathrm{d}\rho^{\alpha^{-1}},\quad \mathrm{d}\rho^{(-1-\alpha)^{-1}},\quad \mathrm{d}\rho^{(-1-\alpha^{-1})^{-1}},$$

它们都是 $D(2,1;\alpha)$ 的可能彼此不同的表示。

3. 李超群 D(2, 1; α)

本节中，我们定义超群 D(2, 1; α)，其李超代数为 $D(2,1;\alpha)$。我们还给出 $SL(V)$ 的一些基本结果，后文将用到这些结果。请注意，本节中我们将在实数域 R 上进行讨论。

3.1. D(2, 1; α) 的定义。我们将采用基于对的李超群刻画，更多详情请参见例如 [22, 第 7] 章。

定义 3.1. 李超群 G 是一对 $(G_0, \mathfrak{g})$，并配有一个态射 $\sigma: G_0 \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$，其中 G_0 是李群，$\mathfrak{g}$ 是李超代数，且满足

- $\mathrm{Lie}(G_0) \cong \mathfrak{g}_{\overline{0}}$。
- 对于所有 $g \in G_0$，我们都有 $\sigma(g)|_{\mathfrak{g}_{\overline{0}}} = \mathrm{Ad}(g)$，其中 Ad 是 G_0 在 $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 上的伴随表示。
- 对于所有 $X \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 和 $Y \in \mathfrak{g}$，我们都有

$$d\sigma(X)Y = \frac{d}{dt}\sigma(\exp(tX))Y\Big|_{t=0} = [X, Y].$$

由于 σ 将 G_0 在 $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 上的伴随表示扩展，因此我们称其为 G_0 在 $\mathfrak{g}$ 上的伴随表示，并记作 Ad。

请注意，在 [2] 中，这些李超群被称为超 Harish-Chandra 对。随后，李超群一词被用于指具有群结构的超流形，其中乘法是光滑映射。然而，正如 [2] 中所提到的，这两种结构在范畴意义下是等价的。

回顾 $\mathfrak{g} = D(2, 1; \alpha)$，并定义 $G_0 := SL(V_1) \times SL(V_2) \times SL(V_3)$，其中 V_i 是二维向量空间 V 的一个副本，其基为 u_+ 和 u_-。那么，若将伴随表示按如下方式扩展，$\mathrm{D}(2, 1; \alpha) := (G_0, \mathfrak{g})$ 就是一个李超群。对于 $A_i \in SL(V_i)$ 和 $x \otimes y \otimes z \in \mathfrak{g}_{\overline{1}} = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$，我们定义

$$\mathrm{Ad}(A_1, A_2, A_3)x \otimes y \otimes z := A_1(x) \otimes A_2(y) \otimes A_3(z)$$

对于 $X_i \in \{H_i, E_i, F_i\}$，我们定义

$$\mathrm{Ad}(A_1, A_2, A_3)X_i := A_i X_i A_i^{-1}$$

并将其线性扩展。

3.2. $SL(V)$ 的性质。定义 $i \in \{1, 2, 3\}$ 的 $SL(V_i)$ 的以下一维子群

$$K_i := \left\{ K_i(k_i) := \begin{pmatrix} \cos(k_i) & -\sin(k_i) \\ \sin(k_i) & \cos(k_i) \end{pmatrix} \mid k_i \in \mathbb{R} \right\},$$
$$A_i := \left\{ A_i(a_i) := \begin{pmatrix} \exp(a_i) & 0 \\ 0 & \exp(-a_i) \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

一方面，我们有 $SL(V_i)$ 的嘉当分解。

定理 3.2（嘉当分解）。我们有分解 $SL(V) = KAK$，即每个 $g \in \mathfrak{sl}(V)$ 都可以写成 $g = kak'$，其中 k、$k' \in K$ 和 $a \in A$。

该分解意味着，$SL(V_i)$ 的一个表示完全由其在 K_i 和 A_i 上的限制所确定。另一方面，我们可以将 $\mathfrak{sl}(V_i)$ 显式积分到 $SL(V_i)$。

引理 3.3。设 A、B 和 C 是三个反对易变量。那么

$$(A + B + C)^{2j} = \sum_{a+b+c=j} \binom{j}{a, b, c} A^{2a} B^{2b} C^{2c},$$

对于所有 $j \in \mathbb{N}$。

证明。由多项式定理以及 $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2$ 是三个彼此对易变量之和这一事实可立即得到。□

定理 3.4。设 $g \in SL(V_i)$。存在一个 $X \in \mathrm{Lie}(SL(V_i))$，使得$g = \exp(X)$ 当且仅当 g 为单位元或

$$g = \begin{pmatrix} \cosh(\rho) + a\rho^{-1}\sinh(\rho) & (l-k)\rho^{-1}\sinh(\rho) \\ (l+k)\rho^{-1}\sinh(\rho) & \cosh(\rho) - a\rho^{-1}\sinh(\rho) \end{pmatrix},$$

对于某些 a、k、$l \in \mathbb{R}$，满足 $\rho := \sqrt{a^2+l^2-k^2} \neq 0$。在此情形下，我们有$X = k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i)$。

证明。任意元素 $X \in \mathfrak{sl}(V_i)$ 都可以写成 $X = k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i)$，其中 a、k、$l \in \mathbb{R}$。我们将显式计算 $\exp(X)$。注意，$F_i - E_i$、H_i 和 $F_i + E_i$ 两两反对易，并且 $(\imath(F_i - E_i))^2 = H_i^2 = (F_i + E_i)^2 = I$。利用引理 3.3，我们得到

$$\begin{aligned}
\exp(X) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i))^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!}(k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i))^{2j} \\
&\quad + (k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i)) \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!}(k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i))^{2j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{u+v+w=j} \frac{k^{2u}a^{2v}l^{2w}j!}{(2j)!u!v!w!}(F_i - E_i)^{2u} H_i^{2v} (F_i + E_i)^{2w} \\
&\quad + (k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i)) \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{u+v+w=j} \frac{k^{2u}a^{2v}l^{2w}j!}{(2j+1)!u!v!w!}(F_i - E_i)^{2u} H_i^{2v} (F_i + E_i)^{2w} \\
&= I \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{u+v+w=j} \frac{(\imath k)^{2u}a^{2v}l^{2w}j!}{(2j)!u!v!w!} \\
&\quad + (k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i)) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{u+v+w=j} \frac{(\imath k)^{2u}a^{2v}l^{2w}j!}{(2j+1)!u!v!w!} \\
&= \cosh(\rho) I + (k(F_i - E_i) + aH_i + l(F_i + E_i))\rho^{-1}\sinh(\rho),
\end{aligned}$$

对于 $\rho \neq 0$。对于 $\rho = 0$，此计算得出 $\exp(X) = I$。 □

请注意，特别是我们有

$$K_i = \{\exp(k_i(F_i - E_i)) \mid k_i \in \mathbb{R}\}, \qquad A_i = \{\exp(a_i H_i) \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

这意味着，从 $\mathfrak{sl}(V_i)$ 的一个显式表示中，我们可以得到 K_i 和 A_i 中元素的显式作用；将其积分到群层面后，由于嘉当分解，这便定义了 $SL(V_i)$ 的一个作用。

由于我们可以将 $SL(V_i)$ 的每个元素写成 $\mathfrak{sl}(V_i)$ 中元素的指数映射的有限乘积，因此对于 $D(2, 1; \alpha)$，我们得到以下推论。

推论 3.5。 $G_0 = SL(V_1) \times SL(V_2) \times SL(V_3)$ 中的每个元素都可以写成 $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 中元素的指数映射的有限乘积，即，对于所有 $g \in G_0$ ，我们有

$$g = \prod_{i=1}^{n} \exp(X_i),$$

对于某些 $X_i \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

4. The Fock space $\mathcal{F}$

本节将介绍 [2] 中定义的希尔伯特超空间概念。我们还将多项式福克空间 F_λ 扩展为福克空间 $\mathcal{F}$ ，并说明它与 Bessel-Fischer 乘积结合后构成一个希尔伯特超空间。

从现在起，我们将限于 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ 的情形，因为只有此时 Bessel-Fischer 乘积才是非退化的。此外，我们还选择 $\lambda = \alpha$，并将多项式福克空间 F_λ 记为 $\mathbb{F}$。回顾第 2.3 节，情形 $\lambda = 1$ 总是等价于一个具有 $\lambda = \alpha$ 的表示。

4.1. Bessel-Fischer 乘积。

在 [1, 第 5], 节中，我们在 $\mathbb{F}$ 上引入了一种非退化、共轭双线性、超厄米形式。该乘积是多项式空间 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^m)$ 上的 Bessel-Fischer 内积的一种推广，该内积见于 [23,第 2.3] 节。

定义 4.1. 对于 $p, q \in \mathbb{F}$，我们定义 p 与 q的 Bessel-Fischer 乘积为

$$\langle p, q \rangle_{\mathcal{B}} := p(\mathcal{B}_\lambda)\bar{q}(z)|_{z=0}\,,$$

其中， $\bar{q}(z) = \overline{q(\bar{z})}$ 是通过对多项式 q的系数取共轭得到的，而 $p(\mathcal{B}_\lambda)$ 则是通过将 z_i 替换为 $\mathcal{B}_\lambda(z_i)$ 得到的。

由 [1, 命题 5.6.] ，我们得到 Bessel-Fischer 乘积的如下显式形式。

命题 4.2. 设 $p, q \in \{z_1^k, z_1^k z_2, z_1^k z_3, z_1^k z_4\}$，且 $k \in \mathbb{N}$。那么 $\langle p, q \rangle_{\mathcal{B}}$ 唯一非零的取值为

$$\left\langle z_1^k, z_1^k \right\rangle_{\mathcal{B}} = -\left\langle z_1^k z_2, z_1^k z_2 \right\rangle_{\mathcal{B}} = k!(-\alpha)_k,$$
$$\left\langle z_1^k z_3, z_1^k z_4 \right\rangle_{\mathcal{B}} = -\left\langle z_1^k z_4, z_1^k z_3 \right\rangle_{\mathcal{B}} = 2k!(-\alpha)_{k+1},$$

其中我们使用了 Pochhammer 符号 $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$。

从这个显式形式可以很容易看出，当且仅当 $\alpha \in \mathbb{N}$ 时，Bessel-Fischer 乘积是退化的，这就是我们假设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ 的原因。

4.2. 定义。

定义 4.3。厄米超空间 $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个配备了非退化、超厄米半双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的超向量空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{H}_{\overline{1}}$。如果内积是一个次数为 $\sigma(\mathcal{H}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的齐次形式，那么 $\mathcal{H}$ 就称为奇偶性为 $\sigma(\mathcal{H})$ 的厄米超空间。

根据 [1, 第 5], 节中的命题，赋予 Bessel-Fischer 乘积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ 的多项式福克空间 $\mathbb{F}$ 是这样的厄米超空间。

定义 4.4. 厄米超空间 $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ 的基本对称是 $\mathcal{H}$ 的一个端同态 J，满足 $J^4 = 1$, $\langle J(x)\ J(y)\rangle = \langle x, y\rangle$，并且 $(\cdot\,,\cdot)_J$ 定义为

$$(x, y)_J := \langle x, J(y)\rangle\,,$$

对所有 x, $y \in \mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}$ 上的一个内积。

对于 F，我们发现关于 Bessel-Fischer 乘积的基本对称满足以下条件。

命题 4.5. 对于 F 的所有基本对称，我们必须有

$$J(z_1^k)_{z_1^k} = \epsilon_{1,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_k), \qquad J(z_1^k z_2)_{z_1^k z_2} = -\epsilon_{2,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_k),$$
$$J(z_1^k z_3)_{z_1^k z_4} = \epsilon_{3,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_{k+1}), \qquad J(z_1^k z_4)_{z_1^k z_3} = -\epsilon_{4,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_{k+1}),$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$。这里 $J(a)_b$ 表示 $J(a)$ 中 b 的系数，并且 $\epsilon_{i,\,k} > 0$ 对所有 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$。

证明。假设 J 是 F 的任意一个基本对称，则我们有

$$\left(z_1^k, z_1^k\right)_J = \left\langle z_1^k, J(z_1^k)\right\rangle_{\mathcal{B}} = J(z_1^k)_{z_1^k}\left\langle z_1^k, z_1^k\right\rangle_{\mathcal{B}} = J(z_1^k)_{z_1^k} k!(-\alpha)_k > 0,$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$。因此，对于某个 $\epsilon > 0$, $J(z_1^k)_{z_1^k} = \epsilon\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_k)$。其余三种情形类似。□

基于此条件，我们通过线性延拓将 F 上的端同态 S 定义为

$$S(z_1^k) := \mathrm{sgn}((-\alpha)_k) z_1^k, \qquad S(z_1^k z_2) := -\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_k) z_1^k z_2,$$
$$S(z_1^k z_3) := \mathrm{sgn}((-\alpha)_{k+1}) z_1^k z_4, \qquad S(z_1^k z_4) := -\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_{k+1}) z_1^k z_3,$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$。然后，容易验证 S 是 F 关于 Bessel-Fischer 乘积的基本对称。

命题 4.6. 设 $p, q \in \{z_1^k, z_1^k z_2, z_1^k z_3, z_1^k z_4\}$，且 $k \in \mathbb{N}$。那么 $(p, q)_S$ 的唯一非零取值为

$$(z_1^k, z_1^k)_S = (z_1^k z_2, z_1^k z_2)_S = k!|(-\alpha)_k|,$$
$$(z_1^k z_3, z_1^k z_3)_S = (z_1^k z_4, z_1^k z_4)_S = 2k!|(-\alpha)_{k+1}|,$$

其中我们使用了 Pochhammer 符号 $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$。

证明。由命题 4.2 可立即得出。□

定义 4.7. 若存在一个基本对称 J，使得 $(\mathcal{H}, (\cdot\,,\cdot)_J)$ 是希尔伯特空间，则厄米超空间 $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ 称为希尔伯特超空间。

请注意，根据 [2, 定理 3.4]，基本对称的选择不会影响拓扑。

记 $\mathcal{F}$ 为 F 关于 $(\cdot\,,\cdot)_S$ 的完备化，则 $(\mathcal{F}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})$ 是一个希尔伯特超空间，我们称之为福克空间。定义 $\|f\|_S := \sqrt{(f, f)_S}$，则有

$$\mathcal{F} = \left\{ f = f_{1,0} + \sum_{k=1}^{\infty} z_1^{k-1}(f_{1,k} z_1 + f_{2,k} z_2 + f_{3,k} z_3 + f_{4,k} z_4) : \|f\|_S < \infty,\, f_{i,k} \in \mathbb{C} \right\}.$$

条件 $\|f\|_S < \infty$ 对 f 成立，等价于以下级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!|(-\alpha)_k||f_{1,k}|^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)!|(-\alpha)_{k-1}||f_{2,k}|^2,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)!|(-\alpha)_k||f_{3,k}|^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)!|(-\alpha)_k||f_{4,k}|^2$$

收敛。

5. The superunitary representation ρ_0

本节中，我们将显式地把 $D(2,1,\alpha)$ 在 F 上的微分作用 $\mathrm{d}\rho$ 积分为 $\mathrm{D}(2,1,\alpha)$ 在 $\mathcal{F}$ 上的作用 ρ_0。我们还引入 [2] 中定义的超酉表示这一概念。随后，我们证明，对于 $\alpha < 0$，我们的作用在 $\mathcal{F}$ 上定义了一个超酉表示。

回顾第4节，我们假设 $\alpha \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{N}$。

5.1. 定义与显式形式。我们对所有$X \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$定义 $\rho_0(\exp(X)) := \exp(\mathrm{d}\rho(X))$。根据推论 3.5，这定义了整个 G_0 的一个表示。现在我们将更具体地描述这个表示。请注意，在我们的显式表示中，我们省略了 $A_2(a_2)$ 的作用。此情况将在第5.2节讨论。

定理5.1。作用于 $f = f(z_1, z_2, z_3, z_4)$的表示 $\rho_0 \in \mathcal{F}$由下式给出

$$\rho_0(K_1(k_1))f = f(z_1, z_2, \cos(k_1)z_3 - 2^{-1}\sin(k_1)z_4, 2\sin(k_1)z_3 + \cos(k_1)z_4), \tag{3}$$
$$\rho_0(K_2(k_2))f = \exp(\imath\alpha k_2)f(\exp(-2\imath k_2)z_1, z_2, \exp(-\imath k_2)z_3, \exp(-\imath k_2)z_4), \tag{4}$$
$$\rho_0(K_3(k_3))f = \exp(\imath k_3)f(z_1, \exp(-2\imath k_3)z_2, \exp(-\imath k_3)z_3, \exp(-\imath k_3)z_4), \tag{5}$$
$$\rho_0(A_1(a_1))f = f(z_1, z_2, \exp(-a_1)z_3, \exp(a_1)z_4),$$
$$\rho_0(A_3(a_3))f = (\cosh(a_3) + \sinh(a_3)z_2) \tag{6}$$
$$\times f(z_1, \tanh(a_3) + \cosh(a_3)^{-2}z_2, \cosh(a_3)^{-1}z_3, \cosh(a_3)^{-1}z_4), \tag{7}$$

证明。
(3) 我们有

$$\rho_0(K_1(k_1)) = \exp(\mathrm{d}\rho(k_1(F_1 - E_1))) = \exp(k_1(2z_3\partial_{z_4} - \frac{1}{2}z_4\partial_{z_3}))$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{k_1^i}{i!}(2z_3\partial_{z_4} - \frac{1}{2}z_4\partial_{z_3})^i,$$

with

$$(2z_3\partial_{z_4} - \frac{1}{2}z_4\partial_{z_3})^2 = -(z_3\partial_{z_3} + z_4\partial_{z_4}),$$
$$(2z_3\partial_{z_4} - \frac{1}{2}z_4\partial_{z_3})^3 = -(2z_3\partial_{z_4} - \frac{1}{2}z_4\partial_{z_3}),$$

因此

$$\begin{aligned}\rho_0(K_1(k_1)) &= 1-(z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4})+\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{k_1^{2i}}{(2i)!}(z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4})\\ &\quad+\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{k_1^{2i+1}}{(2i+1)!}(2z_3\partial_{z_4}-\frac{1}{2}z_4\partial_{z_3})\\ &= 1-z_3\partial_{z_3}-z_4\partial_{z_4}+\cos(k_1)(z_3\partial_{z_3}+z_4\partial_{z_4})\\ &\quad+\sin(k_1)(2z_3\partial_{z_4}-\frac{1}{2}z_4\partial_{z_3}).\end{aligned}$$

由此得到

$$\rho_0(K_1(k_1))f(z_1,z_2,z_3,z_4)=f(z_1,z_2,\begin{pmatrix}\cos(k_1) & -2^{-1}\sin(k_1)\\ 2\sin(k_1) & \cos(k_1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_3\\ z_4\end{pmatrix}).$$

(4) 和 (5) 我们有

$$\begin{aligned}\rho_0(K_2(k_2)) &= \exp(\mathrm{d}\rho(k_2(F_2-E_2)))\\ &= \exp(\alpha\imath k_2-2\imath k_2z_1\partial_{z_1}-\imath k_2z_3\partial_{z_3}-\imath k_2z_4\partial_{z_4})\\ &= \exp(\alpha\imath k_2)\exp(-2\imath k_2z_1\partial_{z_1})\exp(-\imath k_2z_3\partial_{z_3})\exp(-\imath k_2z_4\partial_{z_4}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\rho_0(K_3(k_3)) &= \exp(\mathrm{d}\rho(k_3(F_3-E_3)))\\ &= \exp(\imath k_3-2\imath k_3z_2\partial_{z_2}-\imath k_3z_3\partial_{z_3}-\imath k_3z_4\partial_{z_4})\\ &= \exp(\imath k_3)\exp(-2\imath k_3z_2\partial_{z_2})\exp(-\imath k_3z_3\partial_{z_3})\exp(-\imath k_3z_4\partial_{z_4}).\end{aligned}$$

由于对所有 $a\in\mathbb{C}$, $\exp(az_i\partial_{z_i})f(z_i)=f(\exp(a)z_i)$, 因此得到

$$\rho_0(K_2(k_2))f(z_1,z_2,z_3,z_4)=e^{\imath\alpha k_2}f(e^{-2\imath k_2}z_1,z_2,e^{-\imath k_2}z_3,e^{-\imath k_2}z_4),$$

and

$$\rho_0(K_3(k_3))f(z_1,z_2,z_3,z_4)=e^{\imath k_3}f(z_1,e^{-2\imath k_3}z_2,e^{-\imath k_3}z_3,e^{-\imath k_3}z_4),$$

分别。

(6) 我们有

$$\begin{aligned}\rho_0(A_1(a_1))f &= \exp(a_1\,\mathrm{d}\rho(H_1))f=\exp(a_1(z_4\partial_{z_4}-z_3\partial_{z_3}))f\\ &= f(z_1,z_2,\exp(-a_1)z_3,\exp(a_1)z_4)\end{aligned}$$

(7) 我们有

$$\rho_0(A_3(a_3))f=\exp(a_3\,\mathrm{d}\rho(H_3))f=\exp(a_3(z_2+\partial_{z_2}))f=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_3^i}{i!}(z_2+\partial_{z_2})^if$$

with

$$\begin{aligned}(z_2+\partial_{z_2})^{2i}f &= \sum_{k=0}^{\infty}z_1^{k-1}(f_{1,k}z_1+f_{2,k}z_2),\\ (z_2+\partial_{z_2})^{2i-1}f &= \sum_{k=0}^{\infty}z_1^kf_{2,k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}z_1^{k-1}z_2f_{1,k-1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}z_1^{k-1}(f_{2,k+1}z_1+f_{1,k-1}z_2),\end{aligned}$$

对于 $i \geq 1$。因此

$$\begin{aligned}\rho_0(A_3(a_3))f &= f + (\cosh(a_3)-1)\sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k-1}(f_{1,k}z_1 + f_{2,k}z_2)\\ &\quad + \sinh(a_3)\sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k-1}(f_{2,k+1}z_1 + f_{1,k-1}z_2)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k-1}((\cosh(a_3)f_{1,k} + \sinh(a_3)f_{2,k+1})z_1\\ &\quad + (\cosh(a_3)f_{2,k} + \sinh(a_3)f_{1,k-1})z_2 + f_{3,k}z_3 + f_{4,k}z_4)\\ &= (\cosh(a_3) + \sinh(a_3)z_2)\\ &\quad \times f(z_1, \tanh(a_3) + \cosh(a_3)^{-2}z_2, \cosh(a_3)^{-1}z_3, \cosh(a_3)^{-1}z_4)\end{aligned}$$

□

我们有两种不同的方式来呈现这个表示。第一种如下。设 $f \in \mathcal{F}$ 并定义

$$f_1(z_1) := \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k f_{i,k} \quad \text{and} \quad f_i(z_1) := \sum_{k=0}^{\infty} z_1^k f_{i,k+1},$$

对于 $i \in \{2,3,4\}$。那么我们有 $f = f_1(z_1) + f_2(z_1)z_2 + f_3(z_1)z_3 + f_4(z_1)z_4$ 并且我们可以将 f 视为向量

$$f = \begin{pmatrix} f_1(z_1) \\ f_2(z_1) \\ f_3(z_1) \\ f_4(z_1) \end{pmatrix}.$$

现在可以用作用于 $f \in \mathcal{F}$的矩阵给出 ρ_0 在 $\mathcal{F}$ 上的表示。

推论 5.2. 作用于 $f \in \mathcal{F}$ 的表示 ρ_0 定义为

$$\rho_0(K_1(k_1))f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k_1) & 2\sin(k_1) \\ 0 & 0 & -2^{-1}\sin(k_1) & \cos(k_1) \end{pmatrix} f,$$

$$\rho_0(K_2(k_2))f = \begin{pmatrix} e^{\imath k_2(\alpha-2\mathbb{E})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\imath k_2(\alpha-2\mathbb{E})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\imath k_2(\alpha-1-2\mathbb{E})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\imath k_2(\alpha-1-2\mathbb{E})} \end{pmatrix} f,$$

$$\rho_0(K_3(k_3))f = \begin{pmatrix} e^{\imath k_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\imath k_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f,$$

$$\rho_0(A_1(a_1))f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-a_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{a_1} \end{pmatrix} f,$$

$$\rho_0(A_3(a_3))f = \begin{pmatrix} \cosh(a_3) & \sinh(a_3) & 0 & 0 \\ \sinh(a_3) & \cosh(a_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f,$$

其中 $\mathsf{E} := z_1\partial_{z_1}$ 表示 $f_i(z_1)$ 上的欧拉算子，$i \in \{1,2,3,4\}$。

第二种方法如下。记 $\mathcal{P}_k(\mathbb{C}^{m|n})$ 为由 m 个偶变量和 n 个奇变量构成的 k 次齐次超多项式空间。于是

$$\begin{aligned} \phi : \quad F_\lambda \quad &\to \quad \mathcal{P}_{\mathrm{even}}(\mathbb{C}^{1|2}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_{2k}(\mathbb{C}^{1|2}) \\ (z_1, z_2, z_3, z_4) \quad &\mapsto \quad (2^{-1}\ell_1^2, \ell_2\ell_3, \ell_1\ell_3, \ell_1\ell_2), \end{aligned}$$

定义了 F_λ 与关于偶变量 ℓ_1 和两个奇变量 ℓ_2、ℓ_3 的偶次数超多项式空间之间的一个同构。这里，$\mathcal{P}_{\mathrm{even}}(\mathbb{C}^{1|2})$ 中的“偶”指次数，而非超多项式项的奇偶性。

现在可以将 ρ_0 在 $\mathcal{F}$ 上的表示写成在 $f(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \phi(\mathcal{F})$ 上的作用。

推论 5.3. 表示 ρ_0 在 $f = f(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \phi(\mathcal{F})$ 上的作用由下式给出

$$\begin{aligned} &\rho_0(K_1(k_1))f = f(\ell_1, \cos(k_1)\ell_2 + 2\sin(k_1)\ell_3, -2^{-1}\sin(k_1)\ell_2 + \cos(k_1)\ell_3), \rho_0(K_2(k_2)) \\ &f = \exp(\imath\alpha k_2) f(\exp(-\imath k_2)\ell_1, \ell_2, \ell_3), \rho_0(K_3(k_3))f = \exp(\imath k_3) f(\ell_1, \exp(-\imath k_3)\ell_3, \\ &\exp(-\imath k_3)\ell_4), \rho_0(A_1(a_1))f = f(\ell_1, \exp(a_1)\ell_2, \exp(-a_1)\ell_3), \rho_0(A_3(a_3))f = (\cosh(a_3) \\ &+ \sinh(a_3)\ell_2\ell_3) f(\ell_1, \cosh(a_3)^{-1}\ell_2, \cosh(a_3)^{-1}\ell_3) + \sinh(a_3)(f(\ell_1, 1, 1) - f(\ell_1, \\ &1, 0) - f(\ell_1, 0, 1) + f(\ell_1, 0, 0) + \tanh(a_3)(f(\ell_1, \ell_2, \ell_3) - f(\ell_1, \ell_2, 0) - f(\ell_1, 0, \ell_3) \\ &+ f(\ell_1, 0, 0))). \end{aligned}$$

请注意，只有在采用以下约定时，将奇变量 ℓ_2 和 ℓ_3 进行符号替换为常数 1 才有明确定义：先将 f 中的每个 $\ell_3\ell_2$ 都改写为 $-\ell_2\ell_3$。

5.2. $A_2(a_2)$ 的作用。对于作用 $\rho_0(A_2(a_2))$，当 $\alpha < 0$ 时，我们无法找到显式形式。

对于 $\alpha > 0$，我们可以用广义拉盖尔多项式基来表示 $\mathcal{F}$，

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \Bigg\{ g = \exp(-z_1) \Bigg(&\sum_{k=0}^{\infty} (g_{1,k} + g_{2,k} z_2) L_k^{(-1-\alpha)}(2z_1) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (g_{3,k} z_3 + g_{4,k} z_4) L_{k-1}^{(-\alpha)}(2z_1) \Bigg) : \|g\|_S < \infty,\, g_{i,k} \in \mathbb{C} \Bigg\}, \end{aligned}$$

Here

$$L_k^{(a)}(2x) = \frac{(-1)^k}{k!}\,\mathrm{U}(-k, a+1, 2x) = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} (-a-k)_i (-k)_i (2x)^{k-i}$$

是广义拉盖尔多项式，而 $\mathrm{U}(a, b, c)$ 是第二类合流超几何函数。注意，若 $\alpha < 0$，则此处并未定义 $\mathcal{F}$ 的一个基，因为此时 $\|\exp(-z_1)\|_S \not< \infty$。现在我们可以给出 $A_2(a_2)$ 关于该基的作用。

命题 5.4. 对于 $\alpha > 0$ ，有

$$\rho_0(A_2(a_2))g(z) = \exp(-z_1)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\exp(a_2(2k-\alpha))(g_{1,k}+g_{2,k}z_2)L_k^{(-1-\alpha)}(2z_1)) + \sum_{k=1}^{\infty}\exp(a_2(2k-\alpha-1))(g_{3,k}z_3+g_{4,k}z_4)L_{k-1}^{(-\alpha)}(2z_1))\right).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\rho_0(A_2(a_2)) &= \exp(a_2\,\mathrm{d}\rho(H_2)) = \exp(a_2(z_1-\mathcal{B}_\lambda(z_1)))\\ &= \exp(a_2(z_1+(\alpha-z_1\partial_{z_1}-z_3\partial_{z_3}-z_4\partial_{z_4})\partial_{z_1}))\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_2^i}{i!}D^i,\end{aligned}$$

with

$$D = z_1+(\alpha-z_1\partial_{z_1}-z_3\partial_{z_3}-z_4\partial_{z_4})\partial_{z_1}.$$

由于

$$D(\exp(-z_1)L_k^{(-1-\alpha)}(2z_1)) = (2k-\alpha)\exp(-z_1)L_k^{(-1-\alpha)}(2z_1)$$

and

$$D(\exp(-z_1)z_jL_{k-1}^{(-\alpha)}(2z_1)) = (2k-\alpha-1)\exp(-z_1)z_jL_{k-1}^{(-\alpha)}(2z_1),$$

对于 $j\in\{3,4\}$，我们得到所需结果。 □

尽管没有 $\alpha < 0$ 的显式形式，但我们可以证明，当且仅当 $\alpha<0$ 时，该作用是酉的。

命题 5.5。对于所有 $a_2\in\mathbb{R}$，当且仅当 $\alpha<0$ 时，作用 $\rho_0(A_2(a_2))$ 是 $(\mathcal{F},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})$ 上的酉算子。

证明。首先假设 $\alpha>0$。由命题 5.4 可知，$\rho_0(A_2(a_2))$ 的特征值具有 $\exp(a)$ 的形式，其中 $a\in\mathbb{R}$。由于这些特征值不是单位根， $\rho_0(A_2(a_2))$ 不可能是 $(\mathcal{F},\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})$ 上的酉算子。

现在假设 $\alpha<0$。在这种情况下，我们很容易看出，基本对称性 S 与 $\rho_0(A_2(a_2))$ 对易。由 [1, 命题 6.3] ，我们有

$$\langle\mathrm{d}\rho(H_2)p,q\rangle_{\mathcal{B}} = -\langle p,\mathrm{d}\rho(H_2)q\rangle_{\mathcal{B}},$$

对于 $p,q\in\mathbb{F}$。这意味着

$$\begin{aligned}(\rho_0(A_2(a_2))p,q)_S &= \langle\rho_0(A_2(a_2))p,S(q)\rangle_{\mathcal{B}} = \langle\exp(a_2\,\mathrm{d}\rho(H_2))p,S(q)\rangle_{\mathcal{B}}\\ &= \langle p,\exp(-a_2\,\mathrm{d}\rho(H_2))S(q)\rangle_{\mathcal{B}} = \langle p,\rho_0(A_2(-a_2))S(q)\rangle_{\mathcal{B}}\\ &= \langle p,S(\rho_0(A_2(-a_2))q)\rangle_{\mathcal{B}} = (p,\rho_0(A_2(-a_2))q)_S,\end{aligned}$$

对于 $p,q\in\mathbb{F}$，即 $\rho_0(A_2(a_2))$ 在作用于 $\mathbb{F}$ 时表现为酉算子。由于 $\mathbb{F}$ 在 $\mathcal{F}$中稠密，证毕。 □

5.3. 超酉表示。以下定义见[2]。

定义 5.6. 设 $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 和 $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 是希尔伯特超空间，并假设 $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ 是一个线性算子。若 T 关于它们的希尔伯特拓扑是连续的，则称其为从 $\mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_2$ 的有界算子。有界算子的集合记作 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$，且 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) := \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$。

定义 5.7. 设 $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 和 $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 是希尔伯特超空间，并假设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$。$T$ 的超伴随是算子 $T^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$，满足

$$\left\langle T^\dagger(x), y\right\rangle_1 = (-1)^{|T||x|}\left\langle x, T(y)\right\rangle_2,$$

对所有 $x \in \mathcal{H}_2$, $y \in \mathcal{H}_1$。

定义 5.8. 设 $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 和 $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$。$\mathcal{H}_1$ 与 $\mathcal{H}_2$ 之间的超幺正算子是一个 0 次齐次算子 $\psi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$，满足$\psi^\dagger\psi = \psi\psi^\dagger = \mathbb{1}$。超幺正算子的集合记为 $\mathcal{U}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$，且$\mathcal{U}(\mathcal{H}_1)\colon = \mathcal{U}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1)$。

定义 5.9. 李超群 G =$(G_0, \mathfrak{g})$的超酉表示是一个三元组 $(\mathcal{H}, \pi_0, d\pi)$，满足

- $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特超空间。
- $\pi_0\colon\ G_0 \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ 是一个群同态。
- 对所有 $v \in \mathcal{H}$，映射 $\pi_0^v\colon\ g \mapsto \pi_0(g)v$ 在 G_0上都是连续的。
- $d\pi\colon\ \mathfrak{g} \to$End$(\mathcal{H}^\infty)$ 是一个实李超代数同态，使得 $d\pi = d\pi_0$在 $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$, $d\pi$ 上关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是斜超对称的，并且

  $$\pi_0(g)d\pi(X)\pi_0(g)^{-1} = d\pi(\mathrm{Ad}(g)(X)), \quad \text{for all } g \in G_0 \text{ and } X \in \mathfrak{g}_{\overline{1}}.$$

  这里， $\mathcal{H}^\infty$ 是表示 π_0 的光滑向量空间，而 Ad 是 G_0 在 $\mathfrak{g}$上的伴随表示。

利用超酉表示的这个定义，我们现在可以证明以下结果。

定理 5.10. 假设 $\alpha < 0$。三元组 $((\mathcal{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})\ \rho_0, \mathrm{d}\rho)$ 是 D(2,1; α) 的超酉表示。

证明。由推论 3.5 可知，我们只需考察表示 ρ_0 在形如 $g = \exp(X_1)\cdots\exp(X_n) \in G_0$ 的元素上的作用，其中$X_i \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$和 $n \in \mathbb{N}$。现在我们来证明定义 5.9 中的各项条件。

- $(\mathcal{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})$ 是一个希尔伯特超空间：这由定义可得。
- $\rho_0\colon\ G_0 \to \mathcal{U}(\mathcal{F})$ 是一个群同态：我们要证明 $\rho_0(\exp(X_1)\cdots\exp(X_n))$ 是 $\mathcal{F}$ 上的超幺正算子。根据 [1, 命题 6.3] ，我们有

  $$\left\langle\rho_0(\exp(X))p, q\right\rangle_{\mathcal{B}} = (-1)^{|X||p|}\left\langle p, \rho_0(\exp(-X))q\right\rangle_{\mathcal{B}},$$

  这意味着 $\rho_0(\exp(X_1)\cdots\exp(X_n))$ 的超伴随为$\rho_0(\exp(-X_n)\cdots\exp(-X_1))$，因此它是$\mathcal{F}$的超幺正算子。

• 对于所有 $f \in \mathcal{F}$，映射 $\rho_0^f\colon g \mapsto \rho_0(g)f$ 在 G_0 上是连续的:
我们需要证明以下内容

$$(\forall g \in G_0)(\forall \epsilon > 0)(\exists U \text{ neighborhood of } g)(h \in U \implies ||\rho_0^f(g) - \rho_0^f(h)||_S < \epsilon).$$

由于

$$U_r := \left\{ \prod_{i=1}^{3} K_i(k_i)A_i(a_i)K_i(k_i')g : \sum_{i=1}^{3} |k_i| + |a_i| + |k_i'| < r \right\}$$

对于所有 $r > 0$, g 都是一个邻域，因此只需证明

$$(\forall g \in SL(V_i))(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(||\rho_0(X_i(\delta))f - f||_S < \epsilon),$$

对于 $i \in \{1,2,3\}$ 和 $X_i \in \{K_i, A_i\}$。

对于 A_2，由命题5.5可知，当 $\alpha < 0$ 时，该作用是酉的。由于酉性蕴含连续性，故得证。

对于 K_3，我们有

$$\begin{aligned}\rho_0(K_3(\delta))f &= e^{\imath\delta}\sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k-1}(f_{1,k}z_1 + e^{-2\imath\delta}f_{2,k}z_2 + e^{-\imath\delta}(f_{3,k}z_3 + f_{4,k}z_4)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k-1}(e^{\imath\delta}f_{1,k}z_1 + e^{-\imath\delta}f_{2,k}z_2 + f_{3,k}z_3 + f_{4,k}z_4)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|\rho_0(K_3(\delta))f - f\|_S^2 &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k-1}((e^{\imath\delta} - 1)f_{1,k}z_1 + (e^{-\imath\delta} - 1)f_{2,k}z_2) \right\|_S^2 \\ &= (2 - e^{\imath\delta} - e^{-\imath\delta}) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} k!|(-\alpha)_k||f_{1,k}|^2 + (k-1)!|(-\alpha)_{k-1}||f_{2,k}|^2,\end{aligned}$$

当 δ 趋于 0 时，它也趋于 0。

对于 A_3，我们有

$$\begin{aligned}\rho_0(A_3(\delta))f - f = \sum_{k=0}^{\infty} z_1^{k-1}(((\cosh(\delta) - 1)f_{1,k} + \sinh(\delta)f_{2,k+1})z_1 \\ + ((\cosh(\delta) - 1)f_{2,k} + \sinh(\delta)f_{1,k-1})z_2)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|\rho_0(A_3(\delta))f - f\|_S^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |(\cosh(\delta)-1)f_{1,k} + \sinh(\delta)f_{2,k+1}|^2 |(-\alpha)_k| k! \\ &\quad + |(\cosh(\delta)-1)f_{2,k} + \sinh(\delta)f_{1,k-1}|^2 |(-\alpha)_{k-1}| (k-1)! \\ &\leq 2(\cosh(\delta)-1)^2 \sum_{k=0}^{\infty} |f_{1,k}|^2 |(-\alpha)_k| k! \\ &\quad + 2\sinh(\delta)^2 \sum_{k=0}^{\infty} |f_{2,k+1}|^2 |(-\alpha)_k| k! \\ &\quad + 2(\cosh(\delta)-1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} |f_{2,k}|^2 |(-\alpha)_{k-1}| (k-1)! \\ &\quad + 2\sinh(\delta)^2 \sum_{k=1}^{\infty} |f_{1,k-1}|^2 |(-\alpha)_{k-1}| (k-1)!\end{aligned}$$

当 δ 趋于 0 时，它趋于 0。

对于 K_2，我们有

$$\begin{aligned}\rho_0(K_2(\delta))f - f &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{\imath\delta(\alpha-2k)} - 1)(z_1^k f_{1,k} + z_2 z_1^k f_{2,k+1}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (e^{\imath\delta(\alpha-2k-1)} - 1)(z_3 z_1^k f_{3,k+1} + z_4 z_1^k f_{4,k+1})\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\|\rho_0(K_2(\delta))f - f\|_S^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2(1-\cos(\delta(\alpha-2k)))(|f_{1,k}|^2 + |f_{2,k+1}|^2) k! |(-\alpha)_k| \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} 4(1-\cos(\delta(\alpha-2k-1)))(|f_{3,k+1}|^2 + |f_{4,k+1}|^2) k! |(-\alpha)_{k+1}| \\ &\leq 4\sum_{k=0}^{\infty} (|f_{1,k}|^2 + |f_{2,k+1}|^2) k! |(-\alpha)_k| + 8\sum_{k=0}^{\infty} (|f_{3,k+1}|^2 + |f_{4,k+1}|^2) k! |(-\alpha)_{k+1}| \\ &= 4\|f\|_S^2\end{aligned}$$

现在，利用勒贝格控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0} \|\rho_0(K_2(\delta))f - f\|_S^2 \\ &\quad = \sum_{k=0}^{\infty} 2\lim_{\delta\to 0}(1-\cos(\delta(\alpha-2k)))(|f_{1,k}|^2 + |f_{2,k+1}|^2) k! |(-\alpha)_k| \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} 4\lim_{\delta\to 0}(1-\cos(\delta(\alpha-2k-1)))(|f_{3,k+1}|^2 + |f_{4,k+1}|^2) k! |(-\alpha)_{k+1}| \\ &\quad = 0,\end{aligned}$$

正如所需。

最后， K_1 和 A_1 的情形与 K_3 和 A_3 的情形类似。

• $\mathrm{d}\rho$: $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{F})$ 是一个实李超代数态射，满足：(i) 在 $\mathfrak{g}_{\overline{0}}$ 上，$\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\rho_0$ ；(ii) $\mathrm{d}\rho$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 斜超对称；(iii) $\rho_0(g)\,\mathrm{d}\rho(X)\rho_0(g)^{-1} = \mathrm{d}\rho(\mathrm{Ad}(g)(X))$，对所有 $g \in G_0$ 和 $X \in \mathfrak{g}_{\overline{1}}$均成立：性质 (i) 可由

$$\mathrm{d}\rho_0(X)p = \frac{d}{dt}\rho_0(\exp(tX))p\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(t\,\mathrm{d}\rho(X))p\Big|_{t=0} = \mathrm{d}\rho(X)p,$$

对所有 $p \in \mathrm{F}$ 和 $X \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$。项 (ii) 直接由 [1, 命题 6.3] 推出，而项 (iii) 则由

$$\begin{aligned}\rho_0(\exp(Y))\,\mathrm{d}\rho(X)\rho_0(\exp(Y))^{-1} &= \rho_0(\exp(Y))\,\mathrm{d}\rho(X)\rho_0(\exp(-Y)) \\ &= \exp(\mathrm{d}\rho(Y))\,\mathrm{d}\rho(X)\exp(\mathrm{d}\rho(-Y)) \\ &= \mathrm{d}\rho(\exp(Y)X\exp(-Y)) \\ &= \mathrm{d}\rho(\mathrm{Ad}(\exp(Y))(X)),\end{aligned}$$

对所有 $X \in \mathfrak{g}_{\overline{1}}$ 和 $Y \in \mathfrak{g}_{\overline{0}}$。 □

假设 $\alpha < 0$ 仅用于证明 $\rho_0(A_2(\delta))$ 的连续性。注意，命题 5.5 仅表明当 $\alpha > 0$ 时，这些作用不是酉的。在这种情况下，它并未说明连续性。即使没有假设 $\alpha < 0$，定理 5.10 也可能成立。

根据第 2.3 节的讨论，我们至少可以得出结论：对于每个 α，总存在 $\mathrm{D}(2, 1; \alpha)$ 的一个超酉表示。事实上，如果 $\alpha > 0$，我们可以考察 $D(2, 1; -1-\alpha)$ 的福克表示，而不是 $D(2, 1; \alpha)$ 的福克表示。

5.4. 强超酉表示。在 [2, 第4节。4]中也定义了强超酉表示的概念。然而，很容易证明，我们的超酉表示不是强超酉表示。

定义 5.11. 李超群$G = (G_0, \mathfrak{g})$的强超酉表示是满足以下条件的超酉表示 $(\mathcal{H}, \pi_0, d\pi)$：

• $(\mathcal{H}, \pi_0)$是可酉化的，
• $(\mathcal{H}, \pi_0, d\pi)$在$(D(G_0)\ D(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}))$上存在一个限制。

这里，$D(G_0)$是 G_0 的连通李子群，其李代数为 $[(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\overline{1}}\cdot(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\overline{1}}]$，并且 $D(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}) := [(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\overline{1}}\cdot(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\overline{1}}] \oplus (\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})_{\overline{0}}$。

定理 5.12. 不存在使 $((\mathcal{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})\ \rho_0)$ 可酉化的 F 上的基本对称。因此，$((\mathcal{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})\ \rho_0, \mathrm{d}\rho)$ 不是强超酉表示。

证明。设 J 是 F 上任意的基本对称。根据命题 4.5，我们可以假设

$$\begin{aligned} J(z_1^k)_{z_1^k} &= \epsilon_{1,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_k), & J(z_1^k z_2)_{z_1^k z_2} &= -\epsilon_{2,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_k), \\ J(z_1^k z_3)_{z_1^k z_4} &= \epsilon_{3,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_{k+1}), & J(z_1^k z_4)_{z_1^k z_3} &= -\epsilon_{4,k}\,\mathrm{sgn}((-\alpha)_{k+1}),\end{aligned}$$

对所有 $k \in \mathrm{N}$ 和 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$，均有 $\epsilon_{i,k} > 0$。假设 $((\mathcal{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{B}})\ \rho_0)$ 可酉化，则 F 上的内积应在ρ_0的导出作用下保持不变，即

$$(d\rho(X)p, q)_J = -(p, d\rho(X)q)_J \tag{8}$$

对所有 $X \in D(2,1;\alpha)_0$, $p,q \in \mathsf{F}$。令 $X = E_3 + F_3$, $p = z_2$ 和 $q = 1$。则$d\rho(X) = -\imath(z_2 - \partial_{z_2})$，方程 (8) 的左端变为

$$(d\rho(X)p, q)_J = \langle \imath, J(1)\rangle_{\mathcal{B}} = \imath\epsilon_{1,0}$$

而右侧变为

$$-(p, d\rho(X)q)_J = -\langle z_2, -\imath J(z_2)\rangle_{\mathcal{B}} = -(\overline{-\imath})\epsilon_{2,0} = -\imath\epsilon_{2,0},$$

这意味着方程 (8) 仅当以下条件成立时才成立

$$\epsilon_{1,0} + \epsilon_{2,0} = 0.$$

由于 $\epsilon_{1,0}$ 和 $\epsilon_{2,0}$ 都大于零，因此这导致矛盾。 □

5.5. Harish-Chandra 超模。本文最后将给出一种非显式的替代方法，将 $D(2,1,\alpha)$ 的代数表示积分到群层面。我们借助 [24] 中发展的 Harish-Chandra 超模框架来实现这一点。这个抽象积分得到的表示是否与定理5.1中的显式积分得到的表示相同，值得探究，但我们未能验证这一点。

定义 5.13. [24, 定义 4.1] 设 V 是一个复超向量空间， $G = (G_0, \mathfrak{g})$ 是一个李超群， K 是 G_0 的一个极大紧子群。那么，如果 V 是一个局部有限的 K 表示，且同时具有相容的 $\mathfrak{g}$-模结构，也就是说， K 的导出作用与李(K)-模结构一致，则 V 是一个 $(\mathfrak{g}, K)$-模:

$$d\pi_0(X)(v) = \frac{d}{dt}\pi_0(\exp(tX))(v)\Big|_{t=0} = d\pi(X)(v) \text{ for all } X \in \mathrm{Lie}(K),\, v \in V$$

and

$$\pi_0(k)(d\pi(X)(v)) = d\pi(\mathrm{Ad}(k)(X))(\pi_0(k)(v)),\ \text{for all } k \in K, X \in \mathfrak{g}, v \in V,$$

其中 π_0 是 K-表示， $d\pi$ 是 $\mathfrak{g}$-表示。$(\mathfrak{g}, K)$-模是 Harish–Chandra 超模，当且仅当它在 $U(\mathfrak{g})$ 上有限生成且具有K有限重数。

$SL(V_i)$ 的极大紧子群是 K_i。因此， G_0 的极大紧子群是三维环面 K : $= K_1 \times K_2 \times K_3$。

命题 5.14. 模 F 是一个 Harish–Chandra 超模。

证明。F 是一个 $(\mathfrak{g}, K)$-模，这一点可由下式推出

$$\mathrm{d}\rho_0(X)(p) = \frac{d}{dt}\rho_0(\exp(tX))(p)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\exp(t\,\mathrm{d}\rho(X))(p)\Big|_{t=0} = \mathrm{d}\rho(X)p,$$

and

$$\begin{aligned}\rho_0(\exp(Y))(\mathrm{d}\rho(X)p) &= \rho_0(\exp(Y))\,\mathrm{d}\rho(X)\rho_0(\exp(-Y))\rho_0(\exp(Y))p\\ &= (\exp(\mathrm{d}\rho(Y))\,\mathrm{d}\rho(X)\exp(-\mathrm{d}\rho(Y)))\rho_0(\exp(Y))p\\ &= \mathrm{d}\rho((\exp(Y)X\exp(-Y))\rho_0(\exp(Y))p\\ &= \mathrm{d}\rho((\mathrm{Ad}(\exp(Y))X)\rho_0(\exp(Y))p,\end{aligned}$$

对所有的 $p \in \mathsf{F}$ 和 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 均成立。由 [1, 定理 6.4] 中的分解可立即得出，F 是局部 K-有限的。利用命题 5.1，我们还可看出 F 也是 K-重数有限的。□

推论 5.15. $(\mathfrak{g}, K)$-模 F 可积分为李超群 D(2, 1; α) 的一个唯一的、中等增长的光滑 Fr´echet 表示。

证明。此结论可由 [24, 定理 4.6]立即得出。 □

致谢。SB 获得弗兰德斯研究基金会（1269821N）提供的 FWO 博士后初级研究员奖学金。

References

[1] S. Barbier 和 S. Claerebout，“例外李超代数 $D(2,1;\alpha)$ 的 Schr¨odinger 模型、Fock模型及交织 Segal-Bargmann 变换”， *J. Lie Theory*，第 31 卷，第 4 期，1153–1188 页，2021 年。[2] A. de Goursac 和 J.-P. Michel，“海森堡超群的超酉表示”，*Int. Math. Res. Not. IMRN*，2018 年 8 月。rny184。[3] R. Brylinski 和 B. Kostant，“极小表示、几何量子化与酉性”， *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*，第 91 卷，第 13 期，6026–6029 页，1994 年。[4] A. Dvorsky 和 S. Sahi，“某些幺幂表示的显式希尔伯特空间。II”，*Invent. Math.*，第 138 卷，第 1 期，203–224 页，1999 年。[5] W. T. Gan 和 G. Savin，“关于极小表示：定义与性质”，

Represent.，第 卷 页 –

Theory 9, 46 93, 2005
。[6] J. Hilgert 、 T. Kobayashi 和 J. M

¨

J. ollers，“

Math. Soc. Japan 66, 2, 349 414, 2014
通过贝塞尔算子构造极小表示”，，第 卷，第 期，页码 – 。[7] T. Kobayashi 和 G. Mano，“不定正交群 O(p, q) 极小表示的 Schr¨odinger 模型”， *Mem. Amer. Math. Soc.*，第 213 卷，第 1000 期，vi+132 页，2011 年。[8] P. Torasso，“特征零局部域上单群的基里洛夫-迪弗洛轨道方法与极小表示”， *Duke Math. J.*，第 90 卷，第 2 期，261–377 页，1997 年。[9] M. Vergne 和 H. Rossi，“半单李群全纯离散级数的解析延拓”，*Acta Math.*，第 136 卷，第 1-2 期，1–59 页，1976 年。[10] S. Barbier 和 K. Coulembier，“李（超）代数的多项式实现与贝塞尔算子”， *Int. Math. Res. Not. IMRN*，第 10 期，3148–3179 页，2017 年。[11] S. Barbier 和 J. Frahm，“正交辛李超群的一个极小表示”，*Int. Math. Res. Not. IMRN*，2019 年。[12] S. Barbier、S. Claerebout 和 H. De Bie，“正交辛李超代数

$\mathfrak{osp}\ m\ 2|2n$ *SIGMA* (,) 的极

Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 16, 085, 33 2020
小表示的 Fock模型与 Segal-Bargmann 变换”，，第 卷，页码，。[13] K.-H. Neeb 和 H. Salmasian，“李超群、酉表示与不变锥”，载于 *Supersymmetry in mathematics and physics*， *Lecture Notes in Math.*第 2027 卷，195–239 页，施普林格，海德堡，2011 年。[14] C. Carmeli、G. Cassinelli、A. Toigo 和 V. S. Varadarajan，“李超群的酉表示及其在超粒子分类与多重态结构中的应用”，*Comm. Math. Phys.*，第 263 卷，第 1 期，217–258 页，2006 年。[15] G. M. Tuynman，“李超群的左正则表示”， *J. Lie Theory*，第 29 卷，第 1 期，1–78 页，2019 年。[16] G. M. Tuynman，“超轨道挑战”，载于

Geometric methods in physics XXXVII. , , , ,

Workshop and summer school Białowieża Poland July 1–7 2018. Dedicated to Daniel Sternheimer on the occasion of his 80th birthday，204–211 页，瑞士比尔克豪泽出版社，2019 年。[17] T. Kobayashi 和 B. Ørsted，“O(p, q) 极小表示上的分析。I. 通过共形几何实现”， *Adv. Math.*，第 180 卷，第 2 期，486–512 页，2003 年。[18] T. Kobayashi 和 B. Ørsted，“O(p, q) 极小表示上的分析。II. 分支律”，*Adv. Math.*，第 180 卷，第 2 期，513–550 页，2003 年。[19] T. Kobayashi 和 B. Ørsted，“O(p, q) 极小表示上的分析。III. 关于 $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$ 的超双曲方程”， *Adv. Math.*，第 180 卷，第 2 期，551–595 页，2003 年。[20] I. M. Musson，

Lie superalgebras and enveloping algebras 131 *Graduate Studies in* , 第 卷。*Mathematics*
2012
美国数学会，普罗维登斯，罗德岛，。[21] S.-J. Cheng 和 W. Wang，

Dualities and representations of Lie superalgebras，*Graduate Studies in Mathematics*第 144 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛，2012 年。

[22] C. Carmeli、L. Caston 和 R. Fioresi, *Mathematical foundations of supersymmetry*。EMS 数学讲座系列, 苏¨黎世：欧洲数学会（EMS），2011 年。[23] J. Hilgert、T. Kobayashi、J. M¨ollers 和 B. Ørsted, “Hermitian 李群极小表示的 Fock模型与 Segal-Bargmann 变换”, *J. Funct. Anal.*, 第 263 卷，第 11 期, 3492–3563 页，2012 年。[24] A. Alldridge, “Harish-Chandra 超模的 Fr´echet 全局化”, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 17, 5182 5232, 2017 第 期，页码 – 。

Department of Electronics and Information Systems, Faculty of Engineering and Architecture, Ghent University, Krijgslaan 281, 9000 Gent, Belgium.*Email address*: Sigiswald.Barbier@UGent.beDepartment of Electronics and Information Systems, Faculty of Engineering andArchitecture, Ghent University, Krijgslaan 281, 9000 Gent, Belgium.*Email address*: Sam.Claerebout@UGent.be