非凸多人博弈中的全局纳什均衡：理论与算法

Guanpu Chen、Gehui Xu、Fengxiang He、Yiguang Hong，*IEEE*会士，Leszek Rutkowski，*IEEE*会士，Dacheng Tao，*IEEE*会士

摘要——许多机器学习任务都可以表述为非凸多人博弈，其中纳什均衡（NE）是所有参与者都能接受的解，因为任何参与者都无法通过单方面改变策略而获益。由于非凸性的存在，确定全局纳什均衡的存在条件颇具挑战，更不用说设计具有理论保证的实现算法。本文对非凸多人博弈的表述进行共轭变换，并将互补问题转化为具有连续伪梯度映射的变分不等式（VI）问题。随后，我们证明了全局纳什均衡的存在条件：VI问题的解满足对偶关系。基于这一VI表述，我们设计了一种基于共轭的常微分方程（ODE）以求得全局纳什均衡，并证明其具有指数收敛速率。为使该动力系统更易于实现，我们进一步推导出一种离散化算法。我们将该算法应用于两个典型场景：多人广义单调博弈和多人势博弈。在这两种情形下，我们证明，步长设置须为 $\mathcal{O}(1/k)$和$\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$，才能分别得到 $\mathcal{O}(1/k)$ 和 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$的收敛率。在鲁棒神经网络训练和传感器定位方面开展的大量实验结果与我们的理论完全一致。

索引词—非凸、多智能体　　博弈、纳什均衡、算法博弈论、　　对偶理论。

arXiv:2301.08015v1 [cs.GT] 19 Jan 2023

1 引言

MANY 人工智能领域的先进学习方法正朝着多智能体方式、分布式方式或联邦框架发展 [1], [2], [3], [4]。例如，作为最受欢迎的方案之一，对抗学习正逐渐推广至多个智能体 [5], [6], [7], ，不再局限于由一个生成器和一个判别器组成的经典模型。此外，大多数复杂系统都涉及多个参与者之间的相互作用与干扰，例如智能电网 [8], 、智能交通[9], 和云计算 [10]。其共同的核心理念是，在大规模任务中充分利用各个计算单元的自主性和可进化性。通用优化框架或极大极小对抗协议将不再一成不变，因此应建立适当的模型来描述这些多智能体系统及其配套求解器。

博弈论充分发挥了此类多人场景中的优势。事实上，博弈论如今在机器学习前沿领域（如对抗训练和强化学习）中发挥着至关重要的作用 [11], [12], [13], [14]。其中的纳什均衡（NE） [15] 已成为应用数学、计算机科学和工程学等多个领域的热门概念，经济学领域亦是如此。当所有参与者的策略组合达到纳什均衡时，任何一方都无法通过单方面改变策略获益。本文聚焦于一类典型的非凸多人博弈。参与者 i 最小化其自身的收益函数 $J_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}$，该函数受该参与者自身决策 $x_i \in \mathbb{R}^n$ 和其他参与者决策 $\boldsymbol{x}_{-i} \in \mathbb{R}^{(N-1)n}$的共同影响。具体而言，参与者收益中的非凸结构

$$J_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = \Psi_i(\Lambda_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})).$$

这里，$\Lambda_i : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}^{q_i}$ 是一个向量值非线性算子，其中 $\Lambda_i = (\Lambda_{i,1}, \cdots, \Lambda_{i,q_i})^T$且对于 $k \in \{1, \cdots, q_i\}$, $\Lambda_{i,k} : \mathbb{R}^{Nn} \to \mathbb{R}$ 是定义在 x_i 上的二次函数。此外，$\Psi_i : \mathbb{R}^{q_i} \to \mathbb{R}$ 是一个典范函数 [16], ，其梯度 $\nabla\Psi_i$ 是从原空间到对偶空间的一一映射。

这一设定已在机器学习应用中得到广泛研究，例如鲁棒网络训练和传感器网络定位。例如，在传感器定位中， [17], [18], x_i 是传感器节点，$\Lambda_{i,k}$ 表示 x_i 与 $\boldsymbol{x}_{-i}$之间的估计距离，而 Ψ_i 则表示用于衡量真实距离与估计距离之间误差的欧几里得范数。在鲁棒神经网络训练中，[19], [20], x_i 表示模型参数，$\Lambda_{i,k}$ 用作训练数据的输出，而 Ψ_i 表示交叉熵函数。此外，这一设定也可能为无人驾驶车辆中的资源分配问题 [21] 和安全传输 [22], 提供启发，其中 x_i 表示传输资源，Ψ_i 表示传输成本，且$\Lambda_{i,k}$是一个对数多项式函数。

基于上述表述，从

• *G. Chen*、*F. He* 和 *D. Tao* 就职于京东探索研究院、京东集团，地址：中国北京 *100176*。电子邮箱：*chengp@amss.ac.cn*、*fengxiang.f.he@gmail.com* 和 *dacheng.tao@gmail.com*。

• *G. Xu* 任职于中国科学院数学与系统科学研究院（北京 *100190*）。电子邮箱：*xghapple@amss.ac.cn*。

• *Y. Hong* 任职于同济大学智能自主系统研究院（上海 *210201*）。电子邮箱：*yghong@iss.ac.cn*,

• *L. Rutkowski* 任职于波兰科学院系统研究所（波兰华沙 *01-447*）和*AGH*科技大学（波兰克拉科夫 *30-059*）。电子邮箱：*leszek.rutkowski@ibspan.waw.pl*。

• *G. Chen* 和 *G. Xu* 贡献相同。通讯作者：*F. He*。

稿件收到日期：*xxx*；修订日期：*xxx*。

博弈论和机器学习视角来看，寻求其全局纳什均衡是自然而必要的，因为在其他参与者的策略给定时，没有人会单方面改变自己的策略，而该均衡刻画了一个全局最优解。然而，在非凸情形下求得全局最优解或均衡仍是一个悬而未决的问题 [23], [24], [25]。这不仅是因为与凸类别相比，缺乏强有力的工具，也因为非凸结构多种多样，难以通过通用方法加以解决。尽管凸条件下已有许多高效工具，并在多人博弈模型中取得了丰硕成果 [26], [27], [28],，但面对非凸性时，这些工具可能远远不够；沿着伪梯度迭代时，也可能陷入局部纳什均衡或得到近似解，而无法达到全局纳什均衡。另一方面，尽管针对不同情形下求解非凸双人极小极大博弈已取得一些鼓舞人心的突破，例如 Polyak-Łojasiewicz 情形 [19],[29], 和凹情形 [30], [31], ，但这些成果可能无法为多人博弈情形提供有效帮助，因为全局驻点条件彼此耦合，无法由各参与者单独处理。因此，我们需要探索全局纳什均衡是否存在的新方法，并设计相应的算法来实现这一目标。

为此，我们首先采用典范对偶理论[16] ，并通过共轭变换 [32], 建立一一对偶关系，以处理收益函数的非凸性。通过推广到连续向量场，我们将变换后问题的耦合驻点条件简洁地表述为一个连续映射。因此，只需验证该连续映射的不动点，即可求得所有参与者的纳什均衡策略组合。随后，我们将求不动点转化为求解一个变分不等式（VI）问题 [33]。通过上述步骤，我们可以将非凸多人博弈的全局纳什均衡转化为一个变分不等式问题的解；由于从整体角度考察了所有参与者的耦合驻点条件，该问题更易求解。至此，我们得到此类非凸多人博弈中全局纳什均衡的存在条件：变分不等式问题的解必须满足对偶关系。

基于这一变换，我们进一步提出一种基于共轭的常微分方程（ODE），用于求解变分不等式问题。该常微分方程不再沿原空间演化，而是在决策变量和规范变量的对偶空间中演化。随后，利用可微勒让德共轭函数[34]的梯度信息，建立从该对偶空间到原空间的映射。我们证明，若上述存在条件得到验证，则该基于共轭的常微分方程的均衡就是这一非凸多人博弈的全局纳什均衡。此外，我们对连续动力学进行了严格的收敛性分析，并证明该常微分方程具有指数收敛率。

在实际应用中，我们进一步推导出与所提出的基于共轭的常微分方程相对应的离散算法。我们分析了两类典型非凸博弈模型中实现特定收敛率所需的步长设置。具体而言，在一类多玩家广义单调博弈中，当步长为 $\mathcal{O}(1/k)$ 时，收敛率达到 $\mathcal{O}(1/k)$ [28], [35]；而当步长为另一种设置时 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$，一类多玩家势博弈中的收敛率达到 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$ [17], [18]。

我们在鲁棒神经网络训练和传感器定位任务中进行了大量实验。所有实验结果均表明，我们的算法能够收敛到非凸博弈的全局纳什均衡，而不会陷入局部纳什均衡或近似纳什均衡。此外，我们将算法与这些多人博弈情形中的若干流行方法进行了比较，结果表明我们的算法优于其他所有方法。

据我们所知，这是首篇研究非凸多人博弈中全局纳什均衡存在条件及其实现算法的论文。我们的贡献总结如下：

- **存在条件**。我们运用典范对偶理论，将非凸多人博弈转化为互补对偶问题，并将求解所有参与者的驻点剖面转化为求解变分不等式问题。随后，我们给出全局纳什均衡的存在条件：变分不等式问题的解必须满足对偶关系。

- **基于共轭的常微分方程**。 我们提出一种基于共轭的常微分方程来求解变分不等式问题，其演化于决策变量和规范变量各自的对偶空间中。若满足存在条件，该常微分方程的均衡即为此非凸多人博弈的全局纳什均衡。我们还给出了该常微分方程的收敛性分析及其指数收敛率。

- **离散算法**。我们基于连续常微分方程推导出一种离散算法，以便在两种典型的非凸场景中实际应用——在步长为 $\mathcal{O}(1/k)$时，该算法在一类多玩家广义单调博弈中的收敛速率为 $\mathcal{O}(1/k)$ ；而在步长为 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$时，该算法在一类多玩家势博弈中的收敛速率为 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$。

本文其余部分安排如下：第2节介绍相关工作。第3节对非凸多玩家博弈进行建模，第4节则研究全局纳什均衡的存在性。第5节提出一种用于求解全局纳什均衡的常微分方程，并给出指数收敛性分析。第6节从该常微分方程推导出一种离散化算法，并给出两种典型场景下的步长设置和收敛率。第7节通过若干实验检验所提方法的有效性。第8节讨论本文所得理论结果和算法。最后，第9节总结全文并提出一些未来研究方向。

2 相关工作

凸多玩家博弈。多人博弈中的许多理论成果都建立在基本的凸性假设之上 [26], [27], [28]。在凸性框架下，纳什均衡求解已在许多典型的多人博弈模型中得到广泛研究，包括聚合博弈[35], [36], 、势博弈 [18], [37], 和层次博弈[38]。例如，[28], [37]直接要求每个参与者的决策变量对应凸收益，而 [27], [35] 则需要

伪梯度具有强单调性/严格单调性，以体现所有参与者行动之间的相互作用。尽管凸条件下的许多高效工具取得了丰硕成果，但在实际情形中遇到非凸性时，这些工具可能远远不够。

非凸双人极小极大问题。在求解非凸双人极小极大问题方面，已经取得了一些令人振奋的突破，包括 Polyak–Łojasiewicz 情形 [19], [29], 强凹情形 [30], [31],以及一般非凸非凹情形 [39], [40]。这类研究之所以备受关注，得益于生成对抗网络及其变体的成功 [41], [42]。例如， [39] 提出了一种结合随机梯度下降的双时间尺度更新规则，用于在生成对抗网络中寻找局部纳什均衡；而 [40]则设计了一种乐观镜像下降算法，并提供理论保证，以探索生成对抗网络中的纳什均衡。然而，将上述双人博弈方法直接推广到多人博弈情形并不简单，也不切实际。这是因为多个参与者之间的全局驻点条件相互耦合，无法分别处理，这与双人情形不同。

具有局部纳什均衡或其近似解的非凸多人博弈。针对非凸多人博弈的求解，已有一些初步探索。 [43] 针对信号处理中的一类非凸博弈，为纳什驻点提出了一种最佳响应方案；随后， [44]将该方法扩展至具有非凸约束的多人双层博弈。此外， [45] 引入了一种基于梯度的 Nikaido-Isoda 函数，用于在重新表述的非凸博弈中寻找纳什驻点；而 [46] 则为一类非凸聚合博弈设计了梯度近端算法，以求得近似纳什均衡。这些研究中的算法所得到的是局部纳什均衡或纳什驻点，其结果取决于初始点。如何保证全局纳什均衡的存在，以及如何设计算法来寻找全局纳什均衡，仍值得在非凸多人博弈模型中进一步研究。

优化中的类似非凸结构。关于求解此类非凸问题已有一些相关研究，其中目标函数或收益由典范函数和二次算子复合而成，但这些研究尚不成熟。 [47]考虑采用近似优化来放宽此类非凸约束，并给出了简化问题的最优性条件；[48] 则提出了类似的充分条件，并通过典范对偶理论讨论了全局最优解的存在性。在此基础上， [49] 研究了在多智能体网络上以分布式方式求解此类非凸优化问题的全局最优解，而 [50] 则专注于近似求解带有多个约束的离散变量拓扑问题。我们注意到，尽管这类非凸问题十分重要，现有大多数研究仍集中于优化视角。考虑到多名参与者之间的干扰与相互作用，全局驻点条件相互耦合，无法由每位参与者单独处理。因此，上述优化方法无法完全适用于我们的问题。作为一种广受认可的均衡概念，其中的全局纳什均衡仍需进一步探讨其存在条件和求解算法。本文由此得到的结果将有助于阐明参与者之间复杂的相互作用，并为今后的大规模问题提供可靠的见解。

3 博弈论预备知识

我们首先研究参与者编号为 $\mathcal{I}=\{1,\cdots,N\}$ 的多名参与者非凸博弈。对于 $i\in\mathcal{I}$，第 i 名参与者的动作变量为 x_i，属于动作集 $\Omega_i\subseteq\mathbb{R}^n$，其中 Ω_i 是紧凸集，且 $\boldsymbol{\Omega}=\prod_{i=1}^N\Omega_i$。令 $\boldsymbol{x}=\mathrm{col}\{x_1,...,x_N\}\in\mathbb{R}^{nN}$ 表示所有参与者行动的剖面，而 $\boldsymbol{x}_{-i}$ 表示除第 i 名参与者的行动之外，所有参与者行动的剖面。此外，第 i 名参与者的收益函数为 $J_i(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}):\boldsymbol{\Omega}\to\mathbb{R}$，它同时依赖于 x_i 和 $\boldsymbol{x}_{-i}$，并且关于 x_i 二次连续可微。给定 $\boldsymbol{x}_{-i}$，第 i 名参与者旨在求解以下问题

$$\min_{x_i} J_i\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right),\quad \text{s.t. } x_i\in\Omega_i. \tag{1}$$

本文聚焦于一类典型的非凸多名参与者博弈，其中第 i 名参与者的收益函数具有以下结构

$$J_i(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})=\Psi_i(\Lambda_i(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})). \tag{2}$$

这里， $\Lambda_i:\mathbb{R}^{Nn}\to\Theta_i\subseteq\mathbb{R}^{q_i}$ 是一个向量值非线性算子，满足 $\Lambda_i=(\Lambda_{i,1},\cdots,\Lambda_{i,q_i})^T$。对于 $k\in\{1,\cdots,q_i\}$，每个$\Lambda_{i,k}:\mathbb{R}^{Nn}\to\mathbb{R}$关于 x_i是二次型，其关于 x_i 的二阶偏导数同时不依赖于 x_i和 $\boldsymbol{x}_{-i}$，例如$\Lambda_{i,k}=x_i^TA_{i,k}x_i+\sum_{i\neq j}x_i^TB_{i,k}x_j$。此外， $\Psi_i:\Theta_i\to\mathbb{R}$ 是一个凸微分典范函数 [16], ，其梯度 $\nabla\Psi_i:\Theta_i\to\Theta_i^*$ 是一一映射。这类由典范函数和二次算子组合而成的非凸结构广泛出现在各种应用中，包括鲁棒网络训练 [19], 传感器定位 [18], 和生成对抗网络（GAN） [51]。为帮助理解上述非凸模型，下面给出一些具体示例。

示例 ***1***（欧几里得距离函数）。

$$\sum\nolimits_{j\in\mathcal{N}_i}(\|x_i-x_j\|^2-d_{i,j})^2, \tag{3}$$

其中 $\Psi_i=\sum_{j=1}^{\mathcal{N}_i}\Lambda_{i,\,j}^T\Lambda_{i,\,j}$ 和 $\Lambda_{i,\,j}=\|x_i-x_j\|^2-d_{i,\,j}$。(3) 通常用作传感器定位中的收益[17], [18], [52], 其中 $x_i\in\Omega_i$ 是一个传感器节点， $\mathcal{N}_i$ 是节点 i的邻居节点，而 $d_{i,\,j}$ 是距离参数。

示例 ***2***（对数和指数函数）。

$$\beta_1\log[1+\exp(-x_i^Tx_i-\sum\nolimits_{j=1}^N x_i^Tx_j-\beta_2^Tx_i)], \tag{4}$$

其中 $\Psi_i=\beta_1[1+\Lambda_i]$ $\Lambda_i=-x_i^Tx_i-\sum_{j=1}^N x_i^Tx_j-\beta_2^Tx_i$ 4
对数指数和 。( ) 通常出现在鲁棒神经网络训练等任务中 [19], [20], 其中 x_i 是神经网络参数， x_j 是扰动，且β_1， β_2 是训练数据。

示例 ***3***（对数多项式函数）。

$$\log(x_i^T\mathbf{C}_ix_i+x_i^T\mathbf{D}_i\boldsymbol{x}_{-i})^{-1}, \tag{5}$$

其中 $\Psi_i=\log(\Lambda_i)^{-1}$ ， 且 $\Lambda_i=x_i^T\mathbf{C}_ix_i+x_i^T\mathbf{D}_i\boldsymbol{x}_{-i}$。式（5）通常出现在资源分配 [21], [22], [53],中， x_i 表示传输资源，矩阵 $\mathbf{C}_i$ 和$\mathbf{D}_i$ 表示相关系数。

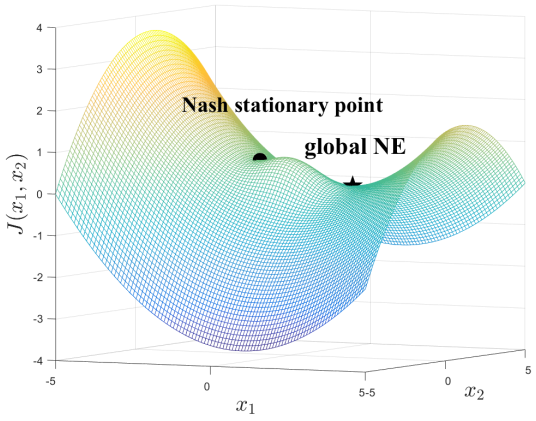


图1. 式（4）中具有对数和指数收益的非凸双人示例。

我们引入以下重要概念，以求解非凸多人博弈（1）。

定义***1***（全局纳什均衡）。若策略组合$\boldsymbol{x}^{\diamondsuit} \in \boldsymbol{\Omega}$ 满足对所有 $i \in \mathcal{I}$，则称其为式（1）的全局纳什均衡（纳什均衡），

$$J_i(x_i^{\diamondsuit}, \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}) \leq J_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}), \quad \forall x_i \in \Omega_i. \tag{6}$$

上述全局纳什均衡刻画了这样一种策略组合：每位参与者都采用其全局最优策略。也就是说，在给定其他参与者行动的情况下，没有参与者能够通过单方面改变自己的行动而获益。实际上，这里的全局纳什均衡概念确实就是纳什均衡的概念[15], ，我们在非凸表述中强调全局，以区别于局部纳什均衡[19], [39], [43]。此外，我们还考虑另一个温和但广为人知的概念，以帮助刻画式（1）的解。

定义***2***（纳什驻点）。若策略组合 $\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$满足对所有 $i \in \mathcal{I}$，则称其为式（1）的纳什驻点，

$$\mathbf{0}_n \in \nabla_{x_i} J_i(x_i^{\diamondsuit}, \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}) + \mathcal{N}_{\Omega_i}(x_i^{\diamondsuit}). \tag{7}$$

不难看出，若 $\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$ 是全局纳什均衡，则它必定是纳什驻点，但反之不成立。例如，在图1中，全局纳什均衡与纳什驻点并不相同；图中展示了一位参与者的非凸收益曲面图。

事实上，对于凸博弈，大多数现有研究都是通过考察纳什驻点来计算全局纳什均衡[27], [28], [35]。然而，考虑到非凸收益函数崎岖不平的几何结构，不能指望仅凭式（7）中的纳什驻点条件就找到式（1）的全局纳什均衡。为此，我们旨在求得此类非凸多参与者模型（1）的全局纳什均衡，并将在下文展开探索。

4 全局纳什均衡的存在条件

本节主要通过以下步骤探讨全局纳什均衡的存在性：

i) 我们采用典范对偶理论，将原博弈 (1) 转化为互补对偶问题，并研究对偶问题的驻点与博弈 (1) 的纳什驻点之间的关系；

ii) 我们为引入的共轭变量采用一个充分可行域，以研究驻点的全局最优性；iii) 我们将求解对偶问题中所有参与者的驻点剖面转化为求解一个具有连续伪梯度映射的变分不等式（VI）问题；iv) 我们给出了非凸多人博弈的全局纳什均衡存在条件：变分不等式问题的解必须满足对偶关系。

步骤 1：互补对偶问题

我们首先将 $\xi_i = \Lambda_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \in \Theta_i$ 作为规范测度代入式（2）的收益函数中。这符合典范函数的定义，因为 $i \in \mathcal{I}$。由于 $\Psi_i(\xi_i)$ 是凸规范函数，一一对偶关系$\sigma_i = \nabla\Psi_i(\xi_i) : \Theta_i \to \Theta_i^*$ 意味着共轭函数 $\Psi_i^* : \Theta_i^* \to \mathbb{R}$的存在，该函数可通过勒让德变换 [16], [32], [54], 唯一确定，即:

$$\Psi_i^*(\sigma_i) = \xi_i^T \sigma_i - \Psi_i(\xi_i),$$

其中 $\sigma_i \in \Theta_i^*$ 是一个典范对偶变量。因此，记 $q = \sum_{i=1}^N q_i$ $\Gamma_i \quad \times \Theta_i^* \to \mathbb{R}_{\text{col}}$

$\{\sigma_1, \cdots, \sigma_N\}$ 和 $\boldsymbol{\Theta}^* = \prod_{i=1}^N \Theta_i^* \subseteq \mathbb{R}^q$。然后，参照典范对偶理论的互补函数： $\boldsymbol{\Omega}$ 可定义为

$$\begin{aligned}\Gamma_i(x_i, \sigma_i, \boldsymbol{x}_{-i}) =& \xi_i^T \sigma_i - \Psi_i^*(\sigma_i) \\ =& \sigma_i^T \Lambda_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) - \Psi_i^*(\sigma_i).\end{aligned} \tag{8}$$

引理***1***。 存在一个剖面 $\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$，使其成为式（1）的纳什驻点，当且仅当 $\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit} \in \boldsymbol{\Theta}^*$ 且对于 $i \in \mathcal{I}$， $(x_i^{\diamondsuit}, \ \sigma_i^{\diamondsuit})$ 是互补函数 Γ_i $(x_i, \ \sigma_i, \ \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})$ 的驻点。

引理1揭示了式（8）与式（1）的驻点之间的等价关系。这意味着，通过典范变换，我们可以消除非凸原博弈与其典范对偶问题之间的对偶间隙。由于篇幅所限，引理1的更多证明细节见补充材料。

步骤 2：充分可行域

对于 $i \in \mathcal{I}$，我们将 $\Gamma_i(x_i, \ \sigma_i, \ \boldsymbol{x}_{-i})$ 在 x_i 中的二阶偏导数定义如下。

$$P_i(\sigma_i) = \nabla_{x_i}^2 \Gamma_i = \sum\nolimits_{k=1}^{q_i} [\sigma_i]_k \nabla_{x_i}^2 \Lambda_{i,k}(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

回顾一下， $\Lambda_i : \boldsymbol{\Omega} \to \Theta_i$ 是一个二次算子，并且 $\nabla_{x_i}^2 \Lambda_i$ 同时是 x_i-自由和 $\boldsymbol{x}_{-i}$-自由的（见式 (3)–(5) 中的情形），我们可以很容易地验证 $P_i(\sigma_i)$ 确实是 $[\sigma_i]_k$ 的线性组合。基于此，我们为 $i \in \mathcal{I}$ 引入以下 σ_i 集合。

$$\mathscr{E}_i^+ = \Theta_i^* \cap \{\sigma_i : P_i(\sigma_i) \succeq \kappa_x \boldsymbol{I}_n\}, \tag{9}$$

其中常数 $\kappa_x > 0$ 及进一步的记号

$$\mathscr{E}^+ = \mathscr{E}_1^+ \times \cdots \times \mathscr{E}_N^+.$$

当 $\sigma_i \in \mathscr{E}_i^+$ 时， $P_i(\sigma_i)$ 的正定性意味着 $\Gamma_i(x_i, \sigma_i, \boldsymbol{x}_{-i})$ 关于 x_i 是凸的。此外， $\Psi_i(\xi_i)$ 的凸性可推出其勒让德共轭Ψ_i^* (σ_i) 也是凸的。因此，互补函数$\Gamma_i(x_i, \sigma_i, \boldsymbol{x}_{-i})$ 关于 σ_i 是凹的。 Γ_i 的这种凸凹性使我们能够进一步研究

式 (8) 的驻点的最优性，即式 (1) 的纳什驻点的最优性。

注1。在大多数实际情况下，计算 $\mathscr{E}_i^+$其实并不太难。例如，取式（3）中带有 $i = 1$、2和 $n = q_i = 1$的收益函数。互补函数为 $\Gamma_i(x_i, \sigma_i, x_{3-i}) = \sigma_i((x_i - x_{3-i})^2 - d_{i,3-i}) - \sigma_i^2/4$，其中 $x_i \in \Omega_i = [a, b]$ 和$\sigma_i \in \Theta_i^* = [-2d_{i,3-i}, 2(b-a)^2 - 2d_{i,3-i}]$。因此，子集$\mathscr{E}_i^+ = \{\sigma_i : 2\sigma_i \geq \kappa_x\} \cap \Theta_i^* = [\kappa_x/2, 2(b-a)^2 - 2d_{i,3-i}]$，可作为对偶变量 σ_i的可行约束集。

步骤3：变分不等式

在 $\boldsymbol{x}_{-i}$的干扰下，转换后的问题实际上反映了一个 Γ_i 的集合，其中驻点条件相互耦合，而非一个确定性问题。因此，不同于经典优化工作 [16], [47],[48], ，参与者 i 的驻点无法独立计算。我们应当考虑所有参与者的驻点剖面的计算，并从整体角度讨论其最优性。

为此，变分不等式（VI）有助于我们推进 [33]。具体而言，记 $\boldsymbol{z} = \mathrm{col}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}\}$ 和 $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathscr{E}^+$。取以下连续映射作为式（8）的伪梯度。

$$F(\boldsymbol{z}) = \mathrm{col}\Big\{ \mathrm{col}\{\sum\nolimits_{k=1}^{q_i} [\sigma_i]_k \nabla_{x_i} \Lambda_{i,k}(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})\}_{i=1}^N, \\ \mathrm{col}\{-\Lambda_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) + \nabla \Psi_i^*(\sigma_i)\}_{i=1}^N \Big\}.$$

注意，所有参与者变量之间的相互作用体现在映射 F中，该映射是所有参与者互补函数（8）的偏导数的联合函数。然后，式（8）可以转化为一个待求解的变分不等式问题VI($\boldsymbol{\Xi}$, F)，即寻找$\boldsymbol{z}^\diamondsuit \in \boldsymbol{\Xi}$，使得

$$(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit)^T F(\boldsymbol{z}^\diamondsuit) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{\Xi}. \tag{10}$$

步骤4：存在条件

根据上述步骤，我们得到如下用于确定式（1）全局纳什均衡的存在条件。

定理*1.* 存在 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$，使其成为非凸多玩家博弈1的全局纳什均衡，(若，$\boldsymbol{x}^\diamondsuit)\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit$ 是 $\mathrm{VI}(\boldsymbol{\Xi}, F)$ with $\sigma_i^\diamondsuit = \nabla \Psi_i(\xi_i)\big|_{\xi_i = \Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)}$ for $i \in \mathcal{I}$.

证明思路可概括如下。在假设1下，若存在 $\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit \in \mathscr{E}^+$，使得 $\boldsymbol{z}^\diamondsuit = \mathrm{col}\{\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\}$ 是变分不等式($\boldsymbol{\Xi}$, F)的一个解，则其满足该变分不等式的一阶条件。结合 $\sigma_i^\diamondsuit = \nabla \Psi_i(\xi_i)\big|_{\xi_i = \Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)}$，我们声称，对于 $i \in \mathcal{I}$，典范对偶关系在 $\Theta_i \times \mathscr{E}_i^+$ 上成立。由引理1可知，变分不等式($\boldsymbol{\Xi}$, F)的解是式（8）在 $\Theta_i \times \Theta_i^*$上的一个驻点剖面。我们还可以验证，总互补函数 $\Gamma_i(x_i, \sigma_i, \boldsymbol{x}_{-i})$关于对偶变量 σ_i 是凹的，并且关于 x_i是凸的。由此，我们得到$(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)$在 $\Omega \times \mathscr{E}^+$上的全局最优性；也就是说，对于 $x_i \in \Omega_i$ 和 $\sigma_i \in \mathscr{E}_i^+$，

$$\Gamma_i(x_i^\diamondsuit, \sigma_i, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) \leq \Gamma_i(x_i^\diamondsuit, \sigma_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) \leq \Gamma_i(x_i, \sigma_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit).$$

这证实了 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$ 是(1)的全局纳什均衡。受篇幅限制，定理1的完整证明请参见补充材料。

定理1的结果表明，一旦求得变分不等式($\boldsymbol{\Xi}$, F) 的解，我们便可检验对偶关系 $\sigma_i^\diamondsuit = \nabla \Psi_i(\xi_i)\big|_{\xi_i = \Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)}$ 是否成立，从而判断变分不等式($\boldsymbol{\Xi}$, F) 的解是否为全局纳什均衡。基于上述结论，我们受到启发，尝试通过其一阶条件求解变分不等式($\boldsymbol{\Xi}$, F)，并将对偶关系作为判定全局纳什均衡的标准。

注*2*。实现上述思想的基础是非空集合 $\mathscr{E}_i^+$。在现实中，$\mathscr{E}_i^+$ 可能为空，例如 $P_i(\sigma_i) \succeq \kappa_x \boldsymbol{I}_n$ 与 Θ_i^*没有交集；在这种情况下，上述对偶理论方法便无法使用。因此，在问题表述完成后，应有效地检验 $\mathscr{E}_i^+$。一些经典的优化研究也采用了类似过程来求解非凸问题[47], [48], [49], [50], [55]。此外，这也是我们无法直接采用标准拉格朗日乘子法及相关 KKT理论的原因，因为我们需要利用典范对偶信息（参见 Θ_i^*）来确认乘子 σ_i 的可行域。

注*3*。 通过将耦合驻定条件推广到连续向量场，我们将对偶问题 (8) 的这些驻定条件简洁地表述为变分不等式问题中的连续映射 VI($\boldsymbol{\Xi}$, F)。因此，只需验证该连续映射的不动点，即可求得所有参与者的驻点剖面（或纳什驻点）。在博弈问题中采用变分不等式思想的萌芽可追溯至 [56], ，此后该思想已广泛应用于各种博弈模型；综述请参见 [57] 及其中的参考文献。

5 基于共轭函数的常微分方程求解全局纳什均衡

本节提出一个常微分方程，以辅助互补信息（ Ψ_i 的勒让德共轭函数和典范对偶变量 σ_i）求解变分不等式($\boldsymbol{\Xi}$, F) (10)。事实上，常微分方程能够提供连续演化的动力学，有助于揭示原始变量和典范对偶变量如何通过共轭梯度信息相互影响。同时，现代微积分和非线性系统中用于保证常微分方程理论性质的分析技术，可能在较弱假设下得出全面的结果。

5.1 常微分方程设计

考虑变量的局部集合约束，例如式 (10) 中的 Ω_i和 $\mathscr{E}_i^+$，在各种任务中通常都具有特定结构。我们打算利用布雷格曼散度中生成函数的共轭性质来设计常微分方程流。设 $\phi_i(x_i)$ 和 $\varphi_i(\sigma_i)$ 为两个生成函数，其中 $\phi_i(x_i)$ 在 Ω_i 上是 μ_x-强凸且 L_x-光滑的，而 $\varphi_i(\sigma_i)$ 在 $\mathscr{E}_i^+$ 上是 μ_σ-强凸且 L_σ-光滑的。由芬切尔不等式 [34] 可知，勒让德共轭 ϕ_i^*和 φ_i^*是凸且可微的，其中对于 $y_i \in \mathbb{R}^n$，

$$\phi_i^*(y_i) \triangleq \min_{x_i \in \Omega_i} \{-x_i^T y_i + \phi_i(x_i)\},$$

表 1 不同生成函数的闭式共轭梯度。

	可行集	生成函数	共轭梯度
一般凸集	Ω	$\frac{1}{2}\|x\|_2^2$	$\operatorname{argmin}_{x\in\Omega}\frac{1}{2}\|x-y\|^2$
非负正交象限	$\mathbb{R}^n_+$	$\sum_{l=1}^n x^l$ 对数$(x^l)-x^l$	指数(y)
单位正方形 $[a,b]^n$	$\{x^l\in\mathbb{R}: a\le x^l\le b\}$	$\sum_{l=1}^n(x^l-a)$对数(x^l-a) $+(b-x^l)$ 对数 $(b-x^l)$	列$\{\frac{a+b\ \text{指数}(y^l)}{+1\ \text{指数}(y^l)}\}_{l=1}^n$
单纯形 Δ^n	$\{x\in\mathbb{R}^n_+:\ \sum_{l=1}^n x^l=1\}$	$\sum_{l=1}^n x^l$ 对数(x^l)	列$\{\frac{\text{指数}(y^l)}{\sum_{j=1}^n\text{指数}(y^j)}\}_{l=1}^n$
欧几里得球面 $\mathbf{B}_\rho^n(w)$	$\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x-w\|_2^2\le p\}$	$-\sqrt{p^2-\|x-w\|_2^2}$	$py[\sqrt{1+\|y\|_2^2}]^{-1}-w$

而对于 $\nu_i\in\mathbb{R}^{q_i}$,

$$\varphi_i^*(\nu_i)\triangleq\min_{\sigma_i\in\mathscr{E}_i^+}\{-\sigma_i^T\nu_i+\varphi_i(\sigma_i)\}.$$

相应地，它们的共轭梯度满足

$$\nabla\phi_i^*(y_i)=\operatorname{argmin}_{x_i\in\Omega_i}\left\{-x_i^Ty_i+\phi_i(x_i)\right\},\qquad(11)$$

$$\nabla\varphi_i^*(\nu_i)=\operatorname{argmin}_{\sigma_i\in\mathscr{E}_i^+}\{-\sigma_i^T\nu_i+\varphi_i(\sigma_i)\}.\qquad(12)$$

基于此，对于每个参与者 $i\in\mathcal{I}$，寻求非凸多人博弈（1）全局纳什均衡的基于共轭的常微分方程表示为

$$\begin{cases}\dot{y}_i=-\sigma_i^T\nabla_{x_i}\Lambda_i\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)+\nabla\phi_i(x_i)-y_i,\\ \dot{\nu}_i=\Lambda_i\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)-\nabla\Psi_i^*\left(\sigma_i\right)+\nabla\varphi_i(\sigma_i)-\nu_i,\\ x_i=\nabla\phi_i^*\left(y_i\right),\\ \sigma_i=\nabla\varphi_i^*\left(\nu_i\right),\end{cases}\qquad(13)$$

其中，初始条件为 $y_i(0)=y_{i0}\in\mathbb{R}^n$、$\nu_i(0)=\nu_{i0}\in\mathbb{R}^{q_i}$、$x_i(0)=\nabla\phi_i^*(y_{i0})$，以及 $\sigma_i(0)=\nabla\varphi_i^*(\nu_{i0})$。此处，$t$表示连续时间，并且为简洁起见，我们在动力学中省略 t 。

我们解释设计基于共轭的常微分方程（13）时的两个重要操作。一方面，我们通过（10）中的驻点条件，在对偶空间中设计 $y_i(t)$和 $\nu_i(t)$的动力学。关于$-\sigma_i^T\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})$和 $\Lambda_i(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})-\nabla\Psi_i^*(\sigma_i)$的项，根据（8）中的 Γ_i，分别表示梯度下降和上升方向。此外，$\nabla\phi_i(x_i)$和 $\nabla\varphi_i(\sigma_i)$被视为常微分方程中的阻尼项，以避免 y_i 和 ν_i 趋于无穷 [58], [59]。另一方面，借助 $\nabla\phi_i^*$ 和 $\nabla\varphi_i^*$的共轭梯度，将从对偶空间返回原空间的映射用于更新 $x_i(t)$和 $\sigma_i(t)$，充当系统更新中的输出反馈。

事实上，上述基于共轭函数的思路不仅有助于解决这类多参与者博弈中固有的非凸性，还便于处理具有特定结构的局部集合约束。需要指出的是，通过共轭梯度$\nabla\phi_i^*$ 和 $\nabla\varphi_i^*$ 构造的映射基于有效的生成函数，而非传统的欧几里得范数，因此能够在对偶空间和原空间之间建立显式映射关系，从而灵活处理各种约束条件。

注 4. 当 Ω 中没有下标 i 时，我们给出一些实际示例，以展示不同的闭式共轭梯度。当 Ω 是生成对抗网络 [42], $\Delta^n=\{x\in\mathbb{R}^n_+\ \ \sum_{l=1}^n x^l=1\}$ 中 Softmax 输出层的一个 n 维单位单纯形时，即 :，一种广泛使用的生成函数是（负）吉布斯–香农熵 $\phi(x)=\sum_{l=1}^n x^l\log(x^l)$, 由此得到闭式共轭梯度 $\nabla\phi^*(y)=\operatorname{col}\{\frac{\exp(y^l)}{\sum_{j=1}^n\exp(y^j)}\}_{l=1}^n$。当 Ω 是对抗训练 [20],中参数扰动的欧几里得球面时，即 $\mathrm{B}_\rho^n(w)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x-w\|_2^2\le p\}$，生成函数可取为 $\phi(x)=-\sqrt{p^2-\|x-w\|_2^2}$，从而显式得到 $\nabla\phi^*(y)=py[\sqrt{1+\|y\|_2^2}]^{-1}-w$。此外，回顾传感器定位任务 [52], , 由于 $\Omega=[a,b]$ 具有单位正方形形式，我们可以取 $\phi(x)=(x-a)\log(x-a)+(b-x)\log(b-x)$，由此得到闭式 $\nabla\phi^*(y)=\operatorname{col}\{\frac{a+b}{\exp(y^l)+1}\exp(y^l)\}_{l=1}^n$。更多示例请参见表 1。

5.2 收敛性分析

接下来，我们研究式 (13) 的变量轨迹并揭示其收敛性。与 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$类似，将$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{nN}$和 $\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R}^q$简记为。于是，常微分方程 (13) 可简洁地表示为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{y}}=-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})+\nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y},\\ \dot{\boldsymbol{\nu}}=\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)-\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right)+\nabla\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\nu},\\ \boldsymbol{x}=\nabla\boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{y}),\\ \boldsymbol{\sigma}=\nabla\boldsymbol{\varphi}^*\left(\boldsymbol{\nu}\right).\end{cases}\qquad(14)$$

引理 *2.* 假设$(\boldsymbol{y}^\diamondsuit,\boldsymbol{\nu}^\diamondsuit,\boldsymbol{x}^\diamondsuit,\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)$ 是常微分方程 (13) 的一个均衡点。若 $\sigma_i^\diamondsuit=\nabla\Psi_i\left(\xi_i\right)\big|_{\xi_i=\Lambda_i\left(x_i^\diamondsuit,\boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit\right)}$ 对 $i\in\mathcal{I}$ 成立，则 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$ 是式 (1) 的全局纳什均衡。

引理 2 阐明了式 (13) 的均衡与式 (1) 的全局纳什均衡之间的关系。由于篇幅有限，引理 2 的更多证明细节请参见补充材料。

事实上，基于共轭的常微分方程 (13) 是围绕求解 VI(Ξ, F) (10) 设计的，即 (13) 的均衡点对应于 (10) 的解。回顾定理1中的存在条件，当满足对偶关系 $\sigma_i^\diamondsuit=\nabla\Psi_i(\xi_i)\big|_{\xi_i=\Lambda_i\left(x_i^\diamondsuit,\boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit\right)}$ 时，我们可以推导出

常微分方程 (13) 的均衡实现了非凸多参与者博弈 (1) 的全局纳什均衡。接下来的定理给出了常微分方程 (13) 的主要收敛结果，这表明沿着常微分方程 (13) 的轨迹可以找到全局纳什均衡。

定理 *2.* 若 $\mathscr{E}_i^+$ 对于 $i \in \mathcal{I}$非空，则常微分方程 (13) 有界且收敛。此外，如果收敛点 $(\boldsymbol{y}^\diamondsuit, \boldsymbol{\nu}^\diamondsuit, \boldsymbol{x}^\diamondsuit, \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)$ 满足 $\sigma_i^\diamondsuit = \nabla\Psi_i(\xi_i)\big|_{\xi_i=\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)}$ 对于 $i \in \mathcal{I}$成立，则 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$ 是 (1) 的全局纳什均衡。

此外，还可以得到 (13) 的收敛速率。

定理*3.* 若 $\mathscr{E}_i^+$非空，且 $\Psi_i(\cdot)$ 对于 $i \in \mathcal{I}$是 $\frac{1}{\kappa_\sigma}$-光滑的，则 (13) 以指数速率收敛，即

$$\|\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\| \leq \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}\|\boldsymbol{z}(0)\| \exp(-\frac{\kappa}{2\tau}\, t),$$

其中 μ =最小值$\{\mu_x/2, \mu_\sigma/2\}$, κ =最小值$\{\kappa_\sigma, \kappa_x\}$, τ =最大值$\{L_x/2\mu_x, L_\sigma/2\mu_\sigma\}$。

这里给出定理 2 和定理3的证明概要。我们首先证明轨迹$(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\sigma}(t))$ 沿常微分方程 (13) 有界。为此，我们构造一个以布雷格曼散度为基础的李雅普诺夫候选函数，如下所示

$$V_1 = \sum_{i=1}^{N} D_{\phi_i^*}(y_i, y_i^\diamondsuit) + D_{\varphi_i^*}(\nu_i, \nu_i^\diamondsuit).$$

我们可以仔细验证，

$$V_1 \geq \frac{\mu_x}{2}\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\diamondsuit\right\|^2 + \frac{\mu_\sigma}{2}\left\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right\|^2.$$

这意味着 V_1 是半正定的，并且在 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 中径向无界。目前使用的技术工具包括生成函数的凸性、规范对偶关系以及变分不等式问题的最优条件，不过推导过程并不简单。接下来，我们研究 V_1 沿常微分方程的导数。我们可以谨慎地得到 $dV_1/dt \leq 0$, 由此可知， $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 的轨迹沿常微分方程 (13) 有界。同样，我们也可以得到 $\boldsymbol{y}(t)$ 和 $\boldsymbol{\nu}(t)$ 有界。以上完成了定理 2 证明的大部分内容，唯独尚未讨论常微分方程的不变集。对于定理3，由于函数 Ψ_i 具有光滑性，我们还能得到 $dV_1/dt \leq -\frac{\kappa}{\tau}V_1$ more than $dV_1/dt \leq 0$ 。这最终得出了常微分方程的指数速率。受篇幅限制，定理2和定理3的详细证明见补充材料。

注*5*。 为便于理解，我们总结了在该非凸博弈中寻求全局纳什均衡的路线图。首先，问题定义并形式化后，我们应检查 $\mathscr{E}_i^+$ 是否非空。接下来，我们应通过常微分方程流求解 变分不等式$(\boldsymbol{\Xi}, F)$，其中变量 σ_i 被限制在非空的 $\mathscr{E}_i^+$ 上，并确保常微分方程能够实现。最后，通过收敛得到 变分不等式$(\boldsymbol{\Xi}, F)$ 的解后，我们应判断收敛点是否满足对偶关系 $\sigma_i^\diamondsuit = \nabla\Psi_i(\xi_i)\big|_{\xi_i=\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)}$。若满足，则该收敛点是全局纳什均衡。

6 离散算法

本节中，我们考虑从基于共轭的常微分方程推导离散化，使其动态过程能够在实践中实现。值得注意的是，离散算法中的每一步都可以直接计算一个子问题的最小值，而不必像连续常微分方程那样，沿着具有显式表达式的共轭函数轨迹行进。利用这一优势，相应的离散算法无需借助变量 y_i 和 ν_i 等共轭信息，从而简化了算法迭代。

6.1 离散算法设计

我们将由 Ψ_i 在 Θ_i 上生成的算子重新定义为

$$\Pi_{\Theta_i}^{\Psi_i}(\sigma_i) = \operatorname{argmin}_{\xi_i \in \Theta_i}\{-\sigma_i^T\xi_i + \Psi_i(\xi_i)\}.$$

该算子避免了计算 Ψ_i^*的共轭信息。同样地，重新定义式 (11) 中的算子 $\Pi^{\phi_i}\Omega_i(\cdot) = \nabla\phi_i^*(\cdot)$ 以及式 (12) 中的算子 $\Pi_{\mathscr{E}_i^+}^{\varphi_i}(\cdot) = \nabla\varphi_i^*(\cdot)$。采用步长 α_k，在离散时间 k下，我们对基于共轭的常微分方程 (13) 进行如下离散化。

算法1

输入： 步长 $\{\alpha_k\}$，定义在Ω_i上的适当生成函数 ϕ_i 并且在 φ_i $\mathscr{E}_i^+$ 上。

初始化： $x_i^0 \in \Omega_i$, $\sigma_i^0 \in \mathscr{E}_i^+$, $i \in \{1, \ldots, N\}$。

对于 $k = 1, 2, \cdots$**执行**

  对于 参与者 $i \in \{1, \ldots, N\}$ **执行**

    计算 Ψ_i的共轭函数:
    $\xi_i^k = \Pi_{\Theta_i}^{\Psi_i}(\sigma_i^k)$

    更新决策变量:
    $x_i^{k+1} = \Pi^{\phi_i}{}_{\Omega_i}(-\alpha_k\sigma_i^{kT}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^k, \boldsymbol{x}_{-i}^k) + \nabla\phi_i(x_i^k))$

    更新典范对偶变量:
    $\sigma_i^{k+1} = \Pi_{\mathscr{E}_i^+}^{\varphi_i}(\nabla\varphi_i(\sigma_i^k) + \alpha_k(\Lambda_i(x_i^k, \boldsymbol{x}_{-i}^k) - \xi_i^k))$

  结束循环

结束循环

算法1中 x_i^{k+1}的更新可以等价地表示为

$$\operatorname{argmin}_{x \in \Omega_i}\{\langle x, \sigma_i^{kT}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^k, \boldsymbol{x}_{-i}^k)\rangle + \frac{1}{\alpha_k}D_{\phi_i}(x, x_i^k)\},$$

其中， $D_{\phi_i}(x, x_i^k)$ 是生成函数为 ϕ_i的布雷格曼散度。σ_i^{k+1} 中也可以找到类似的等价方案。这些等价的迭代方案表明，算法1中的部分思想源自基于共轭的常微分方程（13），实际上与镜像下降方法[58]一致。因此，计算 Ψ_i 的共轭函数并将其代入 σ_i 的更新中，同时参考典范函数和变分不等式的性质后，读者也可以从镜像下降的角度看待算法1。

6.2 步长与收敛速率

下文将给出算法1在两类典型非凸多人博弈中的步长设置及相应的收敛速率。

多玩家广义单调博弈单调博弈是博弈模型中的一个广泛类别，其中

所有参与者的伪梯度均满足单调性 [27], [28], [35]。单调性使变分不等式问题 [60],的弱解与强解等价，从而使大多数凸博弈都能通过变分不等式中的一阶条件求解。类似地，我们在一类广义单调条件 [57], 下考虑算法1，该条件参照典范互补函数 (8)，并由此得到以下结果。

定理4. 若 $\mathscr{E}_i^+$非空且 $\Pi_{\Theta_i}^{\Psi_i}(\cdot)$ 是 κ_σ-强单调的，则算法1以速率 $\mathcal{O}(1/k)$ 收敛，步长为 $\alpha_k = \frac{2}{\kappa(k+1)}$，即

$$\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^\diamond\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}^k - \boldsymbol{\sigma}^\diamond\|^2 \leq \frac{1}{k+1}\frac{M_1}{\mu^2\kappa^2},$$

其中 $\mu = \text{最小值}\{\frac{\mu_x}{2}, \frac{\mu_\sigma}{2}\}$、 $\kappa = \text{最小值}\{\kappa_\sigma, \kappa_x\}$，且 M_1 为正常数。

下面给出证明概要。取一组布雷格曼散度如下:

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamond, \boldsymbol{z}^{k+1}) \triangleq \sum_{i=1}^N D_{\phi_i}(x_i^\diamond, x_i^{k+1}) + D_{\varphi_i}(\sigma_i^\diamond, \sigma_i^{k+1}).$$

这里我们运用三点恒等式、Fenchel 不等式、 $F(\boldsymbol{z})$的强单调性以及变分不等式解的最优性来处理上述公式。于是得到

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamond, \boldsymbol{z}^{k+1}) \triangleq \leq \Delta(\boldsymbol{z}^\diamond, \boldsymbol{z}^k) - \alpha_k\kappa\|\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamond\|^2 + \frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2.$$

此外，将上述结果代入 $\eta_k = \kappa\alpha_k$，对 $k, \cdots, 1$ 上的这些不等式求和，得到

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamond, \boldsymbol{z}^{k+1}) \leq \eta_k^2(k+1)\frac{M_1}{4\kappa^2\mu}.$$

由于步长设置为 $\eta_k = \kappa\alpha_k = 2/(k+1)$，我们最终得出结论。受篇幅所限，定理4的完整证明见补充材料。

多玩家势博弈 势博弈还广泛应用于功率分配 [18],拥塞控制 [37], 和多目标跟踪 [61]等领域。在势博弈中，存在一个适用于所有参与者的统一势函数，使得每个参与者收益的变化等价于势函数的变化。因此，式（2）中每个参与者收益的偏差都可以具体映射到一个统一的典范势函数，即

$$J_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}) - J_i(\boldsymbol{x}) = \Psi(\Lambda(x_i', \boldsymbol{x}_{-i})) - \Psi(\Lambda(\boldsymbol{x})). \quad (15)$$

由此可得具有公共典范对偶变量 σ 的互补函数:

$$\Gamma_i(x_i, \sigma, \boldsymbol{x}_{-i}) = \Gamma(\boldsymbol{x}, \sigma) = \sigma^T\Lambda(\boldsymbol{x}) - \Psi^*(\sigma). \quad (16)$$

此外， $\mathscr{E}^+$ 的 σ 集合具有与式（9）类似的统一形式。考虑在 k 次迭代过程中得到的加权平均值$\hat{}\boldsymbol{x}^k$ 和$\hat{}\sigma^k$，我们在下面的结果中给出算法1的收敛速率。

定理5。 如果 $\mathscr{E}^+$ 非空，且玩家收益受式（15）中的势函数约束，则算法1以 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$ 的速率收敛，步长为 $\alpha_k = \frac{2\mu d}{M_2\sqrt{k}}$，即，

$$\Gamma(\hat{\boldsymbol{x}}^k, \sigma^\diamond) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamond, \hat{\sigma}^k) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{d}{\mu}}M_2,$$

其中 $\mu = \text{最小值}\{\frac{\mu_x}{2}, \frac{\mu_\sigma}{2}\}$，且 d、 M_2 为两个正常数。

证明概要如下。取另一组Bregman散度，记为

$$\widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamond, \boldsymbol{z}) \triangleq D_\varphi(\sigma^\diamond, \sigma) + \sum_{i=1}^N D_{\phi_i}(x_i^\diamond, x_i).$$

根据三点恒等式和 (9) 中的 $\sigma \in \mathscr{E}^+$，关于 $\boldsymbol{z}^k$ 的变分不等式可以用互补函数的对偶间隙界定，即

$$\left\langle F(\boldsymbol{z}^k), \boldsymbol{z}^\diamond - \boldsymbol{z}^k \right\rangle \leq \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamond, \sigma^k) - \Gamma(\boldsymbol{x}^k, \sigma^\diamond).$$

然后，我们可以进一步推导出，在 $1, \cdots, k$ 上

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j\left(\Gamma(\boldsymbol{x}^j, \sigma^\diamond) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamond, \sigma^j)\right) \leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamond, \boldsymbol{z}^1) + \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 M_2^2}{4\mu}.$$

借助詹森不等式和步长设置 $\alpha_k = 2\sqrt{\mu}d/M_2\sqrt{k}$，我们最终得出结论。受篇幅限制，定理5的完整证明见补充材料。

注 **6.** 在上述两种情形下，我们的算法均达到已知的最优收敛率，与凸情形下的结果一致。在强单调条件下，我们针对非凸情形的算法达到了与凸情形相同的 $\mathcal{O}(1/k)$ 收敛速率 [62], [63]。该证明基于变分理论的尺度以及布雷格曼散度的度量，这反映了相对于均衡点的收敛速率。对于势博弈，我们充分利用统一势函数，推导出与凸情形相同的 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$ 收敛速率 [64], [65]。相应的收敛结果由势函数中的对偶间隙刻画。

7 实验

我们研究了所提出的方法在鲁棒神经网络训练和传感器定位任务中寻找全局纳什均衡的有效性。代码将公开发布。

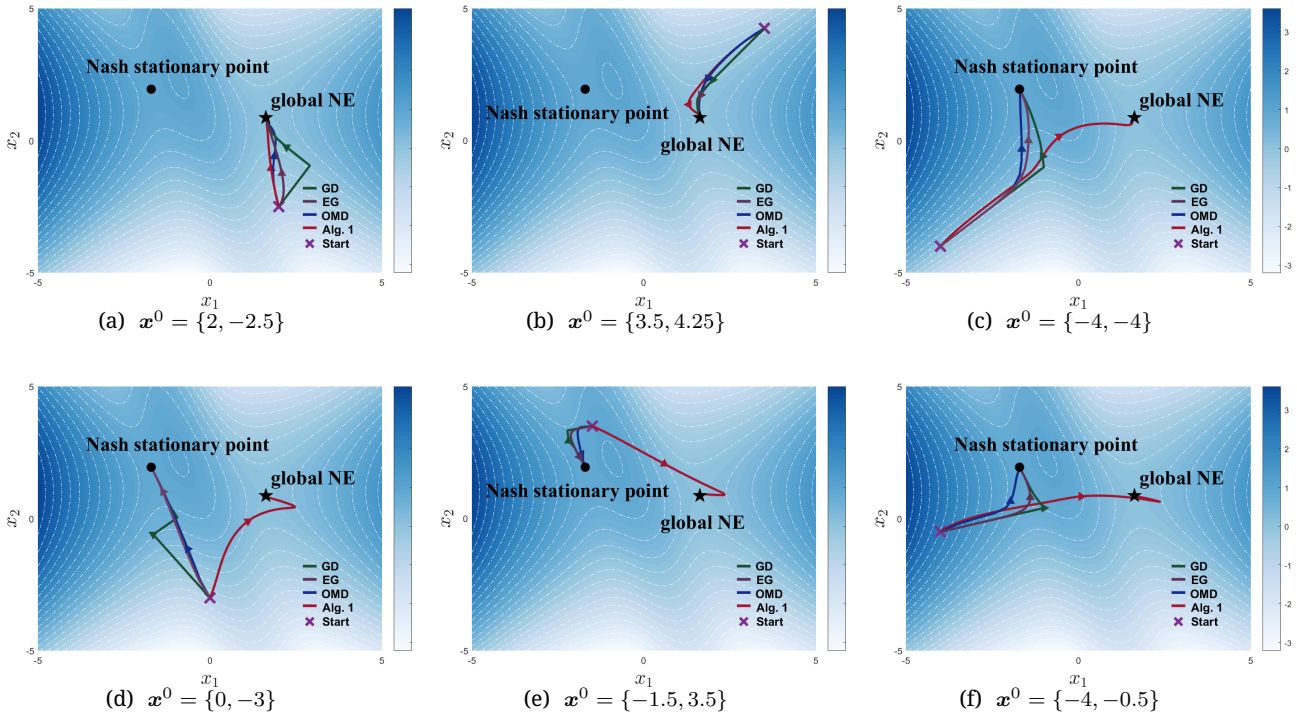
7.1 鲁棒神经网络训练

本节展示了我们的方法在鲁棒神经网络问题中的收敛性能。

7.1.1 实验实现

模型与数据预处理。考虑对抗训练中的双人设置 [19], [20]。两位参与者的收益可描述如下

$$\min_{x_1}\max_{x_2}\ell(g_{x_1}(\beta_1, x_2), \beta_2) + \frac{\lambda_1}{2}\|x_1\|^2 - \frac{\lambda_2}{2}\|x_2\|^2, \quad (17)$$



(a) $\boldsymbol{x}^0 = \{2, -2.5\}$ (b) $\boldsymbol{x}^0 = \{3.5, 4.25\}$ (c) $\boldsymbol{x}^0 = \{-4, -4\}$

(d) $\boldsymbol{x}^0 = \{0, -3\}$ (e) $\boldsymbol{x}^0 = \{-1.5, 3.5\}$ (f) $\boldsymbol{x}^0 = \{-4, -0.5\}$

图2. 不同初始点下不同方法的性能。

其中，函数 $\ell(\cdot)$ 表示训练数据(β_1, β_2)上的交叉熵损失，这些数据受到变量 x_2 的扰动。函数$g_{x_1}(\cdot)$ 是一个两层深度神经网络模型，其中变量 x_1 表示神经网络参数。输入数据取自高斯分布 $\beta_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \zeta)$，其中 μ 是从 $\mu \sim \mathcal{N}(0, 0.25)$ 中随机生成的，且 $\zeta = 1$。动作集 $\Omega_1 = \{x_1 \in \mathbb{R} : x_{\min} \leq x_1 \leq x_{\max}\}$ 采用单位正方形形式，而集合 $\Omega_2 = \{x_2 \in \mathbb{R} : \|x_2\|^2 \leq \epsilon\}$ 采用欧几里得球面形式。

方法。我们采用算法1求解该问题。令 $\alpha_k = \frac{2}{k+1}$ 为步长。取 $\phi_1 = (x_1 - x_{\min})\log(x_1 - x_{\min}) + (x_{\max} - x_1)\log(x_{\max} - x_1)$，$\phi_2 = -\sqrt{\epsilon^2 - \|x\|_2^2}$，$\varphi_1 = \frac{1}{2}\|\sigma_1\|^2$ 和 $\varphi_2 = \frac{1}{2}\|\sigma_2\|^2$。为展示我们方法的收敛性能，我们将算法1与几种基于平稳信息的常用方法进行比较，例如经典的梯度下降（GD）、乐观镜像下降（OMD） [42], 以及超梯度法（EG） [66]。设容差为 $t_{\text{tol}} = 10^{-3}$，终止准则为 $\|\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{x}^k\| \leq t_{\text{tol}}$。

7.1.2 实验结果

我们通过检查非空集合 $\mathscr{E}_i^+$以及定理1中的存在条件，验证了该非凸任务中全局纳什均衡的存在性。随后，我们采用算法1计算全局纳什均衡，并确认算法1的收敛点就是全局纳什均衡。两个对手收益的图示见图2。可以看出，这种非凸博弈设定存在一个纳什驻点和一个全局纳什均衡。这里我们将 $\boldsymbol{x}^\dagger = [-1.69, 1.90]$ 表示为纳什驻点，将 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit = [1.63, 0.86]$ 表示为全局纳什均衡。

此外，我们将算法1与其他方法进行了比较。我们对这些方法进行随机初始化。结果如图2 (a)-(f)所示。有趣的是，初始化似乎对我们算法的收敛影响很小，但对其他方法的影响却截然不同。初始值为 $\boldsymbol{x}^0 = [2, -2.5]$ 和 $\boldsymbol{x}^0 = [3.5, 4.25]$ 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 的演化分别如图2 (a)和(b)所示。在这种情况下，所有方法都找到了全局纳什均衡。初始值为 $\boldsymbol{x}^0 = [-4, -4]$ 和 $\boldsymbol{x}^0 = [0, -3]$ 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 的演化分别如图2 (c)和(d)所示。在这种情况下，只有算法1仍能达到目标，而其他方法则陷入纳什驻点。初始值为 $\boldsymbol{x}^0 = [-1.5, 3.5]$ 和 $\boldsymbol{x}^0 = [-4, -0.5]$ 时，$\boldsymbol{x}(t)$ 的演化分别如图2 (e)和(f)所示。在这种情况下，尽管这些初始值分别接近纳什驻点 $\boldsymbol{x}^\dagger$，算法1仍能收敛到全局纳什均衡。这些现象清楚地表明，无论初始点位于何处，算法1都是一种寻找全局纳什均衡的有效算法，而其他方法则容易受到初始点变化的影响。这充分支持了我们的理论。

7.2 传感器定位

在本节中，我们将所提出的方法应用于解决传感器定位问题。

7.2.1 实验实现

模型与数据预处理。我们考虑传感器定位中的一类非凸博弈，其中有 $N = 10$ 个传感器节点 [18], [52]。对于 $i \in \mathcal{I}$，位置策略集Ω_i 具有单位正方形形式$\Omega_i = \{x_i \in \mathbb{R}^2 : x_{\min} \leq x_{il} \leq x_{\max}\}$ 对于 $l = 1, 2$，其中 $x_{\min} = -6$、$x_{\max} = 6$，而式（3）中定义的用于定位测量的收益函数伴有个人估计的偏差 $\|D_i x_i - e_i\|^2$，即

$$J_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\|x_i - x_j\|^2 - d_{i,j})^2 + \|D_i x_i - e_i\|^2.$$

表2 三次迭代中五种方法在三种初始化下的最大似然估计。

初始化	迭代	的取值最大似然估计				
		算法1（我们的方法）	近端法 [46]	PGD [27]	惩罚法 [28]	SGD [64]
$x_{11}^0 = 3$	5	**1.2631**	1.5589	1.0819	1.9259	1.6590
	50	**0.3009**	0.1460	0.1174	0.1625	0.2513
	200	**0.0021**	0.0343	0.0481	0.0567	0.0529
$x_{11}^0 = -3$	5	**9.4408**	10.0225	9.9922	9.9855	9.9925
	50	**3.3574**	4.8478	8.8478	7.5678	7.9568
	200	**0.0379**	3.8488	7.2688	6.5929	6.3470
$x_{11}^0 = -0.1$	5	**5.5911**	7.0914	6.8472	7.0160	5.6742
	50	**0.5977**	6.6912	6.0461	5.1330	5.8409
	200	**0.0028**	5.4908	5.1005	4.4875	6.1451

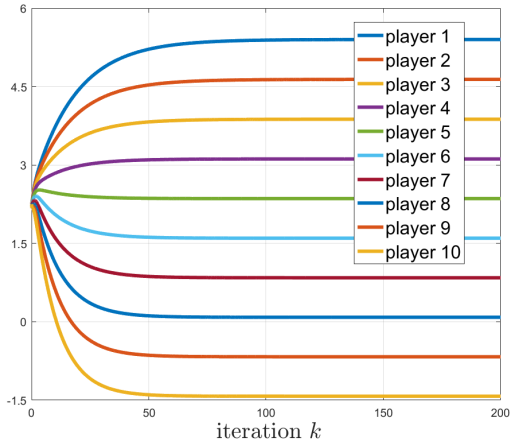


图3. 算法1中所有参与者决策的收敛情况。

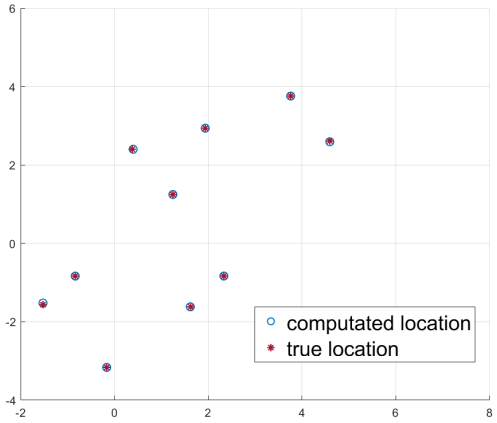


图4. 计算得到的传感器位置结果。

将环形图用作传感器网络 $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 10 \Leftrightarrow 1$，使得传感器 i 在 $\mathcal{N}_i$ 中有两个邻居节点。距离参数 $d_{i,\ j}$ 从紧致区域 $[5, 10]$，中随机选取，系数矩阵 $D_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 和 $e_i \in \mathbb{R}^2$ 为随机生成的常数。

传感器定位问题的目标是尽可能准确地估计所有传感器节点的位置。因此，从全局角度来看，获得最优位置选择$\boldsymbol{x}^*$是可取的。基于这一观点，我们将该问题重新表述为一个势博弈模型。势函数定义为

$$\Psi(\Lambda(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\in\mathcal{N}_i} (\|x_i - x_j\|^2 - d_{i,j})^2 + \|D_i x_i - e_i\|^2.$$

然后，我们按照本文中的步骤进行典范变换，以处理非凸性。如式（16）所述，由于典范变换后存在一个公共的 σ，因此此处的 $\mathscr{E}^+$ 是一个多面体。

方法。我们采用算法1来求解这个问题。设 $\alpha_k = \frac{0.0637}{\sqrt{k}}$为步长。取 $\phi_i(x_i) = \overline{\quad\quad}$

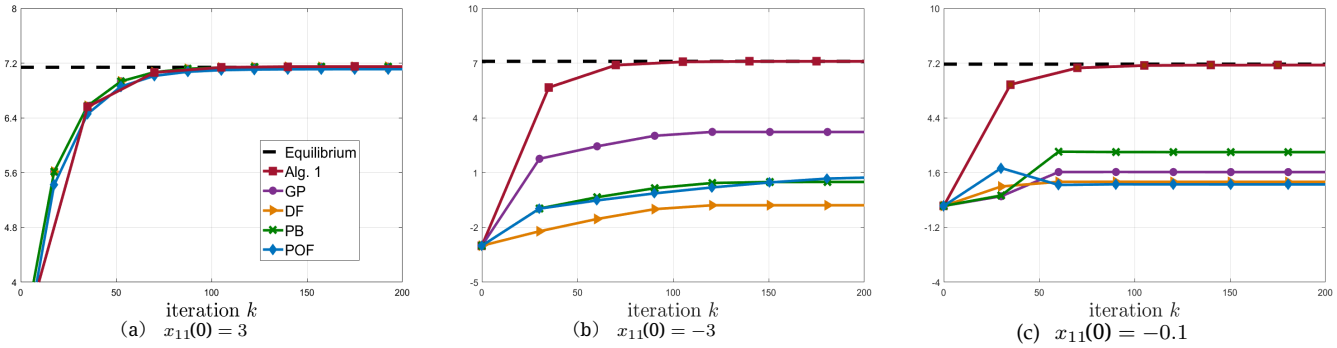
$2\sum (x_{i,l} - x_{\min}) \log(x_{i,l} - x_{\min}) + (x_{\max} - x_{i,l}) \log($ $x_{\max} - x_{i,l})_{l=1}$以及 $\varphi(\sigma) = \frac{1}{2}\|\sigma\|_2^2$。为进一步说明这一任务，我们将算法1与几种用于求解多玩家模型的现有方法进行比较，包括投影梯度下降（PGD） [27],基于惩罚的方法 [28], 随机梯度下降（SGD） [64], 和梯度近端方法[46]。

评估指标。将 $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2 \cdots, x_{10}\}$ 记为算法1计算得到的传感器位置，将 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$ 记为真实传感器位置。此博弈设置的性能可通过平均定位误差来评估：

$$\text{MLE} = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \|x_i - x_i^\diamondsuit\|^2}.$$

7.2.2 实验结果

如第4节和第6节所述，集合 $\mathscr{E}^+$ 非空，且满足存在条件。因此，算法1始终收敛至全局纳什均衡。图3展示了算法1中所有传感器策略在某一维度上的轨迹。这表明所有传感器都找到了



(a) $x_{11}(0) = 3$ (b) $x_{11}(0) = -3$ (c) $x_{11}(0) = -0.1$

图5. 不同初始点下的收敛结果比较。算法1是我们提出的算法。

由于算法收敛，它们找到了合适的位置，而该位置实际上就是所需的全局纳什均衡。定位结果如图4所示，其中真实传感器位置以星号表示，计算得到的传感器位置以圆圈表示。从图4可以看出，计算得到的位置结果与真实位置相符。这表明，我们的方法能够确保传感器定位的准确性，并能在这一非凸场景下找到全局纳什均衡。

此外，我们将算法1与上文提到的几种方法进行了比较。我们随机生成三个不同的初始点作为三种情形，并分别记录几种方法在迭代5次、50次和200 次后的最大似然估计值，以衡量计算得到的位置的精度。所有结果均列于表2中。在第一种情形 $x_{11}^0 = 3$下，所有方法都能准确定位传感器节点，且最大似然估计值随着迭代次数增加而减小。这是因为初始点接近全局纳什均衡。此外，在另外两种情形 $x_{11}^0 = -3$ 和 $x_{11}^0 = -0.1$下，算法1的优势得以体现。从表2可以看出，只有算法1仍能使最大似然估计 保持在容差误差范围内，而其他方法无法保证这一点。这是因为无论初始点位于何处，算法1都不易受到影响。在图5 (a)-(c)中，我们进一步从固定玩家的决策角度考察了这三种情形。从图5可以看出，只有我们提出的算法实现了目标，而其他算法在不同初始点下均未能实现目标。

8 讨论

本节基于与相关工作的比较，对本文取得的结果进行一些讨论。

首先，我们创新性地推导了这一重要类别的非凸多人博弈中全局纳什均衡的存在条件。此类博弈设定广泛应用于鲁棒训练 [20], 传感器定位 [52], 和机制设计 [22], [67]。然而，迄今为止，现有的其他非凸博弈方法都无法得出这些结果。随着机器学习中对抗系统和模型的快速发展及广泛应用，非凸博弈在学习任务中的作用日益重要。众所周知，针对非凸博弈已有一些理论研究和算法设计，但大多数结论都聚焦于双人极小极大问题。根据参与者目标的类别，相关研究现状大致可分为 Polyak-Łojasiewicz 情形 [19], [29], 强凹情形 [30], [31], 以及一般非凸非凹情形 [39], [40]。这类研究的兴起得益于 GAN 及其变体的成功 [41], [42]。近年来，人工智能中的学习方法正朝着多智能体方式、分布式方式或联邦框架 [1], [2], [3], [67]发展。这意味着对抗训练正逐渐推广至多个智能体，不再局限于两个对手。目前已有一些针对非凸多人博弈情形的初步研究。例如， [43], [44]提出了一种用于局部纳什均衡求解的最佳响应方案，而 [46] 设计了一种梯度近端算法来寻找近似解。正如这些研究所指出的，寻找局部纳什均衡或其他近似解颇具挑战，但仍可接受。迄今为止，揭示非凸情形下全局最优解或均衡的存在性仍是一个开放问题 [23], [24], [25]。因此，本文研究全局纳什均衡的存在条件十分重要；我们利用对偶理论中的共轭变换和变分不等式中的连续映射，在定理1中推导了这一条件。

其次，我们设计了一种连续常微分方程来计算全局纳什均衡，并推导出相应的离散算法，以及在两种典型情形下的步长设计和收敛率。回顾一下现有基于一阶信息的多参与者博弈论算法 [26],[27], [28]。这些研究大多依赖凸性假设，即每位参与者的收益函数具有强凸性或严格凸性，或者伪梯度具有直接单调性，而这些正是求解博弈模型中纳什均衡的核心条件。然而，在现实中，完全凸性并不容易实现。因此，上述针对凸博弈模型的方法在面对非凸情形时表现不尽如人意，这是不可避免的，因为它们最终只能得到局部纳什均衡或某些近似解。因此，考虑到本文所研究的这一类非凸问题非常重要，我们有责任设计新颖的算法来求解其中的全局纳什均衡。我们通过设计连续共轭型常微分方程实现了这一目标。这打破了研究多参与者博弈模型时传统凸性假设的限制。运用非线性系统中的李雅普诺夫稳定性理论，我们在定理 2 中证明了所设计动力系统的收敛性，并在定理3中证明了其指数速率，这对于连续常微分方程而言是相当不错的收敛性能。此外，在广义单调情形和势博弈情形下，由此导出的离散方案也分别在定理4和定理5中取得了良好的收敛结果

及潜在案例。

最后，我们进一步讨论本文中的对偶理论及相关技术。事实上，对偶理论在机器学习中的应用并不少见 [54],，本文采用的典范对偶理论此前也已应用于优化问题 [16], [50]。然而，要将这一技术从优化领域移植到博弈模型中并非易事，因为参与者的决策彼此耦合。参与者在做出决策时，还需要考虑其他参与者决策变量的变化。这一现象意味着，我们应将所有参与者的决策变量作为一个统一策略组合来处理。因此，我们借助对偶理论将原问题转化为一个互补问题，并为对偶变量指定了一个充分的可行集。最终，我们通过变分不等式克服了上述瓶颈，并得到了全局纳什均衡的存在条件。此外，从优化视角来看，所提出的用于求解全局纳什均衡的算法，其收敛性证明也有所不同。优化问题中所有变量共享一个统一的目标函数，而多人博弈模型则需要新的度量来分析实现算法的收敛性。为此，我们采用布雷格曼散度和一些不等式来克服这些困难，包括三点恒等式、Fenchel不等式和詹森不等式（更多细节请参见补充材料中的引理 S3–S5）。在理论分析中采用这些技术，或许能为今后研究大规模多参与者交互与干扰开辟新的路径。

9 结论与未来方向

我们研究了一类典型的非凸多参与者博弈，并讨论了如何求解其全局纳什均衡。借助典范对偶理论和变分不等式，我们提出了一种基于共轭函数的常微分方程，用于求解变换后的变分不等式问题；若能验证对偶关系，该方程实际上可导出原非凸博弈的全局纳什均衡。在给出该常微分方程的理论收敛保证后，我们推导了其离散化方法，以及两种典型非凸条件下的步长设置和相应的收敛率。

我们的探索不会止步于此；未来将基于本文开展进一步研究，以加以改进和拓展。就收敛速率而言，可以结合适当的加速方法以取得更理想的结果；就多参与者背景而言，考虑到隐私和安全，参与者之间的交互可能依赖通信网络，这或许意味着需要采用分布式或去中心化协议。

参考文献

[1] L. Yu、J. Song 和 S. Ermon，《多智能体对抗逆强化学习》，载于国际机器学习会议。PMLR，2019年，第 7194–7201 页。[2] J. Li、H. Ma 和 M. Tomizuka，《通过对抗学习进行交互感知的多智能体跟踪与概率行为预测》，载于*2019*年国际机器人与自动化会议（*ICRA*）。IEEE，2019年，第 6658–6664 页。

[3] X. Fan, Y. Ma, Z. Dai, W. Jing, C. Tan, and B. K. H. Low，《具有理论保证的容错联邦强化学习》，神经信息处理系统进展，第34卷，2021年。[4] T. Zhu, F. He, L. Zhang, Z. Niu, M. Song, and D. Tao，《去中心化 SGD 的拓扑感知泛化》，载于国际机器学习会议，2022年。[5] J. Song, H. Ren, D. Sadigh, and S. Ermon，《多智能体生成对抗模仿学习》，神经信息处理系统进展，第31卷，2018年。[6] H. Zhao, T. Li, Y. Xiao, and Y. Wang，《利用变分潜在表示改进多智能体生成对抗网络》，熵，第22卷，第9期，第1055页，2020年。[7] C. Li, K. Xu, J. Zhu, J. Liu, and B. Zhang，《三重生成对抗网络》，IEEE模式分析与机器智能汇刊，第44卷，第12期，第9629–9640页，2022年。[8] W. Saad, Z. Han, H. V. Poor, and T. Basar，《智能电网的博弈论方法：微电网系统、需求侧管理与智能电网通信综述》，IEEE信号处理杂志，第29卷，第5期，第86–105页，2012年。[9] S. Saharan, S. Bawa, and N. Kumar，《智慧城市智能交通系统的动态定价技术：系统综述》，Computer Communications，第150卷，第603–625页，2020年。[10] J.-S. Pang, G. Scutari, F. Facchinei, and C. Wang，《高斯并行干扰信道中具有速率约束的分布式功率分配》，IEEE Transactions on Information Theory，第54卷，第8期，第3471–3489页，2008年。[11] L. Busoniu, R. Babuska, and B. De Schutter，《多智能体强化学习综合综述》，IEEE系统、人类与控制论汇刊C辑（应用与综述），第38卷，第2期，第156–172页，2008年。[12] M. Lanctot, V. Zambaldi, A. Gruslys, A. Lazaridou, K. Tuyls, J. P´erolat, D. Silver, and T. Graepel，《多智能体强化学习的统一博弈论方法》，神经信息处理系统进展，第30卷，2017年。[13] B. Dai, A. Shaw, L. Li, L. Xiao, N. He, Z. Liu, J. Chen, and L. Song，《Sbeed：采用非线性函数逼近的收敛强化学习》，载于国际机器学习会议。PMLR，2018年，第1125–1134页。[14] S. Rota Bul`o and M. Pelillo，《超图聚类的博弈论方法》，IEEE模式分析与机器智能汇刊，第35卷，第6期，第1312–1327页，2013年。[15] J. Nash，《非合作博弈》，数学年刊，第286–295页，1951年。[16] D. Y. Gao, V. Latorre, and N. Ruan，《典范对偶理论：多学科研究的统一方法论》。Springer，2017年。[17] M. Ke, Y. Xu, A. Anpalagan, D. Liu, and Y. Zhang，《无线传感器网络中基于 TOA 的分布式定位：势博弈方法》，IEEE Communications Letters，第22卷，319，2017年2，第316页–。[18] S. Yang, Y. Guo, N. Li, and D. Fang，《DF-CSPG：利用联合稀疏性的无设备定位势博弈方法》，IEEE Wireless Communications Letters，第8卷，第2期，第608–611页，2018年。[19] M. Nouiehed, M. Sanjabi, T. Huang, J. D. Lee, and M. Razaviyayn，《使用迭代一阶方法求解一类非凸极小极大博弈》，神经信息处理系统进展，第32卷，2019年。[20] Y. Deng and M. Mahdavi，《局部随机梯度下降上升：收敛性分析与通信效率》，载于国际人工智能与统计学会议。PMLR，2021年，第1387–1395页。[21] H. Yang and X. Xie，《无人机赋能多小区网络的节能联合调度与资源管理》，IEEE系统期刊，第14卷，第1期，第363–374页，2019年。[22] R. Ruby, V. C. Leung, and D. G. Michelson，《基于放大转发中继的网络中源节点与中继联合功率分配的集中式解与博弈论解》，IEEE通信汇刊，第63卷，第8期，第2848–2863页，2015年。[23] J. Maciel and J. Costeira，《稀疏对应问题的全局解》，IEEE模式分析与机器智能汇刊，第25卷，第2期，第187–199页，2003年。[24] B. D. Haeffele and R. Vidal，《结构化低秩矩阵分解：全局最优性、算法与应用》，IEEE模式分析与机器智能汇刊，第42卷，第6期，第1468–1482页，2020年。

[25] L. Liu, J. Liu, and D. Tao, 《非凸复合优化的方差缩减方法》, IEEE模式分析与机器智能汇刊, 第44卷, 第9期, 第5813–5825页, 2022年。[26] P. Yi and L. Pavel, 《分布式广义纳什均衡计算的算子分裂方法》, Automatica, 第102卷, 第111–121页, 2019年。[27] G. Chen, Y. Ming, Y. Hong, and P. Yi, 《具有不确定耦合约束的ε广义纳什均衡分布式算法》, Automatica, 第123卷, 第109313页, 2021年。[28] F. Facchinei and C. Kanzow, 《求解广义纳什均衡问题的惩罚方法》, SIAM优化杂志, 第20卷, 第5期, 第2228–2253页, 2010年。[29] T. Fiez, L. Ratliff, E. Mazumdar, E. Faulkner, and A. Narang, 《非凸零和博弈类别中全局收敛至局部极小极大均衡》, 神经信息处理系统进展, 第34卷, 2021年。[30] T. Lin, C. Jin, and M. Jordan, 《关于非凸-凹极小极大问题的梯度下降上升》, 载于国际机器学习会议。PMLR, 2020年, 第6083–6093页。[31] H. Rafique, M. Liu, Q. Lin, and T. Yang, 《弱凸-凹极小极大优化：可证明算法及其在机器学习中的应用》, 优化方法与软件, 第1–35页, 2021年。[32] R. T. Rockafellar, 《共轭对偶与优化》。SIAM, 1974年。[33] F. Facchinei and J.-S. Pang, 《有限维变分不等式与互补问题》。Springer, 2003年。[34] J. Diakonikolas and L. Orecchia, 《近似对偶间隙技术：一阶方法的统一理论》, SIAM优化杂志, 第29卷, 第1期, 第660–689页, 2019年。[35] J. Koshal, A. Nedi´c, and U. V. Shanbhag, 《图上的聚合博弈分布式算法》, 运筹学, 第64卷, 第3期, 第680–704页, 2016年。[36] G. Xu, G. Chen, H. Qi, and Y. Hong, 《用于近似分布式聚合博弈纳什均衡的高效算法》, IEEE控制论汇刊, 2022年。[37] J. Lei and U. V. Shanbhag, 《随机势博弈、错设势博弈及非凸优化的异步方案》, 运筹学, 第68卷, 第6期, 第1742–1766页, 2020年。[38] H. J. Kim, R. Vidal, D. H. Shim, O. Shakernia, and S. Sastry, 《无人地面与空中车辆概率追逃博弈的分层方法》, 载于第40届IEEE决策与控制会议论文集, 第1卷。IEEE, 2001年, 第634–639页。[39] M. Heusel, H. Ramsauer, T. Unterthiner, B. Nessler, and S. Hochre- iter, 《采用双时间尺度更新规则训练的生成对抗网络收敛至局部纳什均衡》, 神经信息处理系统进展, 第30卷, 2017年。[40] C. Daskalakis and I. Panageas, 《极小极大优化中（乐观）梯度下降的极限点》, 神经信息处理系统进展, 第31卷, 2018年。[41] I. J. Goodfellow, J. Pouget-Abadie, M. Mirza, B. Xu, D. Warde-Farley, S. Ozair, A. C. Courville, and Y. Bengio, 《生成对抗网络》, 载于神经信息处理系统大会, 2014年。[42] C. Daskalakis, A. Ilyas, V. Syrgkanis, and H. Zeng, 《采用乐观性训练生成对抗网络》, 载于国际学习表征会议, 2018年。[43] J.-S. Pang and G. Scutari, 《具有侧约束的非凸博弈》, SIAM优化杂志, 第21卷, 第4期, 第1491–1522页, 2011年。[44] T. Hao and J.-S. Pang, 《基于分段仿射参数化值函数的双层非合作博弈》, Mathematical Programming, 第180卷, 第1期, 第33–73页, 2020年。[45] A. Raghunathan, A. Cherian, and D. Jha, 《基于梯度的 Nikaido-Isoda 函数实现博弈论优化》, 载于国际机器学习会议。PMLR, 2019年, 第5291–5300页。[46] K. Liu, N. Oudjane, and C. Wan, 《大规模非凸聚合博弈中的近似纳什均衡》, arXiv预印本 arXiv:2011.12604, 2020年。[47] M. Zhu and S. Mart´ınez, 《多智能体非凸优化的近似对偶次梯度算法》, IEEE自动控制汇刊, 第58卷, 第6期, 第1534–1539页, 2012年。[48] V. Latorre and D. Y. Gao, 《求解一般非凸约束问题的典范对偶理论》, 优化快报, 第10卷, 第8期, 第1763–1779页, 2016年。[49] X. Ren, D. Li, Y. Xi, a nd H. Shao, 《具有耦合约束的一类非凸优化问题的分布式全局优化》, IEEE自动控制汇刊

[50] Y. Liang 和 G. Cheng, “通过序贯整数规划和规范松弛算法进行拓扑优化”, 计算力学与工程方法, 第348卷, 96, 2019 64页。– .[51] G. Gidel、H. Berard、G. Vignoud、P. Vincent 和 S. Lacoste-Julien, “生成对抗网络的变分不等式视角”, 载于国际学习表征会议, 2019年。[52] J. Jia、G. Zhang、X. Wang 和 J. Chen, “道路传感器网络的分布式定位：一种博弈论方法”, 工程中的数学问题, 第2013卷, 2013年。[53] M. Chiang、C. W. Tan、D. P. Palomar、D. O’neill 和 D. Julian, “通过几何规划进行功率控制”, IEEE无线通信汇刊, 第6卷, 第7期, 第2640–2651页, 2007年。[54] A. Eriksson、C. Olsson、F. Kahl 和 T.-J. Chin, “弦距离下的旋转平均：全局最小化器与强对偶性”, IEEE模式分析与机器智能汇刊, 第43卷, 第1期, 第256–268页, 2021年。[55] X. Zheng、X. Sun、D. Li 和 Y. Xu, “非凸二次规划问题中的零对偶间隙”, 全局优化杂志, 第52卷, 第2期, 第229–242页, 2012年。[56] P. T. Harker 和 J.-S. Pang, “有限维变分不等式与非线性互补问题：理论、算法与应用综述”, 数学规划, 第48卷, 第1期, 第161–220页, 1990年。[57] F. Giannessi、A. Maugeri 和 P. M. Pardalos, 《均衡问题：非光滑优化与变分不等式模型》。施普林格科学与商业媒体, 2006年, 第58卷。[58] A. S. Nemirovskij 和 D. B. Yudin, “优化中的问题复杂度与方法效率”, 1983年。[59] W. Krichene、A. Bayen 和 P. L. Bartlett, “连续时间和离散时间下的加速镜像下降”, 神经信息处理系统进展, 第28卷, 2015年。[60] G. J. Minty, “希尔伯特空间中的单调（非线性）算子”, 杜克数学杂志, 第29卷, 第3期, 第341–346页, 1962年。[61] C. Soto、B. Song 和 A. K. Roy-Chowdhury, “自配置摄像机网络中的分布式多目标跟踪”, 载于2009年IEEE计算机视觉与模式识别会议。IEEE, 2009年, 第1486–1493页。[62] F. Yousefian、A. Nedi´c 和 U. V. Shanbhag, “针对非利普希茨随机多用户优化与纳什博弈的自调节随机逼近方案”, IEEE自动控制汇刊, 第61卷, 第7期, 第1753–1766页, 2015年。[63] L. Pavel, “通过双重增广算子分裂方法，在网络上基于部分决策信息求解广义纳什均衡”, IEEE自动控制汇刊, 第65卷, 第4期, 第1584–1597页, 2019年。[64] P. Mertikopoulos 和 Z. Zhou, “在连续动作集和未知收益函数下的博弈学习”, 数学规划, 第173卷, 第1期, 第465–507页, 2019年。[65] Y. Freund 和 R. E. Schapire, “使用乘法权重的自适应博弈”, 博弈与经济行为, 第29卷, 第1-2期, 第79–103页, 1999年。[66] G. M. Korpelevich, “用于求解鞍点及其他问题的外梯度法”, Matecon, 第12卷, 第747–756页, 1976年。[67] T. Qin、F. He、D. Shi、H. Wenbing 和 D. Tao, “置换等变性在拍卖机制中的益处”, 载于神经信息处理系统进展, 2022年。[68] D. Yang Gao, “非光滑全局优化中的规范对偶变换方法与广义三元性理论”, 全局优化杂志, 第17卷, 第1期, 第127–160页, 2000年。[69] G. Chen 和 M. Teboulle, “使用布雷格曼函数的近端类最小化算法收敛性分析”, SIAM优化杂志, 第3卷, 第3期, 第538–543页, 1993年。[70] W. M. Haddad 和 V. Chellaboina, 《非线性动力系统与控制：基于李雅普诺夫的方法》。普林斯顿大学出版社, 2011年。[71] A. Ben-Tal、T. Margalit 和 A. Nemirovski, “有序子集镜像下降优化方法及其在断层成像中的应用”, SIAM优化杂志, 第12卷, 108, 2001年1, 79第。– .[72] A. Nedic 和 S. Lee, “具有加权平均的随机次梯度镜像下降算法”, SIAM优化杂志, 第24卷, 第1期, 第84–107页, 2014年。



Guanpu Chen在中国合肥的中国科学技术大学获得数学理学学士学位，并在北京的中国科学院获得系统科学博士学位。目前，他是京东探索研究院、京东集团的算法科学家。他的研究兴趣包括运筹学和控制论，涵盖多智能体系统、分布式优化、机器学习、算法博弈、网络博弈和安全博弈。



Gehui Xu于2019年获得中国矿业大学（中国北京）信息与计算科学理学学士学位。目前，她是中国科学院数学与系统科学研究院（中国北京）的博士生。她的研究兴趣包括博弈论、分布式优化和机器学习。



Fengxiang He 获得了中国科学技术大学统计学理学学士学位，以及悉尼大学计算机科学哲学硕士和博士学位。目前，他是京东集团京东探索研究院的算法科学家，负责可信人工智能领域的研发。他的研究兴趣涵盖可信人工智能的理论与实践，包括深度学习理论与可解释性、隐私保护机器学习、去中心化学习和算法博弈论。他担任 UAI、AISTATS 和 ACML 的领域主席。



Yiguang Hong（IEEE会士（2016年））获得了中国北京大学的理学学士和理学硕士学位，以及中国科学院（CAS）的博士学位。目前，他是同济大学上海智能科学与技术研究院教授，同时也是中国科学院数学与系统科学研究院教授。他目前的研究兴趣包括非线性控制、多智能体系统、分布式优化与博弈、机器学习和社交网络。Hong 教授担任编辑——

《控制理论与技术》主编。他还曾担任或现任多家期刊的副编辑，包括《IEEE自动控制汇刊》、《IEEE网络系统控制汇刊》和《IEEE控制系统杂志》。他曾获中国控制会议关肇直奖、国际自动控制联合会世界大会青年作者奖、中国科学院青年科学家奖、中国青年科技奖以及国家自然科学奖。他也是IEEE会士。



Leszek Rutkowski （IEEE会士（2005年））于1977年、1980年和1986年分别获得弗罗茨瓦夫理工大学（位于波兰弗罗茨瓦夫）的理学硕士、博士和理学博士学位，并于2014年获得位于波兰克拉科夫的AGH科技大学授予的荣誉博士学位。他任职于波兰科学院系统研究所（位于华沙），并在AGH科技大学计算机科学研究所（位于波兰克拉科夫）任职；在这两个机构，他均担任教授。他

他是波兰琴斯托霍瓦理工大学荣誉教授，同时与波兰罗兹社会科学大学合作。他的研究兴趣包括机器学习、数据流挖掘、大数据分析、神经网络、随机优化与控制、智能体系统、模糊系统、图像处理、模式分类和专家系统。他已出版七部专著和 300 多篇技术论文，其中 40 多篇发表于 IEEE Transactions 的各个系列期刊。他是波兰神经网络学会的会长兼创始人，并担任多家最具声望的国际期刊编委。他曾获 IEEE Transactions on Neural Networks 杰出论文奖。他是波兰科学院正式院士，于 2016年 当选；也是欧洲科学院院士，于 2022年 当选。



Dacheng Tao （F'15）现任京东探索研究院首任院长及京东集团高级副总裁。他同时担任悉尼大学计算机科学教授和 ARC Laureate Fellow。他主要将统计学和数学应用于人工智能与数据科学，其研究成果详见一部专著以及 200 多篇发表于知名期刊和顶尖会议论文集的论文。他曾获 2015年 澳大利亚 Scopus-Eureka 奖、2018年 IEEE ICDM Re-

搜索贡献奖，以及2021年 IEEE 计算机学会 McCluskey 技术成就奖。他是澳大利亚科学院、新南威尔士皇家学会、美国科学促进会、美国计算机协会和 IEEE 的会士。

补充材料

在补充材料中，我们提供了正文中省略的若干详细内容。必要的预备知识包括典范对偶理论、变分不等式、Bregman 散度以及一些重要的不等式。所有引理和定理的证明均作了详细说明。

S.1 典范对偶理论

我们首先介绍本文补充材料中的以下典范对偶理论基本概念。若可微函数 $\Psi:\ \Theta \to \mathbb{R}$ 的导数 $\nabla\Psi:\ \Theta \to \Theta^*$ 是一一映射，则称其为典范函数。此外，若 Ψ 是凸规范函数，则其共轭函数 $\Psi^*:\ \Theta^* \to \mathbb{R}$ 可通过勒让德变换唯一确定，即

$$\Psi^*(\sigma) = \left\{ \xi^T\sigma - \Psi(\xi) \mid \sigma = \nabla\Psi(\xi) \right\},$$

其中，$\sigma \in \Theta^*$ 是典范对偶变量。基于此，在$\Theta \times \Theta^*$上成立相应的典范对偶关系:

$$\begin{aligned} & \sigma = \nabla\Psi(\xi), \\ \Leftrightarrow \quad & \xi = \nabla\Psi^*(\sigma), \\ \Leftrightarrow \quad & \xi^T\sigma = \Psi(\xi) + \Psi^*(\sigma). \end{aligned}$$

这里，$(\xi,\ \sigma)$ 称为 $\Theta \times \Theta^*$上的勒让德规范对偶对。

S.2 引理1的证明

本节给出引理1的证明。引理1探讨了（8）与（1）的驻点之间的关系。为方便起见，我们在此重述引理1。

引理1 存在一个剖面 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$，使其成为（1）的纳什驻点，当且仅当 $\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit \in \boldsymbol{\Theta}^*$，且对于 $i \in \mathcal{I}$，$(x_i^\diamondsuit, \sigma_i^\diamondsuit)$ 是互补函数 $\Gamma_i(x_i, \sigma_i, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)$的驻点。

证明。 对于给定的策略组合 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$，若存在 $\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit \in \boldsymbol{\Theta}^*$，使得对所有 $i \in \mathcal{I}$，$(x_i^\diamondsuit, \sigma_i^\diamondsuit)$ 都是互补函数 $\Gamma_i(x_i, \sigma_i, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)$的驻点，则其满足以下一阶条件:

$$\mathbf{0}_n \in \sigma_i^{\diamondsuit T}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) + \mathcal{N}_{\Omega_i}(x_i^\diamondsuit), \tag{s.1a}$$

$$\mathbf{0}_{q_i} \in -\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) + \nabla\Psi_i^*(\sigma_i^\diamondsuit) + \mathcal{N}_{\Theta_i^*}(\sigma_i^\diamondsuit), \tag{s.1b}$$

其中，$\mathcal{N}_{\Omega_i}(x_i^\diamondsuit)$ 是集合 Ω_i上点 $x_i^\diamondsuit$处的法锥，法锥 $\mathcal{N}_{\Theta_i^*}(\sigma_i^\diamondsuit)$的定义类似。根据凸规范函数 Ψ_i 的定义可知，其导数 $\nabla\Psi_i$: $\Theta_i \to \Theta_i^*$是从 Θ_i 到其值域 Θ_i^*的一一映射。因此，对于给定的满足 $\xi_i^\diamondsuit = \Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)$ 的 $\xi_i^\diamondsuit \in \Theta_i$，存在唯一的 $\sigma_i^\diamondsuit \in \Theta_i^*$，使得

$$\sigma_i^\diamondsuit = \nabla\Psi_i(\xi_i^\diamondsuit).$$

同时，给定 $\Theta_i \times \Theta_i^*$ 上的勒让德规范对偶对$(\xi_i^\diamondsuit, \sigma_i^\diamondsuit)$，对偶关系成立:

$$\sigma_i^\diamondsuit = \nabla\Psi_i(\xi_i^\diamondsuit) \iff \xi_i^\diamondsuit = \nabla\Psi_i^*(\sigma_i^\diamondsuit).$$

综上，(s.1b) 可转化为

$$\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) = \nabla\Psi_i^*(\sigma_i^\diamondsuit). \tag{s.2}$$

再次利用对偶关系，(s.2) 等价于

$$\sigma_i^\diamondsuit = \nabla\Psi_i(\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit)). \tag{s.3}$$

将 (s.3) 代入 (s.1a)，可得

$$\mathbf{0}_n \in \nabla\Psi_i(\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit))^T\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) + \mathcal{N}_{\Omega_i}(x_i^\diamondsuit). \tag{s.4}$$

根据链式法则,

$$\nabla\Psi_i(\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit))^T\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) = \nabla_{x_i}J_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit).$$

因此，(s.4) 等价于

$$\mathbf{0}_n \in \nabla_{x_i}J_i(x_i^\diamondsuit, \boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit) + \mathcal{N}_{\Omega_i}(x_i^\diamondsuit). \tag{s.5}$$

由于（s.5）对任意参与者都成立 $i \in \mathcal{I}$，剖面 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$ 满足纳什驻定条件，至此证明完毕。 □

S.3 变分不等式

本节介绍一些与变分不等式（VI）相关的概念和性质。回顾问题 (8) 中的以下记号

$$\boldsymbol{z}=\operatorname{col}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma}\},\quad \boldsymbol{\Xi}=\boldsymbol{\Omega}\times\mathscr{E}^{+}\subset\mathbb{R}^{nN+q}.$$

对于典范函数 Ψ_i 关于 $i\in\mathcal{I}$的共轭梯度，记为

$$\nabla\Psi^{*}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)=\operatorname{col}\{\nabla\Psi_i^{*}\left(\sigma_i\right)\}_{i=1}^{N}.$$

另外，将所有 Λ_i 的剖面记为

$$\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)=\operatorname{col}\left\{\Lambda_i\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)\right\}_{i=1}^{N},$$

增广偏导数剖面记为

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})=\operatorname{col}\left\{\sigma_i^{T}\nabla_{x_i}\Lambda_i\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)\right\}_{i=1}^{N}.$$

这样，式 (8) 的伪梯度可改写为

$$F(\boldsymbol{z})\triangleq\left[\begin{array}{c}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})\\-\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla\Psi^{*}\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}\operatorname{col}\{\sum_{k=1}^{q_i}[\sigma_i]_k\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})\}_{i=1}^{N}\\\operatorname{col}\left\{-\Lambda_i\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)+\nabla\Psi_i^{*}\left(\sigma_i\right)\right\}_{i=1}^{N}\end{array}\right].\tag{s.6}$$

接下来，将相应引入的变分不等式（VI）问题 VI($\boldsymbol{\Xi},F$) 定义为

$$\text{to find}\quad \boldsymbol{z}\in\boldsymbol{\Xi}\quad\text{subject to}\quad (\boldsymbol{z}'-\boldsymbol{z})^{T}F(\boldsymbol{z})\geq 0,\quad\forall\boldsymbol{z}'\in\boldsymbol{\Xi}.\tag{s.7}$$

该变分不等式问题的解记为SOL($\boldsymbol{\Xi}$, F)。此外，由于 F（$\boldsymbol{z}$）是连续映射，且 $\boldsymbol{\Xi}$是闭集，我们得到如下关于 [33, 第 2 页-3]的结果。

引理 ***S1***。 在（s.7）中，VI($\boldsymbol{\Xi}$, F) 的解集SOL($\boldsymbol{\Xi}$, F) 是闭集。此外，任意剖面 $\boldsymbol{z}\in$SOL($\boldsymbol{\Xi}$, F) 当且仅当

$$\mathbf{0}_{nN+q}\in F(\boldsymbol{z})+\mathcal{N}_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{z}).$$

S.4 定理1的证明

本节利用前文关于典范对偶理论和变分不等式问题性质的准备，给出定理1的证明。为方便起见，我们在此重述定理1。

定理1 若（$\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$, $\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}$）是VI($\boldsymbol{\Xi}$, F) 的一个解，且 $\sigma_i^{\diamondsuit}=\nabla\Psi_i\ (\xi_i)\ |_{\xi_i=\Lambda_i\ (x_i^{\diamondsuit},\ \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})}$ 对于 $i\in\mathcal{I}$，则存在 $\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$作为非凸多人博弈（1）的全局纳什均衡。

证明。 在假设1下，若存在 $\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\in\mathscr{E}^{+}$ 使得 $\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}=\operatorname{col}\{\boldsymbol{x}^{\diamondsuit},\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\}$ 是VI($\boldsymbol{\Xi},F$)的一个解，则由引理 S1可得

$$\mathbf{0}_{nN+q}\in F(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\mathcal{N}_{\boldsymbol{\Xi}}(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}),\tag{s.8}$$

这意味着，对于 $i\in\mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}&\mathbf{0}_n\in\sigma_i^{\diamondsuit T}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})+\mathcal{N}_{\Omega_i}(x_i^{\diamondsuit}),\\&\mathbf{0}_{q_i}\in-\Lambda_i(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})+\nabla\Psi_i^{*}(\sigma_i^{\diamondsuit})+\mathcal{N}_{\mathscr{E}_i^{+}}(\sigma_i^{\diamondsuit}),\end{aligned}$$

或者等价地表述为

$$\begin{aligned}(\sigma_i^{\diamondsuit T}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}))^{T}(x_i-x_i^{\diamondsuit})\geq 0,\quad\forall x_i\in\Omega_i,\\(-\Lambda_i(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})+\nabla\Psi_i^{*}(\sigma_i^{\diamondsuit}))^{T}(\sigma_i-\sigma_i^{\diamondsuit})\geq 0,\quad\forall\sigma_i\in\mathscr{E}_i^{+}.\end{aligned}\tag{s.9}$$

此外，若 $\sigma_i^{\diamondsuit}=\nabla\Psi_i\left(\xi_i\right)|_{\xi_i=\Lambda_i(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})}$ 对 $i\in\mathcal{I}$成立，则典范对偶关系在 $\Theta_i\times\mathscr{E}_i^{+}$上对 $i\in\mathcal{I}$成立。这表明VI($\boldsymbol{\Xi},F$) 的解是(8)在 $\Theta_i\times\Theta_i^{*}$上的一个驻点剖面。

因此，类似于引理1中使用的链式法则，我们可以进一步推导出

$$(\nabla_{x_i}J_i(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}))^{T}(x_i-x_i^{\diamondsuit})\geq 0,\quad\forall x_i\in\Omega_i.$$

此外，当 $\sigma_i\in\mathscr{E}_i^{+}$时，海森矩阵满足

$$\nabla_{x_i}^{2}\Gamma_i(x_i,\sigma_i,\boldsymbol{x}_{-i})=\sum\nolimits_{k=1}^{q_i}[\sigma_i]_k\nabla_{x_i}^{2}\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})\succeq\kappa_x\boldsymbol{I}_n,$$

这表明 $\Gamma_i(x_i,\ \sigma_i,\ \boldsymbol{x}_{-i})$ 关于 x_i 具有凸性。此外，由于 Ψ_i 具有凸性，其勒让德共轭Ψ_i^{*}也具有凸性 [68]。因此，总互补函数 Γ_i $(x_i,\ \sigma_i,\ \boldsymbol{x}_{-i})$ 关于典范对偶变量 σ_i 是凹函数。由此，我们可以得到 $(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit},\ \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit})$ 在 $\boldsymbol{\Omega}\times\mathscr{E}^{+}$ 上的全局最优性，即，对于 $i\in\mathcal{I}$,

$$\Gamma_i(x_i^{\diamondsuit},\sigma_i,\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\leq\Gamma_i(x_i^{\diamondsuit},\sigma_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\leq\Gamma_i(x_i,\sigma_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}),\quad\forall x_i\in\Omega_i,\ \sigma_i\in\mathscr{E}_i^{+}.$$

上述不等式关系表明

$$J_i(x_i^{\diamondsuit}, \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}) \leq J_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}), \quad \forall x_i \in \Omega_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

这证实了 $\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$ 是式 (1) 的全局纳什均衡，从而完成了证明。 □

S.5 基于共轭的常微分方程收敛性分析

本节旨在给出引理 2、定理 2 和定理 3 的证明。我们首先介绍一些在分析常微分方程 (13) 的收敛性时所必需的预备知识，这些也是凸分析中广泛接受的概念。设$h(z): \Xi \to \mathbb{R}$ 是在闭凸集 Ξ上定义的可微 ω-强凸函数，且满足

$$h\left(\theta z + (1-\omega) z'\right) \leq \theta h(z) + (1-\theta) h\left(z'\right) - \frac{\omega}{2} \theta(1-\theta) \left\|z' - z\right\|^2, \quad \forall z, z' \in \Xi, \theta \in [0,1].$$

此外 ，若存在常数 $L > 0$使得 h 具有利普希茨连续梯度，则 t

$$\|\nabla h(z') - \nabla h(z)\| \leq L \|z - z'\|, \quad \forall z, z' \in \Xi,$$

这等价于

$$h\left(z'\right) - h(z) \leq \left(z' - z\right)^{\mathrm{T}} \nabla h(z) + \frac{L}{2} \left\|z - z'\right\|^2, \quad \forall z, z' \in \Xi.$$

另一方面，遵循 对偶理论，定义在对偶空间 Ξ^* 上的 [58], h 的共轭函数为

$$h^*(s) = \sup_{z \in \Xi} \left\{ z^T s - h(z) \right\},$$

其中 $s \in \Xi^*$ 作为对偶变量。此外，考虑 h 是定义在闭凸集 Ξ 上的可微强凸函数。那么，根据 [34], h^* 在 Ξ^* 上也是凸且可微的，并满足

$$h^*(s) = \min_{z \in \Xi} \left\{ -z^T s + h(z) \right\}.$$

此外，共轭梯度 $\nabla h^*(s)$ 将 Ξ^* 映射到 Ξ，并满足

$$\nabla h^*\left(s\right) = \operatorname{argmin}_{z \in \Xi} \left\{ -z^T s + h(z) \right\}.$$

有了这些预备知识，我们来研究常微分方程（13）的收敛性。为简单起见，将其中梯度对应的以下紧凑形式记为

$$\nabla \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) \triangleq \operatorname{col}\left\{\nabla \phi_i\left(x_i\right)\right\}_{i=1}^N, \quad \nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{col}\{\nabla \varphi_i(\sigma_i)\}_{i=1}^N;$$
$$\nabla \boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{y}) = \operatorname{col}\{\nabla \phi_i^*\left(y_i\right)\}_{i=1}^N, \quad \nabla \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\nu}) = \operatorname{col}\{\nabla \varphi_i^*\left(\nu_i\right)\}_{i=1}^N.$$

因此，结合在（s.6）中定义的紧凑形式 $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma})$、$\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)$ 和 $\nabla \Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right)$，常微分方程（13）可紧凑地表示为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{y}} = -G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}) + \nabla \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}, \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = \Lambda\left(\boldsymbol{x}\right) - \nabla \Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right) + \nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\nu}, \\ \boldsymbol{x} = \nabla \boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{\sigma} = \nabla \boldsymbol{\varphi}^*\left(\boldsymbol{\nu}\right). \end{cases} \tag{s.10}$$

基于此，我们首先说明常微分方程 (s.10)（或常微分方程 (13)）的均衡与博弈 (1) 的全局纳什均衡之间的关系。为方便起见，在此重述引理 2。

引理 2 假设$(\boldsymbol{y}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{\nu}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{x}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit})$ 是常微分方程 (13) 的一个均衡点。若对于 $i \in \mathcal{I}$，有 $\sigma_i^{\diamondsuit} = \nabla \Psi_i\left(\xi_i\right)\big|_{\xi_i = \Lambda_i\left(x_i^{\diamondsuit}, \boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}\right)}$，则 $\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$ 是 (1) 的全局纳什均衡。

证明。 若$(\boldsymbol{y}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{x}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{\nu}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit})$ 是常微分方程 (s.10) 的一个均衡点，则有

$$\mathbf{0}_{nN} = -G(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}) + \nabla \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}) - \boldsymbol{y}^{\diamondsuit}, \tag{s.11a}$$
$$\mathbf{0}_q = \Lambda\left(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}\right) - \nabla \Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\right) + \nabla \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}) - \boldsymbol{\nu}^{\diamondsuit}, \tag{s.11b}$$
$$\boldsymbol{x}^{\diamondsuit} = \nabla \boldsymbol{\phi}^*(\boldsymbol{y}^{\diamondsuit}), \tag{s.11c}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit} = \nabla \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{\nu}^{\diamondsuit})。 \tag{s.11d}$$

由 $\boldsymbol{y}^{\diamondsuit} = -G(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}) + \nabla \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit})$ 可知，(s.11c) 化为

$$\boldsymbol{x}^{\diamondsuit} = \nabla \boldsymbol{\phi}^*(-G(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}, \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}) + \nabla \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit})). \tag{s.12}$$

对于 $i \in \mathcal{I}$，(s.12)等价于

$$x_i = \nabla \phi_i^*(-\sigma_i^T \nabla_{x_i} \Lambda_i\left(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}\right) + \nabla \phi_i(x_i)).$$

此外，回顾

$$\nabla\phi_i^*(y_i)=\operatorname{argmin}_{x_i\in\Omega_i}\left\{-x_i^Ty_i+\phi_i(x_i)\right\},$$

并令 y_i 为 $-\sigma_i^T\nabla_{x_i}\Lambda_i\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)+\nabla\phi_i(x_i)$，即可得到相应的一阶条件，其紧凑形式如下

$$\mathbf{0}_{nN}\in G(\boldsymbol{x}^\diamondsuit,\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)+\mathcal{N}_{\boldsymbol{\Omega}}(\boldsymbol{x}^\diamondsuit). \tag{s.13}$$

类似地，由 (s.11b) 和 (s.11d) 可得

$$\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit=\nabla\boldsymbol{\varphi}^*(\Lambda\left(\boldsymbol{x}^\diamondsuit\right)-\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)+\nabla\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)),$$

由此得到

$$\mathbf{0}_q\in-\Lambda\left(\boldsymbol{x}^\diamondsuit\right)+\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)+\mathcal{N}_{\mathscr{E}^+}(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit). \tag{s.14}$$

因此，结合 (s.13) 和 (s.14)，由引理 S1 可知 $\boldsymbol{z}^\diamondsuit=\operatorname{col}\{\boldsymbol{x}^\diamondsuit,\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\}$ 是VI($\boldsymbol{\Xi},F$)的一个解。此外，根据定理1，若 $\sigma_i^\diamondsuit=\nabla\Psi_i\left(\xi_i\right)\big|_{\xi_i=\Lambda_i\left(x_i^\diamondsuit,\boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit\right)}$ 对 $i\in\mathcal{I}$ 成立，则 VI($\boldsymbol{\Xi},F$) 的解导出博弈 (1) 的一个全局纳什均衡，由此完成证明。□

现在，我们可以证明基于共轭的常微分方程 (13) 的收敛性。为方便起见，在此重述定理 2。

定理 2 若对于 $i\in\mathcal{I}$， $\mathscr{E}_i^+$非空，则常微分方程 (13) 有界且收敛。此外，若收敛点 $(\boldsymbol{y}^\diamondsuit,\boldsymbol{\nu}^\diamondsuit,\boldsymbol{x}^\diamondsuit,\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)$ 满足 $\sigma_i^\diamondsuit=\nabla\Psi_i\left(\xi_i\right)\big|_{\xi_i=\Lambda_i\left(x_i^\diamondsuit,\boldsymbol{x}_{-i}^\diamondsuit\right)}$ 对于 $i\in\mathcal{I}$成立，则 $\boldsymbol{x}^\diamondsuit$ 是 (1) 的全局纳什均衡。

证明。 (i) 我们首先证明，轨迹($\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{\nu}(t)$，$\boldsymbol{\sigma}(t)$) 沿常微分方程 (13) 有界。构造一个李雅普诺夫候选函数如下

$$V_1=\sum_{i=1}^N D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)+D_{\varphi_i^*}(\nu_i,\nu_i^\diamondsuit), \tag{s.15}$$

其中的布雷格曼散度可具体表示为

$$D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)=\phi_i^*(y_i)-\phi_i^*(y_i^\diamondsuit)-\nabla\phi_i^*(y_i^\diamondsuit)^T(y_i-y_i^\diamondsuit),$$

$$D_{\varphi_i^*}(\nu_i,\nu_i^\diamondsuit)=\varphi_i^*(\nu_i)-\varphi_i^*(\nu_i^\diamondsuit)-\nabla\varphi_i^*(\nu_i^\diamondsuit)^T(\nu_i-\nu_i^\diamondsuit).$$

考虑项 $D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)$ 对于 $i\in\mathcal{I}$。由于 $x_i=\nabla\phi_i^*(y_i)$ 且 $x_i^\diamondsuit=\nabla\phi_i^*\left(y_i^\diamondsuit\right)$，由 (11) 中 $\nabla\phi_i^*$ 的表达式可得

$$\phi_i^*(y_i)=x_i^Ty_i-\phi_i(x_i),\quad \phi_i^*(y_i^\diamondsuit)=x_i^{\diamondsuit T}y_i^\diamondsuit-\phi_i(x_i^\diamondsuit). \tag{s.16}$$

因此，由（s.16）可得

$$\begin{aligned}D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)&=\phi_i^*(y_i)-\phi_i^*(y_i^\diamondsuit)-\nabla\phi_i^*(y_i^\diamondsuit)^T(y_i-y_i^\diamondsuit)\\&=\phi_i(x_i^\diamondsuit)-\phi_i(x_i)-(x_i^\diamondsuit-x_i)^Ty_i\\&=\phi_i(x_i^\diamondsuit)-\phi_i(x_i)-(x_i^\diamondsuit-x_i)^T\nabla\phi(x_i)+(x_i^\diamondsuit-x_i)^T\nabla\phi(x_i)-(x_i^\diamondsuit-x_i)^Ty_i.\end{aligned}$$

由于 ϕ_i 在Ω_i上是 μ_x-强凸的，我们还可以进一步推导出

$$D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)\geq\frac{\mu_x}{2}\left\|x_i-x_i^\diamondsuit\right\|^2+(x_i^\diamondsuit-x_i)^T(\nabla\phi(x_i)-y_i),$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^N D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)\geq\frac{\mu_x}{2}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit\right\|^2+\sum_{i=1}^N(x_i^\diamondsuit-x_i)^T\left(\nabla\phi_i\left(x_i\right)-y_i\right). \tag{s.17}$$

事实上，回想一下 $\nabla\phi_i^*(y_i)=\operatorname{argmin}_{x\in\Omega_i}\left\{-x^Ty_i+\phi_i(x)\right\}$。由于 $\nabla\phi_i^*\left(y_i\right)$ 的最优性以及 ϕ_i的凸性，我们有

$$\left(\nabla\phi_i^*(y_i)\right)^T\left(\nabla\phi_i\left(\nabla\phi_i^*\left(y_i\right)\right)-y_i\right)\leq\left(\nabla\phi_i^*(y_i^\diamondsuit)\right)^T\left(\nabla\phi_i\left(\nabla\phi_i^*\left(y_i\right)\right)-y_i\right). \tag{s.18}$$

此外，考虑到 $x_i=\nabla\phi_i^*\left(y_i\right)$ 和再次考虑 $x_i^\diamondsuit=\nabla\phi_i^*\left(y_i^\diamondsuit\right)$，(s.18)表明

$$\begin{aligned}0&\leq\nabla\phi_i^*\left(y_i^\diamondsuit\right)^T\left(\nabla\phi_i\left(\nabla\phi_i^*\left(y_i\right)\right)-y_i\right)-\nabla\phi_i^*\left(y_i\right)^T\left(\nabla\phi_i\left(\nabla\phi_i^*\left(y_i\right)\right)-y_i\right)\\&=\left(x_i^\diamondsuit-x_i\right)^T\left(\nabla\phi_i\left(x_i\right)-y_i\right).\end{aligned} \tag{s.19}$$

因此，(s.17) 变为

$$\sum_{i=1}^N D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)\geq\frac{\mu_x}{2}\left\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit\right\|^2.$$

分析　可以对 (s.15) 中的项 $D_{\varphi_i^*}(\nu_i,\nu_i^\diamondsuit)$ 进行类似分析，这也表明　t

$$\sum_{i=1}^{N} D_{\varphi_i^*}(\nu_i,\nu_i^\diamondsuit) \geq \frac{\mu_\sigma}{2}\left\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right\|^2+\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i^\diamondsuit-\sigma_i)^T\left(\nabla\varphi_i\left(\sigma_i\right)-\nu_i\right).$$

此外，回忆一下 $\nabla\varphi_i^*(\nu_i)=\operatorname{argmin}_{\sigma_i\in\mathscr{E}_i^+}\{-\sigma_i^T\nu_i+\varphi_i(\sigma_i)\}$。根据 φ_i 的凸性以及 $\nabla\varphi_i^*(\nu_i)$ 的最优性，我们得到

$$0\leq(\sigma_i^\diamondsuit-\sigma_i)^T\left(\nabla\varphi_i\left(\sigma_i\right)-\nu_i\right), \tag{s.20}$$

类似地，这会得到

$$\sum_{i=1}^{N} D_{\varphi_i^*}(\nu_i,\nu_i^\diamondsuit) \geq \frac{\mu_\sigma}{2}\left\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right\|^2.$$

因此，我们得到 (s.15) 的下界:

$$V_1\geq\mu(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit\|^2+\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\|^2)\geq 0,$$

其中 $\mu=\min\{\mu_x/2,\mu_\sigma/2\}$。这意味着 V_1 是半正定的，并且 $V_1=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^\diamondsuit$ 和 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit$ 时成立。此外，V_1 在 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 上径向无界。

接下来，我们研究沿常微分方程 (13) 的 V_1 导数，即

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_1(t)&=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}D_{\phi_i^*}(y_i,y_i^\diamondsuit)+D_{\varphi_i^*}(\nu_i,\nu_i^\diamondsuit)\\
&=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\phi_i^*(y_i)-\phi_i^*(y_i^\diamondsuit)-(y_i-y_i^\diamondsuit)^T\nabla\phi_i^*\left(y_i^*\right))+\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\varphi_i^*(\nu_i)-\varphi_i^*(\nu_i^\diamondsuit)-(\nu_i-\nu_i^\diamondsuit)^T\nabla\varphi_i^*\left(\nu_i^*\right))\\
&=\sum_{i=1}^{N}(\nabla\phi_i^*(y_i)-\nabla\phi_i^*(y_i^\diamondsuit))^T\dot{y_i}(t)+\sum_{i=1}^{N}(\nabla\varphi_i^*(\nu_i)-\nabla\varphi_i^*(\nu_i^\diamondsuit))^T\dot{\nu_i}(t)\\
&=\sum_{i=1}^{N}(x_i-x_i^\diamondsuit)^T\dot{y_i}(t)+\sum_{i=1}^{N}(\sigma_i-\sigma_i^\diamondsuit))^T\dot{\nu_i}(t).
\end{aligned}$$

这里我们采用 (s.10) 中定义的紧凑形式，以便更简洁地表述下文，并推导出

$$\frac{d}{dt}V_1(t)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T(-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})+\nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})+\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)^T\left(\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)-\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right)+\nabla\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\nu}\right). \tag{s.21}$$

同时，通过重新排列 (s.21) 中的各项，我们得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1&=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})-\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)^T\left(-\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\right)+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T(\nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})+\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)^T\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\nu}\right)\\
&=-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^TF(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T(\nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)^T\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\nu}\right),
\end{aligned} \tag{s.22}$$

其中 $\boldsymbol{z}=\operatorname{col}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma}\}$ 和 $F(\boldsymbol{z})=\operatorname{col}\{G(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\sigma})\ -\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right)\}$ 在 (s.6) 中定义。注意，(s.19) 和 (s.20) 实际上表明

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T(\nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})\leq 0,\quad(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)^T\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\nu}\right)\leq 0. \tag{s.23}$$

由于 $\boldsymbol{z}^\diamondsuit$ 是 变分不等式($\boldsymbol{\Xi}$，F) 的一个解，我们得出

$$\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit\right)^TF(\boldsymbol{z}^\diamondsuit)\geq 0. \tag{s.24}$$

因此，(s.22) 进一步给出了如下缩放关系

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1&=-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^TF(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T(\nabla\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)^T\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\nu}\right)\\
&\leq-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^TF(\boldsymbol{z})\\
&=-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^T(F(\boldsymbol{z})-F(\boldsymbol{z}^\diamondsuit))-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^TF(\boldsymbol{z}^\diamondsuit)\\
&\leq-(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^T(F(\boldsymbol{z})-F(\boldsymbol{z}^\diamondsuit)),
\end{aligned} \tag{s.25}$$

其中，第一个不等式由（s.23）得出，第二个不等式由（s.24）得出。现在，我们详细讨论这一项$(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^T(F(\boldsymbol{z})-F(\boldsymbol{z}^\diamondsuit))$。

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^\diamondsuit)^T(F(\boldsymbol{z})-F(\boldsymbol{z}^\diamondsuit))\\
&=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^\diamondsuit,\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit))+\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)^T\left(-\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)+\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right)-(-\Lambda(\boldsymbol{x}^\diamondsuit)+\nabla\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit))\right)\\
&=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^\diamondsuit,\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit))-\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)^T\left(\Lambda(\boldsymbol{x})-\Lambda(\boldsymbol{x}^\diamondsuit)\right)+(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)^T(\nabla\Psi^*(\boldsymbol{\sigma})-\nabla\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)).
\end{aligned}$$

由于　　由于 Ψ_i 关于 $i\in\mathcal{I}$ 的凸性，勒让德共轭 Ψ_i^* 也具有凸性 [68], ，这表明　　es

$$(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit})^T(\nabla\Psi^*(\boldsymbol{\sigma})-\nabla\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}))\geq 0.$$

因此,

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})^T(F(\boldsymbol{z})-F(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}))\\&\geq(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\diamondsuit})^T(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit},\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}))-\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\right)^T(\Lambda(\boldsymbol{x})-\Lambda(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit})).\end{aligned}\tag{s.26}$$

展开式 (s.26),

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\diamondsuit})^T(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit},\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}))-\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\right)^T(\Lambda(\boldsymbol{x})-\Lambda(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}))\\&=\sum_{i=1}^N(x_i-x_i^{\diamondsuit})^T\left(\sum_{k=1}^{q_i}[\sigma_i]_k\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})-\sum_{k=1}^{q_i}[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\right)\\&\quad-\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^{q_i}([\sigma_i]_k-[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k)\left(\Lambda_{i,k}\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)-\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\right).\end{aligned}\tag{s.27}$$

重新整理 (s.27)，可得

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\diamondsuit})^T(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit},\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}))-\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\right)^T(\Lambda(\boldsymbol{x})-\Lambda(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}))\\&=\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^{q_i}\left([\sigma_i]_k(x_i-x_i^{\diamondsuit})^T\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})-[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k(x_i-x_i^{\diamondsuit})^T\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\right)\\&\quad-\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^{q_i}([\sigma_i]_k-[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k)\left(\Lambda_{i,k}\left(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}\right)-\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\right).\end{aligned}\tag{s.28}$$

合并 (s.28) 中的各项，可得

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\diamondsuit})^T(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit},\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}))-\left(\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\right)^T(\Lambda(\boldsymbol{x})-\Lambda(\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}))\\&=\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^{q_i}\Big((x_i-x_i^{\diamondsuit})^T([\sigma_i]_k\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}))+[\sigma_i]_k\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})-[\sigma_i]_k\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})\Big)\\&\quad+\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^{q_i}\Big((x_i^{\diamondsuit}-x_i)^T([\sigma_i^{\diamondsuit}]_k\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}))+[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})-[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\Big).\end{aligned}\tag{s.29}$$

回顾定义 (9)，对于 $i\in\mathcal{I}$,

$$\sigma_i,\sigma_i^{\diamondsuit}\in\mathscr{E}_i^+=\{\sigma_i\in\Theta_i^*:\ \sum_{k=1}^{q_i}[\sigma_i]_k\nabla_{x_i}^2\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})\succeq\kappa_x\boldsymbol{I}_n\}.$$

因此，（s.29）满足

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^{q_i}\Big((x_i-x_i^{\diamondsuit})^T([\sigma_i]_k\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i}))+[\sigma_i]_k\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})-[\sigma_i]_k\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})\Big)\\&\quad+\sum_{i=1}^N\sum_{k=1}^{q_i}\Big((x_i^{\diamondsuit}-x_i)^T([\sigma_i^{\diamondsuit}]_k\nabla_{x_i}\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit}))+[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k\Lambda_{i,k}(x_i,\boldsymbol{x}_{-i})-[\sigma_i^{\diamondsuit}]_k\Lambda_{i,k}(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})\Big)\\&\geq\kappa_x\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}\|^2.\end{aligned}$$

进一步可得

$$(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})^T(F(\boldsymbol{z})-F(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}))\geq\kappa_x\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}\|^2.$$

由此可得

$$\dot{V}_1\leq-\kappa_x\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}\|^2\leq 0.\tag{s.30}$$

由于 V_1 在 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(t)$中径向无界，这意味着 $\boldsymbol{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 的轨迹在基于共轭函数的常微分方程（13）下有界。

其次，我们证明 $\boldsymbol{y}(t)$ 和 $\boldsymbol{\nu}(t)$ 有界。取另一个李雅普诺夫候选函数 $V_2=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}\|^2$, ，它在 $\boldsymbol{y}$中径向无界。沿着（s.10）的轨迹， V_2 的导数满足

$$\dot{V}_2\leq\boldsymbol{y}^T(-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\sigma})+\nabla\Phi(\boldsymbol{x}))-\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

显然,

$$\dot{V}_2\leq-\|\boldsymbol{y}\|^2+p_1\|\boldsymbol{y}\|=-2V_2+p_1\sqrt{2V_2},$$

其中 p_1 为正常数，这是因为 $\boldsymbol{x}$、 $\boldsymbol{\sigma}$ 已被证明是有界的。类似地，取第三个李雅普诺夫候选函数为 $V_3=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\nu}\|^2$, 它在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中是径向无界的。沿着 (s.10)的轨迹， V_3 的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}_3&\leq\boldsymbol{\nu}^T(\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right)-\nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right)+\nabla\varphi(\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\nu})-\|\boldsymbol{\nu}\|^2\\&\leq-\|\boldsymbol{\nu}\|^2+p_2\|\boldsymbol{\nu}\|=-2V_3+p_2\sqrt{2V_3},\end{aligned}$$

其中一个正的系数 常数 p_2。因此，很容易验证 V_2 和 V_3 有界， $\boldsymbol{y}(t)$ 以及 $\boldsymbol{\nu}(t$ 也有界　　).

（ii）现在来考察集合

$$Q \triangleq \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\nu}) : \frac{d}{dt}V_1 = 0\right\},$$

并将集合 I_v 取为其最大不变子集。根据不变性原理 [70, 定理 2。41] 可知，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\nu}) \to I_v$当 $t \to \infty$ 时成立，且 I_v 是一个正不变集。随后，根据 (s.30) 中的推导可得

$$I_v \subseteq \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\nu}) : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\diamondsuit}\right\}.$$

这表明，沿着常微分方程 (13) 的任意轨迹都会使变量 $\boldsymbol{x}$ 收敛，即当 $t \to \infty$ 时， $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$。此外，若对于 $i \in \mathcal{I}$，$\sigma_i^{\diamondsuit} = \nabla\Psi_i(\xi_i)\big|_{\xi_i=\Lambda_i(x_i^{\diamondsuit},\boldsymbol{x}_{-i}^{\diamondsuit})}$，则收敛点 $\boldsymbol{x}^{\diamondsuit}$ 确实是一个全局纳什均衡。至此，证明完成。□

基于定理 2 的证明，我们进一步展示常微分方程 (13) 的收敛速率。为方便起见，我们在下面重述定理3：

定理3 若 $\mathscr{E}_i^+$ 非空，且对于 $i \in \mathcal{I}$， $\Psi_i(\cdot)$ 是 $\frac{1}{\kappa_\sigma}$-光滑的，则 (13) 以指数速率收敛，即

$$\|\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}^{\diamondsuit}\| \leq \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}\|\boldsymbol{z}(0)\|\exp(-\frac{\kappa}{2\tau}t),$$

其中 $\mu =$最小值$\{\mu_x/2, \mu_\sigma/2\}$, $\kappa =$最小值$\{\kappa_\sigma, \kappa_x\}$, $\tau =$最大值$\{L_x/2\mu_x, L_\sigma/2\mu_\sigma\}$。

证明。取与定理 2 中相同的李雅普诺夫函数:

$$V_1 = \sum_{i=1}^{N} D_{\phi_i^*}(y_i, y_i^{\diamondsuit}) + D_{\varphi_i^*}(\nu_i, \nu_i^{\diamondsuit}).$$

回顾定理 2 中的分析，可得

$$V_1 \geq \mu\left(\left\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\diamondsuit}\right\|^2 + \left\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\right\|^2\right) = \mu\left\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^{\diamondsuit}\right\|^2, \tag{s.31}$$

其中 $\mu =$ 最小值$\{\mu_x/2, \mu_\sigma/2\}$。根据标准对偶关系，生成函数 ϕ_i 在Ω_i 上的 μ_x-强凸性意味着其共轭函数的梯度 $\nabla\phi_i^*$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续可微，且具有 $1/\mu_x$-利普希茨连续梯度[71]。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} D_{\phi_i^*}(y_i, y_i^{\diamondsuit}) &= \sum_{i=1}^{N} \phi_i^*(y_i) - \phi_i^*(y_i^{\diamondsuit}) - \nabla\phi_i^*(y_i^{\diamondsuit})^T(y_i - y_i^{\diamondsuit}) \\ &\leq \frac{1}{2\mu_x}\sum_{i=1}^{N}\|y_i - y_i^{\diamondsuit}\|^2.\end{aligned} \tag{s.32}$$

此外，利用对偶关系 $\nabla\phi_i(x_i) = y_i$ 和 $\nabla\phi_i(x_i^{\diamondsuit}) = y_i^{\diamondsuit}$，式 (s.32) 得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} D_{\phi_i^*}(y_i, y_i^{\diamondsuit}) &\leq \frac{1}{2\mu_x}\sum_{i=1}^{N}\|y_i - y_i^{\diamondsuit}\|^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_x}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla\phi_i(x_i) - \nabla\phi_i(x_i^{\diamondsuit})\|^2 \\ &\leq \frac{L_x}{2\mu_x}\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\diamondsuit}\|^2,\end{aligned} \tag{s.33}$$

其中，最后一个不等式源于生成函数 ϕ_i 的 L_x-Lipschitz 连续性。类似地，由于生成函数 φ_i 在 $\mathscr{E}_i^+$ 上具有 μ_σ-强凸性，$\nabla\varphi_i^*$ 是 $1/\mu_\sigma$-Lipschitz 的。结合 $\nabla\varphi_i(\sigma_i) = \nu_i$ 和 $\nabla\varphi_i(\sigma_i^{\diamondsuit}) = \nu_i^{\diamondsuit}$，我们还可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} D_{\varphi_i^*}(\nu_i, \nu_i^{\diamondsuit}) &= \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^*(\nu_i) - \varphi_i^*(\nu_i^{\diamondsuit}) - \nabla\varphi_i^*(\nu_i^{\diamondsuit})^T(\nu_i - \nu_i^{\diamondsuit}) \\ &\leq \frac{1}{2\mu_\sigma}\sum_{i=1}^{N}\|\nu_i - \nu_i^{\diamondsuit}\|^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_\sigma}\sum_{i=1}^{N}\|\nabla\varphi_i(\sigma_i) - \nabla\varphi_i(\sigma_i^{\diamondsuit})\|^2 \\ &\leq \frac{L_\sigma}{2\mu_\sigma}\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\diamondsuit}\|^2,\end{aligned}$$

其中 th 最后一个不等式源于生成函数 φ_i的 L_σ-Lipschitz 连续性。因此 ，

$$V_1 \leq \sum_{i=1}^{N} D_{\phi_i^*}(y_i, y_i^\diamondsuit) + D_{\varphi_i^*}(\nu_i, \nu_i^\diamondsuit) \leq \tau \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2,$$

其中 $\tau = \max\{L_x/2\mu_x, L_\sigma/2\mu_\sigma\}$。此外，按照定理 2 的证明， V_1 的导数满足

$$\dot{V}_1 \leq -(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit)^T (F(\boldsymbol{z}) - F(\boldsymbol{z}^\diamondsuit)).$$

根据 (9) 中集合 $\mathscr{E}_i^+$ 的定义以及 Ψ_i^* 对于 $i \in \mathcal{I}$ 的 κ_σ-强凸性，我们有

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit)^T (F(\boldsymbol{z}) - F(\boldsymbol{z}^\diamondsuit)) \\
&= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)) + \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)^T \left(-\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right) + \nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\right) - \left(-\Lambda\left(\boldsymbol{x}^\diamondsuit\right) + \nabla\Psi^*\left(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)\right)\right) \\
&= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\diamondsuit)^T (\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)) - \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\right)^T \left(\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right) - \Lambda(\boldsymbol{x}^\diamondsuit)\right) + (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)^T (\nabla\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}) - \nabla\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit)) \\
&\geq \kappa_x \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\diamondsuit\|^2 + \kappa_\sigma \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\|^2 \\
&\geq \kappa \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2,
\end{aligned}$$

其中 $\kappa =$ 最小值$\{\kappa_\sigma, \kappa_x\}$。因此,

$$\dot{V}_1 \leq -\kappa \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2. \tag{s.34}$$

由 (s.31) 和 (s.34) 可得

$$\dot{V}_1 \leq -\kappa \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2 \leq -\frac{\kappa}{\tau} V_1,$$

这实际上得出了指数收敛率。换言之,

$$\begin{aligned}
\mu \|\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2 &\leq V_1(\boldsymbol{z}(t)) \\
&\leq V_1(\boldsymbol{z}(0)) \exp(-\frac{\kappa}{\tau} t) \\
&\leq \tau \|\boldsymbol{z}(0)\|^2 \exp(-\frac{\kappa}{\tau} t).
\end{aligned}$$

因此，我们还可以得到

$$\|\boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\| \leq \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \|\boldsymbol{z}(0)\| \exp(-\frac{\kappa}{2\tau} t),$$

这意味着这一结论成立。 □

S.6 布雷格曼散度与一些不等式

在分析了常微分方程（13）之后，本节将转而研究由常微分方程（13）导出的离散算法1。此外，我们还提供了一些后续内容所需的辅助结果。

首先，与生成函数相关的布雷格曼散度 h： $\Xi \to \mathbb{R}$ 定义为

$$D_h(z', z) = h(z') - h(z) - (z' - z)^T \nabla h(z), \ \forall z, z' \in \Xi.$$

接下来，我们给出布雷格曼散度的一些基本界。首先，这些界的基本要素是对（欧几里得）余弦定理的一种推广，在文献中称为“三点恒等式” [69]:

引理 ***S2***。设连续 可微生成函数 h 在集合 Ξ上是 ω-强凸的。对于 z， z'， z^+ 属于 Ξ，有成立

$$D_h(z', z^+) + D_h(z^+, z) = D_h(z', z) + \langle z' - z^+, \nabla h(z) - \nabla h(z^+) \rangle. \tag{s.35}$$

证明。根据布雷格曼散度的定义可得

$$\begin{aligned}
D_h(z', z^+) &= h(z') - h\left(z^+\right) - \left(z' - z^+\right)^T \nabla h(z^+), \\
D_h(z^+, z) &= h(z^+) - h(z) - \left(z^+ - z\right)^T \nabla h(z), \\
D_h(z', z) &= h(z') - h\left(z\right) - \left(z' - z\right)^T \nabla h(z).
\end{aligned}$$

因此，将前两个等式相加，再减去最后一个等式，即可证明此引理。 □

其次 利用上述恒等式，我们得到如下 Bregman 散度的上界 e.

引理 ***S3***。设连续可微的 生成函数 h 在集合 Ξ上是 ω-强凸的。对于 z， z' 属于 Ξ，且 $\mathrm{d}z^+ = \Pi_\Xi^h(g) = \operatorname{argmin}_{z \in \Xi}\{z^T g + h(z)\}$，有如下结论

$$D_h(z', z^+) \leq D_h(z', z) - D_h(z^+, z) + (g - \nabla h(z))^T (z^+ - z'). \tag{s.36}$$

证明。根据三点恒等式（s.35），我们得到

$$D_h(z',z^+)+D_h(z^+,z)=D_h(z',z)+(z^+-z')^T(\nabla h(z^+)-\nabla h(z)).$$

重新整理这些项可得

$$D_h(z',z^+)=D_h(z',z)-D_h(z^+,z)+(z^+-z')^T(\nabla h(z^+)-\nabla h(z)). \tag{s.37}$$

此外，由于 $z^+=$ $\Pi_{\Xi}^{h}(g)=\operatorname{argmin}_{z\in\Xi}\{-z^Tg+h(z)\}$，由 z^+ 的最优性以及凸性，我们得到
y of h 因此

$$(-g+\nabla h(z^+))^Tz^+\le(-g+\nabla h(z^+))^Tz',$$

这意味着

$$(z^+-z')^T\nabla h(z^+)\le(z^+-z')^Tg. \tag{s.38}$$

因此，将 (s.38) 代入 (s.37) 即可得到 (s.36)。 □

在本节结束之前，我们先介绍以下两个经典不等式。

***L*引理 *S4*（*Fenchel*不等式）**。设 f 是定义在集合 C 上的连续函数。那么，在对偶空间 C^* 中， f^* 的 Fenchel共轭为 $f^*(b)=\sup_{a\in C}\{a^Tb-f(a)\}$，由此得到以下不等式

$$a^Tb\le f(a)+f^*(b).$$

引理 ***S5*（*Jessen*不等式）**。设 f 是凸集 U 上的凸函数，则

$$f(\sum_{l=1}^{k}\gamma_lx_l)\le\sum_{l=1}^{k}\gamma_lf(x_l),$$

其中 $x_1,\ \cdots,\ x_k\in U$ 和 $\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_k>0$，且 $\gamma_1+\cdots+\gamma_k=1$。

S.7 定理4的证明

借助上述基底，我们展示算法1在一类 N 参与者广义单调博弈中的收敛性分析。为方便起见，下面重述定理4:

定理4 若 $\mathscr{E}_i^+$非空，且 $\Pi_{\Theta_i}^{\Psi_i}(\cdot)$ 是 κ_σ-强单调的，则算法1以速率 $\mathcal{O}(1/k)$ 收敛，步长为 $\alpha_k=\ ^{\kappa^{\ 2}}{}_{(k+1)}$，即

$$\|\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{x}^\diamond\|^2+\|\boldsymbol{\sigma}^k-\boldsymbol{\sigma}^\diamond\|^2\le\frac{1}{k+1}\frac{M_1}{\mu^2\kappa^2},$$

其中 $\mu=$最小值$\{\frac{\mu_x}{2},\frac{\mu_\sigma}{2}\}$、 $\kappa=$最小值$\{\kappa_\sigma,\kappa_x\}$，且 M_1 是一个正数。

证明。取布雷格曼散度的集合为

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamond,\boldsymbol{z}^{k+1})\triangleq\sum_{i=1}^{N}D_{\phi_i}(x_i^\diamond,x_i^{k+1})+D_{\varphi_i}(\sigma_i^\diamond,\sigma_i^{k+1}), \tag{s.39}$$

其中

$$D_{\phi_i}(x_i^\diamond,x_i^{k+1})=\phi_i(x_i^\diamond)-\phi_i(x_i^{k+1})-\nabla\phi_i(x_i^{k+1})^T(x_i^\diamond-x_i^{k+1}),$$
$$D_{\varphi_i}(\sigma_i^\diamond,\sigma_i^{k+1})=\varphi_i(\sigma_i^\diamond)-\varphi_i(\sigma_i^{k+1})-\nabla\varphi_i(\sigma_i^{k+1})^T(\sigma_i^\diamond-\sigma_i^{k+1}).$$

由于 ϕ_i 是 μ_x-强凸的，且对于 $i\in\mathcal{I}$， φ_i 是 μ_σ-强凸的，因此我们得到

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{z}^\diamond,\boldsymbol{z}^{k+1})&\ge\frac{\mu_x}{2}\sum_{i=1}^{N}\left\|x_i^{k+1}-x_i^\diamond\right\|^2+\frac{\mu_\sigma}{2}\sum_{i=1}^{N}\left\|\sigma_i^{k+1}-\sigma_i^\diamond\right\|^2\\&\ge\mu\|\boldsymbol{z}^{k+1}-\boldsymbol{z}^\diamond\|^2,\end{aligned} \tag{s.40}$$

其中 $\mu=$最小值$\{\mu_x/2,\mu_\sigma/2\}$。接着，考虑 (s.39) 中的项 $D_{\phi_i}(x_i^\diamond,x_i^{k+1})$。利用引理 S2 中的三点恒等式，我们得到

$$D_{\phi_i}(x_i^\diamond,x_i^{k+1})=D_{\phi_i}(x_i^\diamond,x_i^k)-D_{\phi_i}(x_i^{k+1},x_i^k)+(\nabla\phi_i(x_i^{k+1})-\nabla\phi_i(x_i^k))^T(x_i^{k+1}-x_i^\diamond). \tag{s.41}$$

记

$$g_i=\nabla\phi_i(x_i^k)-\alpha_k\sigma_i^{kT}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^k,\boldsymbol{x}_{-i}^k).$$

根据算法1,

$$x_i^{k+1}=\Pi_{\Omega_i}^{\phi_i}(g_i)=\operatorname{argmin}_{x\in\Omega_i}\left\{-x^Tg_i+\phi_i(x)\right\},$$

这意味着

$$\begin{aligned}0 &\leq \left(\nabla\phi_i\left(x_i^{k+1}\right)-g_i\right)^T x_i^{\diamondsuit}-\left(\left(\nabla\phi_i\left(x_i^{k+1}\right)\right)-g_i\right)^T x_i^{k+1}\\ &=\left(\nabla\phi_i\left(x_i^{k+1}\right)-g_i\right)^T(x_i^{\diamondsuit}-x_i^{k+1}).\end{aligned}$$

此外,

$$(\nabla\phi_i(x_i^{k+1})^T(x_i^{k+1}-x_i^{\diamondsuit})\leq(\nabla\phi_i(x_i^k)-\alpha_k\sigma_i^{kT}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^k,\boldsymbol{x}_{-i}^k))^T(x_i^{k+1}-x_i^{\diamondsuit}).$$

于是，(s.41) 变为

$$D_{\phi_i}(x_i^{\diamondsuit},x_i^{k+1})\leq D_{\phi_i}(x_i^{\diamondsuit},x_i^k)-D_{\phi_i}(x_i^{k+1},x_i^k)-\alpha_k(\sigma_i^{kT}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^k,\boldsymbol{x}_{-i}^k))^T(x_i^{k+1}-x_i^{\diamondsuit}). \tag{s.42}$$

同样，对于 (s.39) 中的项 $D_{\varphi_i}(\sigma_i^{\diamondsuit},\sigma_i^{k+1})$，我们得到

$$D_{\varphi_i}(\sigma_i^{\diamondsuit},\sigma_i^{k+1})\leq D_{\varphi_i}(\sigma_i^{\diamondsuit},\sigma_i^k)-D_{\varphi_i}(\sigma_i^{k+1},\sigma_i^k)-\alpha_k(-\Lambda_i\left(x_i^k,\boldsymbol{x}_{-i}^k\right)+\xi_i^k)^T(\sigma_i^{k+1}-\sigma_i^{\diamondsuit}), \tag{s.43}$$

其中 $\xi_i^k=\Pi_{\Theta_i}^{\Psi_i}(\sigma_i^k)$。接下来，结合 (s.42) 和 (s.43) 可得

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^{k+1}) &= \sum_{i=1}^N D_{\phi_i}(x_i^{\diamondsuit},x_i^{k+1})+D_{\varphi_i}(\sigma_i^{\diamondsuit},\sigma_i^{k+1})\\ &\leq \sum_{i=1}^N D_{\phi_i}(x_i^{\diamondsuit},x_i^k)-D_{\phi_i}(x_i^{k+1},x_i^k)-\alpha_k(\sigma_i^{kT}\nabla_{x_i}\Lambda_i(x_i^k,\boldsymbol{x}_{-i}^k))^T(x_i^{k+1}-x_i^{\diamondsuit})\\ &\quad+\sum_{i=1}^N D_{\varphi_i}(\sigma_i^{\diamondsuit},\sigma_i^k)-D_{\varphi_i}(\sigma_i^{k+1},\sigma_i^k)-\alpha_k(-\Lambda_i\left(x_i^k,\boldsymbol{x}_{-i}^k\right)+\xi_i^k)^T(\sigma_i^{k+1}-\sigma_i^{\diamondsuit}),\\ &= \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^{k+1}-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})-\Delta(\boldsymbol{z}^{k+1},\boldsymbol{z}^k).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^{k+1}) &\leq \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^{k+1}-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})-\Delta(\boldsymbol{z}^{k+1},\boldsymbol{z}^k)\\ &= \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1})-\Delta(\boldsymbol{z}^{k+1},\boldsymbol{z}^k)\\ &\leq \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1})-\mu\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}\|^2,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式源于 (s.40) 中的类似性质。在此基础上，进一步运用 Fenchel不等式，并将引理 S4 中的 f 替换为 $\frac{1}{2}\|\cdot\|$，可得

$$\begin{aligned}\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}) &\leq \frac{(2\mu)}{2}\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}\|^2+\frac{(2\mu)^{-1}}{2}\alpha_k^2\|F(\boldsymbol{z}^k)^T\|_*^2\\ &= \mu\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}\|^2+\frac{1}{4\mu}\alpha_k^2\|F(\boldsymbol{z}^k)^T\|_*^2\\ &= \mu\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}\|^2+\frac{1}{4\mu}\alpha_k^2\|F(\boldsymbol{z}^k)^T\|^2,\end{aligned}$$

其中，最后一个等号成立，是因为 ℓ_2 范数的对偶范数本身也是 ℓ_2 范数 .

因此，我们可以进一步缩放，使得

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^{k+1}) &\leq \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1})-\mu\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}\|^2\\ &\leq \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\mu\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}\|^2+\frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)^T\|^2-\mu\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{k+1}\|^2\\ &= \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2\\ &= \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k(F(\boldsymbol{z}^k)-F(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}))^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})-\alpha_k F(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2\\ &\leq \Delta(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit},\boldsymbol{z}^k)-\alpha_k(F(\boldsymbol{z}^k)-F(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}))^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})+\frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2,\end{aligned} \tag{s.44}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为 $\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}$ 是 VI($\boldsymbol{\Xi}$, F) 的解。此外，在假设**1**下，算子 $\Pi_{\Theta_i}^{\Psi_i}(\cdot)$ 具有 κ_σ-强单调性。因此，有以下不等式。

$$(F(\boldsymbol{z}^k)-F(\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}))^T(\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit})\geq\kappa\|\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{z}^{\diamondsuit}\|^2,$$

其中 $\kappa =$ 最小值$\{2\kappa_x, \kappa_\sigma\}$。由此可得

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) \leq \Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \alpha_k\kappa\|\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2 + \frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2.$$

记 $\eta_k = \kappa\alpha_k$ 为 $\eta_0 = 1$。我们可以验证

$$\frac{1-\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}^2} \leq \frac{1}{\eta_k^2}, \quad \forall k \geq 0.$$

那么，将上述结果代入后，

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) \leq \Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \eta_k\|\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2 + \frac{\eta_k^2}{4\kappa^2\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2. \tag{s.45}$$

一方面，回顾布雷格曼散度 [72], 的性质，可得

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}) \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2 \leq \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2, \quad \forall \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}^\diamondsuit \in \boldsymbol{\Xi}.$$

另一方面，根据假设1，由于驻点的函数值有限，因此不失一般性，可认为 $i \in \mathcal{I}$ 对应的集合 $\mathscr{E}_i^+$是有界的。再结合可行集 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 关于 $i \in \mathcal{I}$的紧性，存在有限常数 $M_1 > 0$ ，使得 $\|F(\boldsymbol{z})\|^2 \leq M_1$。据此，我们得到

$$\begin{aligned}\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) &\leq \Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \eta_k\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) + \frac{\eta_k^2}{4\kappa^2\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2 \\ &\leq (1-\eta_k)\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) + \frac{\eta_k^2}{4\kappa^2\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2 \\ &\leq (1-\eta_k)\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) + \frac{\eta_k^2}{4\kappa^2\mu}M_1.\end{aligned} \tag{s.46}$$

将上述关系两边同时乘以 $1/\eta_k^2$，并回顾性质 $\frac{1-\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}^2} \leq \frac{1}{\eta_k^2}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta_k^2}\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) &\leq \frac{1-\eta_k}{\eta_k^2}\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) + \frac{M_1}{4\kappa^2\mu} \\ &\leq \frac{1}{\eta_{k-1}^2}\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) + \frac{M_1}{4\kappa^2\mu}.\end{aligned}$$

因此，对 $k, \cdots, 1$ 在 $\eta_0 = 1$范围内的这些不等式求和，即

$$\frac{1}{\eta_k^2}\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) \leq \Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^1) + k\frac{M_1}{4\kappa^2\mu}.$$

此外，将 $k = 1$ 和 $\eta_0 = 1$ 代入(s.46)，可得 $\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^1) \leq \frac{\eta_k^2 M_1}{4\kappa^2\mu}$。因此，回顾步长设置 $\eta_k = \kappa\alpha_k = 2/(k+1)$ $k \geq 1$，对所有，均有

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) \leq \eta_k^2(k+1)\frac{M_1}{4\kappa^2\mu} = \frac{1}{k+1}\frac{M_1}{\mu\kappa^2}. \tag{s.47}$$

回顾

$$\Delta(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) \geq \mu\|\boldsymbol{z}^{k+1} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit\|^2 = \mu(\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^\diamondsuit\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}^k - \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\|^2).$$

因此，最终可得

$$\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^\diamondsuit\|^2 + \|\boldsymbol{\sigma}^k - \boldsymbol{\sigma}^\diamondsuit\|^2 \leq \frac{1}{k+1}\frac{M_1}{\mu^2\kappa^2},$$

至此，证明完成。 □

S.8 定理5的证明

如 §5中所述，式（15）中的非凸 N参与者势博弈具有式（16）中的统一互补函数，即

$$\Gamma(x_i, \sigma, \boldsymbol{x}_{-i}) = \sigma^T\Lambda(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) - \Psi^*(\sigma).$$

因此，我们可以在算法迭代中利用该统一互补函数的梯度信息，从而降低算法1的计算成本。据此，我们可以将适用于势博弈的算法1改写为如下算法 2。

算法 2

输入： 步长 $\{\alpha_k\}$，在Ω_i 上的适当生成函数 ϕ_i，以及在 $\mathscr{E}^+$ 上的适当生成函数 φ。**初始化：** 设置 $\sigma^0 \in \mathscr{E}^+$，$x_i^0 \in \Omega_i$，$i \in \{1,\ldots,N\}$，

for $k = 1, 2, \cdots$ **do**

计算以下内容的统一共轭 Ψ：$\xi^k = \Pi_{\Theta}^{\Psi}(\sigma^k)$

对于 $i = 1, \cdots$ 更新参与者的决策变量：$x_i^{k+1} = \Pi_{\Omega_i}^{\phi_i}(\nabla\phi_i(x_i^k) - \alpha_k(\Lambda(x_i^k, x_{-i}^k) - \xi^k))$

end for **结束循环**

$\sigma^{k+1} = \Pi_{\mathscr{E}^+}^{\varphi}(\nabla\varphi(\sigma^k) + \alpha_k(\Lambda(x^k) - \xi^k))$

end for

类似地，定义 $\boldsymbol{z} = \mathrm{col}\{\boldsymbol{x}, \sigma\}$，并将式 (16) 的简化伪梯度定义为

$$F(\boldsymbol{z}) \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{col}\left\{\sigma^T \nabla_{x_i}\Lambda\left(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}\right)\right\}_{i=1}^N \\ -\Lambda\left(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}\right) + \nabla\Psi^*\left(\sigma\right) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} G(\boldsymbol{x}, \sigma) \\ -\Lambda\left(\boldsymbol{x}\right) + \nabla\Psi^*\left(\sigma\right) \end{bmatrix}.$$

考虑迭代过程中的加权平均迭代点 k iterates，如下所示

$$\hat{\boldsymbol{x}}^k = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j \boldsymbol{x}^j}{\sum_{j=1}^k \alpha^j}, \quad \hat{\sigma}^k = \frac{\sum_{j=1}^k \alpha_j \sigma^j}{\sum_{j=1}^k \alpha^j}.$$

然后，我们给出算法 2（或势博弈中的算法1）的收敛速率。为方便起见，下面重述定理5：

定理5若 $\mathscr{E}^+$ 非空，且参与者的收益受式 (15) 中的势函数约束，则算法1以速率 $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$ 收敛，步长为 $\alpha_k = \frac{2\mu d}{M_2\sqrt{k}}$，即

$$\Gamma(\hat{\boldsymbol{x}}^k, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \hat{\sigma}^k) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{d}{\mu}}M_2,$$

其中 $\mu = \text{最小值}\{\frac{\mu_x}{2}, \frac{\mu_\sigma}{2}\}$，$d$ 和 M_2 是两个正常数。

证明取另一组布雷格曼散度，如下所示：

$$\widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}) \triangleq D_\varphi(\sigma^\diamondsuit, \sigma) + \sum_{i=1}^N D_{\phi_i}(x_i^\diamondsuit, x_i). \tag{s.48}$$

按照定理4的证明过程，利用三点恒等式和 Fenchel不等式，我们得到如下不等式：

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) &\leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^{k+1} - \boldsymbol{z}^\diamondsuit) - \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^{k+1}, \boldsymbol{z}^k) \\ &\leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamondsuit) + \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^{k+1}) - \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^{k+1}, \boldsymbol{z}^k) \\ &\leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamondsuit) + \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^{k+1}) - \mu\|\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^{k+1}\|^2 \\ &\leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamondsuit) + \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^{k+1}) - \mu\|\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^{k+1}\|^2 \\ &\leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamondsuit) + \frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2. \end{aligned} \tag{s.49}$$

此外，根据式 (9) 中的 $\sigma \in \mathscr{E}^+$，

$$(\boldsymbol{x}^\diamondsuit - \boldsymbol{x}^k)^T G(\boldsymbol{x}^k, \sigma^k) \leq \sigma^{kT}(\Lambda\left(\boldsymbol{x}^\diamondsuit\right) - \Lambda\left(\boldsymbol{x}^k\right)).$$

因此，

$$\begin{aligned} \left\langle F(\boldsymbol{z}^k), \boldsymbol{z}^\diamondsuit - \boldsymbol{z}^k \right\rangle &= (\boldsymbol{x}^\diamondsuit - \boldsymbol{x}^k)^T G(\boldsymbol{x}^k, \sigma^k) + (\sigma^\diamondsuit - \sigma^k)^T(-\Lambda\left(\boldsymbol{x}^k\right) + \nabla\Psi^*\left(\sigma^k\right)) \\ &\leq \sigma^{kT}\Lambda\left(\boldsymbol{x}^\diamondsuit\right) - \Psi^*\left(\sigma^k\right) - (\sigma^{\diamondsuit T}\Lambda\left(\boldsymbol{x}^{kT}\right) - \Psi^*\left(\sigma^\diamondsuit\right)) \\ &= \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \sigma^k) - \Gamma(\boldsymbol{x}^k, \sigma^\diamondsuit). \end{aligned} \tag{s.50}$$

将 (s.50) 代入 (s.49) 并重新整理其中的各项，可得

$$\begin{aligned} \alpha_k(\Gamma(\boldsymbol{x}^k, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \sigma^k)) &\leq \alpha_k F(\boldsymbol{z}^k)^T(\boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{z}^\diamondsuit) \\ &\leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^k) - \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^{k+1}) + \frac{\alpha_k^2}{4\mu}\|F(\boldsymbol{z}^k)\|^2. \end{aligned}$$

同时，根据假设1，由于驻点的取值有限，不失一般性，可将集合 $\mathscr{E}^+$ 视为有界集。结合$\mathbf{\Omega}_i$对 $i \in \mathcal{I}$ 的紧性，存在有限常数 $d > 0$ 和 $M_2 > 0$，使得 $\widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit,\ \boldsymbol{z}^1) \leq d$ 和 $\|F(\boldsymbol{z})\|^2 \leq M_2$。然后，将上述不等式对 $1,\ \cdots,\ k$ 求和，可得

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \left(\Gamma(\boldsymbol{x}^j, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \sigma^j)\right) \leq \widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^1) + \frac{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 M_2^2}{4\mu}. \tag{s.51}$$

为便于直观展示，我们用 $\lambda_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{l=1}^{k} \alpha_l}$ 表示权重。于是，(s.51) 得出

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{\Delta}(\boldsymbol{z}^\diamondsuit, \boldsymbol{z}^1) + (4\mu)^{-1} M_2^2 \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2}{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j} &\geq \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{\sum_{l=1}^{k} \alpha_l} \left(\Gamma(\boldsymbol{x}^j, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \sigma^j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\Gamma(\boldsymbol{x}^j, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \sigma^j)\right) \\
&\geq \Gamma(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{x}^j, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{\sigma}^j) \\
&= \Gamma(\hat{\boldsymbol{x}}^k, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \hat{\sigma}^k),
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由詹森不等式得出。由于步长满足 $\alpha_k = 2\sqrt{\mu d}/M_2\sqrt{k}$，最终可得

$$\Gamma(\hat{\boldsymbol{x}}^k, \sigma^\diamondsuit) - \Gamma(\boldsymbol{x}^\diamondsuit, \hat{\sigma}^k) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{d}{\mu}} M_2,$$

这表明结论成立。 □