arXiv:2301.08016v1 [math.CO] 19 Jan 2023

斐波那契数的加权扩展

Gaurav Bhatnagar、Archna Kumari 和 Michael J. Schlosser

Abstract. 我们为斐波那契数引入任意权重，并推广了十余个斐波那契恒等式。作为一个特例，我们提出一种椭圆扩展，它推广了舒尔的著作中出现的 q-斐波那契多项式。大多数恒等式的证明采用组合方法，扩展了 Benjamin 和 Quinn 给出的证明；在 q 情形下，则扩展了 Garrett 给出的证明。另有一些恒等式通过望远镜求和证明。

1. Introduction

斐波那契数由以下递推关系定义

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

初始值为 $F_0 = 0$ 和 $F_1 = 1$。根据 Singh [21], ，这些数是在古印度文献（公元600—800年）中，为了解释梵语和俗语（两种古印度语言）的诗歌创作规则而得出的。当时知识以口头方式传承；将其编成诗句便于记忆和复述。为了描述上述规则，我们需要以下术语。音拍是音节的计量单位（复数：音拍）。梵语韵律学的基本单位是包含一个音拍的字母（称为短音节）和包含两个音拍的字母（称为长音节）。梵语诗歌中的一种格律（或诗行）允许短音节和长音节按任意顺序排列，但格律必须恰好包含 n 个音拍。所谓斐波那契数，正是在统计这种格律的所有可能形式时产生的。

近些年来，Benjamin和Quinn [1] 以及Benjamin、Quinn和Rouse [2] 以大致相同的方式证明了许多斐波那契恒等式。这些作者统计用正方形和多米诺骨牌铺砌 $1 \times n$ 棋盘的方法。正方形对应一个短音节，多米诺骨牌对应一个长音节。用正方形和多米诺骨牌铺砌一个 n棋盘，对应于由相应字母组成、恰好包含 n 个音拍的格律。

本文旨在通过加权计数（权重任意），以与上述方法大致相同的方式扩展斐波那契数。我们还提出了一种椭圆权重，由此得到斐波那契数的椭圆扩展。这些扩展还包含参数 q （底数）、 p （椭圆模数），以及两个任意参数

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 05A19；次分类号 11B39、11B65、33E05。*Key words and phrases.* 斐波那契数、加权扩展、椭圆扩展。

a 和 b。在特殊情况下，它们可化为 q-斐波那契多项式；舒尔在研究罗杰斯–拉曼努金恒等式的相关工作中曾考察过这些多项式。

我们在椭圆组合学的背景下开展研究。由于 Schlosser、Yoo 等人的努力，这一领域发展迅速 [3, 4, 12, 13,14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]。我们对 Schlosser 和 Yoo 提出的椭圆斐波那契数的定义作了小幅修改，从而得到椭圆扩展 [18]。这一小小的改动使许多著名的斐波那契恒等式得以扩展。本文中的组合证明以 Garrett 未发表的工作为范本 [9]，；而该工作又是 Benjamin 和 Quinn 所作阐述中证明的 q 类比。Cigler 也采用了非常相似的方法 [7]。

利用加权计数，我们扩展了许多著名的斐波那契恒等式。具体而言，我们给出了一个加权推广（并附有组合证明），它是

$$F_{n+i}F_{n+j} - F_nF_{n+i+j} = (-1)^n F_iF_j. \tag{1.1}$$

这是 Everman、Danese 和 Venkannayah 提出的问题 [8]，并见 Vajda [22，第 177 页，公式 (20a)]。它推广了卡西尼（1680年）提出的一些经典斐波那契恒等式：

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1};$$

以及卡塔兰（1879年）提出的恒等式：

$$F_n^2 - F_{n-i}F_{n+i} = (-1)^{n-i}F_i^2.$$

Cigler [7] 研究了我们结果的一个特殊情形。

本文结构如下。第 2 节和第 3 节给出加权斐波那契数的解析定义和组合定义，并介绍所提出的椭圆权重。第 4 节给出若干斐波那契恒等式的加权类比。最后，第 5 节利用 [5, 6] 中给出的望远镜求和方法，得到一些斐波那契恒等式。

2. Weighted Fibonacci numbers: definitions

定义 1（加权斐波那契数的第一种定义）。设 $(w_n^f)_{n\geq 0}$ 为一列称为权重的不定元。我们将加权斐波那契数 f_n 定义为 $f_0 = 0$、$f_1 = 1$，其中 $n \geq 0$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + w_n^f f_n. \tag{2.1}$$

在记号中，我们省略了对权重序列 (w_n^f) 的依赖。为定义椭圆权重，我们需要引入一些记号。

椭圆模数为 p 的修正雅可比 theta 函数定义为

$$\theta(a;p) := \prod_{j=0}^{\infty}(1 - ap^j)(1 - p^{j+1}/a)$$

其中 $a \neq 0$ 且 $|p| < 1$。当椭圆模数 $p = 0$时，修正的 theta 函数$\theta(a;p)$ 化简为 $(1 - a)$。我们采用简写记号

$$\theta(a_1, a_2, \ldots, a_r; p) := \theta(a_1;p)\,\theta(a_2;p)\cdots\theta(a_r;p)\,.$$

修正的 theta 函数的两个重要性质是 [11, 方程 (11.2.42)]

$$\theta(a;p)=\theta(p/a;p)=-a\theta(1/a;p)\,, \tag{2.2a}$$

以及 [23, 第 451 页，例 5]

$$\theta(xy,x/y,uv,u/v;p)-\theta(xv,x/v,uy,u/y;p)=\frac{u}{y}\,\theta(yv,y/v,xu,x/u;p)\,. \tag{2.2b}$$

设 $g(x)$ 为一个椭圆函数，也就是说，它是复变量 x 的双周期亚纯函数。根据 theta 函数理论，不失一般性，我们可以假设

$$g(x)=\frac{\theta(a_1q^x,a_2q^x,\dots,a_rq^x;p)}{\theta(b_1q^x,b_2q^x,\dots,b_rq^x;p)}c,$$

其中 c 为常数，并且满足椭圆平衡条件：

$$a_1a_2\cdots a_r=b_1b_2\cdots b_r,$$

若令 $q=e^{2\pi i\sigma}$、$p=e^{2\pi i\tau}$，其中 σ、τ 为复数，则 $g(x)$ 确实是关于 x 的双周期函数，其周期为 σ^{-1} 和 $\tau\sigma^{-1}$。

这些定义为本文所定义的椭圆权重的形式提供了依据。

定义 2（椭圆斐波那契权重）。对于椭圆模数 p、底数 q、两个独立变量 a 和 b，以及 $n=0,1,2,\dots$，定义权函数

$$w_n^f(a,b;q,p):=\frac{\theta(aq,aq^2,bq^{1-2n},aq/b,a/b;p)}{\theta(aq^{1-n},aq^{2-n},bq,aq^{1+n}/b,aq^n/b;p)}q^n. \tag{2.3}$$

记号。我们用记号 $f_n(a,b;q,p)$ 表示相应的椭圆斐波那契数，其中取 $w_n^f:=w_n^f(a,b;q,p)$。下文中，提及椭圆斐波那契数相关公式时，我们使用记号 $(a,b;q,p)$。其他情况下，所指的是任意（未特化的）权重。

备注。

(1) 表达式 (2.3) 关于变量 $\log_q a$、$\log_q b$ 和 n 是椭圆的。我们也可以用 q^a 替换 a，此时它关于变量 a 是椭圆的。对于变量 b，也有类似的结论。(2) 我们对 Schlosser 和 Yoo 给出的椭圆斐波那契数定义作了修改 [19, 定义 3.6]。他们的 $S_n(a,b;q,p)$ 与我们的定义之间的关系如下

$$S_n(aq^{-n},bq^{-2n};q,p)=f_n(a,b;q,p). \tag{2.4}$$

(3) 在 [18], 中，作者使用权函数定义了椭圆数 $[n]_{a,\ b;q,\ p}$：

$$W_{a,b;q,p}(k)=\frac{\theta(aq^{2k+1},bq,bq^2,aq^{-1}/b,a/b;p)}{\theta(aq,bq^{k+1},bq^{k+2},aq^{k-1}/b,aq^k/b;p)}q^k. \tag{2.5}$$

椭圆数$[n]_{a,\ b;q,\ p}$满足递推关系

$$[n]_{a,b;q,p} + W_{a,b;q,p}(n)[m-n]_{aq^{2n},bq^n;q,p} = [m]_{a,b;q,p} \tag{2.6}$$

并对复数 n 显式定义如下:

$$[n]_{a,b} = \frac{\theta(q^n, aq^n, bq^2, a/b; p)}{\theta(q, aq, bq^{n+1}, aq^{n-1}/b; p)}.$$

注意，椭圆斐波那契数的权函数与式 (2.5) 通过以下关系密切相关:

$$w_n^f(a,b;q,p) = W_{b,a;q,p}(-n).$$

文献中也有斐波那契多项式和 m-斐波那契多项式的若干版本。在 q 情形下，这些多项式起源于舒尔的研究，并出现在例如 Garrett、Ismail 和 Stanton [10] 给出的罗杰斯–拉曼努金恒等式的 m 版本中。这些作者的工作促成了以下定义。

定义 3（加权 m-移位斐波那契数）。设 w_n^f 如定义 1 所述。加权 m-移位斐波那契数定义为 $f_0^{(m)}$ =0、 $f_1^{(m)} = 1$，且对于 $n \geq 0$

$$f_{n+2}^{(m)} = f_{n+1}^{(m)} + w_{n+m}^f f_n^{(m)}. \tag{2.7}$$

记号。我们用 $f_n^{(m)}(a,b;\ q,p)$ 表示相应的m-移位椭圆斐波那契数，其中权序列取式 (2.3) 中给出的序列。

特殊情形。我们列出椭圆权函数的一些特殊情形，它们定义了带有额外参数的斐波那契数扩展。

(1) 当 $p = 0$ 时，我们得到斐波那契数的 $a,b;q$ 类比形式。权函数化简为:

$$w_n^f(a,b;q) := \frac{(1-aq)(1-aq^2)(1-bq^{1-2n})(1-aq/b)(1-a/b)}{(1-aq^{1-n})(1-aq^{2-n})(1-bq)(1-aq^{1+n}/b)(1-aq^n/b)}q^n.$$

(2) 当 $b \to 0$ 或 ∞ 时，我们得到斐波那契数的 $a;q$ 类比形式。权重为

$$w_n^f(a;q) := \frac{(1-aq)(1-aq^2)}{(1-aq^{1-n})(1-aq^{2-n})}q^{-n}. \tag{2.8}$$

(3) 在 $w_n^f(a,b;q)$ 中取 $a \to 0$ 或 ∞，即可得到斐波那契数的 $b;q$ 类比形式。权函数为

$$w_n^f(b;q) := \frac{(1-bq^{1-2n})}{(1-bq)}q^n.$$

（4）最后，当 $b \to 0$ 和 $a \to 0$ 时，我们得到由权函数 $w_n(q) = q^n$ 确定的 q-斐波那契数。

3. Fibonacci numbers from weighted counting

本节将给出加权斐波那契数的另一种组合定义。

考虑一个由方形盒组成的 $1 \times n$ 棋盘（下文称为 n棋盘）。在这个n棋盘上，可以放置多米诺骨牌（1×2 方格）或正方形（1×1 方格）。如果在某个位置放置一块多米诺骨牌，覆盖位置 i和 $i+1$处的盒子，则赋予它权重 w_i^f。（方格瓷砖的权重为1。）给定一个用多米诺骨牌和正方形铺砌的 n棋盘，其铺砌 T的权重定义为

$$W^f(T) := \prod_i w_i^f,$$

其中，乘积遍历所有包含多米诺骨牌的位置（i，$i+1$）。空积定义为1。

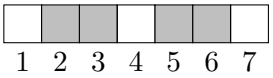
定义4（加权斐波那契数的第二种定义）。设n 为非负整数。令 $f_0 := 0$，并且对于 $n \geq 0$,

$$f_{n+1} := \sum_{T_n} W^f(T_n)$$

其中，求和遍历一个 n棋盘的所有铺砌 T_n。我们称 f_{n+1} 为一个 n棋盘所有铺砌的总权重。

备注。一对铺砌（S，T）的权重是它们各自权重的乘积。这对应于对一对集合进行加权计数。可以将这一对看作铺砌的连接。

例 1。

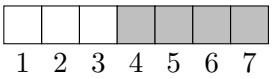


在这个铺砌中，两个灰色方格表示一个多米诺骨牌，一个白色方格表示一个正方形。它的权重为 $w_2^f w_5^f$，因为位置（2，3）处有一个多米诺骨牌，位置（5，6）处也有一个。

很容易看出这两个定义是等价的。令 f_n 如定义4所示。显然，$f_0 = 0$ 和 $f_1 = 1$。令 $n > 1$。现在考虑一个 $(n+1)$-棋盘的任意铺砌。它的最后一个方格要么由一个正方形铺设，要么由一个多米诺骨牌铺设。如果是正方形，则它对 f_{n+2} 的贡献为 $W^f(T_n)$，其中 T_n 是删除最后一个方格后得到的 n-棋盘的一个铺砌。否则，它的贡献为 $w_n^f W^f(T'_{n-1})$，其中 T'_{n-1} 是删除最后两个方格后得到的 $n-1$ 棋盘的一个铺砌。对所有 $(n+1)$-棋盘的铺砌求和，我们看到 f_n 满足递推关系（2.1），并且也满足定义 1。

m 移位加权斐波那契数也可以用类似的方法定义。在 $(m+n)$ 棋盘中，前 m 个位置不允许放置多米诺骨牌；由此得到的生成函数定义为 $f_{n+1}^{(m)}$。可放置多米诺骨牌的位置数仍为 n。显然，$f_{n+1}^{(0)} = f_{n+1}$。

例 2. 考虑前 3 个位置不允许放置多米诺骨牌的 7 格棋盘。以下铺砌是允许的，其权重为 $w_4^f w_6^f$。



考虑 7 格棋盘上所有可能的铺砌，其中第 1、2 和 3 个位置不允许放置多米诺骨牌。我们得到

$$f_5^{(3)} = 1 + w_4^f + w_5^f + w_6^f + w_4^f w_6^f.$$

铺砌的故障点定义为位置 m，使得该铺砌在位置 $(m, m+1)$ 不包含多米诺骨牌。有时，我们需要在故障点处分割铺砌，并分别统计故障点右侧和左侧可能的铺砌数。故障点左侧的铺砌数由加权斐波那契数计数，而右侧的铺砌具有移位后的权重，因此由移位斐波那契数计数。

接下来，我们定义一个类似于二项式系数的表达式。

命题 1. 设 g_k^n 为恰有 k 个多米诺骨牌的 n 个方格的铺砌的加权和。那么 g_k^n 由下式确定：

$$g_k^n = w_{n+k-1}^f g_{k-1}^{n-1} + g_k^{n-1}; \tag{3.1a}$$

其中初始条件如下：

$$g_0^n = 1 \ for \ n \geq 0; \tag{3.1b}$$

$$g_k^n = 0 \ for \ k < 0 \ and \ k > n. \tag{3.1c}$$

注。与前面一样，当权重由 (2.3) 指定时，我们记作 $g_k^n(a, b;\ q, p)$。

证明。初始条件很容易验证。此外，也很容易验证，对于非负整数 n 和 k，这些条件确定了 g_k^n。

恰有 k 块多米诺骨牌和 $n-k$ 个方格的铺砌中，方格总数为 $n+k$。最后一个方格可以由一块方形瓷砖覆盖，也可以在 $(n+k-1, n+k)$ 处放置一块多米诺骨牌。如果最后一块瓷砖是方形瓷砖，那么铺砌的权重和为 g_k^{n-1}。否则，这块多米诺骨牌的权重为 w_{n+k-1}^f，删除这块多米诺骨牌后得到的铺砌的权重为 g_{k-1}^{n-1}。因此，在 $(n+k-1, n+k)$ 处放置一块多米诺骨牌时，总权重为 $w_{n+k-1}^f g_{k-1}^{n-1}$。这证明了 (3.1a)。□

备注。

(1) 注意，对于 $n \geq 1$,

$$g_1^n = \sum_{i=1}^{n} w_i^f$$

and

$$g_n^n = w_1^f w_3^f \cdots w_{2n-1}^f.$$

(2) 在 q 的情形下， g_k^n 可简化为 $q^{k^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$。(3) 如果我们定义

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_w := \frac{g_k^n}{w_1^f w_3^f \cdots w_{2k-1}^f},$$

那么 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_w$ 满足

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_w = \frac{w_{n+k-1}^f}{w_{2k-1}^f} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_w + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_w. \tag{3.2}$$

(4) 此外，在 $a;q$情形下（即当 $p = 0$ 且 $b \to 0$时），权重由（2.8）给出。在这种情况下， $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_w$ 可因式分解并化简为:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{a;q} = \frac{\left(q^{k-1}/a;q\right)_k}{\left(q^{n-1}/a;q\right)_k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{3.3}$$

容易验证，该公式满足 $a;q$ 情形下的三项递推关系（3.2）。 $a;q$ 情形下的因式分解，与 [19]中针对 $S_n\left(a;q\right)$ 得到的因式分解有关。

4. 真正具有权重的证明

现在，我们通过对棋盘铺砌进行计数——或者更准确地说，计算其权重——来证明若干斐波那契恒等式。提醒读者，本文任何定理中， q-斐波那契数对应的结果，都可以通过形式上将 w_k^f 替换为 q^k得到。将所有 w_k^f 替换为 1，即可将任意结果化为斐波那契数的结果。

定理 2。设 n为正整数。则

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^f f_k = f_{n+2} - 1.$$

证明。我们对至少含有一块多米诺骨牌的 $(n+1)$-棋盘的铺砌进行加权。

$(n+1)$-棋盘的铺砌总数为 f_{n+2}。为得到右侧，我们从中去掉全部由方形瓷砖组成的铺砌。

为得到左侧，设棋盘上最后一块多米诺骨牌位于第 k个方格，其中 $1 \le k \le n$。对于每个这样的 k，$(k-1)$-棋盘的铺砌权重为 f_k。由于第 k 个方格是一块多米诺骨牌，这类铺砌的总权重为 $w_k^f f_k$。对所有 k 求和即可得到左侧。□

定理 3. 设 n 和 m 为正整数。则

$$f_{m+n+1} = f_{m+1} f_{n+1}^{(m)} + w_m^f f_m f_n^{(m+1)}.$$

证明。我们用两种方式对 $(m+n)$ 棋盘的铺砌进行加权。

（$m+n$）格板的铺砌总权重为 f_{m+n+1}，这就是等式左侧。

为得到等式右侧，考虑第 m 个位置。要么位置 m 处存在故障点，要么位置 $(m, m+1)$ 处有一块多米诺骨牌。

如果 m 处存在故障点，我们可以在位置 m 后将棋盘分开，从而得到长度分别为 m 和 n 的一对格板。第一块格板的铺砌权重为f_{m+1}，第二块格板的权重为 m-移位斐波那契数$f_{n+1}^{(m)}(a, b; q, p)$。因此，总权重为

$$f_{m+1} f_{n+1}^{(m)}.$$

如果位置 $(m, m+1)$ 处有一块多米诺骨牌，则该多米诺骨牌贡献权重 w_m^f。在位置 $m-1$ 和$m+1$后将棋盘分开后，我们看到剩余 $1 \times m-1$ 和 $1 \times n-1$ 块格板的一对铺砌的权重为 $f_m f_n^{(m+1)}$.。总权重为其乘积，即

$$w_m^f f_m f_n^{(m+1)}.$$

将两式相加即可得到右边。 □

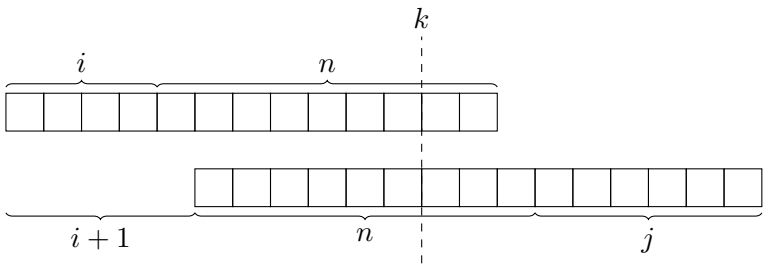
接下来，我们给出引言中提到的式 (1.1) 的一个推广。

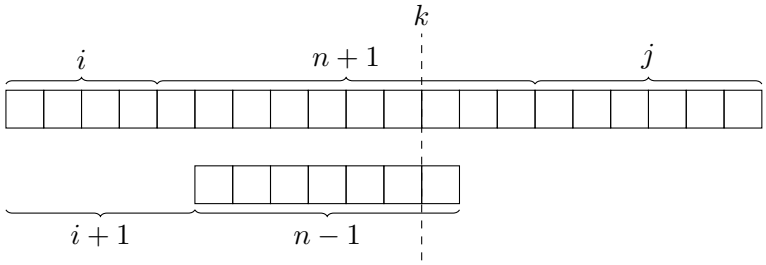
定理 4. 设 n 为正整数。那么

$$f_{n+i+1} f_{n+j+1}^{(i+1)} = f_{n+i+j+2} f_n^{(i+1)} + (-1)^n w_{i+1}^f w_{i+2}^f \cdots w_{i+n}^f f_{i+1} f_{j+1}^{(n+i+1)}.$$

备注。当 $i=0$ 时，在 q 情形下，这个恒等式的一种等价形式已由 Cigler [7, Equation (5.6)] 给出了组合证明。

证明。考虑两个棋盘。一个棋盘的长度为 $i+n$；另一个长度为 $n+j$，置于下方，并向旁边平移$i+1$ 个位置，如图所示。我们来计算这些棋盘的加权铺砌数。





第一个 $i+n$ 棋盘的铺砌数为 f_{n+i+1}。将其视为一个 i 棋盘与一个 n 棋盘拼接而成。第二个棋盘平移了 $i+1$，因此权重为 $f^{(i+1)}_{n+j+1}$。于是，这类棋盘对的铺砌总权重为

$$f_{n+i+1}f^{(i+1)}_{n+j+1}.$$

这给出了等式左边。

对于等式右边，考虑两个棋盘的最后一个共同故障。故障只可能出现在棋盘中属于 n-棋盘的部分。设它位于第 k 个单元格处。在此故障之后切开两种铺砌并交换后半部分，得到一对铺砌：一个是 $i+(n+1)+j$-铺砌，另一个是 $(n-1)+j$-铺砌（平移了 $i+1$）。它们的权重为 $f_{n+i+j+2}f^{(i+1)}_n$。

所有含有故障的此类铺砌对之间存在一一对应关系。如果两种铺砌都没有故障，则会出现一个误差项，下面我们将证明它为

$$(-1)^n w^f_{i+1}w^f_{i+2}\cdots w^f_{i+n}f_{i+1}f^{(n+i+1)}_{j+1}.$$

顶部为 i-棋盘、底部为 j-棋盘的铺砌在故障中不起作用。如果两种铺砌都只由多米诺骨牌组成，那么 n-铺砌就没有共同故障。若 n 为奇数，则 $(n+1)$、$(n-1)$ 都是偶数，因此可以得到一种全由多米诺骨牌组成的铺砌。这贡献了权重 $w^f_{i+1}w^f_{i+2}\cdots w^f_{i+n}$。再乘以 i 个单元格上的铺砌权重（贡献为 f_{i+1}），以及 j 个单元格上的铺砌权重（贡献为：$f^{(n+i+1))}_{j+1}$）。但是，由于等式左边的两个 n-棋盘不可能有全由多米诺骨牌组成的铺砌，因此得到

$$f_{n+i+1}f^{(i+1)}_{n+j+1} = f_{n+i+j+2}f^{(i+1)}_n - w^f_{i+1}w^f_{i+2}\cdots w^f_{i+n}f_{i+1}f^{(n+i+1)}_{j+1}.$$

如果 n 是偶数，那么$(n+1)$和$(n-1)$都是奇数，因此右侧不可能全部由多米诺骨牌铺砌。但在左侧，两个n-棋盘可以全部由多米诺骨牌铺砌，贡献的权重为

$$w^f_{i+1}w^f_{i+2}\cdots w^f_{i+n}f_{i+1}f^{(n+i+1)}_{j+1}.$$

因此，当 n 是偶数时，

$$f_{n+i+1}f^{(i+1)}_{n+j+1} = f_{n+i+j+2}f^{(i+1)}_n + w^f_{i+1}w^f_{i+2}\cdots w^f_{i+n}f_{i+1}f^{(n+i+1)}_{j+1}.$$

至此，证明完成。 □

定理5. 设 n为正整数。则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_1^f w_3^f \dots w_{2n-1}^f}{w_1^f w_3^f \dots w_{2k-1}^f} f_{2k} = f_{2n+1} - w_1^f w_3^f \dots w_{2n-1}^f.$$

证明。我们计算至少包含一个方格的 $2n$ 棋盘的铺砌权重。

a $2n$ 棋盘的铺砌权重为 f_{2n+1}。没有方格的 $2n$ 棋盘的铺砌由全是多米诺骨牌的铺砌构成，其权重为 $w_1^f w_3^f \dots w_{2n-1}^f$。将其减去后，便得到右边。

为得到左边，考虑 a $2n$ 棋盘铺砌中的最后一个方格。假设它位于 $0 \le i \le 2n$ 的第 i 个方格处。由于这是最后一个方格，此后的所有方格都是多米诺骨牌。这意味着 i 必须是偶数，设 i 为 $2k$。这个方格左侧的 ($2k-1$) 棋盘铺砌权重为 f_{2k}。第 i 个方格右侧的多米诺骨牌贡献

$$w_{2k+1}^f w_{2k+3}^f \dots w_{2n-1}^f = \frac{w_1^f w_3^f \dots w_{2n-1}^f}{w_1^f w_3^f \dots w_{2k-1}^f}.$$

对 i 求和，得到等式左边。 □

定理6. 设 n 为正整数。则

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{w_2^f w_4^f \dots w_{2n}^f}{w_2^f w_4^f \dots w_{2k}^f} f_{2k+1} = f_{2n+2}.$$

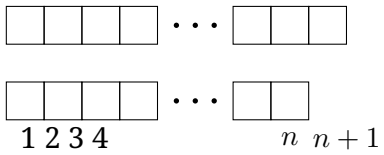
证明。我们对一个 $(2n+1)$-棋盘的铺砌赋予权重。细节与定理5的证明类似，故略去。□

定理7. 设 n 为正整数。则

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{w_1^f w_2^f \dots w_n^f}{w_1^f w_2^f \dots w_k^f} f_{k+1}^2 = f_{n+1} f_{n+2}.$$

证明。我们对由一个 n-棋盘和一个 $(n+1)$-棋盘组成的一对格板的铺砌赋予权重。

等式右边是这一对格板的铺砌的总权重。



对于左侧，如图所示，将（$n+1$）棋盘直接放在 n 棋盘上方。考虑最后一个共同故障的位置。假设最后一个故障位于第 k 个方格，其中 $1 \le k \le n$。那么，为避免第k个方格之后出现故障，除在长度为奇数的那一行中的 $k+1$ 方格上放置一个单个方格外，只能放置多米诺骨牌。两个棋盘中从单元格 1 到 k 的权重为 f_{k+1}^2。第 k 个单元格之后的多米诺骨牌贡献

$$(w_{k+1}^f w_{k+3}^f \dots w_{n-1}^f)(w_{k+2}^f w_{k+4}^f \dots w_n^f) = w_{k+1}^f w_{k+2}^f \dots w_{n-1}^f w_n^f,$$

其值为

$$\frac{w_1^f w_2^f \dots w_n^f}{w_1^f w_2^f \dots w_k^f}.$$

现在对 k 求和即可得到结果。 □

定理 8. 设 n 是一个正整数。那么

$$\sum_{k=0}^{n} g_{n-k}^{n} f_k^{(2n-k)} = f_{2n}.$$

证明。对一个 $(2n-1)$-棋盘的铺砌赋予权重。

右侧给出总权重 f_{2n}。

对于左侧，考虑前 n 个方格中出现的正方形数量 k 。（其中必定有一个正方形。若只有多米诺骨牌，那么棋盘的长度就会是偶数。）因此，前 n 个方格由 k 个正方形和 $(n-k)$ 个多米诺骨牌组成，其权重为 g_{n-k}^{n}。剩余棋盘的长度为 $k-1$。其权重由移位加权斐波那契数 $f_k^{(2n-k)}$ 给出。

对 k 求和即可得到所需结果。 □

定理 9. 设 n为非负整数。则

$$\sum_{k=0}^{n} g_{n-k}^{n} f_{k+1}^{(2n-k)} = f_{2n+1}.$$

证明。证明与定理 8 的证明类似，故略去。 □

5. Fibonacci identities from telescoping

许多斐波那契恒等式可以通过望远镜求和证明。本节中，我们运用 [5, 6] 中的技巧，得到另外两个加权斐波那契恒等式。

我们使用望远镜引理 [5, 式 (2.2)], 的另一种形式：

$$\sum_{k=1}^{n} t_k \frac{u_1 u_2 \cdots u_{k-1}}{v_1 v_2 \cdots v_k} = \frac{u_1 u_2 \cdots u_n}{v_1 v_2 \cdots v_n} - 1, \tag{5.1}$$

其中 $t_k = u_k - v_k$.

定义 1 的形式使得式 (5.1) 适用于加权斐波那契数。这也是采用定义 1，而非早期加权斐波那契数定义的原因之一。

定理10。设 n 为一个正整数。

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{f_{k+2}}{w_1^f w_2^f \dots w_k^f} = (-1)^n \frac{f_{n+1}}{w_1^f w_2^f \dots w_n^f} - 1. \tag{5.2a}$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_{k-1}^f w_k^f \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1+w_j^f} f_{k-1} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1+w_j^f} f_{n+2}. \tag{5.2b}$$

注。我们可以对 [5, 定理 2.6] 取特殊情形，从而得到六个恒等式。其中四个已在第4节中讨论。为方便起见，我们直接使用（5.1）来得到这些恒等式，而不引用先前的结果。

证明。为证明 (5.2a)，取

$$u_k = f_{k+1} \quad \text{and } v_k = -w_k^f f_k$$

代入 (5.1)。因此 $u_{k-1}/v_k = -1/w_k^f$，且

$$t_k = u_k - v_k = f_{k+2}.$$

对于 (5.2b)，取

$$u_k = f_{k+2} \quad \text{and } v_k = (1 + w_k^f) f_{k+1}.$$

因此 $u_{k-1}/v_k = 1/(1 + w_k^f)$，且

$$t_k = u_k - v_k = -w_k^f w_{k-1}^f f_{k-1}.$$

代入 (5.1)，即可得到所需结果。 □

最后，我们给出 (5.1) 的另一个应用，它由定理 3 得出。

定理 11. 设 r 和 s 为非负整数， n 为正整数。则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{w_{r+1}^f w_{r+2}^f \cdots w_{r+k}^f} \frac{f_{r+s+2k+1}}{f_{r+1} f_{s+1}^{(r)}} \frac{f_{s+1}^{(r)} \cdots f_{s+k}^{(r+k-1)}}{f_{s+1}^{(r+2)} \cdots f_{s+k}^{(r+k+1)}}$$
$$= \frac{(-1)^n}{w_{r+1}^f w_{r+2}^f \cdots w_{r+n}^f} \frac{f_{r+n+1}}{f_{r+1}} \frac{f_{s+2}^{(r+1)} \cdots f_{s+n+1}^{(r+n)}}{f_{s+1}^{(r+2)} \cdots f_{s+n}^{(r+n+1)}} - 1. \quad (5.3)$$

证明。取

$$u_k = f_{r+k+1} f_{s+k+1}^{(r+k)} \quad \text{and} \quad v_k = -w_{r+k}^f f_{r+k} f_{s+k}^{(r+k+1)}.$$

Thus

$$\frac{u_{k-1}}{v_k} = \frac{-f_{s+k}^{(r+k-1)}}{w_{r+k}^f f_{s+k}^{(r+k+1)}},$$

and

$$t_k = u_k - v_k = f_{r+s+2k+1}$$

根据定理 3。代入 (5.1) 即可证明所需结果。 □

我们认为，即使在 q 情形下，这个恒等式也是新的。我们指出，定理 4 通过望远镜求和还能得到另一个恒等式。最后，我们提到，改变上述 u_k、 v_k 和 t_k 的角色，还可以得到更多恒等式。

Acknowledgements

Michael Schlosser 的研究部分得到了奥地利科学基金（FWF）项目 P 32305 的资助。

References

[1] A. T. Benjamin 和 J. J. Quinn。《 *Proofs that really count* 27 *The Dolciani*》，第 [1] 卷。*Mathematical Expositions* 美国数学协会，华盛顿特区，2003 年。组合证明的艺术。[2] A. T. Benjamin、J. J. Quinn 和 J. A. Rouse。斐波那契二项式恒等式。载于 *Applications of Fibonacci numbers. Vol. 9* 19 24 2004 ，第 – 页。

Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，。[3] N. Bergeron、C. Ceballos 和 J. K¨ustner。斐波那契二项式数的椭圆类比与 q 类比。 *Sém. Lothar. Combin.*，84B：第 63 号文章，12，2020 年。[4] N. Bergeron、C. Ceballos 和 J. K¨ustner。斐波那契二项式数的椭圆类比与 q 类比。 *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*，16 076，16，2020 年：论文编号 *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*。[5] G. Bhatnagar。赞颂欧拉的一个初等恒等式。 *Electron. J. Combin.*，18 2 2011（）：论文 13，44 页，。[6] G. Bhatnagar。斐波那契-卢卡斯恒等式的类比。 *Fibonacci Quart.*，54(2)：166–171，2016 年。[7] J. Cigler。摩斯电码序列的一些代数方面。 *Discrete Math. Theor.* , *Comput. Sci.* 6 1 55 68, 2003 （）：–。[8] D. Everman、A. E. Danese 和 K. Venkannayah。问题 E 1396 *Amer. Math.* 。 ，：–。[9] *Monthly* 67 81 82, 1960 K. C. Garrett。加权铺砌与 q-斐波那契数，2004 年。预印本。[10] K. C. Garrett、M. E. H. Ismail 和 D. Stanton。罗杰斯-拉马努金恒等式的变体。 *Adv. in Appl. Math.*，23(3)：274–299，1999 年。[11] G. Gasper 和 M. Rahman。《 *Basic Hypergeometric Series* 96 *Encyclopedia*》，第 [11] 卷。*of Mathematics and its Applications* 剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2004 年。Richard Askey 作序。[12] M. J. Schlosser。不相交格路的椭圆计数。 *J. Combin.* , *Theory Ser. A* 114 3 505 521, 2007 （）：–。[13] M. J. Schlosser。二项式定理的非交换加权推广。 *Sém. Lothar. Combin.*，81：第 B81j 号文章，24，2020 年。[14] M. J. Schlosser 和 M. Yoo。涉及非交换变量的一些组合恒等式。载于 *Proceedings of FPSAC 2015*，Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.，第 961–972 页。Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci.，南锡，2015 年。[15] M. J. Schlosser 和 M. Yoo。增广车图板一般乘积公式的椭圆扩展。 *European J. Combin.*，58：247–266，2016 年。[16] M. J. Schlosser 和 M. Yoo。椭圆车数与列数。载于 *28th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2016)*，Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.，BC，第 1087–1098 页。Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci.，南锡，2016 年。[17] M. J. Schlosser 和 M. Yoo。匹配的 α 参数模型与车模型的椭圆扩展。 *Adv. in Appl. Math.*，84：8–33，2017 年。[18] M. J. Schlosser 和 M. Yoo。椭圆车数与列数。 *Electron. J. Combin.*，24 1 1（）：论文编号 *Electron. J. Combin.*.31，47，2017 年。[19] M. J. Schlosser 和 M. Yoo。权依赖交换关系与组合恒等式。 *Discrete Math.*，341(8)：2308–2325，2018 年。[20] M. J. Schlosser 和 M. Yoo。动力卢卡斯数列的椭圆解。 *Entropy*，23 2（）：论文编号 183，14，2021 年。[21] P. Singh。古代与中世纪印度所谓的斐波那契数。 *Historia Math.* 12 3 229 244, 1985 , （）：–。

[22] S. Vajda。《 *Fibonacci & Lucas numbers*》， *and the golden section*。Ellis Horwood 数学及其应用丛书。Ellis Horwood Ltd.，奇切斯特；Halsted Press [John Wiley & Sons, Inc.], 纽约，1989 年。理论与应用，第 XII 章由 B. W. Conolly 撰写。

[23] E. T. Whittaker 和 G. N.Watson。 *A Course of Modern Analysis*。剑桥数学文库。剑桥大学出版社，剑桥，1996 年。无穷过程与解析函数一般理论导论；并论述主要的超越函数。第四版（1927 年）重印本。

Ashoka University, Sonipat, Haryana 131029, India
Email address: bhatnagarg@gmail.com

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Delhi 110067, India.
Email address: arcyadav856@gmail.com

Fakultät für Mathematik, Universität Wien, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Vienna, Austria*Email address*: michael.schlosser@univie.ac.at