arXiv:2301.08017v1 [math.AP] 19 Jan 2023

具有拓扑约束的平面集合的分数阶谱几何最优下界

FRANCESCA BIANCHI 和 LORENZO BRASCO

Abstract. 我们证明了平面开集上阶数为 s 的分数阶狄利克雷-拉普拉斯算子的第一特征值下界，该下界以这些集合的内半径和拓扑为依据。在许多方面，这一结果都是最优的。特别是，当 s 趋于 1 时，我们恢复了 Croke、Osserman 和 Taylor 分别独立证明的一项经典结果。我们还仔细分析了 s 趋于 $1/2$ 时的极限。

Contents

1. 引言 2 1.1. 论文目标 2 1.2. Croke-Osserman-Taylor 不等式 3 1.3. 主要结果 4 1.4. 证明评述 5 1.5. 论文结构 6 2. 预备知识 7 2.1. 符号 7 2.2. 多连通集补集的厚度 8 2.3. 函数空间 11 3. 分数阶 Sobolev 空间理论中的一些事实 11 4. 分数阶容量基础 20 4.1. 一种 Maz'ya 型 Poincar´e 不等式 21 4.2. 平面中的几何下界 23 5. 定理 1.1 的证明 25 6. 定理 1.2 的证明 26 6.1. 第 (1) 点的证明 26 6.2. 第 (2) 点的证明 26 6.3. 第 (3) 点的证明 28 附录 A. 双利普希茨同胚 33 附录 B. 一种特殊的截断函数 35 参考文献 37

Date：2023年1月20日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 47A75、39B72、35R11。
Key words and phrases. 庞加莱不等式、特征值估计、分数阶索博列夫空间、分数阶拉普拉斯算子、内半径、容量。

1. Introduction

1.1. 论文目标。在本文中，我们继续研究以下尖锐分数阶 Poincar´e 常数的几何估计

$$\lambda_1^s(\Omega) := \inf_{u\in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}, \tag{1.1}$$

关于平面开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$。这里参数 $0 < s < 1$ 表示微分的分数阶，而量 $[\cdot]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}$ 定义为

$$[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{for every } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

所有 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数都视为 $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的元素，并将其在 Ω 外延拓为零。(1.1) 中的下确界等价地可在空间 $\widetilde{W}^{s,2}{}_0(\Omega)$ 上取。后者定义为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在分数阶 Sobolev-Slobodecki˘ı 空间中的闭包

$$W^{s,2}(\mathbb{R}^2) = \Big\{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \,:\, [u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} < +\infty\Big\},$$

赋予其自然范数。每当下确界 (1.1) 在这个更大的空间 $\widetilde{W}^{s,2}{}_0(\Omega)$ 上成为最小值时，量 $\lambda_1^s(\Omega)$ 称为阶数为 s 的分数阶狄利克雷-拉普拉斯算子的第一特征值，定义在Ω 上。

常数 $\lambda_1^s(\Omega)$可视为.....的分数阶对应物

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{u\in C_0^\infty(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

它与 Ω 上更为熟悉的狄利克雷拉普拉斯算子的谱底端一致。通过回顾以下内容，可以更精确地说明 λ_1^s 与 λ_1 之间的联系：

$$\lim_{s\nearrow 1}(1-s)\,[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} = C\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{for every } u \in C_0^\infty(\Omega),$$

对于某个通用常数 $C > 0$，参见 [8] 或 [14, 第 3]章。

本文是我们先前工作的延续 [6], ，更多背景材料请参阅该文。尤其是，我们仍着眼于根据 Ω 的内半径求出 $\lambda_1^s(\Omega)$ 的下界，其定义如下：

$$r_\Omega := \sup\Big\{r > 0 \,:\, \exists\, x_0 \in \Omega \text{ such that } B_r(x_0) \subseteq \Omega\Big\},$$

其中， $B_r(x_0)$ 是一个以 x_0 为中心、半径为 r的开圆盘。

在 [6, 定理 1.1], 中，我们推广了 Makai [20]和 Hayman [18] 关于 λ_1 的经典结果（另见 [2, 3] 和 [4]），证明了

$$\lambda_1^s(\Omega) \geq \mathcal{C}_s \left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^{2\,s},$$

对于每个单连通且具有有限内半径的开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 以及每个 $1/2 < s < 1$，结论均成立。这里常数 $\mathcal{C}_s$ 仅取决于 s，并具有如下渐近行为[1]

$$\mathcal{C}_s \sim (2\,s-1) \quad \text{for } s \searrow \frac{1}{2} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{C}_s \sim \frac{1}{1-s} \quad \text{for } s \nearrow 1.$$

此外，我们通过一个反例证明，对于 $0 < s \leq 1/2$ 这样的下界是不可能的（见 [6,定理 1。3]）。

本文通过考虑具有非平凡拓扑的连通平面开集，大幅推广了这一结果。更确切地说，我们将研究以下一类集合：

定义。 记 $(\mathbb{R}^2)^*$ 为 $\mathbb{R}^2$的一点紧化，即通过向 $\mathbb{R}^2$ 添加无穷远点而得到的紧空间。若开连通集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 在 $(\mathbb{R}^2)^*$ 中的补集有 k 个连通分支，则称 Ω 为阶数为 k 的多连通集。当 $k = 1$时，我们就称 Ω 为单连通集。

因此，我们寻求如下形式的估计

$$\lambda_1^s(\Omega) \geq \mathcal{C}_{s,k} \left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^{2\,s},$$

对于平面中阶数为 k 的开多连通集。鉴于上文回顾的单连通情形，我们可以直接将分析限制在仅考虑 $1/2 < s < 1$ 的情形。

1.2. **Croke-Osserman-Taylor 不等式**。 对于经典的 λ_1情形，这类下界最早由 Osserman 给出。值得注意的是， [22, 定理第 546] 页表明

$$\lambda_1(\Omega) \geq \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{k^2}\right\} \left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^2,$$

对每个 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 阶数为 k的开多连通集都成立。Osserman 的证明基于对所谓的*Cheeger* 不等式的改进，并结合邦内森型不等式。

事实证明，Osserman 给出的估计未能体现集合拓扑性质的尖锐依赖关系，也就是说，项 $1/k^2$ 是次优的，因为 k 趋于 ∞。事实上，Taylor 在 [29, 定理 2], 中改进了 Osserman 的结果，证明

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{C}{k} \left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^2,$$

其中某个常数 $C > 0$ 在 [29]中未明确给出。现在，对 k 的依赖是最优的，当k 趋于 ∞时亦然。Taylor 的证明相当精妙，与 Osserman 的证明截然不同：它通过“狄利克雷区域”的容量来估计集合在混合边界条件（即狄利克雷和诺伊曼条件）下的第一特征值。该估计借助热核估计得出。这种方法与 Taylor 关于正势散射长度 的研究有关，正势作为拉普拉斯算子的扰动（另见[27] ，其中将结果推广到分数阶拉普拉斯算子的情形）。我们稍后将回到 Taylor 的证明，因为我们的主要结果将基于相同的论证。

[1]这里，记作“$f \sim g$ for $x \to x_0$”的写法应按以下含义理解

$$0 < \liminf_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty.$$

Croke 对 Taylor 估计作了改进，并给出了明确的下界

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{1}{2\,k}\left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^2,$$

对于 $k \geq 2$ (参见 [12, 定理]) 。Croke 的证明更为初等，且基于对 Osserman 的论证进行改进。

最后，为求完整起见，我们提及 Graversen 和 Rao 的 [17, 定理 3] ，该定理证明了以下下界

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{C_k}{r_\Omega^2}, \qquad \text{where} \qquad C_k = \begin{cases} 1/4, & \text{if } k = 1, \\ \dfrac{A}{k\,\log k}, & \text{if } k \geq 2, \end{cases}$$

对于某个 $A > 0$ （参见 [17, 定理 3]）。与 Croke 和 Taylor 的结果相比，他们的结果略差。我们注意到， [17] 中的证明运用了布朗运动理论中的技巧，这些技巧与 Taylor 的思路相当接近。

1.3. **主要结果**。 我们的目标是将 Croke–Osserman–Taylor 结果推广到分数阶 Sobolev 空间的情形。我们还希望讨论所得估计的最优性，以及它对参数 k 和 s的依赖关系。

定理 1.1 (主定理)。 设 $1/2 < s < 1$，存在一个常数 $\vartheta_s > 0$ ，使得对于每个 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 阶数为 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$的开多连通集，我们都有

$$\lambda_1^s(\Omega) \geq \frac{\vartheta_s}{k^s}\left(\frac{1}{r_\Omega}\right)^{2\,s}. \tag{1.2}$$

此外，常数 ϑ_s 具有以下渐近行为

$$\vartheta_s \sim (2\,s-1) \quad \textit{for } s \searrow \frac{1}{2} \qquad \textit{and} \qquad \vartheta_s \sim \frac{1}{1-s} \quad \textit{for } s \nearrow 1.$$

下一个结果表明，估计式（1.2）是尖锐的，除绝对常数的取值外[2]。

定理 1.2 （最优性）。以下结论成立：

(1) 对于每个$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 开集，我们有

$$\limsup_{s \nearrow 1} (1-s)\,\lambda_1^s(\Omega) \leq \frac{1}{2}\,\lambda_1(\Omega).$$

因此，估计式 （1.2）关于 的依赖是尖锐的。特别地，在 s 趋于1 时对（1.2）取极限，我们得到经典 *Croke-Osserman-Taylor* 不等式，但常数可能较差；

(2) 令 $1/2 < s < 1$，存在一个序列 $\{\Omega_k\}_{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq \mathbb{R}^2$ ，由开集组成，使得Ω_k 是 k 阶多连通的

$$r_{\Omega_k} \leq C \qquad \textit{and} \qquad \limsup_{k \to \infty} k^s\,\lambda_1^s(\Omega_k) < +\infty.$$

因此，该估计(1.2) 关于 $k \to \infty$的依赖是尖锐的；

[2]这段引文出自 Taylor 的论文，参见 [29, 第 452]页。

(3) 对于每个 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，都存在一个阶数为 k 的 $\Theta_k \subseteq \mathbb{R}^2$ 开多连通集，使得

$$r_{\Theta_k} < +\infty \qquad and \qquad \limsup_{s \searrow \frac{1}{2}} \frac{\lambda_1^s(\Theta_k)}{2\,s-1} < +\infty.$$

因此，该估计 (1.2) 在对 $s \searrow 1/2$ 的依赖上是尖锐的。

1.4. **关于证明的评注**。 正如上文所预期的，定理 1.1 的陈述将我们先前的结果 [6, 定理 **1**。1] 作为一个特例包含在内。事实上，后者研究的是单连通集合，即情形 $k = 1$。然而，此处给出的证明完全不同：取自 [6], 的优雅而初等的论证 [18], 关键依赖于单连通性，因而无法用于这里。实际上，现在需要一种复杂得多的论证。我们还指出，要改造 Osserman（以及 Croke）的证明似乎极为困难，因为分数阶情形下仍然缺少真正的 Cheeger 不等式。

证明定理 1.1 的总体策略将与 [29]中的相同。不过，即使我们紧密遵循 Taylor 的思路，仍需作出一些重要修改，也会遇到新的技术难题。此外，我们还尝试简化和／或扩展 [29]中的部分论证。现在，我们概述证明的整体策略，并着重指出为处理分数阶情形所需的主要改动：

(1) 首先，我们用正方形族 $\{\mathcal{Q}_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ 铺满整个平面 $\mathbb{R}^2$。通过观察，对于每个 $u \in C_0^\infty(\Omega)$，我们有

$$[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} \geq \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \iint_{\mathcal{Q}_{i,j}\times\mathcal{Q}_{i,j}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy,$$

我们可以将问题简化为证明正方形上的“区域型”分数阶 Poincar´e 不等式，使得 $\mathcal{Q}_{i,j} \cap \Omega \neq \emptyset$。当然，主要难点在于得到一个具有显式常数的不等式，该常数仅取决于开集 Ω 的几何（即 r_Ω）和拓扑（即 k）；

(2) 这种类型的 Poincar´e 不等式只有在 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 在 $\mathcal{Q}_i$ 的“足够大部分”上为零时才成立，j 对每个与 Ω 相交的正方形 $\mathcal{Q}_i$ 都如此。j 这里的 “ 大 ” 应按 分数阶 *Sobolev* 容量的意义来理解。因此，这一策略的首要重要步骤，是证明正方形上的 *Maz'ya* 型 *Poincar´e* 不等式，适用于在分数阶容量为正的紧子集 Σ 上取零值的函数（见命题4.3）。这种不等式中的常数可以用“狄利克雷区域” Σ的容量给出下界；

(3) 第二步是将前述解析估计转化为几何估计。换言之，我们必须根据“狄利克雷区域” Σ 的某些几何特征，给出其分数阶容量的下界。利用正交投影即可做到这一点，因为正交投影能够实现降维论证。在二维情形下，这使我们能够根据 Σ 到某条直线的正交投影的长度来估计其分数阶容量。只要点在维数1中具有正的分数阶容量，这样的估计就是可能的。当且仅当 $s > 1/2$ 时，情况恰好如此；

(4) 前面的两点说明，为了完成证明，我们需要知道：在每个与 Ω 相交的正方形 $\mathcal{Q}_{i,\,j}$ 中，都存在一个“狄利克雷区域”$\Sigma_{i,\,j}$ 其至少有一个“足够大”的正交投影，即其长度以一致的方式取决于 r_Ω 和 k。

这里我们关键性地依赖 Taylor 提出的一个拓扑论证，并将其称为“Taylor 的肥胖引理”（见引理 2.1）。简而言之，该引理断言，任何具有有限内半径的多连通平面集合 Ω，其补集都是“局部一致胖”的。这意味着，如果我们将 $\mathcal{Q}_{i,\ j}$ 的大小选得足够大（取决于 r_Ω 和 k），那么这个正方形必定包含 Ω 的一部分 $\mathbb{R}^2 \setminus$，其正交投影具有

$$\text{length} \simeq \sqrt{k}\, r_\Omega,$$

以普适的方式，也就是说，无论正方形位于何处。

与 Taylor 的论文不同，我们在此采用变分式的（分数阶）容量定义（例如见 [1, 24, 25, 31]），这种定义似乎更加自然，也更适合本问题。这使我们能够以初等方式证明上文 (2) 点处的 Poincar´e 不等式，避免使用热核估计，也无需像文献 [29] 中那样引用具有混合边界条件的特征值。这两点在分数阶情形下都会带来问题（或至少会使论证变得复杂）。此外，我们指出，我们对 Maz'ya 型 Poincar´e 不等式的证明本质上具有非线性特征。

关于第 (3) 点：针对 [29], ，我们扩充了说明，并力求使几何估计尽可能定量化。此外，分数阶情形还存在一项技术难点：在 Taylor 研究的经典情形中，降维论证的一个关键要素是以下简单的代数事实

$$|\partial_\omega u|^2 \le |\nabla u|^2, \qquad \text{for every } \omega \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

在分数阶情形下，没有与这个简单公式直接对应的表达式。不过，可以给出这一性质的某种分数阶对应物（见命题 3.3），但证明要复杂得多：为了证明这一点，我们发现借助一些 实插值技巧会很有帮助（另见 [9, 附录 B]）。从某种意义上说，这些技巧能够“局部化非局部性”。我们认为这一部分本身就很有意思。

第 (4) 点中的“胖性引理”只是一个拓扑事实，因此可以直接应用于分数阶情形。然而，在 [29] 中，这一点并未明确表述为下文所采用的形式。这里我们也尝试补充一些细节和说明。我们相信，最终的成果有助于更好地理解 Taylor 的证明。

最后，在上述所有估计中，为了得到定理 $s \mapsto \vartheta_s$ 中所述 1.1 的正确渐近行为，需要付出很大努力。尤其是，要得到 $s \searrow 1/2$ 的尖锐渐近行为，需要进行非常细致的分析。因此，要证明定理 Θ_k 1.2 中的集合在 0 处给出尖锐衰减率，需要相当精细（尽管初等）的估计。我们指出，这一部分即使在此前研究过的单连通情形下也是新的，见 [6]。

1.5. **论文结构**。 所有必要的记号均在第2节中确定。我们还在此陈述并证明 Taylor 的肥胖引理。第 3 节介绍了一些关于分数阶 Sobolev 空间的技术性事实，这些事实对我们的主要结果很有用，但在文献中很难找到出处。初读时不感兴趣的读者可以跳过这一部分。随后，我们在第 4 节引入相关的分数阶容量概念，并证明得到分数阶 Croke-Osserman-Taylor 不等式所需的基本构件。第 5 节和 6 节分别给出定理 1.1 和 1.2 的证明。最后，本文以两个附录作结。

致谢。感谢 Eleonora Cinti、Stefano Francaviglia 和 Francesca Prinari 的一些有益讨论。我们还感谢 Rodrigo Ba˜nuelos 指出了参考文献 [27]。本文

的研究结果已在2022年12月于奥伯沃尔法赫数学研究所举办的迷你研讨会“充满谱隙与随机水果的几何童话”期间，以及2023年1月在科涅举行的“科涅偏微分方程：雪中的友好会议”会议期间公布。我们谨向组织者表示感谢，感谢他们的盛情邀请，以及在逗留期间提供的良好工作氛围。

F.B. 是国家高等数学研究所（INdAM）下属国家数学分析、概率论及其应用小组（GNAMPA）的成员。两位作者均获得了费拉拉大学研究基金 FAR 2020 的资助。

2. Preliminaries

2.1. 记号。对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们用整数部分表示

$$\lfloor \alpha \rfloor = \max\Big\{ n \in \mathbb{Z} \,:\, \alpha \geq n \Big\}.$$

我们回顾一下

$$\alpha - 1 \leq \lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha, \qquad \text{for every } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

对于 $r > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^N$，我们将记作

$$B_r(x_0) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, |x - x_0| < r \Big\},$$

and

$$Q_r(x_0) = \prod_{i=1}^{N} (x_0^i - r, x_0^i + r), \qquad \text{where } x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^N).$$

当 c 若enter x_0 与原点重合，我们将分别简单记作 B_r 和 Q_r。我们将表示 为 ω_N 的 N–维勒贝格测度 B_1。

For 为完整起见，我们还回顾点集拓扑中的以下经典定义。

定义。设 $K \subset \mathbb{R}^N$，若 K 是非空紧连通集，则称其为一个连续统。

对于每个 $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$，我们将用以下符号表示

$$\langle \omega \rangle^{\perp} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, \langle x, \omega \rangle = 0 \Big\},$$

与 ω 正交的空间。我们还将定义

$$\begin{array}{rccc} \Pi_\omega & : & \mathbb{R}^N & \to & \langle \omega \rangle^{\perp} \\ & & x & \mapsto & x - \langle x, \omega \rangle\, \omega, \end{array} \tag{2.2}$$

即，这是在 $\langle \omega \rangle^{\perp}$ 上的正交投影。特别地，对于 $N = 2$，若用 $\mathbf{e}_1 = (1,\ 0)$ 和 $\mathbf{e}_2 = (0,\ 1)$ 表示标准基的法向量，则有

$$\Pi_{\mathbf{e}_1}(x_1, x_2) = (0, x_2), \qquad \Pi_{\mathbf{e}_2}(x_1, x_2) = (x_1, 0), \qquad \text{for every } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

对于 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，我们用 $\mathcal{H}^m$ 表示 $m-$ 维豪斯多夫测度。

最后，对于 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ 以及一个具有正测度的可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^N$，我们定义

$$\mathrm{av}(u; E) := \fint_E u \, dx = \frac{1}{|E|} \int_E u \, dx,$$

u 在 E上的积分平均值。

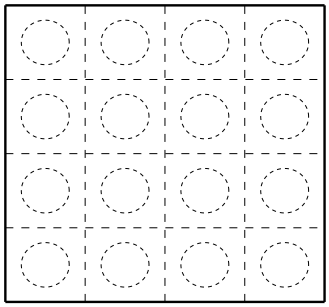

FIGURE 1. 引理证明中圆盘和正方形的构造2.1，对于以下情形 $k=1$， $k=2$ 或 $k=3$ （即 $\delta=2$）。每个圆盘都至少包含一个属于 $\mathbb{R}^2\setminus\Omega$ 的点。所谓可靠的正方形，是指其中这样的点可以通过一条位于 Ω 外部的连续统“连接”到包含该点的“单元”的边界。

2.2. **多连通集补集的肥厚度**。 正如引言中所述，以下几何结果将是我们主要结果的关键组成部分。

引理 2.1 （Taylor 的肥胖引理）。设 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，且 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ 是一个阶数为 k、内半径有限的开多连通集。设 $\mathcal{Q}$ 是一个边长为 $10\,(\lfloor\sqrt{k}\rfloor+1)\,r_\Omega$、边平行于坐标轴的开正方形。则存在一个紧集 $\Sigma\subseteq\mathcal{Q}\setminus\Omega$，使得

$$\max\Big\{\mathcal{H}^1(\Pi_{\mathbf{e}_1}(\Sigma)),\,\mathcal{H}^1(\Pi_{\mathbf{e}_2}(\Sigma))\Big\}\geq\frac{\sqrt{k}}{4}\,r_\Omega. \tag{2.3}$$

证明。为简化记号，令 $\delta=\lfloor\sqrt{k}\rfloor+1$。通过膨胀和平移，不失一般性地假设 $r_\Omega=1$，且

$$\mathcal{Q}=Q_{5\,\delta}(0)=(-5\,\delta,5\,\delta)\times(-5\,\delta,5\,\delta)\,.$$

我们可以假设 $\mathcal{Q}\cap\Omega\neq\emptyset$，否则证明是显然的：只需取 $\Sigma=\mathcal{Q}$即可得到所需结论。

然后我们固定以下 $4\,\delta^2$ 个中心

$$P_{j,m}=\left(-5\,\delta+\frac{5}{2}+5\,j,\,5\,\delta-\frac{5}{2}-5\,m\right),\qquad\text{for } j,m=0,\dots,2\,\delta-1,$$

并相应地取由下式给出的两个正方形和圆盘族

$$B_{\frac{3}{2}}(P_{j,m})\subset Q_{\frac{5}{2}}(P_{j,m}),\qquad\text{for } j,m=0,\dots,2\,\delta-1.$$

我们注意到，根据构造可得

$$\operatorname{dist}\Big(B_{\frac{3}{2}}(P_{j,m}),\partial Q_{\frac{5}{2}}(P_{j,m})\Big)=1,\qquad\text{for every } j,m=0,\dots,2\,\delta-1 \tag{2.4}$$

由于 $r_\Omega=1$，我们的开集 Ω 不可能完全包含半径大于 1 的开圆盘。因此，每个圆盘 $B_{3/2}(P_{j,\,m})$ 都必定与补集 $\mathbb{R}^2\setminus\Omega$ 相交。我们选取一点$X_{j,\,m}\in B_{3/2}(P_{j,\,m})\setminus\Omega$。我们称正方形 $Q_{5/2}(P_{j,\,m})$ 为：

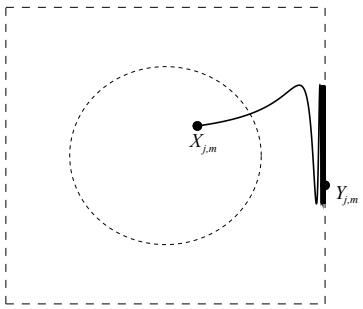

FIGURE 2. 可靠正方形 $Q_{5/2}(P_{j,\,m})$ 的放大图。粗线表示一个连续统，它将点 $X_{j,\,m}$ 与“单元”的边界相连，且位于 Ω 之外。

- 不可靠，如果对于每个满足 $X_{j,\,m} \in \overline{K}$ 的连续统 $K \subset Q_{\frac{5}{2}}(P_{j,\,m}) \setminus \Omega$，我们都有
$$K \cap \partial Q_{\frac{5}{2}}(P_{j,m}) = \emptyset;$$
- 可靠 当且仅当存在一个连续统 $K_{j,\,m} \subset Q_{\frac{5}{2}}(\overline{P_{j,\,m}) \setminus \Omega}$，使得 $X_{j,\,m} \in K_{j,\,m}$ 并且
$$K_{j,m} \cap \partial Q_{\frac{5}{2}}(P_{j,m}) \neq \emptyset.$$

我们注意到，每个不可靠正方形都必须包含 $(\mathbb{R}^2)^* \setminus \Omega$ 的至少一个连通分支。因此，根据阶数为 k 的多连通集的定义，不可靠正方形至多有 k 个。因此，如果我们设

$$\mathcal{N} = \left\{(j,m) \,:\, Q_{\frac{5}{2}}(P_{j,m}) \text{ is reliable}\right\},$$

我们得到[3]

$$\#\mathcal{N} \geq 4\,\delta^2 - k = 4\left(\lfloor\sqrt{k}\rfloor + 1\right)^2 - k \geq 3\left(\lfloor\sqrt{k}\rfloor + 1\right)^2 = 3\,\delta^2.$$

也就是说，我们的正方形 $\mathcal{Q}$ 至少包含 $3\,\delta^2$ 个可靠正方形。我们希望使用这些正方形及其上文定义的连续统 $K_{j,\,m}$。根据构造，我们有

$$K_{j,m} \subset \overline{\mathcal{Q}} \setminus \Omega.$$

我们现在可以构造命题中的紧集 Σ：它由[4]给出

$$\Sigma = \bigcup_{(j,m)\in\mathcal{N}} K_{j,m}.$$

我们需要证明它沿坐标轴的投影满足（2.3）。为此，我们首先注意到 $K_{j,\,m}$ 是一个连通集，同时包含点 $X_{j,\,m} \in B_{3/2}(P_{j,\,m})$ 和点 $Y_{j,\,m} \in \partial Q_{5/2}(P_{j,\,m})$。回顾（2.4），我们得到

$$|X_{j,m} - Y_{j,m}| \geq 1.$$

[3]我们用 # 表示离散集的基数。[4]注意，这个并集不一定是互不相交的。

此外，以下两个量中至少有一个

$$|\Pi_{\mathbf{e}_1}(X_{j,m}) - \Pi_{\mathbf{e}_1}(Y_{j,m})| \qquad \text{or} \qquad |\Pi_{\mathbf{e}_2}(X_{j,m}) - \Pi_{\mathbf{e}_2}(Y_{j,m})|,$$

大于或等于 1（回想一下，所涉及的所有正方形的边都平行于坐标轴）。利用这一事实，再结合两个投影

$$\Pi_{\mathbf{e}_i}(K_{j,m}), \qquad \text{for } i = 1, 2,$$

都与一条同时包含 $\Pi_{\mathbf{e}_i}(X_{j,\,m})$ 和 $\Pi_{\mathbf{e}_i}(Y_{j,\,m})$ 的线段重合，我们最终可以断定，$K_{j,\,m}$ 的两个投影中至少有一个的长度大于或等于 1。为了得出结论，我们还需要处理这些投影中可能存在的重叠。记 J_1，$J_2 \in \mathbb{N}$ 为以下数

$$J_i = \#\Big\{K_{j,m} : \mathcal{H}^1(\Pi_{\mathbf{e}_i}(K_{j,m})) \geq 1\Big\}, \qquad \text{for } i = 1, 2.$$

根据前面的讨论，我们有

$$J_1 + J_2 \geq 3\,\delta^2 \qquad \text{and thus in particular} \qquad \max\{J_1, J_2\} \geq \delta^2.$$

不失一般性，我们可以假设 $J_1 \geq J_2$。这意味着在第二坐标轴上至少有 δ^2 个“良好”投影，即长度至少为 1 的投影。我们需要估算这类投影的数量，并扣除重叠部分：注意，对于每个固定的 $m \in \{0, \dots, 2\,\delta - 1\}$，正方形阵列

$$\overline{Q_{0,m}(P_{0,m})}, \dots, \overline{Q_{2\,\delta-1,m}(P_{2\,\delta-1,m})}$$

它们都具有相同的投影。因此，不同投影的数量至少为

$$\frac{\delta^2}{2\,\delta} = \frac{\delta}{2}.$$

作为一项技术性且令人烦恼的事实，我们指出，这可能不是一个自然数。不过，如果我们设

$$\Lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{for } k \in \{1, 2, 3\}, \\ \dfrac{\lfloor\sqrt{k}\rfloor}{2}, & \text{for } k \geq 4 \text{ such that } \lfloor\sqrt{k}\rfloor \text{ is even}, \\ \dfrac{\lfloor\sqrt{k}\rfloor - 1}{2}, & \text{for } k \geq 4 \text{ such that } \lfloor\sqrt{k}\rfloor \text{ is odd}, \end{cases}$$

我们有

$$\frac{\delta}{2} \geq \Lambda_k.$$

因此，第一坐标轴上至少有 Λ_k 个投影，每个投影的长度至少为 1。由此可得

$$\mathcal{H}^1(\Pi_{\mathbf{e}_1}(\Sigma)) \geq \Lambda_k.$$

最后，通过观察到 $\Lambda_k \geq \sqrt{k}/4$，我们得出了所声称的结论。 □

2.3. **函数空间**。 我们需要借助分数阶 Sobolev 空间理论中的一些定义。关于这些空间的简要介绍以及进一步的参考文献，请参阅 [13, 14] 。

对于可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ，令 $0 < s < 1$ 和 $1 < p < \infty$，我们回顾 Sobolev-Slobodeckij 半范数的定义

$$[u]_{W^{s,p}(E)} := \left(\iint_{E\times E} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+s\,p}}\,dx\,dy \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{for } u \in L^1_{\mathrm{loc}}(E).$$

相应地，我们考虑

$$W^{s,p}(E) = \Big\{ u \in L^p(E) \,:\, [u]_{W^{s,p}(E)} < +\infty \Big\},$$

赋予范数

$$\|u\|_{W^{s,p}(E)} = \|u\|_{L^p(E)} + [u]_{W^{s,p}(E)}, \qquad \text{for every } u \in W^{s,p}(E).$$

有时，我们需要针对 $p = \infty$ 使用这些定义。对于 $0 < s < 1$，我们设

$$W^{s,\infty}(E) = \Big\{ u \in L^\infty(E) \,:\, [u]_{W^{s,\infty}(E)} < +\infty \Big\},$$

其中

$$[u]_{W^{s,\infty}(E)} := \sup_{x,y\in E, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^s}$$

当 $E \subseteq \mathbb{R}^N$ 为开集时，我们还将考虑经典索伯列夫空间

$$W^{1,p}(E) = \Big\{ u \in L^p(E) \,:\, [u]_{W^{1,p}(E)} < +\infty \Big\},$$

其中我们使用符号

$$[u]_{W^{1,p}(E)} := \|\nabla u\|_{L^p(E)}, \qquad \text{for every } u \in W^{1,p}(E).$$

空间 $W^{1,\,p}(E)$ 将赋予范数

$$\|u\|_{W^{1,p}(E)} = \|u\|_{L^p(E)} + [u]_{W^{1,p}(E)}, \qquad \text{for every } u \in W^{1,p}(E).$$

在 $p = \infty$的情况下，这个空间的定义无需进一步精确说明。最后，对于$\backsim 0 < s \leq 1$ 和 $1 < p \leq \infty$，符号 $W^{s,\,p}_{\,0}\,(\Omega)$ 表示$C_0^\infty(\Omega)$在空间$W^{s,\,p}(\mathbb{R}^N)$中的闭包。 $W^{s,\,p}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$表示这样的函数集合：对于每个$R > 0$，这些函数都属于 $W^{s,\,p}(B_R)$。

3. Some facts from the theory of fractional Sobolev spaces

除非另有说明，本节所有结果在任意维数 $N \geq 1$下均成立。

我们从 [6, 引理 2.2]的以下推广开始。重点在于估计的精确形式。

命题 3.1。 令 $r > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^N$，存在一个线性延拓算子

$$\mathcal{E}_r : L^1(B_r(x_0)) \to L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N),$$

具有以下性质：

对于 $0 < s \leq 1$ 和 $1 < p \leq \infty$，它将 $W^{s,\,p}(B_r(x_0))$ 映射为 $W^{s,\,p}_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$。此外，对于每个 $u \in W^{s,\,p}(B_r(x_0))$ 以及每个 $R > r$，我们都有 [5]

$$\Big[\mathcal{E}_r[u]\Big]_{W^{s,p}(B_R(x_0))} \leq 4^{\frac{1}{p}} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{4\,N}{p}} [u]_{W^{s,p}(B_r(x_0))}, \tag{3.1}$$

and

$$\Big\|\mathcal{E}_r[u]\Big\|_{L^p(B_R(x_0))} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2N}{p}} \|u\|_{L^p(B_r(x_0))}. \tag{3.2}$$

证明。我们首先证明尺度为 1 时的结果，即 $r = 1$ 时的结果。然后，我们将通过一个简单的缩放论证说明如何得到一般结果。

情形 $r = 1$。对于 $0 < s < 1$ 和 $p = 2$，这正是 [6, 引理 2。2]我们还注意到，完全相同的证明也适用于 $1 < p \leq \infty$这一情形，因此省略直接的修改。

现在我们讨论 $s = 1$ 和 $1 < p < \infty$ 的情形。取 $u \in W^{1,\,p}(B_1(x_0))$，于是根据 [14,命题 3。1] 对于每个 $0 < s < 1$，同样有 $u \in W^{s,\,p}(B_1(x_0))$。由上一步，我们知道

$$(1-s)^{\frac{1}{p}} \Big[\mathcal{E}_1[u]\Big]_{W^{s,p}(B_R(x_0))} \leq 4^{\frac{1}{p}} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{4\,N}{p}} (1-s)^{\frac{1}{p}} [u]_{W^{s,p}(B_r(x_0))}.$$

利用 [8, 定理 2], , 令 s 趋近于 1，即可得到所需结果，也就是说

$$\Big[\mathcal{E}_1[u]\Big]_{W^{1,p}(B_R(x_0))} \leq 4^{\frac{1}{p}} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{4\,N}{p}} [u]_{W^{1,p}(B_r(x_0))}.$$

最后，令 p 趋于 ∞，即可由展示公式中的最后一个公式得到 $p = \infty$ 的情形。

情形 $r \neq 1$。首先，我们需要引入一个记号。对于每个 $\tau > 0$，我们用下式表示

$$\mathcal{T}_\tau(x) = \tau\,(x - x_0) + x_0, \qquad \text{for every } x \in \mathbb{R}^N.$$

那么，算子 $\mathcal{E}_r$ 可以简单地定义为

$$\mathcal{E}_r[u] := (\mathcal{E}_1[u \circ \mathcal{T}_r]) \circ \mathcal{T}_{\frac{1}{r}}.$$

换言之，给定函数 $u \in L^1(B_r(x_0))$，我们首先将其缩放为定义在 $B_1(x_0)$ 上的函数，然后用 $\mathcal{E}_1$ 对其进行延拓，最后再将这个延拓缩放回来。注意，对于 $x \in B_r(x_0)$，我们有

$$\mathcal{E}_r[u](x) = \mathcal{E}_1[u \circ \mathcal{T}_r]\left(\frac{x - x_0}{r} + x_0\right) = u\left(\mathcal{T}_r\left(\frac{x - x_0}{r} + x_0\right)\right) = u(x).$$

利用所涉及范数的缩放性质，容易看出该算子具有所需的性质。□

结合附录A中的命题3.1 与引理A.1，我们可以为任意 $K \subset \mathbb{R}^N$ 有界开凸集构造一个通用的线性延拓算子。相关常数的控制相当精确，对我们的研究范围很有用。下文中，对于每个 $x_0 \in K$，我们引入以下几何量

$$d_K(x_0) = \min_{x \in \partial K} |x - x_0|, \qquad D_K(x_0) = \max_{x \in \partial K} |x - x_0|.$$

[5] 在 $p = \infty$ 的情形下，我们采用约定 $1/\infty = 0$。

推论 3.2。 设 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ 为一个有界开凸集，且有 $x_0 \in K$，则存在线性延拓算子

$$\mathcal{E}_K : L^1(K) \to L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N),$$

具有以下性质：

对于 $0 < s \le 1$ 和 $1 < p \le \infty$，它将 $W^{s,\,p}(K)$ 映射到 $W^{s,\,p}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$。此外，对于任意 $u \in W^{s,\,p}(K)$ 以及任意 $R > 1$，我们有

$$\Big[\mathcal{E}_K(u)\Big]_{W^{s,p}(K_R(x_0))} \le \big(4 \cdot 6^{3N+sp}\big)^{\frac{1}{p}} R^{\frac{4N}{p}} \left(\frac{D_K(x_0)}{d_K(x_0)}\right)^{\frac{6N}{p}+2s} [u]_{W^{s,p}(K)}, \tag{3.3}$$

and

$$\|\mathcal{E}_K(u)\|_{L^p(K_R(x_0))} \le \big(2 \cdot 6^N\big)^{\frac{1}{p}} R^{\frac{2N}{p}} \left(\frac{D_K(x_0)}{d_K(x_0)}\right)^{\frac{2N}{p}} \|u\|_{L^p(K)}, \tag{3.4}$$

其中

$$K_R(x_0) := R\,(K - x_0) + x_0 = \Big\{R\,(x - x_0) + x_0 \,:\, x \in K\Big\}.$$

证明。 算子 $\mathcal{E}_K$ 的构造如下：记 $\Phi_{K,\,x_0} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 引理 A.1中的双利普希茨同胚，对于每个 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(K)$，定义

$$\mathcal{E}_K[u] := \Big(\mathcal{E}_1[u \circ \Phi^{-1}_{K,x_0}]\Big) \circ \Phi_{K,x_0},$$

其中 $\mathcal{E}_1$ 是命题 3.1中的算子。换言之，我们将 u移植到以 x_0为中心的单位球上，然后借助 $\mathcal{E}_1$ 将该函数延拓到整个 $\mathbb{R}^N$，最后将所得函数与$\Phi_{K,\,x_0}$复合。

根据构造，显然 $\mathcal{E}_K$ 是线性的，并且满足

$$\mathcal{E}_K[u](x) = u(x), \qquad \text{for } x \in K.$$

连续性估计（3.3）和（3.4）现在可由$\mathcal{E}_1$的相应估计推出，利用$\Phi_{K、\,x_0}$ 和Φ^{-1}_{K} 、$_{x_0}$的性质即可，这些性质由引理 A.1给出。具体细节留给读者。 □

下文中，给定一个球 $B_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}^N$、一点 $x \in B_r(x_0)$ 和一个方向 $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$，我们令

$$R_\omega(x) = \sup\Big\{\varrho \in \mathbb{R} \,:\, x + \varrho\,\omega \in B_r(x_0)\Big\},$$

and

$$r_\omega(x) = \inf\Big\{\varrho \in \mathbb{R} \,:\, x + \varrho\,\omega \in B_r(x_0)\Big\},$$

参见图 3。下面的结果本身也很有趣。

命题 3.3 （方向分数阶导数）。 设 $0 < s < 1$ 和 $r > 0$，对每个 $u \in C^1(B_r(x_0))$ 以及每个 $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$，都有

$$\int_{B_r(x_0)} \left(\int_{r_\omega(x)}^{R_\omega(x)} \frac{|u(x) - u(x + \varrho\,\omega)|^2}{|\varrho|^{1+2\,s}}\, d\varrho\right) dx \le \mathcal{A}\,[u]^2_{W^{s,2}(B_r(x_0))}, \tag{3.5}$$

对于某个 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(N) > 0$。

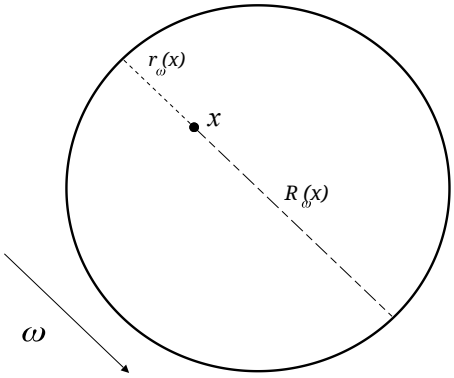

FIGURE 3. 这两个量 $R_\omega(x)$ 和 $r_\omega(x)$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 x_0 与原点重合。我们使用命题 3.1 并利用 3.1中的估计，取 $R = 4\,r$，从而得到

$$\begin{aligned}\iint_{B_r\times B_r}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dx\,dy &\geq \frac{1}{C}\iint_{B_{4r}\times B_{4r}}\frac{|\mathcal{E}_r[u](x)-\mathcal{E}_r[u](y)|^2}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dx\,dy\\ &\geq \frac{1}{C}\int_{B_r}\left(\int_{B_{2r}(x)}\frac{|\mathcal{E}_r[u](x)-\mathcal{E}_r[u](y)|^2}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dy\right)dx\\ &= \frac{1}{C}\iint_{B_r\times B_{2r}}\frac{|\mathcal{E}_r[u](x)-\mathcal{E}_r[u](x+h)|^2}{|h|^{N+2\,s}}\,dx\,dh,\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中， C 仅取决于维数 N。在最后一个等式中，我们使用了变量替换$y = x + h$。

为简化记号，下文将用 $\widetilde{u}$ 代替 $\mathcal{E}_r[u]$。接着，我们引入以下泛函

$$\mathcal{K}(t,u) = \inf_{v\in W^{1,2}(B_r)}\Big[\|u-v\|_{L^2(B_r)} + t\,[\nabla v]_{W^{1,2}(B_r)}\Big],\qquad \text{for } t\in[0,2r].\tag{3.7}$$

我们断言以下两个估计成立：存在两个仅依赖于维数的常数 $A_1, A_2 > 0$ N，使得

$$\int_0^{2r}\left(\frac{\mathcal{K}(t,u)}{t^s}\right)^2\frac{dt}{t} \leq A_1\iint_{B_r\times B_{2r}}\frac{|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(x+h)|^2}{|h|^{N+2\,s}}\,dx\,dh,\tag{3.8}$$

and

$$\int_{B_r}\left(\int_{-2r}^{2r}\frac{|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(x+\varrho\,\omega)|^2}{|\varrho|^{1+2\,s}}\,d\varrho\right)dx \leq A_2\int_0^{2r}\left(\frac{\mathcal{K}(t,u)}{t^s}\right)^2\frac{dt}{t},\qquad \text{for every } \omega\in\mathbb{S}^{N-1}.\tag{3.9}$$

注意到，将（3.6）、（3.8）和（3.9）结合起来，便可得到

$$\iint_{B_r\times B_r}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dx\,dy \geq \frac{1}{C\cdot A_1\cdot A_2}\int_{B_r}\left(\int_{-2r}^{2r}\frac{|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(x+\varrho\,\omega)|^2}{|\varrho|^{1+2\,s}}\,d\varrho\right)dx,$$

因此，一旦注意到 $R_\omega(x) \le 2r$ 以及 $r_\omega(x) \ge -2r$，再结合 $\widetilde{u} = u$ 在 B_r，所需结论（3.5）便随之得出。这样，我们只需证明（3.8）和（3.9）均成立。

为了证明（3.8），我们完全按照 [11, 命题 45], 的证明进行，只做一些必要的修改。首先，定义如下函数很有用：

$$U(h) = \left(\int_{B_r} |\widetilde{u}(x+h) - \widetilde{u}(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad h \in B_{2r}.$$

因此，根据定义，（3.8）右侧可改写为

$$\iint_{B_r \times B_{2r}} \frac{|\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(x+h)|^2}{|h|^{N+2\,s}} \, dx \, dh = \int_{B_{2r}} \frac{U(h)^2}{|h|^{N+2\,s}} \, dh.$$

我们还定义

$$\overline{U}(\varrho) = \fint_{\partial B_\varrho} U \, d\mathcal{H}^{N-1}, \qquad \text{for } 0 < \varrho \le 2r.$$

由詹森不等式可得

$$\begin{aligned} \int_0^{2r} \overline{U}^2 \, \frac{d\varrho}{\varrho^{1+2\,s}} &\le \frac{1}{N\,\omega_N} \int_0^{2r} \left(\int_{\partial B_\varrho} U^2 \, d\mathcal{H}^{N-1} \right) \frac{d\varrho}{\varrho^{N+2\,s}} \\ &= \frac{1}{N\,\omega_N} \int_{B_{2r}} \frac{U(h)^2}{|h|^{N+2\,s}} \, dh = \frac{1}{N\,\omega_N} \iint_{B_r \times B_{2r}} \frac{|\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(x+h)|^2}{|h|^{N+2\,s}} \, dx \, dh. \end{aligned} \tag{3.10}$$

现在我们取紧支撑的 Lipschitz 函数

$$\psi(x) = \frac{N+1}{\omega_N} \, (1 - |x|)_+,$$

其中，$(\cdot)_+$ 表示正部。注意，根据构造，ψ 具有单位 L^1 范数。接着，我们定义缩放函数

$$\psi_t(x) = \frac{1}{t^N} \, \psi\left(\frac{x}{t}\right), \qquad \text{for } 0 < t \le 2r,$$

其支集为 B_t。注意到 $\overline{\psi_t} * \widetilde{u} \in W^{1,2}(B_r)$，根据 $\mathcal{K}(t,u)$的定义，我们有

$$\mathcal{K}(t,u) \le \|u - \psi_t * \widetilde{u}\|_{L^2(B_r)} + t \, [\nabla \psi_t * \widetilde{u}]_{W^{1,2}(B_r)}.$$

我们分别估计右侧的两个范数：对于第一个范数，由闵可夫斯基不等式和富比尼定理可得

$$\begin{aligned} \|u - \psi_t * \widetilde{u}\|_{L^2(B_r)} &= \left\| \int_{B_t} [\widetilde{u}(\cdot) - \widetilde{u}(\cdot - y)] \, \psi_t(y) \, dy \right\|_{L^2(B_r)} \\ &\le \int_{B_t} \left(\int_{B_r} |\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(x-y)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \psi_t(y) \, dy \\ &= \int_{B_t} U(-y) \, \psi_t(y) \, dy \le \frac{N+1}{\omega_N \, t^N} \int_{B_t} U(-y) \, dy \\ &= \frac{N\,(N+1)}{t^N} \int_0^t \overline{U} \, \varrho^{N-1} \, d\varrho \le \frac{N\,(N+1)}{t} \int_0^t \overline{U} \, d\varrho. \end{aligned}$$

在第一个等式中，我们用到了 $\widetilde{u} = u$ 属于 B_r；在最后一个不等式中，我们用到了 $\varrho^{N-1} \leq t^{N-1}$。对于第二个范数，我们首先注意到，由散度定理可得

$$\int_{B_t} \nabla \psi_t(y)\, dy = 0,$$

因此我们可以写成

$$\nabla \psi_t * \widetilde{u} = (\nabla \psi_t) * \widetilde{u} = \int_{B_t} \nabla \psi_t(y)\, [\widetilde{u}(x-y) - \widetilde{u}(x)]\, dy.$$

因此，闵可夫斯基不等式再次给出

$$\begin{aligned}
[\nabla \psi_t * \widetilde{u}]_{W^{1,2}(B_r)} &= \left\| \int_{B_t} \nabla \psi_t(y)\, [\widetilde{u}(\cdot - y) - \widetilde{u}(\cdot)]\, dy \right\|_{L^2(B_r)} \\
&\leq \int_{B_t} \left(\int_{B_r} |\widetilde{u}(x-y) - \widetilde{u}(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} |\nabla \psi_t(y)|\, dy \\
&\leq \frac{N+1}{\omega_N\, t^{N+1}} \int_{B_t} U(-y)\, dy \leq \frac{N\,(N+1)}{t^2} \int_0^t \overline{U}\, d\varrho.
\end{aligned}$$

综上，我们得到

$$\mathcal{K}(t,u) \leq \frac{2\,N\,(N+1)}{t} \int_0^t \overline{U}\, d\varrho, \qquad \text{for every } 0 < t \leq 2\,r. \tag{3.11}$$

将两边平方，除以 $t^{2\,s+1}$ 并积分后，可得上述估计

$$\int_0^{2r} \left(\frac{\mathcal{K}(t,u)}{t^s} \right)^2 \frac{dt}{t} \leq \Big(2\,N\,(N+1) \Big)^2 \int_0^{2r} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \overline{U}\, d\varrho \right)^2 \frac{dt}{t^{1+2\,s}}.$$

现在，如果我们对函数 [28, 定理 1]应用一维 Hardy 不等式（参见 $t \mapsto \int_0^t U\, d\varrho$），便得到

$$\begin{aligned}
\int_0^{2r} \left(\frac{\mathcal{K}(t,u)}{t^s} \right)^2 \frac{dt}{t} &\leq \left(\frac{2\,N\,(N+1)}{s+1} \right)^2 \int_0^{2\,r} \overline{U}^2 \frac{dt}{t^{1+2\,s}} \\
&\leq \frac{4\,N\,(N+1)^2}{\omega_N} \iint_{B_r \times B_{2r}} \frac{|\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(x+h)|^2}{|h|^{N+2\,s}}\, dx\, dh,
\end{aligned}$$

其中在第二个不等式中我们使用了（3.10）。这就证明了（3.8），正如所要求的。

对（3.9）的证明与 [9, 命题 B.1], 类似，但这里也需要进行一些技术性修改。根据 K–泛函的 $0 < |\varrho| \leq r$定义，存在$v_\varrho \in W^{1,2}(B_r)$，使得

$$\|u - v_\varrho\|_{L^2(B_r)} + \frac{|\varrho|}{2} \|\nabla v_\varrho\|_{L^2(B_r)} \leq 2\,\mathcal{K}\left(\frac{|\varrho|}{2}, u \right). \tag{3.12}$$

为简化记号，我们用 v 代替 v_ϱ。我们还将由 $\mathcal{E}_r[v]$给出的 v的延拓记为 $\widetilde{v}$ 。对于 $\omega \in \mathbb{S}^{N-1}$ 和 $|\varrho| \le 2r$，我们得到[6]

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_r} |\widetilde{u}(x+\varrho\,\omega)-\widetilde{u}(x)|^2\,dx\right)^{\frac12} &\le \left(\int_{B_r} |\widetilde{u}(x+\varrho\,\omega)-\widetilde{v}(x+\varrho\,\omega)-\widetilde{u}(x)+\widetilde{v}(x)|^2\,dx\right)^{\frac12}\\ &\quad+\left(\int_{B_r} |\widetilde{v}(x+\varrho\,\omega)-\widetilde{v}(x)|^2\,dx\right)^{\frac12}\\ &\le 2\,\|\widetilde{u}-\widetilde{v}\|_{L^2(B_{3r})}+|\varrho|\,\|\partial_\omega\widetilde{v}\|_{L^2(B_{3r})}\\ &\le 2\left(\|\widetilde{u}-\widetilde{v}\|_{L^2(B_{3r})}+\frac{|\varrho|}{2}\,\|\nabla\widetilde{v}\|_{L^2(B_{3r})}\right).\end{aligned}$$

在最后一个估计中，我们使用了逐点不等式 $|\partial_\omega\widetilde{v}| \le |\nabla\widetilde{v}|$。现在，我们可以利用延拓算子 $\mathcal{E}_r$的性质，将 B_{3r} 上的范数替换为 B_r上的范数。根据命题3.1，有

$$\|\widetilde{u}-\widetilde{v}\|_{L^2(B_{3r})}=\|\mathcal{E}_r[u]-\mathcal{E}_r[v]\|_{L^2(B_{3r})}=\|\mathcal{E}_r[u-v]\|_{L^2(B_{3r})}\le\sqrt{2}\cdot 3^N\,\|u-v\|_{L^2(B_r)},$$

此外

$$\|\nabla\widetilde{v}\|_{L^2(B_{3r})}=\Big[\nabla\mathcal{E}_r[v]\Big]_{W^{1,2}(B_{3r})}\le 2\cdot 9^N\,[v]_{W^{1,2}(B_r)}.$$

由此得到

$$\left(\int_{B_r}|u(x+\varrho\,\omega)-u(x)|^2\,dx\right)^{\frac12}\le C\left(\|u-v\|_{L^2(B_r)}+\frac{|\varrho|}{2}\,[\nabla v]_{W^{1,2}(B_r)}\right).$$

将此估计与（3.12）结合，我们便可得到 $0<|\varrho|\le 2r$

$$\int_{B_r}\frac{|\widetilde{u}(x+\varrho\,\omega)-\widetilde{u}(x)|^2}{|\varrho|^{1+2\,s}}\,dx\le 4\,C^2\,|\varrho|^{-1-2\,s}\,\mathcal{K}\left(\frac{|\varrho|}{2},u\right)^2.$$

现在，我们对 ϱ 进行积分并作变量替换。由此得到（3.9），即为所求。证明至此完成。

□

由命题3.3可直接推出以下结果（另见 [5,引理 A.4]）。

推论 3.4。设 $0<s<1$，对每个 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 以及每个 $\omega\in\mathbb{S}^{N-1}$，都有

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|u(x)-u(x+\varrho\,\omega)|^2}{|\varrho|^{1+2\,s}}\,d\varrho\right)dx\le\mathcal{A}\,[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)},\tag{3.13}$$

其中的常数与 $\mathcal{A}=\mathcal{A}(N)>0$ 中出现的常数相同 (3.5)。

下一个结果可见于 [21] 和 [23, 推论 1]。后者中的估计对 s的依赖稍差；而前者并未明确陈述该结果，但可从 [21, 第 524]页推论 1 的证明中推导出来。鉴于这些原因，我们更愿意给出完整证明；无论如何，该证明与上述参考文献中的证明不同。

[6]在第二个不等式中，我们利用了对于每个 $\omega\in\mathbb{S}^{N-1}$ 和每个 $|\varrho|\le 2r$，都有

$$\left(\int_{B_r}|\widetilde{v}(x+\varrho\,\omega)-\widetilde{v}(x)|^2\,dx\right)^{\frac12}\le|\varrho|\left(\int_{B_{3r}}|\partial_\omega\widetilde{v}|^2\,dx\right)^{\frac12}.$$

引理 3.5（分数阶庞加莱-维尔廷格不等式）。设 $0 < s < 1$，对于每个 $u \in C^1(B_r(x_0))$都有

$$\left\| u - \operatorname{av}(u; B_r(x_0)) \right\|^2_{L^2(B_r(x_0))} \leq \mathcal{M}\,(1-s)\,r^{2\,s}\,[u]^2_{W^{s,2}(B_r(x_0))},$$

对于某个 $\mathcal{M} = \mathcal{M}(N) > 0$。

证明。We c并假设 $x_0 = 0$，不失一般性。我们使用实插值技巧 ，如先前结果中 所示。结合 (3.6) 和 (3.8)，我们得到

$$[u]_{W^{s,2}(B_r)} \geq \frac{1}{C} \int_0^{2\,r} \left(\frac{\mathcal{K}(t,u)}{t^s} \right)^2 \frac{dt}{t}, \tag{3.14}$$

其中 C 仅取决于维数 N，而 $\mathcal{K}(t,\ u)$ 仍由（3.7）定义。现在取$0 < t \leq 2\,r$和 $v \in W^{1,\ 2}(B_r)$，根据三角不等式可得

$$\begin{aligned} t\,\|u - \operatorname{av}(u;B_r)\|_{L^2(B_r)} &\leq t\,\|u - v\|_{L^2(B_r)} + t\,\|v - \operatorname{av}(v;B_r)\|_{L^2(B_r)} + t\,\|\operatorname{av}(v;B_r) - \operatorname{av}(u;B_r)\|_{L^2(B_r)} \\ &\leq 2\,r\,\left(\|u - v\|_{L^2(B_r)} + \|\operatorname{av}(v;B_r) - \operatorname{av}(u;B_r)\|_{L^2(B_r)} \right) + t\,\|v - \operatorname{av}(v;B_r)\|_{L^2(B_r)}. \end{aligned}$$

利用詹森不等式可得

$$\|\operatorname{av}(v;B_r) - \operatorname{av}(u;B_r)\|_{L^2(B_r)} \leq \|u - v\|_{L^2(B_r)},$$

而利用经典的庞加莱-维尔廷格不等式可得

$$\|v - \operatorname{av}(v;B_r)\|_{L^2(B_r)} \leq \frac{r}{\mu}\,[v]_{W^{1,2}(B_r)},$$

对某个 $\mu = \mu(N) > 0$ 成立。综合以上所有估计，我们得到

$$\begin{aligned} t\,\|u - \operatorname{av}(u;B_r)\|^2_{L^2(B_r)} &\leq 4\,r\,\|u - v\|_{L^2(B_r)} + \frac{t\,r}{\mu(B_1)}\,[v]_{W^{1,2}(B_r)} \\ &\leq C\,r\,\left(\|u - v\|_{L^2(B_r)} + t\,[v]_{W^{1,2}(B_r)} \right), \end{aligned}$$

其中 $C = \max\{4, 1/\mu\}$ 仅取决于 N。现在对 $v \in W^{1,\ 2}(B_r)$ 取下确界，可得

$$t\,\|u - \operatorname{av}(u;B_r)\|_{L^2(B_r)} \leq C\,r\,\mathcal{K}(t,u), \qquad \text{for } 0 < t \leq 2\,r.$$

取平方，除以 $t^{2\,s+1}$ 并在 $(0,\ 2\,r)$ 上积分，便得到

$$\|u - \operatorname{av}(u;B_r)\|^2_{L^2(B_r)}\,\frac{(2\,r)^{2-2\,s}}{2\,(1-s)} \leq C^2\,r^2 \int_0^{2\,r} \left(\frac{\mathcal{K}(t,u)}{t^s} \right)^2 \frac{dt}{t}.$$

将此估计代入式（3.14），最终得到所需结论。 □

本节最后讨论连续函数空间中一个众所周知的分数阶莫雷型嵌入的特殊情形（例如参见 [19, 推论 7.9。4]）。为此，我们需要相关常数在 s 趋于 1 或 $1/2$ 时的精确“定量”行为。这里取 $N = 1$。

定理 3.6（分数阶莫雷–索博列夫不等式）。对于每个 $1/2 < s < 1$，存在一个常数 $\mathfrak{m}_s > 0$，它仅依赖于 s，使得

$$\mathfrak{m}_s\,[u]^2_{W^{s-\frac{1}{2},\infty}(\mathbb{R})} \leq [u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})}, \qquad \textit{for every } u \in C^\infty_0(\mathbb{R}). \tag{3.15}$$

特别是，如果 $a < b$，我们有

$$\mathfrak{m}_s\,\|u\|^2_{L^\infty((a,b))} \leq (b-a)^{2\,s-1}\,[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})}, \qquad \textit{for every } u \in C^\infty_0((a,b)). \tag{3.16}$$

此外，常数 $\mathfrak{m}_s$ 具有以下渐近行为

$$\mathfrak{m}_s \sim 2\,s-1, \quad as\ s \searrow 1/2, \qquad and \qquad \mathfrak{m}_s \sim \frac{1}{1-s}, \quad as\ s \nearrow 1.$$

证明。 我们首先注意到，(3.16) 是 (3.15) 的直接推论。事实上，对于任意 $u \in C_0^\infty((a,b))$ 和任意 $x \in (a,b)$，由 (3.15) 可得

$$|u(x)|^2 = |u(x)-u(a)|^2 \le \frac{1}{\mathfrak{m}_s}\,(x-a)^{2\,s-1}\,[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \le \frac{1}{\mathfrak{m}_s}\,(b-a)^{2\,s-1}\,[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})},$$

正如所需。

为证明 (3.15)，取 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$。我们用 $\mathcal{F}[\varphi]$ 表示其 傅里叶变换，定义为

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,e^{-i\,t\,\xi}\,dt, \qquad \text{for } \xi \in \mathbb{R}.$$

由反演公式（见 [19, 第 VII 章第 1]节），可写为

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\varphi](\xi)\,e^{i\,t\,\xi}\,d\xi, \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

因此，对每个 $t,\ \tau \in \mathbb{R}$ 可得

$$\begin{aligned} |\varphi(t)-\varphi(\tau)| &\le \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big|\mathcal{F}[\varphi](\xi)\Big|\,|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|\,d\xi \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\,s}\,\Big|\mathcal{F}[\varphi](\xi)\Big|^2\,d\xi\right)^{\frac12} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|^2}{|\xi|^{2\,s}}\,d\xi\right)^{\frac12}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

现在回顾一下，根据 [19,第七章第 9], 节，我们有

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2\,s}\,\Big|\mathcal{F}[\varphi](\xi)\Big|^2\,d\xi = 2\,\pi\,A_s\,[\varphi]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})},$$

其中常数 A_s 为

$$A_s = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i\,t}-1|^2}{|t|^{1+2\,s}}\,dt\right)^{-1},$$

它满足

$$A_s \sim 1-s, \quad \text{for } s \nearrow 1 \qquad \text{and} \qquad A_s \sim s \quad \text{for } s \searrow 0.$$

由式（3.17），可得

$$|\varphi(t)-\varphi(\tau)| \le \sqrt{A_s} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|^2}{|\xi|^{2\,s}}\,d\xi\right)^{\frac12} [\varphi]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}. \tag{3.18}$$

为了得出结论，我们只需处理右端的积分。对于每个$\alpha > 0$，我们将该积分拆分如下

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|^2}{|\xi|^{2\,s}}\,d\xi = \int_{\{|\xi|\le\alpha\}} \frac{|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|^2}{|\xi|^{2\,s}}\,d\xi + \int_{\{|\xi|>\alpha\}} \frac{|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|^2}{|\xi|^{2\,s}}\,d\xi.$$

为了 估计低频部分时，我们利用 $\vartheta \mapsto e^{i\,\vartheta}$ 的 1–利普希茨性质推断 t

$$|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}| \le |t-\tau|\,|\xi|.$$

高频部分通过利用以下事实来处理

$$|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}| \le |e^{i\,t\,\xi}| + |e^{i\,\tau\,\xi}| = 2.$$

由此可得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|^2}{|\xi|^{2\,s}}\,d\xi \le 2\,|t-\tau|^2\int_0^{\alpha}\xi^{2-2\,s}\,d\xi + 8\int_{\alpha}^{+\infty}\xi^{-2\,s}\,d\xi$$
$$= \frac{2}{3-2\,s}\,|t-\tau|^2\,\alpha^{3-2\,s} + \frac{8}{2\,s-1}\,\frac{1}{\alpha^{2\,s-1}},$$

该式对任意 $\alpha>0$均成立。现在，我们可以对 α进行优化：事实上，右端项在[7] $\alpha=\alpha_0=2/|t-\tau|$时取最小值。作此选择后，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{i\,t\,\xi}-e^{i\,\tau\,\xi}|^2}{|\xi|^{2\,s}}\,d\xi \le 4^{2-s}\,\frac{2}{(3-2\,s)\,(2\,s-1)}\,|t-\tau|^{2\,s-1}.$$

将该估计代入（3.18）后，最终得到（3.15），其中

$$\mathfrak{m}_s = \frac{(3-2\,s)\,(2\,s-1)}{2\cdot 4^{2-s}\,A_s},$$

其具有所述的渐近行为。 □

注 3.7。 我们指出，文献 [26], 记录了一维分数阶莫雷估计中对 s 的依赖关系，其中该参数趋近于临界情形$s=1/2$ （见 [26, 推论 26]）。然而，该文献所揭示的渐近行为并非最优。此外，当 s 趋近于 1 时的渐近行为也未被考虑。基于这些原因， [26] 中的估计并不适用于我们的需求。

4. Basics of fractional capacity

我们从分数阶容量的定义开始。

定义。 设 $\Sigma\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一个紧集，且 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一个开集，使得 $\Sigma\Subset\Omega$。对于$0<s<1$，我们将 Σ 的分数阶容量，阶数为 s 相对于Ω 定义为以下量

$$\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma;\Omega) = \inf_{u\in C_0^\infty(\Omega)}\Big\{[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)}\,:\,u\ge 1_\Sigma\Big\}.$$

这里 1_Σ 表示 Σ的示性函数。

注 4.1。 通过基于卷积的标准逼近论证，容易看出，在 $\widetilde{\ \ }\mathrm{cap}_s(\Sigma;\Omega)$ 的定义中，我们可以用 Ω 中具有紧支撑的 Lipschitz 函数替换 $C_0^\infty(\Omega)$。细节留给读者。

作为定义和莫雷型不等式的直接推论，我们得到一点的分数阶容量的一个显式下界。尽管结果简单，它将在我们的主要结论中发挥关键作用。

引理 4.2 （一点的一维容量）。 设 $1/2<s<1$ 且 $x_0\in(a,\ b)$。则

$$\widetilde{\mathrm{cap}}_s\big(\{x_0\};(a,b)\big) \ge (b-a)^{1-2\,s}\,\mathfrak{m}_s,$$

其中 $\mathfrak{m}_s$ 与定理 *3.6*中的常数相同。

证明。 取 $u\in C_0^\infty((a,b))$，使得 $u(x_0)\ge 1$。因此，由 (3.16)，可得

$$1\le |u(x_0)|^2 \le \frac{(b-a)^{2\,s-1}}{\mathfrak{m}_s}\,[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})}.$$

对容许函数 u 取下确界即可得到结论。 □

[7]我们显然可以假设 $t\neq\tau$，否则便无事可证。

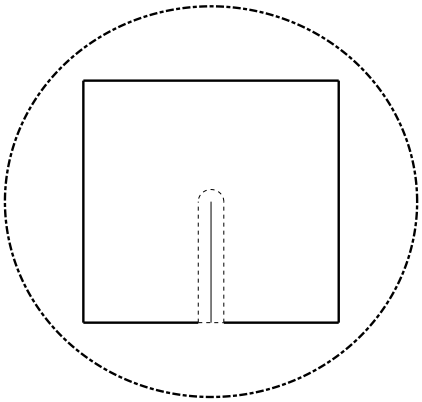

FIGURE 4. 引理 4.3中的几何构型：我们有一个定义在正方形上的光滑函数，它在垂直线的虚线邻域（即集合 Σ）上取零。 Σ 的相对分数阶容量是相对于周围的圆盘计算的。

4.1. **Maz'ya 型庞加莱 ′不等式**。 我们将需要如下分数阶庞加莱 ′不等式：对于立方体上的函数，若其在一个具有正分数阶容量的集合邻域内为零，则该不等式成立。这类似于 [29, 定理 A], 中的结果，但我们将采用 [21,第 14], 章中的方法，因为它更适合我们的框架。特别是，与 [29]不同，我们不会明确地将这一结果与具有混合边界条件的特征值联系起来。

命题 4.3。 设 $0 < s < 1$，并令 $\Sigma \subseteq Q_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}^N$ 为一个紧集。对每个 $R > \sqrt{N}\, r$，存在常数 $\phi(N, R/r) > 0$，使得下述庞加莱不等式成立

$$[u]^2_{W^{s,2}(Q_r(x_0))} \geq \left[\frac{s}{r^N}\,\phi\left(N, \frac{R}{r}\right)\right] \widetilde{\operatorname{cap}}_s\big(\Sigma; B_R(x_0)\big)\, \|u\|^2_{L^2(Q_r(x_0))}, \tag{4.1}$$

对每个 $u \in C^\infty(\overline{Q_r(x_0)})$，满足 $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u)\ \Sigma) > 0$。此外，我们有

$$\lim_{t\to+\infty} \phi(N,t) = \lim_{t\searrow\sqrt{N}} \phi(N,t) = 0.$$

证明。 证明过程较长，但初等。不失一般性，我们可以假设 $x_0 = 0$。令 $u \in C^\infty(Q_r)$ 如陈述所述，我们还可以进一步假设

$$\fint_{Q_r} |u|^2\, dx = 1, \tag{4.2}$$

仍不失一般性。现在我们使用 $\mathcal{E}_K$ 推论3.2的延拓算子，并作如下选择

$$K = Q_r \quad \text{and} \quad x_0 = 0, \qquad \text{so that } \frac{D_K(x_0)}{d_K(x_0)} = \sqrt{N}.$$

为避免行文过于繁琐，我们将使用符号 $\widetilde{u}$ 代替 $\mathcal{E}_K[u]$。根据延拓算子的性质，我们特别得到 $\widetilde{u}$ 是局部 Lipschitz 连续的，并且由（3.3）结合 $p = 2$ 还可得到

$$[\widetilde{u}]_{W^{s,2}(B_R)} \leq [\widetilde{u}]_{W^{s,2}(Q_R)} \leq C_N \left(\frac{R}{r}\right)^{2N} [u]_{W^{s,2}(Q_r)}. \tag{4.3}$$

我们取一个 Lipschitz 截断函数 η，使得

$$0 \le \eta \le 1, \qquad \eta \equiv 1 \text{ in } \overline{B_{\sqrt{N}\,r}}, \qquad \eta \equiv 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus B_{\frac{R+\sqrt{N}\,r}{2}}, \qquad |\nabla \eta| \le \frac{2}{R-\sqrt{N}\,r},$$

并定义 $\psi = (1-\widetilde{u})\,\eta$。回顾备注 4.1，可知 ψ 是定义 $\widetilde{\ }\mathrm{cap}_s(\Sigma; B_R)$ 的变分问题的可容许试验函数。利用这一事实并进行一些代数运算，可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma; B_R)} &\le [\psi]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)} \\ &= \left([\psi]^2_{W^{s,2}(B_R)} + 2\int_{B_R} |\psi(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{dy}{|x-y|^{N+2\,s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le [\psi]_{W^{s,2}(B_R)} + \sqrt{2} \left(\int_{B_R} |\psi(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{dy}{|x-y|^{N+2\,s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

接下来，利用 ψ 的定义和闵可夫斯基不等式，我们有

$$\begin{aligned}[\psi]_{W^{s,2}(B_R)} &\le \left(\int_{B_R} |\eta(x)|^2 \left(\int_{B_R} \frac{|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(y)|^2}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dy \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\int_{B_R} |1-\widetilde{u}(y)|^2 \left(\int_{B_R} \frac{|\eta(x)-\eta(y)|^2}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dx \right) dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le [\widetilde{u}]_{W^{s,2}(B_R)} + \|1-\widetilde{u}\|_{L^2(B_R)} \sqrt{\frac{2\,C}{s\,(1-s)}}\, \|\nabla \eta\|^s_{L^\infty(B_R)}\, \|\eta\|^{1-s}_{L^\infty(B_R)},\end{aligned}$$

对于某个 $C = C(N) > 0$。在最后一个不等式中，我们用到了：对于每个具有紧支撑的 Lipschitz 函数 φ，都有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^2}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dy \le \frac{C}{s\,(1-s)}\, \|\nabla \varphi\|^{2\,s}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\, \|\varphi\|^{2\,(1-s)}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

参见 [7, 引理 2。6]。若现在利用 (4.3) 来估计 $\widetilde{u}$ 的半范数，并利用 η的性质，由 (4.4) 可得

$$\begin{aligned}\sqrt{\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma; B_R)} &\le C_N \left(\frac{R}{r}\right)^{2\,N} [u]_{W^{s,2}(Q_r)} + \frac{2}{(R-\sqrt{N}\,r)^s} \sqrt{\frac{2\,C}{s\,(1-s)}}\, \|1-\widetilde{u}\|_{L^2(B_R)} \\ &\quad + \sqrt{2} \left(\int_{B_R} |\psi(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{dy}{|x-y|^{N+2\,s}} \right) dx \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

为了处理最后一项，我们回顾一下，ψ 在 $B_{(R+\sqrt{N}\,r)/2}$之外恒为零。因此，实际上有—

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\psi(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{dy}{|x-y|^{N+2\,s}} \right) &= \int_{B_{\frac{R+\sqrt{N}\,r}{2}}} |\eta(x)|^2\, |1-\widetilde{u}(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{dy}{|x-y|^{N+2\,s}} \right) dx \\ &\le \int_{B_{\frac{R+\sqrt{N}\,r}{2}}} |1-\widetilde{u}(x)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{dy}{|x-y|^{N+2\,s}} \right) dx.\end{aligned}$$

现在我们注意到，对于每个 $x \in B_{(R+\sqrt{N}\,r)/2}$ 和 $y \notin B_R$，都有

$$|x-y| \geq |y| - |x| \geq |y| - \frac{R+\sqrt{N}\,r}{2} \geq |y| - \frac{R+\sqrt{N}\,r}{2\,R}\,|y| = \left(\frac{R-\sqrt{N}\,r}{2\,R}\right)\,|y|.$$

因此，对于每个 $x \in B_{(R+\sqrt{N}\,r)/2}$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{dy}{|x-y|^{N+2\,s}}\,dy \leq \frac{N\,\omega_N}{2\,s}\,\left(\frac{2\,R}{R-\sqrt{N}\,r}\right)^{N+2\,s}\,\frac{1}{R^{2\,s}}.$$

汇总前面的估计，我们由（4.5）得到

$$\begin{aligned}\sqrt{\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma;B_R)} \leq C_N\,\left(\frac{R}{r}\right)^{2\,N}\,[u]_{W^{s,2}(Q_r)} + \frac{2}{(R-\sqrt{N}\,r)^s}\,\sqrt{\frac{2\,C}{s\,(1-s)}}\,\|1-\widetilde{u}\|_{L^2(B_R)}\\ + \sqrt{\frac{N\,\omega_N}{s}}\,\left(\frac{2\,R}{R-\sqrt{N}\,r}\right)^{\frac{N}{2}+s}\,\frac{1}{R^s}\,\|1-\widetilde{u}\|_{L^2(B_{\frac{R+\sqrt{N}\,r}{2}})}.\end{aligned}$$

我们需要估计 $1-\widetilde{u}$ 的 L^2 范数。为此，我们使用三角不等式

$\|1-\widetilde{u}\|_{L^2\,(B_{\frac{R+\sqrt{N}\,r}{2}})} \leq \|1-\widetilde{u}\|_{L^2\,(B_R)} \leq \|1-\mathrm{av}(\widetilde{u};\,B_R)\|_{L^2\,(B_R)} + \|\mathrm{av}(\widetilde{u};\,B_R)-\widetilde{u}\|_{L^2\,(B_R)}$:
$= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$，因此

$$\begin{aligned}\sqrt{\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma;B_R)} \leq C_N\,\left(\frac{R}{r}\right)^{2\,N}\,[u]_{W^{s,2}(Q_r)} + \frac{2}{(R-\sqrt{N}\,r)^s}\,\sqrt{\frac{2\,C}{s\,(1-s)}}\,\Big(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2\Big)\\ + \sqrt{\frac{N\,\omega_N}{s}}\,\left(\frac{2\,R}{R-\sqrt{N}\,r}\right)^{\frac{N}{2}+s}\,\frac{1}{R^s}\,\Big(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2\Big).\end{aligned} \tag{4.6}$$

反过来，项 $\mathcal{I}_1$ 可以由 $\mathcal{I}_2$ 控制。事实上，注意到 $\mathcal{I}_1$ 的被积函数为常数，并使用归一化（4.2），我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 = \sqrt{|B_R|}\,|1-\mathrm{av}(\widetilde{u};B_R)| = \sqrt{\frac{|B_R|}{|Q_r|}}\,\Big|\|u\|_{L^2(Q_r)} - \|\mathrm{av}(\widetilde{u};B_R)\|_{L^2(Q_r)}\Big|\\ \leq \sqrt{\frac{|B_R|}{|Q_r|}}\,\|u-\mathrm{av}(\widetilde{u};B_R)\|_{L^2(Q_r)} \leq \sqrt{\frac{|B_R|}{|Q_r|}}\,\mathcal{I}_2.\end{aligned}$$

至于积分 $\mathcal{I}_2$，由引理3.5 可直接得到

$$\mathcal{I}_2 \leq \sqrt{\mathcal{M}\,(1-s)}\,R^s\,[\widetilde{u}]_{W^{s,2}(B_R)}.$$

最后一项可再次利用（4.3）进行估计。将这些估计代入（4.6），最终即可完成证明。□

4.2. **平面上的几何下界。** 在维数 $N=2$ 且对于 $s>1/2$，利用点具有正的相对分数阶容量这一事实（见引理 4.2），可以为该项给出一个几何下界

$$\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma;B_R(x_0)),$$

出现在（4.1）中。我们将沿用 [21, 第 3 章第 1.2 节命题 1], 中的思路，这与 Taylor 所采用的方法非常接近，尽管后者使用了不同的容量概念，该概念源自位势理论。证明还将关键地运用关于“方向性”

分数阶导数（命题3.3 和推论3.4）。我们仍使用在（ Π_ω 中定义的符号2.2）。

命题 4.4. 设 $N = 2$、 $1/2 < s < 1$ 且 $\Sigma \Subset B_r(x_0)$ 为一个紧集。对于每个方向 $\omega \in \mathbb{S}^1$，有

$$\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma; B_r(x_0)) \geq \frac{\mathfrak{m}_s}{\mathcal{A}} \Big(r \, \mathrm{dist}(\Sigma, \partial B_r(x_0)) \Big)^{\frac{1-2\,s}{2}} \mathcal{H}^1(\Pi_\omega(\Sigma)).$$

这里 $\mathcal{A}$ 是命题 3.3 中的相同常数，而 $\mathfrak{m}_s$ 是定理 3.6中的相同常数。

证明。 我们注意到，不妨设 $\mathcal{H}^1(\Pi_\omega(\Sigma)) > 0$，否则无须证明。与往常一样，不失一般性，我们可以假设 $x_0 = 0$。

首先注意到，每个 $x \in \mathbb{R}^2$ 都可以写成

$$x = x' + t\,\omega, \qquad \text{with } x' \in \Pi_\omega(\mathbb{R}^2) \text{ and } t \in \mathbb{R}.$$

我们还设

$$R_\omega(x') = \sup\Big\{ \varrho \in \mathbb{R} \,:\, x' + \varrho\,\omega \in B_r \Big\} \qquad \text{and} \qquad r_\omega(x') = \inf\Big\{ \varrho \in \mathbb{R} \,:\, x' + \varrho\,\omega \in B_r \Big\}.$$

我们取 $u \in C_0^\infty(B_r)$，使得 $u \geq 1_\Sigma$。利用推论 3.4 和富比尼定理，我们可以推知

$$\begin{aligned} [u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} &\geq \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x) - u(x+\varrho\,\omega)|^2}{|\varrho|^{1+2\,s}} \, d\varrho \right) dx \\ &= \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\Pi_\omega(\mathbb{R}^2)} \left(\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|u(x'+t\,\omega) - u(x'+t\,\omega+\varrho\,\omega)|^2}{|\varrho|^{1+2\,s}} \, dt\, d\varrho \right) dx' \\ &\geq \frac{1}{\mathcal{A}} \int_{\Pi_\omega(\Sigma)} [u(x'+\cdot\,\omega)]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \, dx'. \end{aligned} \tag{4.7}$$

回想一下，在 Σ 上 $u \geq 1$，可知对于每个 $x' \in \Pi_\omega(\Sigma)$，都存在 t_0，使得 $u(x'+t_0\,\omega) \geq 1$。因此，利用试探函数

$$\psi_{x'} = u(x' + \cdot\,\omega) \in C_0^\infty((r_\omega(x'), R_\omega(x'))),$$

我们有

$$[u(x'+\cdot\,\omega)]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})} = [\psi_{x'}]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \geq \widetilde{\mathrm{cap}}_s\big(\{t_0\}; (r_\omega(x'), R_\omega(x'))\big), \qquad \text{for } x' \in \Pi_\omega(\Sigma),$$

根据容量的定义。进而，将引理 4.2 应用于上式右端，可得

$$[u(x'+\cdot\,\omega)]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \geq \mathfrak{m}_s \Big(R_\omega(x') - r_\omega(x') \Big)^{1-2\,s}.$$

为了得到最后一项的下界，我们令 $\ell = \mathrm{dist}(\Sigma, \partial B_r) > 0$。那么特别地，我们有

$$R_\omega(x') - r_\omega(x') \geq \sqrt{r^2 - (r-\ell)^2} \geq \sqrt{r\,\ell}, \qquad \text{for every } x' \in \Pi_\omega(\Sigma).$$

这意味着

$$[u(x'+\cdot\,\omega)]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \geq \mathfrak{m}_s \, (r\,\ell)^{\frac{1-2\,s}{2}}, \qquad \text{for every } x' \in \Pi_\omega(\Sigma).$$

利用（4.7）中的这一信息，我们可以得到

$$[u]^2_{W^{s,2}(B_r)} \geq \frac{\mathfrak{m}_s}{\mathcal{A}} \, (r\,\ell)^{\frac{1-2\,s}{2}} \mathcal{H}^1(\Pi_\omega(\Sigma)).$$

通过对可容许试验函数 u 取下确界，即可得出结论。 □

5. Proof of Theorem 1.1

不失一般性，我们可以假设 $r_\Omega = 1$。如引理 2.1 的证明中一样，我们考虑自然数 $\delta = \lfloor \sqrt{k} \rfloor + 1$，并取正方形族 $\{\mathcal{Q}_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \subseteq \mathbb{R}^2$，其定义如下：

$$\mathcal{Q}_{i,j} := Q_{5\,\delta}(10\,\delta\,i, 10\,\delta\,j), \qquad \text{for } (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

我们注意到 它们构成了整个平面的铺砌；更准确地说，它们两两不相交，并且其并集 的闭包覆盖整个 $\mathbb{R}^2$。我们还引入了指标集

$$\mathbb{Z}^2_\Omega = \Big\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, \mathcal{Q}_{i,j} \cap \Omega \neq \emptyset\Big\},$$

并且对于每个 $(i,\ j) \in \mathbb{Z}^2_\Omega$，我们用$\Sigma_{i,\ j} \subset \mathcal{Q}_{i,\ j} \setminus \overline{\Omega}$表示引理2.1所给出的紧集。利用这些正方形的铺砌性质，对于函数 $u \in C^\infty_0(\Omega)$，我们有

$$\begin{aligned}
[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \iint_{\mathcal{Q}_{i,j}\times\mathbb{R}^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy \\
&\geq \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \iint_{\mathcal{Q}_{i,j}\times\mathcal{Q}_{i,j}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2_\Omega} [u]^2_{W^{s,2}(\mathcal{Q}_{i,j})}.
\end{aligned}$$

对于每个（$i\quad j$）$\in \mathbb{Z}^2_\Omega$，我们可以使用命题 4.3 的分数阶 Poincar´e 不等式，其中取值

$$r = 5\,\delta \qquad \text{and} \qquad R = 2\,r = 10\,\delta.$$

为简洁起见，令 $\mathcal{B}_{i,\ j} := B_{10\,\delta}(10\,\delta\,i,\ \ 10\,\delta j)$，由此得到

$$[u]^2_{W^{s,2}(\mathcal{Q}_{i,j})} \geq \left[\frac{1}{50\,\delta^2}\,\phi\,(2,2)\right] \widetilde{\mathrm{cap}}_s\Big(\Sigma_{i,j};\mathcal{B}_{i,j}\Big)\,\|u\|^2_{L^2(\mathcal{Q}_{ij})}, \qquad \text{for every } (i,j)\in\mathbb{Z}^2_\Omega,$$

这里我们还用到了 $s > 1/2$。现在我们需要从下方估计每个紧集$\Sigma_{i,\ j}$的相对分数阶容量。结合引理2.1与命题4.4，我们得到

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{cap}}_s(\Sigma_{i,j};\mathcal{B}_{i,j}) &\geq \Big(50\,(2-\sqrt{2})\Big)^{\frac{1-2\,s}{2}}\ \frac{\mathfrak{m}_s}{\mathcal{A}}\,\delta^{1-2\,s}\,\max\Big\{\mathcal{H}^1(\Pi_{\mathbf{e}_1}(\Sigma_{i,j})),\,\mathcal{H}^1(\Pi_{\mathbf{e}_2}(\Sigma_{i,j}))\Big\} \\
&\geq \Big(50\,(2-\sqrt{2})\Big)^{\frac{1-2\,s}{2}}\ \frac{\mathfrak{m}_s}{4\,\mathcal{A}}\,\delta^{1-2\,s}\,\sqrt{k}.
\end{aligned}$$

综合以上估计，我们得到

$$\begin{aligned}
[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} &\geq \Big(50\,(2-\sqrt{2})\Big)^{\frac{1-2\,s}{2}}\ \frac{\mathfrak{m}_s\,\phi(2,2)}{200\,\mathcal{A}}\,\sqrt{k}\,\delta^{-1-2\,s}\sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2_\Omega}\|u\|^2_{L^2(\mathcal{Q}_{ij})} \\
&= \Big(50\,(2-\sqrt{2})\Big)^{\frac{1-2\,s}{2}}\ \frac{\mathfrak{m}_s\,\phi(2,2)}{200\,\mathcal{A}}\,\sqrt{k}\,\delta^{-1-2\,s}\,\|u\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中最后一个等式由该族的铺砌性质得到$\{\mathcal{Q}_{ij}\}_{i,\ j}$。回顾 δ 的定义并利用（2.1），我们得到

$$\sqrt{k}\,\delta^{-1-2\,s} \geq \sqrt{k}\,\Big(\sqrt{k}+1\Big)^{-1-2\,s} \geq \frac{1}{2^{1+2\,s}}\,\frac{1}{k^s}.$$

根据该 的任意性 $u \in C^\infty_0(\Omega)$，由（5.1）可得所声称的下界 $\lambda^s_1(\Omega)$，其中

$$\vartheta_s = \frac{\big(50\,(2-\sqrt{2})\big)^{\frac{1-2\,s}{2}}}{2^{1+2\,s}}\,\frac{\mathfrak{m}_s\,\phi(2,2)}{200\,\mathcal{A}}.$$

最后，所声称的 ϑ_s 渐近行为直接由其定义以及 $\mathfrak{m}_s$的性质推出，这些性质体现在定理 3.6中。

6. Proof of Theorem 1.2

6.1. **第（1）点的证明**。 这是 *Bourgain-Brezis-Mironescu* 公式 的直接推论。事实上，对于每个 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 开集，令 $u \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$。那么根据 [14, 推论 3。20] 我们有

$$\lim_{s \nearrow 1} (1-s)\, [u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

这意味着

$$\limsup_{s \nearrow 1} (1-s)\, \lambda_1^s(\Omega) \leq \lim_{s \nearrow 1} \frac{(1-s)\, [u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R}^N)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{1}{2} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

对 $C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$ 取下确界，可得

$$\limsup_{s \nearrow 1} (1-s)\, \lambda_1^s(\Omega) \leq \frac{1}{2}\, \lambda_1(\Omega),$$

如所述。因此，将（1.2）两边乘以因子（$1-s$），利用前述性质以及 ϑ_s 的渐近行为，在 s 趋于 1 时，即可得到经典的 Croke-Osserman-Taylor 估计。

6.2. **点 (2) 的证明**。 首先，我们需要以下结论

引理 6.1。 设 $0 < s < 1$，且$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 为一个开集。则对每个 $\{x_0, \dots, x_m\} \subset \Omega$，有

$$\lambda_1^s\big(\Omega \setminus \{x_0, \dots, x_m\}\big) = \lambda_1^s(\Omega).$$

证明。 我们不妨假设这些点 $\{x_0, \dots, x_m\}$ 互不相同。首先注意到

$$\lambda_1^s\big(\Omega \setminus \{x_0, \dots, x_m\}\big) \geq \lambda_1^s(\Omega),$$

因为 $\Omega \setminus \{x_0, \dots, x_m\} \subset \Omega$。为了证明反向蕴含，我们令

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \min_{i,j \in \{0,m\}} \Big\{ |x_i - x_j| \,:\, i \neq j \Big\}.$$

然后取一个截断函数 $\eta \in C_0^\infty(B_1)$，使得

$$\eta \equiv 1 \text{ in } B_{\frac{1}{2}}, \qquad 0 \leq \eta \leq 1, \qquad |\nabla \eta| \leq C,$$

并对每个 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 定义

$$\Psi_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^m \eta\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon} \right).$$

现在取 $u \in C_0^\infty(\Omega) \setminus \{0\}$，并注意到 $u(1 - \Psi_\varepsilon)$ 是定义 $\lambda_1^s(\Omega \setminus \{x_0, \dots, x_m\})$ 的变分问题中的可行试探函数。因此，利用闵可夫斯基不等式，我们

对每个 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 都得到

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_1^s(\Omega\setminus\{x_0,\dots,x_m\})} &\le \frac{\left[u\left(1-\Psi_\varepsilon\right)\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}}{\left\|u\left(1-\Psi_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}}\\ &\le \frac{[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}\left\|1-\Psi_\varepsilon\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}+\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\left[\Psi_\varepsilon\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}}{\left\|u\left(1-\Psi_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}}\\ &= \frac{[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}+\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\left[\Psi_\varepsilon\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}}{\left\|u\left(1-\Psi_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}}.\end{aligned} \tag{6.1}$$

应用控制收敛定理后，我们很容易得到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\|u\left(1-\Psi_\varepsilon\right)\right\|_{L^2(\Omega)}=\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

至于第　　二项分子，我们再次利用闵可夫斯基不等式，得到

$$\left[\Psi_\varepsilon\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}=\left[\sum_{i=0}^m\eta\left(\frac{\cdot-x_i}{\varepsilon}\right)\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}\le(m+1)\,\varepsilon^{1-s}\,[\eta]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}.$$

我们还利用了分数阶半范数的缩放性质。因此可得

$$\lim_{\varepsilon\to0}[\Psi_\varepsilon]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}=0.$$

因此，当 ε 在（6.1）中趋于 0 时，我们最终得到

$$\sqrt{\lambda_1^s(\Omega\setminus\{x_0,\dots,x_m\})}\le\frac{[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}.$$

由于 u的任意性，我们得到所需结论。 □

注 6.2。 前一个结果是以下一般事实的特例：去除分数阶容量为零的集合不会改变相关的分数阶索об列夫空间。因此，分数阶庞加莱′常数不受去除这些集合的影响。关于这一一般结果，例如可参见 [1,命题 2.6 和推论 2。7] 。

Th序列 $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ 随后按如下方式构造：对于每个 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$，我们取　　t

$$n_k=\lfloor\sqrt{k-1}\rfloor\qquad\text{and}\qquad m_k=(k-1)-n_k^2.$$

然后，我们取集合

$$\mathrm{Shell}_k=\left(\left[0,n_k\right]\times\left[0,n_k\right]\right)\setminus\bigcup_{i,j=0}^{n_k-1}\left\{\left(i+\frac12,j+\frac12\right)\right\},\ \text{for } k\ge2,$$

该集合由一个去除了 n_k^2 个等距点的正方形构成。更确切地说，我们去除正方形的中心

$$[i,i+1]\times[j,j+1],\qquad\text{for } i,j=0,\dots,n_k-1.$$

我们还引入集合

$$\mathrm{Slug}_k=\left([0,m_k]\times[-1,0]\right)\setminus\bigcup_{i=0}^{m_k-1}\left\{\left(i+\frac12,-\frac12\right)\right\},$$

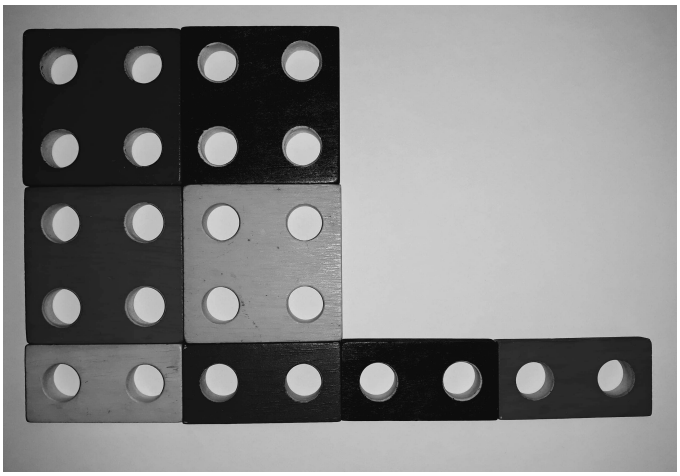

FIGURE 5. 定理 1.2 第 (2) 点中的集合 Ω_k ， $k = 25$。

它由一个宽度为 1、长度为 m_k 的水平条带组成，并从中移除了正方形的中心

$$[i, i+1] \times [-1, 0], \qquad \text{for } i = 0, \dots, m_k - 1.$$

最后，我们定义有界开集

$$\Omega_k = \operatorname{int}\big(\mathrm{Shell}_k \cup \mathrm{Slug}_k\big), \qquad \text{for every } k \geq 2,$$

，即 Shell_k 与 Slug 的并集的内点k （见图 5）。根据构造可知，Ω_k 是阶数为 k的多连通集。此外，我们有

$$r_{\Omega_k} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{for every } k \geq 2,$$

and

$$\Omega_k \supseteq \operatorname{int}\big(\mathrm{Shell}_k\big) = \Big(\Big(0, n_k\Big) \times \Big(0, n_k\Big)\Big) \setminus \bigcup_{i,j=0}^{n_k-1} \left\{ \left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

利用 λ_1^s 关于集合包含的单调性以及引理 6.1 对于 $\operatorname{int}\big(\mathrm{Shell}_k\big)$，便可推得

$$\lambda_1^s(\Omega_k) \leq \lambda_1^s \left(\Big(0, n_k\Big) \times \Big(0, n_k\Big) \right) = n_k^{-2\,s}\, \lambda_1^s \left(\Big(0, 1\Big) \times \Big(0, 1\Big) \right).$$

回顾 n_k 的定义，最终即可得到所需结果。

6.3. 第 (3) 点的证明。 为便于阐述，我们将证明分为若干步骤 n.

步骤 1：集合的构造。我们定义

$$\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \Sigma^{(i)}, \qquad \text{where } \Sigma^{(i)} := \left\{ (x_1, i) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1| \geq 1 \right\},$$

然后考虑无限补集梳状集

$$\Theta := \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma,$$

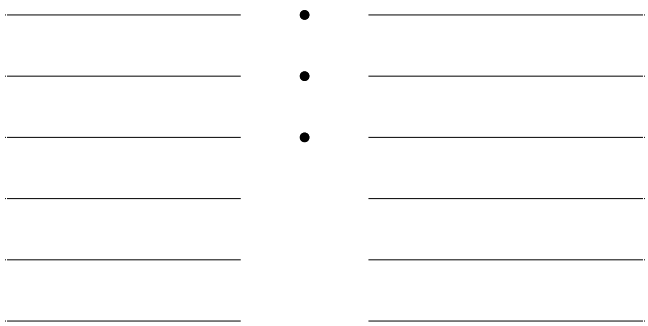

FIGURE 6. 集合 Θ_k 对于 $k=4$ 定理1.2 中的点(3)：它是通过从 Θ中移除黑点得到的。

如 [6, 第 5]节所示。集合 Θ_k 通过简单地从中移除 $k-1$个互不相同的点来构造， Θ即令

$$\Theta_k = \Theta \setminus \{(0,i) \,:\, i=1,\dots,k-1\},$$

见图6。根据构造，我们有 Θ_k 是阶数为 k的多连通集，且具有有限内半径。因此，根据定理1.1 可得 $\lambda_1^s(\Theta_k) > 0$，对每个 $s > 1/2$。我们断言

$$\limsup_{s \searrow \frac{1}{2}} \frac{\lambda_1^s(\Theta_k)}{2\,s-1} < +\infty. \tag{6.2}$$

步骤*2*：一维约化。这里我们需要以下结果。

引理6.3。 设 $0<s<1$，并设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 为一个开集。则有

$$\lambda_1^s(A\times\mathbb{R}) \le \alpha_s\, \lambda_1^s(A), \qquad \textit{where } \alpha_s = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{2+2\,s}{2}}}. \tag{6.3}$$

证明。 我们按照 [15, 引理24]的证明进行。对每个 $x \in \mathbb{R}^2$，我们采用记号$x=(x_1,\ x_2)$。取 $u \in C_0^\infty(A) \setminus \{0\}$ 以及 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$。首先注意到，根据富比尼定理

$$\|u\,\varphi\|_{L^2(A\times\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(A)}\,\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

接下来，我们估计 $u\,\varphi$ 的分数阶半范数。根据闵可夫斯基不等式，有

$$\begin{aligned}[u\,\varphi]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)} \le &\left(\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |u(x_1)|^2\,\frac{|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy\right)^{1/2}\\ &+\left(\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |\varphi(y_2)|^2\,\frac{|u(x_1)-u(x_2)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

根据富比尼定理，有

$$\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |u(x_1)|^2\,\frac{|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |u(x_1)|^2 \left(\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |\varphi(y_1)-\varphi(y_2)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx_2}{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)^{\frac{2+2\,s}{2}}} \right) dy_1\,dy_2 \right) dx_1.$$

通过变量代换，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx_2}{((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2)^{\frac{2+2\,s}{2}}} = \frac{\alpha_s}{|y_1-y_2|^{1+2\,s}}.$$

因此，我们得到

$$\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |u(x_1)|^2\,\frac{|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy = \alpha_s\,\|u\|^2_{L^2(A)}\,[\varphi]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})}.$$

通过类似的计算，我们还得到

$$\iint_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |\varphi(y_2)|^2\,\frac{|u(x_1)-u(x_2)|^2}{|x-y|^{2+2\,s}}\,dx\,dy = \alpha_s\,\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\,[u]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})}.$$

因此，根据 $\lambda^s_1(A\times\mathbb{R})$ 的变分定义，我们得到

$$\sqrt{\lambda^s_1(A\times\mathbb{R})} \le \frac{[u\,\varphi]_{W^{s,2}(\mathbb{R}^2)}}{\|u\,\varphi\|_{L^2(\omega\times\mathbb{R})}} \le \sqrt{\alpha_s}\,\frac{\|u\|_{L^2(A)}\,[\varphi]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}+\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}\,[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}}{\|u\|_{L^2(A)}\,\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}}$$
$$= \sqrt{\alpha_s}\left(\frac{[\varphi]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}}{\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}}+\frac{[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}}{\|u\|_{L^2(A)}}\right).$$

通过 ta 对 u 和 φ 取下确界，并回顾 $\lambda^s_1(\mathbb{R})=0$，即可得到所需结论 n □

特别地，由前面的结果结合 $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$，我们得到

$$\lambda^s_1(\Theta_k) \le \lambda^s_1(\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})) \le \alpha_s\,\lambda^s_1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}).$$

在第一个不等式中，我们使用了

$$\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}) \subset \Theta_k.$$

由其定义（6.3），不难看出 α_s 关于 $s\in[0,1]$连续变化。因此，为了证明（6.2），只需证明

$$\limsup_{s\searrow\frac12} \frac{\lambda^s_1(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})}{2\,s-1} < +\infty. \tag{6.4}$$

步骤 *3*：试探函数的选择。为了证明（6.4），我们需要仔细构造一个合适的 $s-$族试探函数，其依赖于 λ^s_1（$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$），并为其提供具有正确渐近行为的上界。对于每个

$$n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, \qquad s>1/2 \qquad \text{and} \qquad 0<\varepsilon<\frac{1}{10},$$

我们考虑试探函数 $u_n\,\varphi_{n,\ s,\ \varepsilon}$，其中：

- $u_n\in C^\infty_0((-n,n))$ 具有如下形式

$$u_n(x) = u\left(\frac{x}{n}\right),$$

对于某个 $u\in C^\infty_0((-1,\ 1))$，使得 $\|u\|_{L^2((-1,\ 1))}=1$;

- 多重漏斗型截断函数 $\varphi_{n,\ s,\ \varepsilon} \in W^{s,\ 2\,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ 的形式为

$$\varphi_{n,s,\varepsilon} = 1 - \sum_{j=-n}^{n} \zeta_s\left(\frac{x-j}{\varepsilon}\right),$$

其中 ζ_s 是由下式给出的函数

$$\zeta_s(x) = \left(1 - |x|^{2\,s-1}\right)_+.$$

感谢 [7,引理 2。7], 我们可知

$$u_n\,\varphi_{n,s,\varepsilon} \in \widetilde{W}_0^{s,2}((-n,n)) \subset \widetilde{W}_0^{s,2}(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}).$$

T因此它是一个可行试探函数。再次利用闵可夫斯基不等式，可得

$$\sqrt{\lambda_1^s(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})} \le \frac{[u_n]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} + \|u_n\|_{L^\infty((-n,n))}\,[\varphi_{n,\varepsilon,s}]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}}{\|u_n\,\varphi_{n,\varepsilon,s}\|_{L^2((-n,n))}}.$$

步骤 *4*：估计商。 我们先处理分子中的各项。首先考虑含有 u_n 的项，这些项比较简单。根据 u_n 的定义，我们有

$$[u_n]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} = n^{\frac{1}{2}-s}\,[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}.$$

最后一项 m 可以利用插值不等式 [10, 推论 2.2], 进行估计，从而得到 s

$$[u]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \le \sqrt{\frac{C}{s\,(1-s)}}\,\|u\|_{L^2((-1,1))}^{1-s}\,\|u'\|_{L^2((-1,1))}^{s},$$

其中某个 $C>0$ 与 s无关。这保证我们有

$$[u_n]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \le n^{\frac{1}{2}-s}\sqrt{\frac{C}{s\,(1-s)}}\,\|u'\|_{L^2((-1,1))}^{s}. \tag{6.5}$$

含有 L^∞ 范数的项很容易处理，因为我们直接有

$$\|u_n\|_{L^\infty((-n,n))} = \|u\|_{L^\infty((-1,1))}. \tag{6.6}$$

含有截断函数的项最为棘手。为了对其进行估计，我们注意到

$$\sum_{j=-n}^{n} \zeta_s\left(\frac{x-j}{\varepsilon}\right) = \max_{j=-n,\dots,n} \zeta_s\left(\frac{x-j}{\varepsilon}\right),$$

这得益于求和中所有函数的支集互不相交。因此，我们可以利用 Sobolev-Slobodeckij 半范数的次模性（见 [16, 定理 3.2 和注释 3.3]），从而得到

$$\begin{aligned}
[\varphi_{n,\varepsilon,s}]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} &= \left[\sum_{j=-n}^{n} \zeta_s\left(\frac{\cdot-j}{\varepsilon}\right)\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \\
&= \left[\max_{j=-n,\dots,n} \zeta_s\left(\frac{\cdot-j}{\varepsilon}\right)\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \\
&\le \left(\sum_{j=-n}^{n} \left[\zeta_s\left(\frac{\cdot-j}{\varepsilon}\right)\right]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\,n+1}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}-s}\,[\zeta_s]_{W^{s,2}(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

为了完成证明，关键在于对最后一项作出非常精确的渐近估计，当 s 趋于 $1/2$时。下文的引理B.1 给出了这一估计，由此可以推得

$$[\varphi_{n,\varepsilon,s}]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \leq C\sqrt{2\,n+1}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}-s}\sqrt{2\,s-1}, \qquad \text{for } \frac{1}{2}<s<\frac{3}{4}, \tag{6.7}$$

其中 $C>0$ 不依赖于 s。

现在我们来考察分母。在这种情况下，我们有

$$\|u_n\,\varphi_{n,\varepsilon,s}\|_{L^2((-n,n))} = n^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^{1}|u(y)|^2\left(1-\sum_{j=-n}^{n}\zeta_s\left(\frac{n\,y-j}{\varepsilon}\right)\right)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \geq n^{\frac{1}{2}}\,\|u\|_{L^2(A_\varepsilon)}, \tag{6.8}$$

其中

$$A_\varepsilon = (-1,1)\setminus\bigcup_{j=-n}^{n}\left(\frac{j-\varepsilon}{n},\frac{j+\varepsilon}{n}\right).$$

步骤 *5*：结论。综合各项估计（6.5）、（6.6）、（6.7）和（6.8），我们得到

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\lambda_1^s(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})}{2\,s-1}} &\leq \frac{n^{\frac{1}{2}-s}\sqrt{\dfrac{C}{s\,(1-s)}}\,\|u'\|^s_{L^2((-1,1))}+C\,\|u\|_{L^\infty((-1,1))}\sqrt{2\,n+1}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}-s}\sqrt{2\,s-1}}{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\,s-1}\,\|u\|_{L^2(A_\varepsilon)}}\\ &\leq \sqrt{\frac{C}{s\,(1-s)}}\,\frac{\|u'\|^s_{L^2((-1,1))}}{\|u\|_{L^2(A_\varepsilon)}}\,\frac{n^{-s}}{\sqrt{2\,s-1}}+C\,\frac{\|u\|_{L^\infty((-1,1))}}{\|u\|_{L^2(A_\varepsilon)}}\,\sqrt{3}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}-s}.\end{aligned}$$

It i现在，巧妙地选择参数 n 和 ε至关重要：我们取它们为 e

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{2\,s-1}} \qquad \text{and} \qquad n=\left(\left\lfloor\frac{1}{2\,s-1}\right\rfloor+1\right)^2.$$

注意，采用这些选择后，我们有

$$\lim_{s\searrow\frac{1}{2}}\varepsilon=0 \qquad \text{and} \qquad \varepsilon^{\frac{1}{2}-s}=\sqrt{10},$$

and

$$\lim_{s\searrow\frac{1}{2}}\frac{n^{-s}}{\sqrt{2\,s-1}}\leq\lim_{s\searrow\frac{1}{2}}(2\,s-1)^{2\,s-\frac{1}{2}}=0,$$

其中我们还 使用了（2.1）。此外，利用控制收敛定理，我们还得到

$$\lim_{s\searrow\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(A_\varepsilon)}=\|u\|_{L^2((-1,1))}=1.$$

这些事实最终使我们能够得出结论：

$$\limsup_{s\searrow\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\lambda_1^s(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})}{2\,s-1}}\leq\sqrt{30}\,C\,\|u\|_{L^\infty((-1,1))}<+\infty.$$

证明到此结束。

AppendixA. A bi-Lipschitz homeomorphism

下文中，对于每个有界开集 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ 和每个 $x_0 \in K$，我们定义

$$d_K(x_0) = \min_{x\in\partial K} |x - x_0|, \qquad D_K(x_0) = \max_{x\in\partial K} |x - x_0|.$$

引理 A.1. 设 $K \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个有界开凸集，且 $x_0 \in K$。存在一个双 *Lipschitz* 同胚 $\Phi_{K,\,x_0}$: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$，具有以下性质:

- $\Phi_{K,x_0}(x_0) = x_0$ *and* $\Phi_{K,x_0}(r\,(K - x_0) + x_0) = B_r(x_0)$, *for every* $r > 0$;
- Φ_{K,x_0} 是 L_K–利普希茨的，且
$$L_K = \frac{2}{d_K(x_0)};$$
- $\Phi_K^{-1}{}_{,\,x_0}$ 是 M_K–利普希茨的，且
$$M_K = D_K(x_0)\,\left(2 + \frac{D_K(x_0)}{d_K(x_0)}\right).$$

此外，我们有

$$\left(\frac{1}{M_K}\right)^N \le |\det\nabla\Phi_{K,x_0}(x)| \le (L_K)^N, \qquad \textit{for a. e. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{A.1}$$

and

$$\left(\frac{1}{L_K}\right)^N \le |\det\nabla\Phi^{-1}_{K,x_0}(x)| \le (M_K)^N, \qquad \textit{for a. e. } x \in \mathbb{R}^N. \tag{A.2}$$

证明。为简化记号，我们省略各处的下标 x_0。首先定义以 x_0 为中心的 K 闵可夫斯基泛函，即

$$j_K(x) = \inf\Big\{\lambda > 0 \,:\, x \in \lambda\,(K - x_0) + x_0\Big\}.$$

我们回顾一下，这是一个 Lipschitz 函数，满足以下齐次性

$$j_K(t\,(x - x_0) + x_0) = t\,j_K(x), \qquad \text{for every } x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{A.3}$$

我们还注意到，根据构造，有

$$j_K(x) < r \quad \text{ if and only if } \quad x \in r\,(K - x_0) + x_0,$$

并且

$$j_K(x) = r \quad \text{ if and only if } \quad x \in r\,(\partial K - x_0) + x_0.$$

此外，j_K 是 Lipschitz 的，并且有

$$|j_K(x) - j_K(y)| \le \frac{1}{d_K(x_0)}\,|x - y|, \qquad \text{for every } x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{A.4}$$

最后但同样重要的是，我们有以下下界

$$j_K(x) = |x - x_0|\,j_K\left(\frac{x - x_0}{|x - x_0|} + x_0\right) \ge \frac{|x - x_0|}{D_K(x_0)}. \tag{A.5}$$

然后我们定义 Φ_K 如下

$$\Phi_K(x_0) = x_0, \qquad \Phi_K(x) = \frac{x - x_0}{|x - x_0|}\,j_K(x) + x_0, \qquad \text{if } x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}.$$

由于闵可夫斯基泛函的性质，我们知道 Φ_K 是单射。为了验证 Φ_K 是双射，取 $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$。接着我们定义

$$\overline{x} = \frac{|y-x_0|}{j_K(y)}\,(y-x_0)+x_0, \tag{A.6}$$

我们声称 $\Phi_K(x) = y$。事实上，根据构造可得

$$\Phi_K(\overline{x}) = \frac{\overline{x}-x_0}{|\overline{x}-x_0|}\,j_K(\overline{x})+x_0 = \frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,j_K\left(\frac{|y-x_0|}{j_K(y)}\,(y-x_0)+x_0\right)+x_0.$$

由性质（A.3）可得

$$\Phi_K(\overline{x}) = \frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,j_K\left(\frac{|y-x_0|}{j_K(y)}\,(y-x_0)+x_0\right)+x_0 = \frac{y-x_0}{|y-x_0|}\,j_K(y)\,\frac{|y-x_0|}{j_K(y)}+x_0 = y,$$

如所需。这表明 Φ_K 是双射，由（A.6）可得

$$\Phi_K^{-1}(y) = \frac{|y-x_0|}{j_K(y)}\,(y-x_0)+x_0, \qquad \text{for } y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}.$$

得益于闵可夫斯基泛函的性质，很容易看出

$$\Phi_K(r\,(K-x_0)+x_0) = B_r(x_0), \qquad \text{for every } r>0.$$

现在我们声称 Φ_K 及其逆映射都是利普希茨连续的。先考虑 Φ_K：取x， $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$，且不失一般性，可以假设 $|y-x_0| \le |x-x_0|$。由三角不等式可得

$$\begin{aligned} |\Phi_K(x)-\Phi_K(y)| &\le j_K(y)\left|\frac{x-x_0}{|x-x_0|}-\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\right|+|j_K(x)-j_K(y)| \\ &\le j_K(y)\,\frac{|x-y|}{\sqrt{|x-x_0|\,|y-x_0|}}+|j_K(x)-j_K(y)|, \end{aligned} \tag{A.7}$$

这里我们用到了

$$\begin{aligned} \left|\frac{x-x_0}{|x-x_0|}-\frac{y-x_0}{|y-x_0|}\right|^2 &= 2-2\,\frac{\langle x-x_0,y-x_0\rangle}{|x-x_0|\,|y-x_0|} \\ &\le \frac{|x-x_0|^2+|y-x_0|^2}{|x-x_0|\,|y-x_0|}-2\,\frac{\langle x-x_0,y-x_0\rangle}{|x-x_0|\,|y-x_0|} = \frac{|x-y|^2}{|x-x_0|\,|y-x_0|}, \end{aligned}$$

根据杨氏不等式。利用（A.4）以及事实 $|y-x_0| \le |x-x_0|$，由（A.7）可得

$$|\Phi_K(x)-\Phi_K(y)| \le \frac{1}{d_K(x_0)}\left[|y-x_0|\,\frac{|x-y|}{\sqrt{|x-x_0|\,|y-x_0|}}+|x-y|\right] \le \frac{2}{d_K(x_0)}\,|x-y|.$$

这证明了 Φ_K具有所声称的利普希茨正则性。

现在我们转而研究反函数 Φ_K^{-1}。我们采用类似的方法：取x， $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$，并且可以假设 $|y-x_0| \le |x-x_0|$。于是根据三角不等式

$$\begin{aligned} |\Phi_K^{-1}(x)-\Phi_K^{-1}(y)| \le \frac{1}{j_K(x)}&\Big||x-x_0|\,(x-x_0)-|y-x_0|\,(y-x_0)\Big| \\ &+|y-x_0|^2\left|\frac{1}{j_K(x)}-\frac{1}{j_K(y)}\right|. \end{aligned}$$

利用（A.5），并注意到

$$\Big||x-x_0|\,(x-x_0)-|y-x_0|\,(y-x_0)\Big| \le (|x-x_0|+|y-x_0|)\,|x-y| = 2\,|x-x_0|\,|x-y|,$$

我们得到

$$\begin{aligned}
|\Phi_K^{-1}(x)-\Phi_K^{-1}(y)| &\le \frac{2\,|x-x_0|}{j_K(x)}\,|x-y| + \frac{|y-x_0|^2}{j_K(x)\,j_K(y)}\,|j_K(x)-j_K(y)| \\
&\le 2\,D_K(x_0)\,|x-y| + D_K(x_0)^2\,\frac{|y-x_0|^2}{|x-x_0|\,|y-x_0|}\,\frac{|x-y|}{d_K(x_0)} \\
&\le 2\,D_K(x_0)\,|x-y| + D_K(x_0)^2\,\frac{|x-y|}{d_K(x_0)} \\
&= D_K(x_0)\,\left(2+\frac{D_K(x_0)}{d_K(x_0)}\right)\,|x-y|.
\end{aligned}$$

这也给出了关于 Φ_K^{-1} 所需的 Lipschitz 估计。

最后，双边估计（A.1）和（A.2）是由 Φ_K 和 Φ_K^{-1} 上的 Lipschitz 估计，以及 Lipschitz 函数的面积公式和拉德马赫定理的直接推论。□

Appendix B. A special cut-off function

引理 B.1。设 $1/2 < s < 1$ 并设

$$\zeta_s(x) = \Big(1-|x|^{2\,s-1}\Big)_+, \qquad \textit{for } x\in\mathbb{R}.$$

那么我们有

$$[\zeta_s]_{W^{s,2}(\mathbb{R})} \le C\,\frac{\sqrt{2\,s-1}}{\sqrt{1-s}}, \tag{B.1}$$

其中常数 $C>0$ 与 $s\in(1/2,1)$ 无关。

证明。 我们将半范数分解如下

$$\begin{aligned}
[\zeta_s]^2_{W^{s,2}(\mathbb{R})} &= \iint_{(-1,1)\times(-1,1)} \frac{\Big||x|^{2\,s-1}-|y|^{2\,s-1}\Big|^2}{|x-y|^{1+2\,s}}\,dx\,dy \\
&\quad + \frac{1}{s}\int_{-1}^1 \frac{\Big|1-|x|^{2\,s-1}\Big|^2}{(1-x)^{2\,s}}\,dx + \frac{1}{s}\int_{-1}^1 \frac{\Big|1-|x|^{2\,s-1}\Big|^2}{(1+x)^{2\,s}}\,dx = \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

为了证明 (B.1)，我们将证明

$$\mathcal{I}_i \le C\,\frac{2\,s-1}{1-s}, \qquad \text{for } i=1,2,3. \tag{B.3}$$

对于第一项 $\mathcal{I}_1$，利用集合和被积函数的对称性，我们得到

$$\mathcal{I}_1 \le 4\iint_{(0,1)\times(0,1)} \frac{\Big||x|^{2\,s-1}-|y|^{2\,s-1}\Big|^2}{|x-y|^{1+2\,s}}\,dx\,dy.$$

利用 [7, 注 4.2，公式 (4.3)] 并取 $\beta = 2\,s - 1$ 其中的选择，我们可以对最后一个二重积分作如下估计

$$\mathcal{I}_1 \le 4 \iint_{(0,1)\times(0,1)} \frac{\Big| |x|^{2\,s-1} - |y|^{2\,s-1} \Big|^2}{|x-y|^{1+2\,s}}\, dx\, dy \le \left(\int_0^1 \frac{|1-\tau^{2\,s-1}|^2}{|1-\tau|^{1+2\,s}} \left(1+\tau^{1-2\,s}\right) d\tau \right) \frac{4}{2\,s-1}.$$

接着，我们写作

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{|1-\tau^{2\,s-1}|^2}{|1-\tau|^{1+2\,s}} \left(1+\tau^{1-2\,s}\right) d\tau &= \int_0^{\frac12} \frac{|1-\tau^{2\,s-1}|^2}{|1-\tau|^{1+2\,s}} \left(1+\tau^{1-2\,s}\right) d\tau \\ &\quad + \int_{\frac12}^1 \frac{|1-\tau^{2\,s-1}|^2}{|1-\tau|^{1+2\,s}} \left(1+\tau^{1-2\,s}\right) d\tau \\ &\le C \int_0^{\frac12} |1-\tau^{2\,s-1}|^2 \left(1+\tau^{1-2\,s}\right) d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac12}^1 \frac{|1-\tau^{2\,s-1}|^2}{|1-\tau|^{1+2\,s}}\, d\tau =: \mathcal{I}_{1,1} + \mathcal{I}_{1,2}. \end{aligned}$$

常数 $C > 0$ 可取为与 s 无关。我们先估计 $\mathcal{I}_{1,\,2}$，这更简单：我们使用以下逐点不等式

$$a^\alpha - b^\alpha \le \alpha\, b^{\alpha-1}\,(a-b), \qquad \text{for } 0 < b \le a,\ 0 < \alpha < 1,$$

这直接源于映射 $\tau \mapsto \tau^\alpha$ 的凹性。由此可得

$$\mathcal{I}_{1,2} \le C\, 16^{1-s}\,(2\,s-1)^2 \int_{\frac12}^1 (1-\tau)^{1-2\,s}\, d\tau = \frac{C}{2\,(1-s)}\, 4^{1-s}\,(2\,s-1)^2,$$

如所需。现在我们讨论 $\mathcal{I}_{1,\,1}$，这是最微妙的部分。为简便起见，我们令

$$f_\tau(s) = \tau^{2\,s-1}, \qquad \text{for } \tau > 0,\ s > \frac12.$$

于是我们有

$$\left| f_\tau(s) - f_\tau\left(\frac12\right) \right| = \left| \int_{\frac12}^s f'_\tau(t)\, dt \right|,$$

也就是说

$$|1-\tau^{2\,s-1}| = 2\,|\log\tau| \left| \int_{\frac12}^s \tau^{2\,t-1}\, dt \right| \le 2\,(-\log\tau) \left(s - \frac12\right) = (-\log\tau)\,(2\,s-1).$$

因此我们得到

$$\mathcal{I}_{1,1} \le C\,(2\,s-1)^2 \int_0^{\frac12} (-\log\tau)^2\,(1+\tau^{2\,s-1})\, d\tau \le 2\,C\,(2\,s-1)^2 \int_0^{\frac12} (-\log\tau)^2\, d\tau.$$

由于最后一个积分有限，因此得到了所需的估计。综合 $\mathcal{I}_{1,\,1}$和 $\mathcal{I}_{1,\,2}$的估计，我们便得到 B.1式，即 $\mathcal{I}_1$。

现在我们考虑 $\mathcal{I}_2$ 和 $\mathcal{I}_3$。我们只估计第一个，因为第二个的估计类似。对于 $s > 1/2$，有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s}\int_{-1}^{1}\frac{\left|1-|x|^{2s-1}\right|^2}{(1-x)^{2s}}\,dx &\le 2\int_0^1\frac{(1-x^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx + 2\int_{-1}^0\frac{(1-|x|^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx\\
&\le 2\int_0^1\frac{(1-x^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx + 2\int_{-1}^0(1-|x|^{2s-1})^2\,dx\\
&= 2\int_{\frac12}^1\frac{(1-x^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx + 2\int_0^{\frac12}\frac{(1-x^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx\\
&\quad + 2\int_0^1(1-x^{2s-1})^2\,dx\\
&\le 2\int_{\frac12}^1\frac{(1-x^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx + 2\cdot 4^s\int_0^{\frac12}(1-x^{2s-1})^2\,dx\\
&\quad + 2\int_0^1(1-x^{2s-1})^2\,dx\\
&\le 2\int_{\frac12}^1\frac{(1-x^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx + 2\,(4^s+1)\int_0^1(1-x^{2s-1})\,dx.
\end{aligned}$$

计算最后一个积分后，特别可得

$$\frac{1}{s}\int_{-1}^{1}\frac{\left|1-|x|^{2s-1}\right|^2}{(1-x)^{2s}}\,dx \le 2\int_{\frac12}^1\frac{(1-x^{2s-1})^2}{(1-x)^{2s}}\,dx + (4^s+1)\,\frac{2s-1}{s}.$$

此时，右侧的积分可以像我们对$\mathcal{I}_1$所做的那样进行估计，2 上文所述。按照之前的方法，我们也可得到（B.3），适用于 $\mathcal{I}_2$ （因此也适用于 $\mathcal{I}_3$）。□

References

[1] L. Abatangelo、V. Felli、B. Noris，《移除小分数阶容量集时分数阶拉普拉斯算子的简单特征值》，Commun. Contemp. Math., **22** 2020 1950071, 32 6, 27 ( )，第 A. Ancona，《关于 中区域的强障碍与 $\mathbb{R}^n$ [2] Hardy 不等式》，J. London Math. Soc., 34 (1986), 274–290. 2[3] R. Ba ˜ *Stochastic* nuelos、T. Carroll, *analysis (Ithaca, NY, 1993)* 3 10, **57**, 1995 《鼓的低音所对应的 Osserman 常数的改进》，，– Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, . 2 [4] ˜ **75** R. Banuelos、T. Carroll，《布朗运动与鼓的基频》，杜克数学杂志，(1994 575 602 2), – . F. Bethuel、F. Demengel，《流形间索博列夫映射的延拓》，[5] Calc. Var. Partial Differential Equations, **3** 1995 475 491 17 ( ), – . F. Bianchi、L. Brasco，《分数阶马凯-海曼不等式》，纯粹与应用数学年刊 (4), 201 (2022), 2471– 2504. 2, 3, 5, 6, 11, 12, 29[6][7] F. Bianchi、L. Brasco、A. C. Zagati，《Sobolev-Slobodeckij 空间中的尖锐 Hardy 不等式》，预印本 (2022 https://arxiv.org/abs/2209.03012 22 31 36)，可获取于 , , J. Bourgain、H. Brezis、P. Mironescu,[8]《再论索博列夫空间》，*Optimal control and partial differential equations* 439 455, 2001 2, 12 , – IOS, 阿姆斯特丹，.

[9] L. Brasco、E. Cinti、S. Vita，《分数阶法贝尔-克拉恩不等式的定量稳定性估计》，J. Funct. Anal., 279 (2020), 108560, 49 页。6, 16

[10] L. Brasco、E. Parini、M. Squassina，《分数阶 p–拉普拉斯算子变分特征值的稳定性》，离散与连续动力系统，**36** 2016 1813 1845 31 ( )，– . L. Brasco、A. Salort，《关于分数阶齐次索博列夫空间的注记》，[11] 纯粹与应用数学年刊 (4)，**198** 2019 1295 1330 15 ( )，– . C. B. Croke，《平面区域拉普拉斯算子的第一特征值》，美国数学会会刊，81 (1981), 304–305. 4[12][13] E. Di Nezza、G. Palatucci、E. Valdinoci，《分数阶索博列夫空间指南》，数学科学通报，**136**, 521 573 11 – . D. E. Edmunds、W. D. Evans，*Fractional Sobolev spaces and inequalities*。剑桥数学专题丛书，[14] **230** 2023 2, 11, 12, 26 。剑桥大学出版社，剑桥，. R. L. Frank、R. Seiringer，[15]《半空间中的尖锐分数阶 Hardy 不等式》。见 *Around the research of Vladimir Maz'ya* 161 167，**11**，2010 。I, – 国际 29 数学丛书（纽约），施普林格，纽约，.[16]

N. Gigli、S. Mosconi，《抽象 Lewy-Stampacchia 不等式及其应用》，纯粹与应用数学杂志，104 (2015 258 275 31), – . S. E. Graversen 、 M. Rao，《狄利克雷拉普拉斯算子的布朗运动与特征值》，数学杂志，203 (1990), 699–708. 4[17][18] **7** 1977 78 247 254 2, 5 W.[19] ¨ *The analysis of linear partial differential operators I. Distribution theory and Fourier Analysis.* K. Hayman，《主频率的一些界》，应用分析，(/)，– . L. Hormander，《第二版的重印本》。数学经典丛书。施普林格出版社，柏林，. E. Makai，《单连通膜主频率的下界估计》，匈牙利科学院数学学报，**16** 1965 319 323 2 ( )，– . V. Maz'ya，[21] *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*。第二版，修订并增补。数学科学基础丛书 [数学科学基本原理], **342** 2011 17, 21, 23 。施普林格，海德堡，. R. Osserman，[22]《关于 Hayman 鼓的低音定理的注记》，瑞士数学评论，52 (1977), 545–555. 3[23] ´ **6** 2004 1 15 17 A. C.[24] 4 **197** 2018 Ponce，《一种具有 Poincaré 不等式精神的估计》，欧洲数学会杂志 (JEMS), ( )，– . A. Ritorto，《分数阶拉普拉斯算子的最优划分问题》，纯粹与应用数学年刊 ( ), ( ), 501–516. 6[25] S. Shi、J. Xiao，《有界开利普希茨集的相对分数阶容量》，势分析，45 (2016), 261–298. 6[26] J. Simon，《索博列夫、Besov 和 Nikol´skii 分数阶空间：区间上向量值空间的嵌入与比较》，纯粹与应用数学年刊 (4 **157** 1990 117 148 20), ( )，– . B. Siudeja，《稳定过程的散射长度》，[27] 伊利诺伊数学杂志，**52** 2008 667 680 3, 6 ( )，– . G. Talenti，《关于一个积分不等式》，比萨高等师范学校科学部年刊 ( ), 21 (1967), 167–188. 16[28][29] M. E. Taylor，《鼓的基频估计》，杜克数学杂志，46 (1979), 447–453. 3, 4, 5, 6, 21[30] M. E. Taylor，《正势对 $-\Delta$ 的散射长度及扰动》，数学分析与应用杂志，53 (1976 291 312 3), – . M. Warma，《开集上的分数阶相对容量以及具有诺伊曼和罗宾边界条件的分数阶拉普拉斯算子》，[31] 势分析，42 (2015), 499–547. 6

(F. Bianchi) Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
Università di ParmaParco Area delle Scienze 53/a, Campus,
43124 Parma, Italy*Email address*: francesca.bianchi@unipr.it

（L. Brasco） Dipartimento di Matematica e Informatica
Università degli Studi di FerraraVia Machiavelli 35,
44121 Ferrara, Italy*Email address*: lorenzo.brasco@unife.it