arXiv:2301.08035v2 [math.GR] 9 Oct 2024

中心的底是理想的群代数的分类

Sofia Brenner*数学研究所，耶拿弗里德里希·席勒大学，德国
sofia.bettina.brenner@uni-jena.de

摘要

设 F 是一个域。我们研究有限群 G 的结构，其中群代数 FG 的中心的底是 FG 中的一个理想。在 [6], 中，我们研究了这一环论性质对 FG 的结构会产生哪些一般影响。本文则聚焦于对具有这一性质的群进行详细的结构分析。我们通过为一类原型群推导出完整的分类，展示了这一性质的作用。

1 引言

设 F 是一个域， G 是一个有限群。一个值得探讨的自然问题是， G 的哪些结构特征由其群代数 FG 的（环论）性质所决定。这个问题被列为 Brauer 著名问题清单中的问题16 [3], ，并已得到广泛研究。这是因为群代数是有限群表示论所研究的核心对象。本文通过研究以下问题，为这一研究方向作出贡献：

对于哪些有限群 G，中心 FG 的中心的底 soc(ZFG) 是 FG 中的一个理想? ?

此前，人们研究过中心 FG 的 Jacobson 根所对应的问题（见 [7, 13, 14]），以及 Reynolds理想的相关问题（见 [6, 定理 A]）。关于中心的底是理想的对称代数的一般性结果见 [5]。在 [6], 中，我们着重从 soc(ZFG) 是 FG 中的理想这一假设出发，推导有限群 G 的一般结构性质。与此不同，本文旨在精确分类具有这一性质的群，从而凸显该性质在结构上的深远影响。利用 [6], 的结果，我们首先详细描述具有这一性质的群。随后，我们针对一个原型情形给出完整分类。归根结底，我们证明，这些群可以构造成 Camina p-群的扩张与一个高阶自同构的中心积。

主要问题的约化起点来自 [6], ，可概括如下：

事实（[6, 注 3.1、定理 3 和 4]）。我们可以假设 F 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域。此外，只需研究满足以下性质的有限群 G：

(i) G' 是 G 的一个 Sylow p-子群（特别地，对于阿贝尔 p'群 H，我们有 $G \cong G' \rtimes H$ ），并且

(ii) $O_{p'}(G) = 1$。

*现地址：德 数学系，达姆施塔特工业大学，德国。电子邮件地址： sofia.brenner@tu-darmstadt.d e

为简单起见，我们将满足 (i) 和 (ii) 的群 G 称为基本群。我们将在第2节回顾将主要问题归约到基本群的过程。

设 $G \cong G' \rtimes H$ 是一个有限基本群，且 soc(ZFG) 是 FG中的理想。由 [6, 命题 3.20], 可得

$$G'' \subseteq \Phi(G') \subseteq Z(G').$$

令 $D := G/G''$ 以及 $Z_D := Z(G')/G''$。注意，$D \cong D' \rtimes H$，其中我们将 H 与其在 D中的像视为相同。作为关键步骤，我们得到以下分解结果：

定理 A. 设 F 是特征为 $p > 0$的域，且 G 是一个有限基本群，其中 soc(ZFG) 是 FG中的理想。群 D 具有以下性质：

(i) $D' = T \times Z_D$，对于 D的一个初等阿贝尔正规子群 T。

(ii) 记 $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ 为 D的极小正规子群 T_1、.....、T_n。那么

$$H/C_H(T) \cong H/C_H(T_1) \times \cdots \times H/C_H(T_n),$$

其中，对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$，群 $H/C_H(T_i)$ 是阶为 $|T_i| - 1$的循环群。

相比之下，分析 H 在 Z_D 上的作用更为复杂。因此，我们聚焦于情形 $Z_D = 1$，即 $Z(G') = G''$；我们认为这是一般分类的基石。我们的主要结果是以下刻画：

定理 B. 设 F 是特征为 $p > 0$ 的域，且 G 是满足 $Z(G') = G''$ 的有限基本群。那么，以下条件等价：

(i) soc(ZFG) 是 FG 中的理想。

(ii) G 是群 $G_1, \ldots, G_n$ 的中心积，这些群具有 $G_i = K_i \rtimes \langle \varphi_i \rangle$ ($i = 1, \ldots, n$) 的形式，其中

(a) K_i 是幂零类 2 的 Camina p-群；(b) φ_i 是 K_i 的一个阶为 $|K_i : K_i'| - 1$ 的自同构，使得 $\langle \varphi_i \rangle$ 在 K_i 中传递地置换 K_i' 的非平凡陪集；(c) $\langle \varphi_i \rangle$ 在 K_i' 上的作用不忠实。

在例4.17中，我们给出了一些自然满足定理 B(ii) 中条件的群族。研究具有大阶自同构的 Camina p-群（如定理 B(ii) 中所述）本身也很有意义。

本文按如下方式组织：在第2节中，我们介绍记号，并回顾 [6]中的若干结果。特别地，我们回顾从一般问题约化到基本群的过程。在第3节中，我们研究商群 G/G'' 的结构，并证明定理 A。第4节专门讨论特殊情形 $Z(G') = G''$ 下的分类，即定理 B 的证明。

2 预备知识

本节介绍本文中使用的记号，并回顾 [6] 中得到的一些结果。特别是，我们将说明如何将主要问题归结为对基本群的研究（见第2.2.1节）。

2.1 记号

本文始终假设 G 是一个有限群。按照惯例，令 G'、 $Z(G)$ 和 $\Phi(G)$ 分别表示 G 的导出子群、中心和 Frattini 子群。对于 a、 $b \in G$ 和 $[A,B] \coloneqq \langle [a,b] \colon a \in A$，记 $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$；对于 A、 $B \subseteq G$，记 $b \in B\rangle$。回顾一下，若有 $G = \langle G_1$、 $G_2\rangle$ 和 $[G_1, G_2] = 1$，则称 $G = G_1 * G_2$ 是子群 G_1 和 G_2 的中心积。对于 G 的子集 S 和 T，令 $C_T(S)$ 表示 S 在 T 中的中心化子。对于 $g \in G$，用 $[g]_G$ 表示 g 在 G 中的共轭类。注意，对于 U_G、 $_g \coloneqq \{[a,g] \colon a \in G\} \subseteq G'$，$[g]_G = U_G$、 $_g g$ 成立。令 $\mathrm{Cl}(G)$ 表示 G 中共轭类的集合；若 g、 $h \in G$ 在 G 中共轭，则记为 $g \sim h$。若对所有 $g \in G \setminus G'$ 都有 $[g]_G = gG'$ 成立，则称群 G 为 Camina 群（有关 Camina 群结构的结果，参见例如 [8]）。对于素数 $p \in \mathbb{N}$，$g \in G$ 的 p-部分和 p'-部分分别记为 g_p 和 $g_{p'}$。按照惯例，令 $O_p(G)$、 $O_{p'}(G)$、 $O^p(G)$ 和 $O^{p'}(G)$ 分别表示 G 的 p-核、 p'-核、 p-剩余子群和 p'-剩余子群。令 $\mathrm{Syl}_p(G)$ 表示 G 的 Sylow p-子群的集合。对于 $d \in \mathbb{N}$，$\mathrm{AGL}(1, p^d) \cong \mathbb{F}_{p^d} \rtimes \mathbb{F}_{p^d}^{\times}$ 表示 $\mathbb{F}_{p^d}$ 上的一维仿射线性群。

对于域 F 上的有限维代数 A，我们考虑其 Jacobson 根 $J(A)$ 和（左）底 $\mathrm{soc}(A)$，后者是 A 的所有极小左理想之和。已知 $J(A)$ 和 $\mathrm{soc}(A)$ 都是 A 中的理想。本文中，A 的理想一律指双边理想，而 $I \trianglelefteq A$ 表示 I 是 A 的理想。

下文中，我们研究域 F 上有限群 G 的群代数 FG。回顾一下，FG 是一个对称代数。对于 $X \subseteq G$，我们定义

$$X^+ \coloneqq \sum_{x \in X} x \in FG.$$

众所周知，共轭类和构成 FG 的中心 ZFG 的一个 F-基。本文研究 ZFG 的底 $\mathrm{soc}(ZFG)$，它是 ZFG 中的理想，但不一定是 FG 中的理想。更准确地说，$\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的理想，当且仅当它在与 FG 的元素相乘下封闭。对于子集 $S \subseteq ZFG$，令 $\mathrm{Ann}_{ZFG}(S)$ 表示 ZFG 中 S 的湮灭子。由于 ZFG 是有限维的，对于每个 ZFG-模 M，我们有 $\mathrm{soc}(M) = \{m \in M \colon J(ZFG)m = 0\}$（见 [2, 推论 15.21]）。特别地，$\mathrm{soc}(ZFG) = \mathrm{Ann}_{ZFG}(J(ZFG))$。

2.2 先前工作

本节总结了 [6] 关于有限群 G 的结构的结果，其中 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG中的一个理想。第2.2.1节说明若干约化步骤。第2.2.2节总结了 [6] 的其他结果，这些结果将在下文中用到。

2.2.1 约化

本节说明了 [6]对主要问题所作的一些约化。特别是，我们总结了这样一个论证：只需考虑基本群。

首先，我们考虑底域的选择。由于半单群代数的情形下问题是平凡的（见 [6, 备注3.1]），因此只需考虑特征为 $p > 0$的域 F。对于每个有限群 G 和每个特征为 $p > 0$的域 F，$\mathrm{soc}(Z\mathbb{F}_pG) \trianglelefteq \mathbb{F}_pG$ 当且仅当 $\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$。因此，以下我们可以假设 F 是代数闭的。

如引言中所述，若有限群 G 满足 G' 是 G 的 Sylow p-子群，且 $O_{p'}(G) = 1$ 成立，我们称其为基本的。现在设 G 是任意一个有限群，且 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的理想。那么，对于 Sylow p-子群 P 和阿贝尔 p'-群 H，有 $G = P \rtimes H$（见推论 3.5]）。对于这类群，$\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$ 等价于 $\mathrm{soc}(ZF[G/O_{p'}(G)]) \trianglelefteq F[G/O_{p'}(G)]$（见引理 3.10]）。通过考察

到 $G/O_{p'}(G)$，因此我们可以假设 $O_{p'}(G) = 1$。有关更多细节以及这些结果在块理论中的各种推论，请参阅第 3 节。

根据 $[6, \text{定理 } 4],$，我们有中心积分解 $G = C_P(H) * O^p(G)$。此外，$\mathrm{soc}(ZFC_P(H))$ 和 $\mathrm{soc}(ZFO^p(G))$ 分别是 $FC_P(H)$ 和 $FO^p(G)$ 中的理想。由于 p-群$C_P(H)$ 的结构由 $[6, \text{定理 } 2]$, 确定，因此只需考虑群 $O^p(G)$。因此，我们可以假设$O^p(G) = G$，这意味着 G' 是 G 的一个 Sylow p-子群（见 $[6, \text{备注 } 5.1]$）。总之，我们可以假设 G 是一个基本群。关于这一约化的更多细节，请参见 $[6, \text{节 } 5]$。

2.2.2 更多结果

设 F 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域，且 G 是一个有限群。本节总结了来自 [6] 、后续章节将用到的结果。我们经常会用到以下判据:

引理 2.1（$[6, \text{引理 } 3.3]$）。底 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的理想，当且仅当 $\mathrm{soc}(ZFG) \subseteq (G')^+ \cdot FG$。

对于在我们的研究中经常出现的中心积，以下约化定理成立:

引理 2.2（$[6, \text{定理 } 3.33]$）。设 G 是子群 G_1 和 G_2 的中心积。那么，底 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的理想，当且仅当对于每个 $i \in \{1, 2\}$，底 $\mathrm{soc}(ZFG_i)$ 都是 FG_i 中的理想。

根据上一节，我们可以假设 G 是一个基本群。在本节结束之前，我们还假设底 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的理想。注意,

$$\mathrm{soc}(FG) = \mathrm{Ann}_{FG}(J(FG)) = \mathrm{Ann}_{FG}(J(FG')FG) = (G')^+ \cdot FG,$$

因为 G' 是 G 的一个 Sylow p-子群（见 $[15, \text{定理 } 1.11.10]$）。由引理 2.1，我们于是得到

$$\mathrm{soc}(ZFG) = (G')^+ \cdot FG = \mathrm{soc}(FG).$$

全文中，我们将使用以下关于 G' 的幂零类的核心结果:

引理 2.3（$[6, \text{命题 } 3.20]$）。我们有 $\Phi(G') \subseteq Z(G')$。特别地， G' 的幂零类至多为 2，且 G'' 是初等阿贝尔群。

本文相当大一部分内容是研究商群 $D := G/G''$。对于 $g \in G$，我们$\bar{}$ $\bar{}$ $\bar{}$令 $\bar{g}$: $= gG'' \in D$ （对 G 的子集也类似）。由于 $D \cong D' \rtimes H$ 与 $H \cong H$ 成立，我们通常将 H和 H视为相同。以下观察将在本文中频繁用到:

注 2.4。

(i) 由 $[10, \text{定理 } 6.4.3]$, 可得 $C_G(G') = Z(G')$。由 $[6, \text{注 } 5.1]$, 可得 $G' = [G', H]$ ，且$C_{G'}(H) = Z(G)$。特别地，这可推出 $G = HG' = H[G', H]$。

(ii) 由 (i)，我们得到 $D' = [D', H]$。因此，根据 $[10, \text{Theorem } 5.2.3]$, $C_{D'}(H) = 1$。

(iii) 设 $h \in C_H(D')$。由于 $G'' \subseteq \Phi(G')$, h 在 $G'/\Phi(G')$ 上平凡作用，因此根据 $[10, \text{Theo- rem } 5.1.1]$, 它在 G' 上也平凡作用。由于 H 是阿贝尔群，这意味着 $h \in Z(G) \cap H \subseteq O_{p'}(G) = 1$。特别地，这得到 $O_{p'}(D) \subseteq C_H(D') = 1$，因此 D是基本的。

(iv) 设 $h \in H$ 和 $a \in [h]_G$。我们将 $a = ch$ 写作 $c \in G'$。如果 h 和 c 可交换，则有 $c = a_{p'}$。由于 h和 a 在 G中共轭，因此得到 $c = 1$。

在全文中，我们对 $J(ZFG)$ 使用以下基:

引理 2.5（[6,定理 3.14]）。对于 $C \in \mathsf{Cl}(G)\setminus\{1\}$，我们令 $b_C = C^+ - |C|\cdot 1$。那么 $\{b_C\colon\ C \in \mathsf{Cl}(G)\setminus\{1\}\}$ 是 $J(ZFG)$ 的一个 F-基。

注 2.6. 设 $C \in \mathsf{Cl}(G)$。当且仅当 p 整除 $|C|$ 时，$C \not\subseteq Z(G')$ 成立。

接下来，我们考虑典范投影

$$\nu\colon FG \to FD,\ \sum_{g\in G} a_g g \mapsto \sum_{g\in G} a_g \bar{g}.$$

我们设 $\mathcal{C} := \{C \in \mathsf{Cl}(G)\setminus\{1\}\colon\ \nu(b_C) \neq 0\}$。根据 [6,引理 3.28],，我们有

$$\mathcal{C} = \left\{ C \in \mathrm{Cl}(G)\colon C \not\subseteq G'' \text{ and } p \text{ does not divide } \frac{|C|}{|\bar{C}|} \right\}. \tag{2.1}$$

子集 $\overline{\mathcal{C}}^+ := \{b_{\bar{C}}\colon\ C \in \mathcal{C}\}$ 在 $J(ZFD)$ 中对我们的研究起着根本作用。这里，$b_{\bar{C}}$ 表示$^-$与 $C \in \mathsf{Cl}(D)$ 对应的 $J(ZFD)$ 的基元素（见引理 2.5）。我们主要使用 [6, 定理 3.31] 的以下特殊情形:

定理 2.7. 我们有 $\mathsf{Ann}_{ZFD}\big(\overline{\mathcal{C}}^+\big) = (D')^+ \cdot FD$。

对于 $h \in H$，回想一下，$U_{D,h} = \{[d,h]\colon\ d \in D'\}$。应用定理 2.7 时，我们使用 $\mathsf{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+)$ 的以下描述:

引理 2.8。我们有

$$\mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+) = \bigcap_{\substack{C\subseteq Z(G'),\\ C\not\subseteq G''}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(\bar{C}^+ - |\bar{C}|\cdot 1) \cap \bigcap_{\substack{p'\text{-conjugacy classes}\\ C\in\mathcal{C}}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(\bar{C}^+).$$

此外，如果 $h \in H$ 和 $C := [h]_G \in \mathcal{C}$，那么 $U_{D,\,h}$ 是 D 的非平凡正规子群，并且

$$\mathrm{Ann}_{ZFD}(\bar{C}^+) = \mathrm{Ann}_{ZFD}(U_{D,h}^+).$$

证明。首先，令 $C \in \mathsf{Cl}(G)$，其中 $C \not\subseteq Z(G')$，并令 $C' \in \mathsf{Cl}(G)$ 为包含 C中元素的 p'-部分的共轭类。我们断言 $C \in \mathcal{C}$ 蕴含 $C' \in \mathcal{C}$。为此，令 $g \in C$。由于 G 是可解群，且 H 是 G的一个 Hall p'-子群，因此 $g_{p'}$ 在 G 中共轭于 H中的一个元素。故不妨设 $h := g_{p'} \in H$。若 $h = 1$，则有 $C \subseteq G'$，从而 $C \subseteq D'$，所以 $|C|$ 不能被 p整除。由于 $C \not\subseteq Z(G')$，p整除 $|C|$（见注 2.6），这与 (2.1) 得出的 $C \in \mathcal{C}$ 矛盾。因此 $h \neq 1$。由引理 3.16],（取 $N = G''$ 并利用 $\nu(b_C) = \nu(C^+) \neq 0$，这是由 $C \in \mathcal{C}$得出的），我们有 $C \subseteq C_G(G'')$，这蕴含 $C' \subseteq C_G(G'')$。现在，将引理 3.30], 应用于 $N = G''$，可得 $C' \in \mathcal{C}$。此外，由推论 3.23], 可知 $\mathsf{Ann}_{ZFD}(\bar{C'}^+) \subseteq \mathsf{Ann}_{ZFD}(\bar{C}^+)$。综上可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+) &= \bigcap_{\substack{C\subseteq Z(G'),\\ C\not\subseteq G''}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(b_{\bar{C}}) \cap \bigcap_{\substack{C\in\mathcal{C},\\ C\not\subseteq Z(G')}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(b_{\bar{C}}) \\
&= \bigcap_{\substack{C\subseteq Z(G'),\\ C\not\subseteq G''}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(b_{\bar{C}}) \cap \bigcap_{\substack{p'\text{-conjugacy classes}\\ C\in\mathcal{C}}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(b_{\bar{C}}) \\
&= \bigcap_{\substack{C\subseteq Z(G'),\\ C\not\subseteq G''}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(\bar{C}^+ - |\bar{C}|\cdot 1) \cap \bigcap_{\substack{p'\text{-conjugacy classes}\\ C\in\mathcal{C}}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(\bar{C}^+).
\end{aligned}$$

现在令 $C \in \mathcal{C}$ 为一个 p'-共轭类。根据第一部分，C 包含一个元素 $h \in H\setminus\{1\}$。由引理 3.22], 可知 $\bar{C} = U_{D,\,h}\cdot\bar{h}$ 且 $U_{D,\,h}$ 是 D的非平凡正规子群。此外，$\mathsf{Ann}_{ZFD}(\bar{C}^+) = \mathsf{Ann}_{ZFD}(U_{D,\,h}^+)$。 □

3 G/G'' 的结构

在本节中，设 F 为特征 $p > 0$ 的代数闭域，设 G 为一个有限基本群，且 soc(ZFG) 是 FG中的一个理想。与前文一样，我们用 $G = G' \rtimes H$ 表示 G的一个 Hall p'-子群 H。本节中，我们研究商群 $D := G/G''$的结构。设 $Z_D := Z(G')/G''$。我们的目标是证明以下结果：

定理 A. 群 D 具有以下性质：

(i) $D' = T \times Z_D$ 对于 D的一个初等阿贝尔正规子群 T。

(ii) 设 $T = T_1 \times \cdots \times T_n$ 为 D的极小正规子群 T_1，....., T_n。那么

$$H/C_H(T) \cong H/C_H(T_1) \times \cdots \times H/C_H(T_n).$$

此外，对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$，群 $H/C_H(T_i)$是阶为 $|T_i| - 1$的循环群。

定理 A 的 (i) 和 (ii) 部分将分别在第 3.1 节和第 3.2 节中证明。

3.1 D'的分解

本节推导定理 A 第 (i) 部分给出的 D' 的直积分解。这是所有后续结果的基础。回顾引理 2.3，我们有 $G'' \subseteq Z(G')$。下文中，我们将 H视为其在 D中的像。

令 $J(G')$ 表示 G'的汤普森子群，即由 G' 的所有最大阶阿贝尔子群生成的子群。关于 $J(G')$ 的以下结果或许具有独立的研究价值：

引理 3.1. 对于 $M := \{x \in G' : x^p \in G''\} \trianglelefteq G$，有 $J(G') = G' = MZ(G')$。

证明. 令 $J := J(G')$ 且 $\hat{M} := \{x \in [J, G] : x^p \in [J, [J, G]]\}$。于是，将引理 3.18], 应用于 $N = J$，得到

$$G' = C_{G'}(J)\hat{M} = C_{G'}(J)J \tag{3.1}$$

（使用 $\hat{M} \subseteq J \subseteq G'$）。注意到 $C_{G'}(J) \subseteq J$，因为 $C_{G'}(J)$ 中的每个元素都中心化 G' 中每个阶最大的阿贝尔子群 A，因此由极大性可知它包含于 A。这意味着 $G' = J$。利用 $\hat{M}$ $G' = [G'H, G'H] = [G', G'H] = [G', G]$，得到 $M = M$，进而由 (3.1) 得出 $G' = Z(G')M = MZ(G')$。□

由此，我们得到 D' 的所需分解：

定理 3.2。存在 D 的一个初等阿贝尔正规子群 T，使得 $D' = T \times Z_D$。

证明。由引理 3.1，存在 $G' = MZ(G')$，其中 $M := \{x \in G' : x^p \in G''\} \trianglelefteq G$。注意， M/G'' 是初等阿贝尔群。根据马施克定理，存在 G 的一个正规子群 L，使得 $G'' \subseteq L$，且满足$M/G'' = L/G'' \times C_M(G')/G''$。由此，我们得到

$$D' = G'/G'' = (M/G'')(Z(G')/G'') = L/G'' \times Z(G')/G''.$$

令 $T := L/G''$ 即可证明该命题。□

这就证明了定理 A 的第一部分。

注 3.3. 注意， D' 中在 D 内为正规的子群，恰好是 D'的 $\mathbb{F}_pH$-子模。特别地，包含于 T 中的 D 的极小正规子群，是 T的简单 $\mathbb{F}_pH$-子模。在定理 3.2 的情形下， T 是一个半单 $\mathbb{F}_pH$-模。因此，存在 $n \in \mathbb{N}_0$ 以及简单的$\mathbb{F}_pH$-模 $T_1, \dots, T_n$，使得

$$T = T_1 \times \cdots \times T_n.$$

由于 $C_{D'}(H) = 1$（见注 2.4），对于所有 $i \in \{1, \dots, n\}$， T_i都是非平凡的 $\mathbb{F}_pH$-模。特别地，我们有 $|T_i| \geq 3$。

在本节余下部分，设 T 如定理 3.2 所述，并固定一个如注 3.3 所述的分解 $T = T_1 \times \cdots \times T_n$。

例 3.4. 设 F 是一个特征为 2 的域，并令 $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$。我们有 $G = G' \rtimes H$，其中 $G' \cong Q_8$ 且 $H \cong C_3$。此外， $Z(G) =: \langle z \rangle$ 是一个 2 阶循环群。
我们首先证明 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的一个理想。对于 $h \in H$，令 $S_h := \mathrm{soc}(ZFG) \cap FhG'$。由于根据注 3.15] , $\mathrm{soc}(ZFG) = \bigoplus_{h \in H} S_h$ 成立，且对于所有 $h \in H$，我们有 $(hG')^+ \in S_h$，因此只需证明 $\dim_F S_h = 1$。导出子群 G' 分解为共轭类 $\{1\}$、 $Z(G) \setminus \{1\}$ 和$G' \setminus Z(G)$，由此容易得到 $S_1 \subseteq FZ(G)^+ + F(G' \setminus Z(G))^+$。对于 $h \in H \setminus \{1\}$，陪集 hG'由共轭类 $[h]_G$和 $[hz]_G$组成，因此可得 $S_h \subseteq F[h]_G^+ + F[hz]_G^+$。由于对于所有 $h \in H \setminus \{1\}$， $Z(G)^+ \cdot [h]_G^+ = (hG')^+ \neq 0$ 成立，因此对于所有 $h \in H$，我们得到 $\dim_F S_h = 1$。

群 H 在 $D' \cong C_2 \times C_2$的非平凡元素上传递地作用。特别地， D' 是一个简单的$\mathbb{F}_2H$-模，因此我们得到定理 3.2 和注 3.3 中给出的分解里的 $n = 1$、 $T = D'$ 和 $Z_D = 1$。

3.2 H的作用

本节研究 H 对群 D'的作用，尤其是对上一节定义的其子群 T 的作用。我们的目标是证明定理 A 的第 (ii) 部分。全文沿用定理 3.2 和注 3.3 中的记号。同样，对于每个 $g \in G$，我们令 $\bar{g} := gG'' \in D$ （对于 G的子集也类似）。

本节从以下技术引理开始:
引理 3.5. 对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，令 $N_i := \prod_{j \neq i} T_j \times Z_D \trianglelefteq D$，并考虑 N_i在 G中的原像 M_i。则有以下结论:

(i) 中心化子 $C_H(M_i)$ 非平凡。

(ii) 对每个 $h \in C_H(M_i) \setminus \{1\}$，都有 $[h]_G \in \mathcal{C}$和 $[h]_D = T_i \cdot h$。

证明。

(i) 注意到 $D' = T_i \times N_i$。由于 $T_i \neq 1$，我们有 $N_i^+ \notin (D')^+ \cdot FD$，这意味着根据定理 2.7， $N_i^+ \notin \mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+)$。因此存在 $C \in \mathcal{C}$使得 $N_i^+ \cdot b_{\bar{C}} \neq 0$，其中 $b_{\bar{C}}$表示 $J(ZFD)^-$ 中对应于 C 的基元素（见引理 2.5）。若 $C \subseteq Z(G')$，则 $C \subseteq Z_D$。这将导致矛盾$N_i^+ \cdot b_{\bar{C}} = N_i^+ \cdot (\bar{C}^+ - |\bar{C}| \cdot 1) = |\bar{C}| \cdot N_i^+ - |\bar{C}| \cdot N_i^+ = 0$，因为 N_i 包含 Z_D。根据引理 2.8，我们现在可以假设 C 是一个 p'- 共轭类。因此，对某个 $h \in H \setminus \{1\}$，有 $C = [h]_G$。此外， [6, 引理 3.30] 得出 $h \in C_G(G'')$，并且根据 [6, 引理 3.16], ，有 $h \in C_H(N_i)$。根据 [10, 定理 5.3.2],，进而得到 $h \in C_H(M_i)$，所以该群是非平凡的。

(ii) 令 $h \in C_H(M_i) \setminus \{1\}$ 并设 $C := [h]_G$。于是$C = U_{D,\, h} \cdot h$ （见引理 2.8）。由于 $D' = T_i \times N_i$，且 h 中心化 N_i，我们得到$U_{D,\, h} \subseteq T_i$ （见注 2.4），因为 H 规范化了 T_i。另一方面

另一方面，由于 D' 是阿贝尔的，映射 $\alpha\colon T_i \to T_i,\ t \mapsto [t,h]$ 是 $\mathbb{F}_pH$-模同态。由于 $h \notin C_H(D')$（见注 2.4），根据舒尔引理，α 是一个同构，从而得到 $T_i = U_{D,\,h}$。此外，$h \in C_H(M_i) \subseteq C_H(G'')$ 根据引理 3.30推出了 $C \in \mathcal{C}$。 □

例 3.6. 对于例 3.4 中的群 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$，我们有 $M_1 = G'' = Z(G)$，因此对于 G 的任意 Hall $2'$-子群 H，都有 $C_H(M_1) = H$。

定理 A(ii) 的证明将依赖于定理 2.7。为了简化对出现的湮灭子的计算，我们先改进引理 2.8：

引理 3.7. 我们有

$$\mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+) = \bigcap_{\substack{\bar{C}\in \mathrm{Cl}(D)\setminus\{1\}\\ \bar{C}\subseteq Z_D}} \mathrm{Ann}_{ZFD}(b_{\bar{C}}) \cap \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}_{ZFD}(T_i^+).$$

证明. 令

$$M \coloneqq \{b_{\bar{C}}\colon \bar{C} \in \mathrm{Cl}(D)\setminus\{1\},\, \bar{C} \subseteq Z_D\} \cup \{T_1^+, \dots, T_n^+\},$$

因此我们需要证明 $\mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+) = \mathrm{Ann}_{ZFD}(M)$。

首先，设 $y \in \mathrm{Ann}_{ZFD}(M)$。由于对于任意满足 $C \subseteq Z(G')$ 的 $C \in \mathrm{Cl}(G)$，都有 $\bar{C} \subseteq Z_D$，因此我们需要证明对于每个 p'-共轭类 $C \in \mathcal{C}$，均有 $y \cdot \bar{C}^+ = 0$（见引理 2.8）。由引理 2.8，存在某个 $h \in H$，使得 $C = U_{D,h} \cdot h$，并且 $U_{D,h}$ 是包含于 D' 中的 D 的非平凡正规子群。只需证明 $y \cdot U_{D,h}^+ = 0$。若对某个 $i \in \{1,\dots,n\}$ 有 $[h,T_i] \neq 1$，则 $T_i \subseteq U_{D,h}$，因为 T_i 是 D 的极小正规子群。特别地，$U_{D,h}$ 是 T_i 的陪集之并，因此可得 $y \cdot U_{D,h}^+ = 0$。反之，假设对每个 $i \in \{1,\dots,n\}$ 都有 $[h,T_i] = 1$，即 $h \in C_H(T)$。由注 2.4 (iii)，h 在 D' 上的作用非平凡，这意味着 $[h,Z_D] \neq 1$，因此 $U_{D,h} \cap Z_D \neq 1$。于是

$$(U_{D,h} \cap Z_D)^+ = (U_{D,h} \cap Z_D)^+ - |U_{D,h} \cap Z_D| \cdot 1 = \sum_{\substack{K\in \mathrm{Cl}(D),\\ K\subseteq U_{D,h}\cap Z_D}} K^+ - |K| \cdot 1 \in FM$$

被 y 湮灭，因此 $y \cdot U_{D,\,h}^+ = 0$ 由此可得，因为 $U_{D,\,h}$ 是 $U_{D,\,h} \cap Z_D$ 的陪集之并。

反过来，设 $y \in \mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+)$。对于满足 $C \subseteq Z(G')$ 和 $C \not\subseteq G''$ 的 $C \in \mathrm{Cl}(G)$，由 (2.1) 得 $C \in \mathcal{C}$。特别地，y 对所有满足 $C \subseteq Z_D$ 的 $C \in \mathrm{Cl}(D)$ 都湮灭 $b_{\bar{C}}$。现在设 $i \in \{1,\dots,n\}$。由引理 3.5，存在一个元素 $h \in C_H(M_i) \setminus \{1\}$，使得 $[h]_G \in \mathcal{C}$，并且 $[h]_D = T_i \cdot h$。条件 $y \cdot [\bar{h}]_D^+ = 0$ 于是转化为 $y \cdot T_i^+ = 0$，这证明了 $y \in \mathrm{Ann}_{ZFD}(M)$。 □

下面的观察在我们的论证中起着至关重要的作用：

引理 3.8. 对于 $i \in \{1,\dots,n\}$，设 $t_i, t_i' \in T_i$ 满足 $t_i = t_i' = 1$ 或 $t_i \neq 1 \neq t_i'$。那么 $t \coloneqq t_1 \cdots t_n$ 和 $t' \coloneqq t_1' \cdots t_n'$ 在 D 中共轭。

证明。我们对 $m \coloneqq |\{i \in \{1,\dots,n\}$进行归纳：$t_i \neq 1\}|$. 我们可以假设 $t_i \neq 1$，其中 $i \in \{1,\dots,m\}$且 $t_{m+1} = \ldots = t_n = 1$。对于 $m = 0$，无需证明。对于 $m \in \{1,\dots,n\}$，我们考虑子群W：
$= T_{m+1} \times \cdots \times T_n \times Z_D \trianglelefteq D$。下文令 $[t] \coloneqq [t]_D$ 且 $[t'] \coloneqq [t']_D$。设 $\ell \coloneqq |[t]|$、$\ell' \coloneqq |[t']|$以及 $y \coloneqq (\ell'[t]^+ - \ell[t']^+) \cdot W^+$。由于 D' 是阿贝尔的（见注 2.6），ℓ 和 ℓ' 均不能被 p 整除。利用引理 3.7，我们现在证明 $y \in \mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{\mathcal{C}}^+)$。注意 $(T_1 \times \cdots \times T_m) \cap W = 1$。根据构造，我们有 $y \in ZFD$. 令 $\nu_W\colon FD \to F[D/W]$ 表示典范投影。若 $C \in \mathrm{Cl}(D) \setminus \{1\}$ 是一个满足 $\bar{C} \subseteq Z_D$ 的共轭类，则 $\bar{C} \subseteq W$，从而 $W^+\bar{C}^+ = |C|W^+$。因此 $W^+ \cdot b_{\bar{C}} = 0$，进而 $y \cdot b_{\bar{C}} = 0$。根据引理 3.7，只需证明对每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，都有 $y \cdot T_i^+ = 0$。

首先令 $i \in \{1,\dots,m\}$。由归纳法可得 $C_i \coloneqq [t_1\cdots t_{i-1}\cdot t_{i+1}\cdots t_m]_D = [t'_1\cdots t'_{i-1}\cdot t'_{i+1}\cdots t'_m]_D$。我们有 $[t]^+\cdot T_i^+ = \frac{\ell}{|C_i|}\cdot C_i^+\cdot T_i^+$，而对 $[t']^+\cdot T_i^+$ 也有类似的公式。因此得到

$$\left(\ell'[t]^+ - \ell[t']^+\right)\cdot T_i^+ = \ell'\cdot\frac{\ell}{|C_i|}\cdot C_i^+\cdot T_i^+ - \ell\cdot\frac{\ell'}{|C_i|}\cdot C_i^+\cdot T_i^+ = 0$$

因此 $y\cdot T_i^+ = 0$ 成立。现在设 $i\in\{m+1,\dots,n\}$。由于 $T_i\subseteq W$，我们得到 $\nu_W(T_i^+) = 0$，因此 $y\cdot T_i^+ = 0$。这表明 $y\in \mathrm{Ann}_{ZFD}(\overline{C}^+)$。若 $[t]\neq[t']$，则有 $y\notin (D')^+\cdot FD$，这与定理 2.7 矛盾。因此 t 和 t' 在 D 中共轭。 □

注 3.9. 由引理 3.8，并利用 D' 是阿贝尔群这一事实，H 在 $T_i\setminus\{1\}$ 上对 $i\in\{1,\dots,n\}$ 传递地作用。

现在我们可以证明定理 A 的第二部分：

定理 3.10. 典范映射

$$\begin{aligned}\rho\colon H/C_H(T) &\to H/C_H(T_1)\times\cdots\times H/C_H(T_n)\\ hC_H(T) &\mapsto (hC_H(T_1),\dots,hC_H(T_n))\end{aligned}$$

是一个同构。

证明. 只需证明典范投影的满射性

$$\begin{aligned}\rho'\colon H &\to H/C_H(T_1)\times\cdots\times H/C_H(T_n)\\ h &\mapsto (hC_H(T_1),\dots,hC_H(T_n))\end{aligned}$$

因为该结论随后可由同构定理得出。由于对于每个 $i\in\{1,\dots,n\}$，T_i 都是一个简单的 $\mathbb{F}_pH$-模，且 H 是阿贝尔群，因此 $H/C_H(T_i)$ 是循环的（见 [10, 定理 3.2.3]）。取 $x_i\in H$ 使得 $x_iC_H(T_i)$ 生成 $H/C_H(T_i)$，并固定 $t_i\in T_i\setminus\{1\}$。根据引理 3.8，$t_1\cdots t_n$ 和 $x_1t_1x_1^{-1}\cdot t_2\cdots t_n$ 在 D 中共轭。由于 D' 是阿贝尔群，存在一个元素 $h\in H$，使得 $h(t_1\cdots t_n)h^{-1} = x_1t_1x_1^{-1}\cdot t_2\cdots t_n$。这也意味着 $ht_1h^{-1} = x_1t_1x_1^{-1}$ 以及对所有 $i\in\{2,\dots,n\}$ 都有 $ht_ih^{-1} = t_i$。对于每个 $j\in\{1,\dots,n\}$，根据注 3.9，T_j 中的非平凡元素在 H 中的元素作用下共轭，因此由 H 是阿贝尔群可得 $C_H(t_j) = C_H(T_j)$。由此，我们得到

$$\rho'(h) = (x_1C_H(T_1), C_H(T_2),\dots,C_H(T_n)).$$

利用类似的 论证处理所有指标，我们看到 ρ' 是满射的，因此 ρ 是一个同构 . □

这就完 成了定理 A 的证明。它给出了 H 的以下便捷表示：

注记 3.11. 设 $i\in\{1,\dots,n\}$。由定理 3.10，存在一个元素 $e_i\in H$，它对 T_j 中的 $j\neq i$ 中心化，使得 $e_iC_H(T_i)$ 生成 $H/C_H(T_i)$。此外，$\langle e_i\rangle$ 在 $T_i\setminus\{1\}$ 上传递地作用（见注 3.9 ）。注意，$H = \langle e_1,\dots,e_n, C_H(T)\rangle$。

我们以将定理 A 应用于 Frobenius 群的情形来结束本节。

例 3.12（Frobenius 群）。设 G 是任意有限 Frobenius 群，其 Frobenius 核为 K，Frobenius 补群为 A。首先假设 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 的理想。那么 $G = P\rtimes H$ 对于 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$ 和阿贝尔 p'-群 H 成立（见 [6, 定理 1]）。容易看出 $P = K$，并且我们可以选择 $H = A$。特别地，H 是循环的。根据 [10, 定理 5.3，$P = C_P(H)$ $G' = G'$ 5]，且由于 G 是 Frobenius 群。此外，$O_{p'}(G) = 1$，因此 G 是基本的。同样，考虑群 $D = G/G''$，并按定理 A 中的方式写作 $D' = T_1\times\cdots\times T_n\times Z_D$，其中 $Z_D = Z(G')/G''$。若 $n\geq 1$，则由引理 3.5 可得 $C_H(G'')\neq 1$（因为其中定义的子群 M_1 包含 G''）。这就产生了矛盾。因此 $n = 0$，所以 G' 是阿贝尔的。反过来，若 G 是一个 Frobenius 群，具有阿贝尔 Frobenius 核 $G'\in\mathrm{Syl}_p(G)$，则根据 [6, 定理 3]，$\mathrm{soc}(ZFG)\trianglelefteq FG$。

4 分类

设 F 是特征为 $p > 0$ 的代数闭域，G 是有限基本群。回顾一下，$G'' \subseteq Z(G')$。本章中，我们研究 $Z(G') = G''$ 的情形。这一研究受到定理 A 中给出的分解的启发；在该分解中，这一条件转化为 $Z_D = 1$。我们的目标是刻画具有这种形式且满足 $\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$ 的群 G（见定理 B）。

在第 4.1 节中，我们证明，每个满足 $Z(G) = G'$、且 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中理想的有限基本群 G，都具有定理 B 所给出的中心积分解。在第 4.2 节中，我们考虑其逆命题。结合这些结果，我们在第 4.3 节中证明定理 B。

4.1 分解

在本小节中，设 G 是一个满足 $Z(G') = G''$、且 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中理想的有限基本群。我们证明 G 具有定理 B 所给出的中心积分解。为此，我们分两步进行。在第 4.1.1 节中，我们将 G 分解为基本群 G_1、……、G_n 的中心积，这些群满足 $Z(G_i) = G_i''$ 且 $\mathrm{soc}(ZFG_i) \trianglelefteq FG_i$（对 $i = 1$、……、n 而言）。此外，G_i/G_i'' 是一个一维仿射线性群。在第 4.1.2 节中，我们分别研究这些群，并证明它们各自满足定理 B (ii) 中给出的条件。

4.1.1 中心积

回顾一下，$\mathrm{AGL}(1, p^d)$ 表示含有 p^d 个元素的域上的一维仿射线性群。本节证明以下结果：

定理 4.1. 设 G 是一个有限基本群，满足 $Z(G') = G''$，且 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的一个理想。则存在 G 的基本子群 $G_1, \dots, G_n$，使得 $G = G_1 * \cdots * G_n$，并且对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$，以下结论成立：

(i) $\mathrm{soc}(ZFG_i)$ 是 FG_i 中的一个理想。

(ii) $Z(G_i') = G_i''$. (iii) $G_i/G_i'' \cong \mathrm{AGL}(1, |G_i'/G_i''|)$.

注意，根据引理 2.3，G' 是一个特殊的 p-群（按 [10, 第 183] 页的定义）。$D := G/G''$ 的结构可描述如下：

注 4.2. 根据定理 A，对于某个 $n \in \mathbb{N}_0$ 以及 D 的极小正规子群 $T_1, \dots, T_n$，有 $D' = T_1 \times \cdots \times T_n$。由注 2.4，$C_H(D') = 1$。因此 $H = \langle e_1 \rangle \times \cdots \times \langle e_n \rangle$，其中 $e_i \in H$ 对于 $j \neq i$ 中的 T_j 进行中心化，并且对每个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 都在 $T_i \setminus \{1\}$ 上正则作用（见定理 A 和注记 3.11）。特别地，$s_i := \mathrm{ord}(e_i) = |T_i| - 1$。

由此得到 D 的如下分解：

引理 4.3. 有 $D \cong \mathrm{AGL}(1, |T_1|) \times \cdots \times \mathrm{AGL}(1, |T_n|)$。

证明。对于每个 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们令 $A_i := \langle e_i, T_i \rangle$。于是 $D = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$。对于满足 $i \neq j$ 的 $i, j \in \{1, \dots, n\}$，我们有 $[A_i, A_j] = 1$（见注 4.2），且 $A_i \cap A_j \subseteq C_{D'}(H) = 1$（见注 2.4）。此外，$D$ 中的每个元素都能以唯一的方式表示为 $a_1 \cdots a_n$，其中 $a_i \in A_i$，且 $i = 1, \dots, n$。这意味着 $D = A_1 \times \cdots \times A_n$。由于 $\langle e_i \rangle$ 在 $T_i \setminus \{1\}$ 上正则作用，因此对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们得到 $A_i \cong \mathrm{AGL}(1, |T_i|)$。 □

与之前一样，对所有 $g \in G$，我们令 $\bar{g} := gG'' \in D$。对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，令 M_i 表示 $N_i = \prod_{j \neq i} T_i$ 在 G 中的原像。对于 $h \in H$，回忆一下 $[h]_G = U_{G,h}h$，其中 $U_{G,h} = \{[g,h] \colon g \in G\}$。此外，回忆一下，根据引理 3.5，$C_H(M_i)$ 是非平凡的。为了得到 G 的所需分解，我们需要以下关于 $C_H(M_i)$ 中元素共轭类结构的技术引理：

引理 4.4. 设 $i \in \{1, \dots, n\}$，并固定一个满足 $f \in T_i \setminus \{1\}$ 的元素 $f \in G'$。设 $h \in C_H(M_i) \setminus \{1\}$，并令 $g_i := g_{h,i} = [f,h]$。

(i) 元素 g_i 具有以下性质：

(a) $U_{G,h} = \{1\} \cup \{e_i^k g_i e_i^{-k} \colon 0 \leq k \leq s_i - 1\}$，(b) 对所有满足 $j \neq i$ 的 $j \in \{1, \dots, n\}$，$[g_i, e_j] = [g_i, g_j] = 1$，(c) 对每个 $k \in \{1, \dots, s_i - 1\}$，$g_i$ 既与 g_i^{-1} 共轭，也与 $[e_i^k, g_i]$ 共轭，其中共轭关系为 G-共轭。

(ii) 对于 $h, h' \in C_H(M_i) \setminus \{1\}$，元素 $g_{h,i}$ 和 $g_{h',i}$ 在 G. 中共轭

证明。我们记 作 $x \sim y$，若 x、$y \in G$ 在 G中共轭。由于 $\langle e_i \rangle$ 在 $T_i \setminus \{1\}$上传递地作用，我们有

$$T_i = \{1\} \cup \{e_i^k \bar{f} e_i^{-k} \colon 0 \leq k \leq s_i - 1\}. \tag{4.1}$$

(i) 令 $C := [h]_G$。

(a) 由于 $H \subseteq C_G(h)$成立，$|C|$是 p的幂。由引理 3.5 和 (2.1) 可得 $|C| = |C| = |T_i|$。对于 R: $= \{1\} \cup \{e_i^k f e_i^{-k} \colon 0 \leq k \leq s_i - 1\}$，由 (4.1) 得 $\bar{R} = T_i$。由于 h在 $T_i \setminus \{1\}$上作用而没有不动的点，并且同时中心化 $\overline{M_i} = \prod_{j \neq i} T_j$ 和 H，R 中的元素构成 $C_D(h)$在 D中的陪集的一组代表元。由于 $|C| = |C|$ 成立，R 是$C_G(h)$在 G中的陪集的一组代表元。利用 e_i 与 h 可交换这一点，我们得到

$$U_{G,h} = \{[g,h] \colon g \in R\} = \{[e_i^k f e_i^{-k}, h] \colon 0 \leq k \leq s_i - 1\} \cup \{1\} = \{e_i^k [f,h] e_i^{-k} \colon 0 \leq k \leq s_i - 1\} \cup \{1\}.$$

由于 h 在 $T_i \setminus \{1\}$ 上的作用没有不动点，我们有 $[f,h] \neq 1$，由此得到 $g_i \notin G''$。

(b) 设 $j \in \{1, \dots, n\}$，其中 $j \neq i$。由 $e_j \in C_H(T_i)$，我们有 $e_j g_i e_j^{-1} \in g_i G''$，由此得到 $e_j g_i h e_j^{-1} = e_j g_i e_j^{-1} h \in [h]_G \cap g_i h G'' = \{g_i h\}$.。这里，我们利用了这样的事实：由于 $|C| = |\bar{C}|$（见 (a)），G'' 的每个陪集至多包含 C 中的一个元素。由此得到 $e_j g_i e_j^{-1} = g_i$.。类似地，由于 $g_j \in M_i$ 与 h 可交换，可证明 $[g_i, g_j] = 1$。

(c) 设 $u \in U_{G,h}$，并写作 $u = [a,h]$，其中 $a \in G$。于是$U_{G,h}h = C = aCa^{-1} = aU_{G,h}a^{-1} \cdot aha^{-1}$.。根据 (a)，$U_{G,h} \setminus \{1\}$ 中的元素在 G 中共轭，因此 $aU_{G,h}a^{-1} = U_{G,h}[a,h]^{-1} = U_{G,h}u^{-1}$. 中的非平凡元素也满足这一点。现在选取两个不同的非平凡元素 $u, u' \in U_{G,h}$；由 $|U_{G,h}| = |T_i| \geq 3$，这是可能的（见注 3.3）。根据 (a)，u 和 u' 在 G 中共轭。利用 $U_{G,h}u^{-1}$ 中的非平凡元素与 $U_{G,h}u'^{-1}$ 中的非平凡元素在 G 中共轭这一事实，我们得到$u'u^{-1} \sim u^{-1} \sim u'^{-1} \sim uu'^{-1} = (u'u^{-1})^{-1}$。因此 $[u^{-1}]_G$，从而 $[u]_G$ 也是一个实共轭类。令 $u = g_i$，并设某个 $k \in \{1, \dots, s_i - 1\}$ 满足 $u' = e_i^k g_i e_i^{-k}$，我们得到 $g_i^{-1} \sim g_i \sim [e_i^k, g_i]$。

(ii) 令 $g_i := g_{h,\,i}$。存在 $k \in \mathbb{Z}$，使得 $g_i' := e_i^k g_{h',\,i} e_i^{-k}$ 包含于 $g_i G''$。令 $c := g_i^{-1} g_i' \in G''$。现在，对于某个 $k \in \mathbb{Z}$，写作 $hC_H(T_i) = e_i^k C_H(T_i)$。由于 h 和 e_i^k 对 $j \neq i$ 都中心化 T_j，我们有 $he_i^{-k} \in C_H(D') = 1$（见注 2.4），因此 $h = e_i^k$。由于 h 中心化 G''，利用 (i) 的 (c) 部分可得$g_{h',\,i} \sim g_i' \sim [h, g_i'] = [h, g_i c] = [h, g_i] \sim g_i$。 □

由此，我们现在可以证明定理 4.1：

定理 4.1 的证明。对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$，我们固定一个元素 $h_i \in C_H(M_i) \setminus \{1\}$（由引理 3.5 可知这是可行的），并令 $g_i := g_{h_i,\, i}$ 如引理 4.4 中所定义。对于所有 $i \in \{1,\dots,n\}$，我们设 $G_i := \langle g_i, e_i\rangle$。对于$i \neq j$，由引理 4.4 可得 $[G_i, G_j] = 1$。令 $Q := \langle G_1, \dots, G_n\rangle$。利用定理 A，很容易看出 G' 中的每个元素都可以表示为 $u_1 \cdots u_n g$，其中 $u_i \in \{1\} \cup \{e_i^k g_i e_i^{-k} \colon k \in \mathbb{Z}\}$ 对于 $i \in \{1,\dots,n\}$ 以及某个 $g \in G''$。由于 $G'' \subseteq \Phi(G')$，导出子群 G' 由 $i \in \{1,\dots,n\}$ 的情形以及 $k \in \mathbb{Z}$ 对应的元素 $e_i^k g_i e_i^{-k}$ 生成。因此可得 $G' \subseteq Q$。这推出 $G = G'H \subseteq Q$，进而得到 $G = G_1 * \cdots * G_n$。

设 $i \in \{1,\dots,n\}$。由引理 4.4，元素 $[e_i, g_i]$和 g_i在 $G = G_1 * \cdots * G_n$中共轭，因此在 G_i中也共轭。由于 $[e_i, g_i] \in G_i'$ 成立，我们有 $g_i \in G_i'$。特别地， $e_i G_i'$ 生成 G_i/G_i'，因此这是一个 p'-群。因此，G_i' 是 G_i 的一个 Sylow p-子群。由引理 2.2，我们有 $\mathrm{soc}(ZFG_i) \trianglelefteq FG_i$，这意味着 $G_i'' \subseteq Z(G_i')$（见引理 2.3）。现在我们证明包含关系 $Z(G_i') \subseteq G_i''$。仿照注 2.4 (ii)，可证明 $C_{G_i'/G_i''}(e_i) = 1$，由此可得 $C_{G_i'}(e_i) \subseteq G_i''$。由于 $G' = G_1' * \cdots * G_n'$成立， $Z(G_i') \subseteq Z(G') \cap G_i = G'' \cap G_i$.。任意 $g \in G''$都可表示为 $g = qa$，其中 $q \in G_i''$且 $a \in \prod_{j \neq i} G_j'' \subseteq C_{G'}(e_i)$。若另外 $g \in G_i$，则 $a = q^{-1}g \in C_{G_i'}(e_i)$。接下来

$$Z(G_i') \subseteq G'' \cap G_i \subseteq C_{G_i'}(e_i) G_i'' = G_i''.$$

这表明 $Z(G_i') = G_i''$。此外， $G_i'' = G_i \cap G''$。像之前一样，令 $G_i := G_i G''/G'' \subseteq D$，由此可得

$$G_i/G_i'' = G_i/G_i \cap G'' \cong G_i G''/G'' = \bar{G}_i.$$

令 $A_i := \langle e_i, T_i\rangle$，如引理 4.3 的证明中所述。显然 $G_i \subseteq A_i$。另一方面， T_i 是 D 的一个极小正规子群，因此 $T_i \subseteq G_i$，这说明 $G_i = A_i$ 和 $G_i' = T_i$。由引理 4.3 可得$A_i \cong \mathrm{AGL}(1, |T_i|)$。 □

在下一小节中，我们证明群 $G_1, \dots, G_n$ 中的每一个都满足定理 B (ii) 中所述的性质 (a)-(c)，其中 $K_i = G_i'$。主要障碍在于证明对于每个 $i \in \{1,\dots,n\}$， G_i'都是一个 Camina 群。

4.1.2 Camina 群

在本小节中，设 G 是满足 $Z(G') = G''$ 的有限基本群，且 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的一个理想。此外，我们假设 $G/G'' \cong \mathrm{AGL}(1, |G'/G''|)$。与前文相同，记 $G = G' \rtimes H$，并设$D := G/G''$。本节旨在证明 G 具有定理 B (ii) 中描述的性质 (a)-(c)（关于分解 $G = G' \rtimes H$）。为了证明定理 B，我们将把这些结果应用于定理 4.1 中构造的群 $G_1, \dots, G_n$。首先，我们注意到以下内容：

注 4.5. 由于 G 是基本的，且 $Z(G') = G''$，群 G' 的幂零类为 2。根据注 4.2，群 $H = \langle e_1\rangle$ 是阶为 $s := |D'| - 1$ 的循环群，并在 G' 中传递地置换 G'' 的非平凡陪集。根据引理 3.5，有 $C_H(G'') \neq 1$，因此 H 对 G'' 的作用不忠实。

因此，实际上还需证明以下陈述：

定理 4.6。设 G 是一个满足 $Z(G') = G''$ 的有限基本群，其中 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的一个理想。此外，我们假设 $G/G'' \cong \mathrm{AGL}(1, |G'/G''|)$。那么 G' 是一个 Camina 群。

该定理的证明构成了本节余下部分的内容。

例 4.7。假设 F 具有特征 2，并令 $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$。回顾一下，$\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$ （见例 3.4）。导出子群 $G' \cong Q_8$ 是一个 Camina 群。特别地，定理 4.6 的陈述在此情形下成立。

回顾一下，我们有 $C_G(G') = Z(G') = G''$，因此可得 $Z(G) \subseteq G''$。为了简化论证，我们使用关于 $Z(G)$ 的以下观察：

引理 4.8. 除非 $p = 2$ 和 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$，否则我们有 $Z(G) = 1$。

证明。与 e_1 的共轭诱导出一个阶为 $|G'$ 的自同构： $G''| - 1$ 作用于 G'/G''，且该作用不可约。 $Z(G)$中的任意元素在与 e_1共轭下保持不变。若 $Z(G)$非平凡，则由 $[1,$ 引理]可得$|G' : G''| \in \{4, 8, 9\}$ 。对于 $|G' : G''| = 4$，我们得到 $|H| = 3$ （见引理 4.3）和 $|G''| = 2$。由此可轻易推出 $G \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$。对于 $|G' : G''| = 8$，我们得到 $|H| = 7$ 和 $|G''| \in \{2, 4\}$，从而得到 $|G| \in \{112, 224\}$。若 $|G' : G''| = 9$，我们得到 $|H| = 8$ 和 $|G''| = 3$，因此 $|G| = 216$。使用 GAP [9] 进行直接验证可知，阶为 112、216 和 224 的群不满足本节的假设。

□

在第 4.1.2 节结束之前，我们假设 $G \neq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$，这意味着 $Z(G) = 1$ （见例 4.7 和引理 4.8）。由注 4.5 可知，我们可以固定 $h_1 \in C_H(G'') \setminus \{1\}$ ，以及引理 4.4 中定义的相应元素 $g_1 \in G' \setminus G''$。令

$$C \coloneqq \{[a, g_1] \colon a \in G'\} \subseteq G''. \tag{4.2}$$

由于 G' 的幂零类为 2， C 是 G 的子群。我们对 G' 中的共轭类作如下观察：

引理 4.9。

(i) 我们有 $C = \langle [e_1^m g_1 e_1^{-m}, g_1] \colon m \in \mathbb{Z} \rangle$.

(ii) 对于 $u \in G''$，有 $[g_1 u]_{G'} = C g_1 u$。

(iii) 对任意 $x \in G' \setminus G''$，有 $[x]_{G'} = [x]_G \cap xG''$，由此得到 $[x]_G = \bigcup_{m=0}^{s-1} e_1^m \cdot [x]_{G'} \cdot e_1^{-m}$.

证明。

(i) 由于 G' 中的每个元素都可以表示为 $e_1^m g_1 e_1^{-m} d$ ，其中 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $d \in G'' = Z$（G'），我们有 $C = \{[a, g_1] \colon a \in G'\} = \langle [e_1^m g_1 e_1^{-m}, g_1] \colon m \in \mathbb{Z} \rangle$。

(ii) 我们有 $[g_1 u]_{G'} = \{[a, g_1 u] \colon a \in G'\} g_1 u = \{[a, g_1] \colon a \in G'\} g_1 u = C g_1 u$，这是由于 $u \in Z$（G'）.

(iii) 我们首先证明 $[x]_{G'} = [x]_G \cap xG''$。显然 $[x]_{G'} \subseteq [x]_G \cap xG''$。现在令 $k \in G$ ，其中 $kxk^{-1} \in xG''$，并将 $k = e_1^\ell u$ 写成 $\ell \in \mathbb{Z}$ 和 $u \in G'$。由于 $uxu^{-1} \in xG''$ 成立，与 e_1^ℓ 的共轭固定了 xG''。根据注 4.2，这给出 $e_1^\ell = 1$ ，从而得到 $k \in G'$，这就证明了等式。对于第二部分，注意到 $[x]_{G'}$ 的 G-共轭元包含于 $[x]_G$中。另一方面，我们有

$$[x]_G \subseteq G' \setminus G'' = \bigcup_{m=0}^{s-1} e_1^m x e_1^{-m} G''$$

并且对每个 $m \in \{0, \ldots, s-1\}$，与 e_1^m共轭会在 $[x]_{G'} = [x]_G \cap xG''$和 $[x]_G \cap e_1^m x e_1^{-m} G''$之间诱导一个双射。 □

证明定理 4.6 时，我们使用如下简化：

推论 4.10。群 G' 是 Camina 群，当且仅当 $C = G''$。

证明。注意到 $C = G''$ 等价于 $[g_1]_{G'} = g_1 G''$。由以下事实即可得出结论：与 e_1 的幂共轭，会在 G' 中传递地置换 G'' 的非平凡陪集。 □

以下我们假设 C 是 G'' 的真子群，并构造一个元素 $y \in \mathrm{soc}(ZFG)$，它不属于 $(G')^+ \cdot FG$。根据引理 2.1，这就产生了矛盾，从而定理 4.6 得证。

注 4.11. 根据引理 2.3， G'' 是初等阿贝尔群。特别地，存在一个非平凡的群同态 $\alpha\colon G'' \to \mathbb{F}_p$，满足 $\alpha(C) = 0$。对于 $g \in G$，我们设

$$a_g \coloneqq \begin{cases} \alpha(u) & \text{if } g \text{ is conjugate to } g_1 u \text{ in } G \text{ for some } u \in G'', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这是良定义的：设 g_1u_1 和 g_1u_2 与 $u_1, u_2 \in G''$ 在 G中共轭。由引理 4.9可得 $g_1u_2 \in [g_1u_1]_G \cap g_1u_1G'' = [g_1u_1]_{G'} = Cg_1u_1 = g_1u_1C$，从而推出 $u_2 \in u_1C$，进而有 $\alpha(u_1) = \alpha(u_2)$。由于 α 是群同态，对于所有 $u_1, u_2 \in G''$，都有 $a_{g_1u_1u_2} = a_{g_1u_1} + a_{g_1u_2}$。对于 $k \in \mathbb{Z}$，与e_1^k 共轭得到

$$a_{e_1^k g_1 e_1^{-k} u_1 u_2} = a_{e_1^k g_1 e_1^{-k} u_1} + a_{e_1^k g_1 e_1^{-k} u_2}.$$

对于 $g \in G''$，与 e_1 共轭会固定 $t \coloneqq \prod_{g' \in [g]_G} g' \in G'' = Z(G')$，这意味着 $t \in Z(G) = 1$。根据上述结果，我们得到

$$\sum_{g' \in [g]_G} a_{g_1 g'} = a_{g_1 \prod_{g' \in [g]_G} g'} = a_{g_1} = 0.$$

在本节余下部分中，我们考虑元素 $y \coloneqq \sum_{g \in G} a_g g \in FG$，其系数如注 4.11 所给。显然，$y \in ZFG$ 且 $y \notin (G')^+ \cdot FG$，因为 α 非平凡。我们的目标是证明 $y \in \mathsf{soc}(ZFG)$。我们先给出一个预备性观察：

引理 4.12. 对每个满足 $|U| > 2$ 的子群 $U \subseteq G''$，都有 $y \cdot U^+ = 0$.

证明. $w \in G$ 在乘积 $y \cdot U^+$ 中的系数为 $\sum_{u \in U} a_{wu^{-1}}$。除非$w \in G' \setminus G''$，否则所有求和项均为零。令 $w = e_1^k g_1 e_1^{-k} d$，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $d \in G''$。于是有

$$\sum_{u \in U} a_{wu^{-1}} = \sum_{u \in U} a_{e_1^k g_1 e_1^{-k} d u^{-1}} = |U| \cdot a_{e_1^k g_1 e_1^{-k} d} + a_{e_1^k g_1 e_1^{-k} \prod_{u \in U} u^{-1}} = a_{e_1^k g_1 e_1^{-k}} = \alpha(1) = 0.$$

在第二个等式中，我们用到了注 4.11。对于第三个等式，注意到 p 整除 $|U|$，且 $\prod_{u \in U} u^{-1} = 1$，因为 U 是阶至少为 3 的初等阿贝尔群。 □

我们现在接下来的几个步骤中证明，y 湮灭了引理 2 中所述的 $J(ZFG)$ 的基 .5.

引理 4.13. 对于 $g \in G' \setminus \{1\}$，我们得到 $y \cdot b_{[g]} = 0$。

证明. 设 $[g] \coloneqq [g]_G$ 和 $\ell \coloneqq |[g]|$。首先，假设 $g \in G''$。乘积 $y \cdot b_{[g]}$ 中 $t \in G$ 的系数为

$$\sum_{g' \in [g]} a_{tg'^{-1}} - \ell \cdot a_t.$$

同样，假设 $t \in G' \setminus G''$，因为否则所有加数均为零。于是，t 在 G 中与某个元素 $g_1 d$ 共轭，且满足 $d \in G''$。由于 $y \cdot b_{[g]} \in ZFG$ 在 G 的共轭类上具有常系数，我们不妨假设 $t = g_1 d$。利用注 4.11，我们得到

$$\sum_{g' \in [g]} a_{tg'^{-1}} = \sum_{g' \in [g]} a_{g_1 d g'^{-1}} = \ell \cdot a_{g_1 d} + \sum_{g' \in [g^{-1}]} a_{g_1 g'} = \ell \cdot a_{g_1 d} = \ell \cdot a_t.$$

现在令 $g \in G' \setminus G''$。那么，对某个 $d \in G''$，g 与 $g_1 d$ 是 G-共轭的，因此我们可以假设 $g = g_1 d.$。注意，由于 $g_1 \notin Z(G')$，C 是非平凡的。若 $|C| = 2$，则 G' 中的所有共轭类长度至多为二（见引理 4.9）。根据 [12, 命题 3.1]，G' 是一个特异群，这意味着 $|G''| = 2 = |C|$。这与 $C \subsetneq G''$, 矛盾，因此 $|C| > 2$。由引理 4.9，$[g]$ 是子群 $e_1^\ell C e_1^{-\ell}$的陪集之并，且 $\ell \in \mathbb{Z}$。引理 4.12 得出 $y \cdot (e_1^\ell C e_1^{-\ell})^+ = 0$，因此 y 湮灭 $b_{[g]} = [g]^+$。□

现在我们证明， y 湮灭 $J(ZFG)$中与不包含于 G'. 的共轭类 C 相对应的基元素 b_C。我们首先考虑 $C_H(G'')$中非平凡元素的共轭类。

引理 4.14. 元素 y 湮灭 $[h]_G^+$，对每个 $h \in C_H(G'') \setminus \{1\}$.

证明. 回忆一下， $[h] := [h]_G = U_{G,\,h} \cdot h$，其中 $U_{G,\,h} = \{1\} \cup \left\{e_1^\ell g_1' e_1^{-\ell} \colon\ 0 \le \ell \le s-1\right\}$，对于某个 $g_1' \in G' \setminus G''$，它在 G 中与 g_1 共轭（见引理 4.4）。通过用 e_1 的适当次幂共轭，我们可以取$g_1' \in g_1 G''$。由引理 4.9，得到 $g_1' \in g_1 G'' \cap [g_1] = [g_1]_{G'} = g_1 C$，因此我们写作 $g_1' = g_1 c$，其中 $c \in C$。注意，$y \cdot [h]^+ = 0$ 等价于 $y \cdot U_{G\,,\,h}^+ = 0$. 再次，我们需要证明

$$\sum_{u \in U_{G,h}} a_{tu^{-1}} = 0 \tag{4.3}$$

对所有 $t \in G$，并且我们可以假设 $t \in G'$，因为否则所有加项都为零。

首先令 $t \in G' \setminus G''$，并写作 $t = e_1^k g_1 d' e_1^{-k}$，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $d' \in G''$。令 $d := c^{-1} d' \in G''$，得到 $t = e_1^k g_1' d e_1^{-k}$。我们有

$$\sum_{u \in U_{G,h}} a_{tu^{-1}} = \sum_{u \in U_{G,h}} a_{e_1^{-k} t u^{-1} e_1^k} = \sum_{u \in U_{G,h}} a_{g_1' d e_1^{-k} u^{-1} e_1^k} = \sum_{u \in U_{G,h}} a_{g_1' u^{-1} d}, \tag{4.4}$$

因为与 e_1^{-k} 共轭会置换集合 $U_{G,\,h}$ 和 $d \in Z\,(G')$。此外，我们得到

$$\begin{aligned} \left\{g_1' u^{-1} d \colon u \in U_{G,h}\right\} &= \left\{g_1' (e_1^\ell g_1'^{-1} e_1^{-\ell}) d \colon 0 \le \ell \le s-1\right\} \cup \{g_1' d\} \\ &= \left\{[g_1', e_1^\ell] d \colon 0 \le \ell \le s-1\right\} \cup \{g_1' d\} =: X. \end{aligned}$$

对于 $\ell \in \{1, \dots, s-1\}$，我们考虑元素 $x := [g_1', e_1^\ell] d \in X$。由引理 4.4，$[g_1', e_1^\ell]$ 在 G 中与 g_1' 共轭，因此存在 $d_x \in C_{g_1'}$ 和 $m_x \in \{0, \dots, s-1\}$，使得 $x = e_1^{m_x} g_1' d_x e_1^{-m_x} d$。对于 $x := g_1' d \in X$，令 $m_x = 0$ 和 $d_x = 1$，即可得到相同的形式。注意，由于 $g_1' \in g_1 G''$（见引理 4.9），$C_{g_1'} = C$。由于$U_{G,\,h}$ 是 G'中 G'' 的陪集的代表元系，因此 X 也成立，因为其元素由 $U_{G,\,h}$ 中的元素经过取逆并与 $g_1' d$ 相乘而得。特别地， $X \setminus \{d\}$ 中的元素构成 G'中 G'' 的非平凡陪集的代表元系。因此，对应关系$x \leftrightarrow m_x$ 是一一对应的。对于 $m_x \in \{0, \dots, s-1\}$，令 $v_{m_x} := d_x$，由此对所有$x \in X \setminus \{d\}$，得到 $x = e_1^{m_x} g_1' v_{m_x} e_1^{-m_x} d$，从而

$$X = \left\{e_1^m g_1' v_m e_1^{-m} d \colon 0 \le m \le s-1\right\} \cup \{d\}.$$

利用 $a_d = 0$，并注意到 y 的系数在与 e_1^{-m} 共轭时保持不变，我们得到式 (4.4) 中给出的和如下:

$$\sum_{u \in U_{G,h}} a_{tu^{-1}} = \sum_{x \in X} a_x = \sum_{m=0}^{s-1} a_{e_1^m g_1' v_m e_1^{-m} d} = \sum_{m=0}^{s-1} a_{g_1' v_m e_1^{-m} d e_1^m} = \sum_{m=0}^{s-1} a_{g_1 c v_m e_1^{-m} d e_1^m}.$$

在最后一步中，我们使用了 $g_1' = g_1 c$。我们得到

$$\sum_{m=0}^{s-1} a_{g_1 c v_m e_1^{-m} d e_1^m} = \sum_{m=0}^{s-1} \left(a_{g_1 c v_m} + a_{g_1 e_1^{-m} d e_1^m}\right) = \sum_{m=0}^{s-1} a_{g_1 e_1^{-m} d e_1^m} = \frac{s}{|[d]|} \sum_{d' \in [d]} a_{g_1 d'} = 0 \tag{4.5}$$

（对于 $[d] := [d]_G$）。第一步由注 4.11 得出。第二步中，我们利用 $c v_m \in C$ 对所有$m \in \{0, \dots, s-1\}$都成立。第三个等式成立是因为元素 $e_1^{-m} d e_1^m$恰好遍历共轭类 $[d] = \{e_1^\ell d e_1^{-\ell}\ \ 0 \le \ell \le |[d]| - 1\}$ $s/|[d]|$ 次。最后一步中，我们再次应用注 4.11。

现在令 $t \in G''$。根据 L　引理 4.4(iii)，存在 $g \in G$ 使得 $g_1'^{-1} = g g_1 g^{-1}$。同时利用 $a_t = 0$ 和 $t \in Z$（G'　　），我们得到

$$\sum_{u \in U_{G,h}} a_{tu^{-1}} = a_t + \sum_{i=0}^{s-1} a_{te_1^i g_1'^{-1} e_1^{-i}} = \sum_{i=0}^{s-1} a_{t(e_1^i g) g_1 (e_1^i g)^{-1}} = \sum_{i=0}^{s-1} a_{g_1 (e_1^i g)^{-1} t (e_1^i g)}.$$

由于 $t \in Z(G')$，我们可以假设 $g \in H$，因此 e_1 和 g 可交换。令 $t' := g^{-1} t g$，我们有

$$\sum_{i=0}^{s-1} a_{g_1 (e_1^i g)^{-1} t (e_1^i g)} = \sum_{i=0}^{s-1} a_{g_1 (g e_1^i)^{-1} t (g e_1^i)} = \sum_{i=0}^{s-1} a_{g_1 e_1^{-i} t' e_1^i} = a_{g_1 \prod_{i=0}^{s-1} e_1^{-i} t' e_1^i} = 0$$

（利用注 4.11，并仿照 (4.5) 中的第三步进行论证）。因此，对每个 $t \in G$，(4.3) 都成立，从而完成证明。□

现在我们汇总已有结果，以证明以下命题：

引理 4.15. 对每个 $g \in G \setminus G'$，我们有 $y \cdot [g]_G^+ = 0$.

证明。和之前一样，我们设 $\bar{g} := gG'' \in D$。令 $k \in \mathbb{Z}$，其中 $[g]_G \subseteq e_1^k G'$。根据假设，既然 $D \cong \mathrm{AGL}(1, |D'|)$，便有 $[\bar{g}]_D = \bar{g} D'$。特别地，$[g]_G$ 中含有一个元素 $e_1^k d$，满足 $d \in G''$，且我们可以假设 $g = e_1^k d$。由于 e_1^k 中心化 H，因此可以在 G' 中选取 $C_G(e_1^k)$ 在 G 中的陪集代表元。同理，可以在 $H = \langle e_1 \rangle$中找到 $C_G(d)$ 在 G 中的陪集代表元。由于 d 和 e_1^k 分别中心化 G' 和 $\langle e_1 \rangle$，因此有 $[e_1^k d]_G = [e_1^k]_G \cdot [d]_G$。此外，$G'$ 通过共轭作用于 $[e_1^k d]_G$，其轨道具有 $[e_1^k]_G d'$ 的形式，其中 $d' \in [d]_G$。特别地，$[e_1^k d]_G^+$ 是 FG中 $[e_1^k]_G^+$ 的倍数，因此只需证明$y \cdot [e_1^k]_G^+ = 0$。

如果 $e_1^k \in C_G(G'')$，则由引理 4.14 可得结论。现在令 $h := e_1^k \notin C_G(G'')$。由于 h 在 $D' \setminus \{1\}$ 上的作用没有不动点（见注 4.2），我们推出，对于某个 $g \in G'$，$[g, h] \in G''$ 等价于 $g \in G''$。此外，对于所有 a_1、$a_2 \in G''$，都有 $[a_1 a_2, h] = [a_1, h] \cdot [a_2, h]$，因为 G'' 与 G' 对易。因此，$N := U_G, {}_h \cap G''$ 是 G 的正规子群。由于 h 在 G'' 上的作用非平凡，我们有 $N \neq 1$。现在考虑 G'' 在 $[h]_G$ 上的共轭作用的一个轨道 B，并令 $b \in B$。我们断言 $B = Nb$。为证明这一点，设 $b = ghg^{-1}$，其中某个 $g \in G'$。对于每个 $n \in N$，由上述结果，存在某个 $d \in G''$ 使得 $[d, h] = n$。由于 $[d, b] = [d, ghg^{-1}] = [d, h] = n$ 源于 g 与 G'' 对易这一事实，我们有 $nb = dbd^{-1} \in B$。另一方面，对于 $d \in G''$，我们有 $[d, h] \in N$，这意味着 $B \subseteq Nb$。这表明 $[h]_G$，因此 U_G、${}_h$ 是 N 的陪集的不交并。如果 $|N| = 2$，则有 $N \subseteq Z(G) = 1$，矛盾。因此 $|N| > 2$，由引理 4.12 得到 $y \cdot N^+ = 0$，这意味着 $y \cdot [h]_G^+ = 0$。

□

有了这些预备结果，我们现在证明定理 4.6：

定理 4.6 的证明。假设 G' 不是 Camina 群。特别地，这意味着 $G \neq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$（见例 4.7），因此 $Z(G) = 1$（见引理 4.8）。由推论 4.10，式 (4.2) 中定义的群 C 是 G''的真子群。考虑元素 $y = \sum_{g \in G} a_g g$，其系数如注 4.11 所述。显然，我们有 $y \in ZFG$。由引理 4.13 和引理 4.15，y湮灭引理 2.5 中给出的 $J(ZFG)$ 的基，这意味着 $y \in \mathrm{soc}(ZFG)$。由引理 2.1，这与由于 $y \notin (G')^+ \cdot FG$ 而有的 $\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$ 矛盾。因此，G' 是一个 Camina 群。□

4.2 逆向蕴含

为证明定理 B 中 (ii) 蕴含 (i) 做准备，我们先证明以下结果：

定理 4.16. 设 G 为一个有限基本群，满足 $Z(G') = G''$，且满足以下条件：

(i) $G/G'' \cong \mathrm{AGL}(1, |G'/G''|)$,

(ii) G' 是一个 Camina 群，并且

(iii) $C_G(G'') \not\subseteq G'$。

那么，ZFG的 soc 是 FG中的一个理想。

证明。与前面一样，我们将 $G = G' \rtimes H$ 记作一个 Hall p'-子群 H， $D = G/G''$ 并令 $\bar{g} := gG'' \in D$ 表示$^-$ $^-$对每个 $g \in G$。由于 $D \cong \mathrm{AGL}(1, |D'|)$， H 是循环的，且对每个 $h \in H \setminus \{1\}$，都有 $[h]_D = hD'$。由于 $C_G(G'') \not\subseteq G'' = Z(G')$，存在一个非平凡元素 $r \in C_H(G'')$。由于 r 中心化 G''，我们有$|[r]_G| = |[\bar{r}]_D| = |D'|$ （见 [6, 引理 3.30]）。注意，根据 (i)， $D' \setminus \{1\}$ 中的元素在 D下共轭。由此，可以仿照引理 4.4 的证明，说明$U_{G,\ r} \setminus \{1\}$ 中的元素在 G中共轭。

根据 [6, 注 3.15],，我们有 $\mathrm{soc}(ZFG) = \bigoplus_{h \in H} S_h$对于 $S_h := \mathrm{soc}(ZFG) \cap FhG'$。与例 3.4 一样，只需证明对所有 $h \in H$都有 $\dim_F S_h = 1$。先考虑一个元素 $y = \sum_{g \in G} a_g g \in S_1$。于是 $y \cdot [r]_G^+ = 0$，因此 $y \cdot U_{G,\ r}^+ = 0$。后一乘积中 1 的系数为 $a_1 + \sum_{u' \in U_{G,\ r} \setminus \{1\}} a_{u'^{-1}}$。由于 $U_{G,\ r} \setminus \{1\}$ 中的所有元素在 G中共轭，我们得到

$$0 = a_1 + \sum_{u' \in U_{G,r} \setminus \{1\}} a_{u'^{-1}} = a_1 + (|U_{G,r}| - 1)a_{u^{-1}} = a_1 + (|D'| - 1)a_{u^{-1}}$$

对每个 $u \in U_{G,\ r}$都成立，这意味着 $a_1 = a_{u^{-1}}$。现在令 $g \in G' \setminus G''$。于是我们得到 $u \in U_{G,\ r}$，其中 $u \in gG''$。由 (ii)， g 和 u 在 G 中共轭，因此可得 $a_g = a_u = a_1$。对于 $g \in G'' \setminus \{1\}$，如上所述，考察乘积 $y \cdot b_{[g]} = 0$ 中 1 的系数可得 $a_{g^{-1}} = a_1$。这表明 $y \in F(G')^+$，因此 $\dim_F S_1 = 1$。现在令 $y = \sum_{g \in G} a_g g \in S_h$，其中 $h \in H \setminus \{1\}$。考虑共轭类 $K \in \mathrm{Cl}(G)$，满足$^-$ $^-K \subseteq hG'$。由于 $[h]_D = hD'$，类 K 包含一个元素 ht，使得 $t \in G''$。令 $[t] := [t]_G$。若 $t \neq 1$，则乘积 $y \cdot b_{[t^{-1}]} = 0$ 中 h 的系数为

$$0 = \sum_{t' \in [t]} a_{ht'} - |[t]| \cdot a_h.$$

注意，由于 $t \in Z(G')$， $[t] = \{btb^{-1} : \ b \in H\}$。由于 H 是阿贝尔群，因此得到 $h[t] \subseteq [ht] = K$，所以对于 $t' \in [t]$，各项 $a_{ht'}$ 都相等。同样，这意味着 $a_h = a_{ht}$。这表明 $y \in F(hG')^+$，因而可得 $\dim_F S_h = 1$。与例 3.4 中一样，我们得出 $\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的一个理想。 □

例4.17。

(i) 对于 $p > 2$，令 P 为阶为 p^3、指数为 p 的特异群。则存在一个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(P)$，其阶为 $p^2 - 1$，并且传递地置换 P 中 P' 的非平凡陪集（见 [16, 定理]）。群 $G := P \rtimes \langle \alpha \rangle$ 满足定理 4.16 的假设。特别地，$\mathrm{soc}(ZFG)$ 是 FG 中的一个理想。

对于 $p = 3$，这种构造在 GAP 中得到群 SmallGroup(216,86)，该群曾在 [6,例 3.26] 中研究。对于 $p = 2$，通过循环阶为 3 的循环群 Q_8 扩张特异群，可得到在例 3.4 中研究的群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$。

(ii) 设 $p \in \mathbb{P}$ 是素数，且 q 是 p 的幂，使得 $q+1$ 不能被 3 整除。设 P 是 $\mathrm{PSU}(3, q^2)$ 的一个 Sylow p-子群，并设 G 是它在 $\mathrm{PSU}(3, q^2)$ 中的正规化子。根据 [11, 定理 II.10.12],$G = P \rtimes H$，其中有一个阶为 $q^2 - 1$ 的循环群 H。此外， $|P| = q^3$，且 $P' = Z(P)$ 是一个阶为q的循环群。特别地， P 是一个 Camina 群。此外，容易验证 $G/P' \cong \mathrm{AGL}(1, |P/P'|)$，且 $C_G(P') \not\subseteq P'$。因此， G 满足定理 4.16 的假设，从而 $\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$。鉴于 (i)，我们指出，在这种情况下， P 不一定是超特殊群。

4.3 定理 B 的证明

根据前面各小节的结果，我们现在证明定理 B：

定理 B 的证明。设 G 是一个有限基本群，且 $Z(G') = G''$。

首先，假设 $\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$。那么，对于定理 4.1 中定义的子群 $G = G_1 * \cdots * G_n$、……、G_n，G_1。对各群 G_1、……、G_n 应用注 4.5 和定理 4.6，即得 (ii) 的结论，其中 $K_i = G_i'$。

反过来，假设 (ii)，并考虑中心积的一个因子 $G_i = K_i \rtimes \langle \varphi_i \rangle$。假设 (a) 和 (b) 蕴含 $G_i' = K_i$，且 $G_i/G_i'' \cong \mathrm{AGL}(1, |K_i/K_i'|) = \mathrm{AGL}(1, |G_i/G_i''|)$。对 G_i 应用定理 4.16，得到 $\mathrm{soc}(ZFG_i) \trianglelefteq FG_i$。由引理 2.2，进而有 $\mathrm{soc}(ZFG) \trianglelefteq FG$。 □

对于 $p > 2$，我们可以将定理 B 简化如下：

注记 4.18. 假设 $p > 2$，并设 $M := K \rtimes \langle \varphi \rangle$ 是一个有限群，具有 K，且 φ 满足定理 B (ii) 的性质 (a) 和 (b)。令 α 表示 $\langle \varphi \rangle$ 中唯一的对合。于是 α 通过取逆作用于阿贝尔群 K/K'。对于 k_1、$k_2 \in K \setminus K'$，写作 $\alpha(k_i) = k_i^{-1} k_i'$，其中某个 $k_i' \in K'\,(i = 1, 2)$。由于根据性质 (a)，$K' = Z(K)$，因此 $\alpha([k_1, k_2]) = [k_1^{-1} k_1', k_2^{-1} k_2'] = [k_1^{-1}, k_2^{-1}] = [k_1, k_2]$。特别地，$\alpha$ 在 K' 上平凡作用，因此 $\langle \varphi \rangle$ 不会忠实地作用于 K'。

这表明，若 p 为奇数，则定理 B (ii) 中的条件 (c) 可以省略。

致谢

本文的结果是我的博士论文 [4]，的一部分，该论文由 Burkhard K¨ulshammer 指导。我谨感谢他的指导，以及对本项目提出的许多宝贵意见。我也感谢 L´aszlo H´ethelyi 和 Magdolna Sz¨oke 提供例4.17 (ii)。此外，我感谢 Pascal Schweitzer 对本文引言提出的宝贵意见。最后，我感谢匿名审稿人提供的详细反馈。

利益声明

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

参考文献

[1] J. Alperin 和 D. Gorenstein。某些单群的乘子。美国数学会会刊，17(2):515–519，1966。[2] F. W. Anderson 和 K. R. Fuller。《环与模范畴》，数学研究生教材第 13 卷。Springer，纽约，1974。[3] R. Brauer。有限群的表示。载于 T. L. Saaty（编），《现代数学讲座》第 1 卷，第 133–175 页。威利，纽约，1963。[4] S. Brenner。群代数中心的底。学位论文，弗里德里希·席勒耶拿大学，2022。[5] S. Brenner 和 B. K¨ulshammer。对称代数中心中的理想。国际代数电子期刊，34:126–151，2023。

[6] S. Brenner 和 B. K¨ulshammer。中心的底为理想的群代数。Ann. Rep. Theory，1:1–19，2024。[7] R. J. Clarke。群代数中心的根基。J. Lond. Math. Soc.，2(1):565–572，1969。[8] R. Dark 和 C. M. Scoppola。素数幂阶 Camina 群。J. Algebra，181(3):787–802，1996。[9] GAP Group。GAP – 群、算法与编程，版本 4.12.2，2022。[10] D. Gorenstein。《有限群》。Harper & Row，纽约，1968。[11] B. Huppert。《有限群 I》，数学科学基础丛书第 134 卷。Springer，柏林，1967。[12] K. Ishikawa。同斜意义下的有限 p-群：仅有两种共轭类长度。J. Algebra，220:333–345，1999。[13] S. Koshitani。关于群代数中心根基的注记。J. Lond. Math. Soc.，18(2):243– 246，1978。[14] B. K¨ulshammer。群代数与块的中心和根基。Arch. Math.，114:619–629，2020。[15] M. Linckelmann。《有限群代数的块理论》。第 1 卷，伦敦数学学会学生教材第 91 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018。[16] D. L. Winter。超特殊 p-群的自同构群。Rocky Mountain J. Math.，2(2):159– 168，1972。