arXiv:2301.08090v1 [cs.GT] 19 Jan 2023

不可分割家务的加权 EF1 分配

吴小伟 * 张聪 * 周胜伟 *

摘要

我们研究如何将一组不可分任务公平地分配给一组代理人，其中每位代理人i 都有一个非负权重 w_i ，表示其承担这些任务的义务。我们考虑加权至多一件物品无嫉妒（WEF1）这一公平性概念，并提出一种高效的选取序列算法来计算 WEF1 分配。我们的分析基于对加权情形下选取序列算法的一种自然且强有力的连续解释，这一解释本身也可能具有独立的研究价值。借助这一解释，我们建立了选取序列算法在加权情形下能够保证其他公平性概念的充要条件。我们还研究公平且有效的分配的存在性，并针对双值实例提出了高效算法，用于计算 WEF1 分配和帕累托最优分配。我们的结果将 Garg 等人 [30]和 Ebadian 等人[24] 的结果推广到了加权情形。我们的工作还研究了 WEF1 的公平价格，以及 WEF1 对其他公平性概念的影响。

1 引言

作为一个可追溯至1948 [34], 公平分配的经典问题，公平分配在过去几十年里受到了计算机科学、经济学和数学领域的广泛关注。传统上，公平分配研究侧重于可分割物品 [28, 1, 25], ，但近年来，人们对不可分割物品的公平分配日益关注。在这个问题中，我们的目标是将一组 M 不可分割物品分配给一组 N 代理人，其中代理人对这些物品可能具有不同的估值函数。分配定义为这些物品的一个 n划分 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$，其中 $X_i \cap X_j = \emptyset$对所有 $i \neq j$和$\cup_{i \in N} X_i = M$均成立。我们称 X_i为分配给代理人 $i \in N$的物品束。根据代理人对物品具有正向还是负向估值，相关研究分为两条路线：一条研究物品分配，另一条研究家务分配。本文聚焦于家务分配，其中代理人对物品具有负向估值。为方便表述，我们假设每个代理人都有一个成本函数，为每个物品束赋予非负成本。我们假设所有成本函数都是可加的。

两种研究最为广泛的公平性概念是无嫉妒性（EF）[28] 和比例份额（PROP）[34]。如果每个代理人获得的物品束成本都不超过其所有物品的比例成本，则该分配满足 PROP，即对于所有 $i \in N$， $c_i(X_i) \leq \frac{1}{n} \cdot c_i(M)$。如果在某种分配下，没有代理人想要与其他代理人交换物品束以降低自己的成本，则该分配满足 EF，即对于所有 $i \neq j$， $c_i(X_i) \leq c_i(X_j)$。注意，每个 EF 分配都是 PROP 分配。对于可分割物品的分配，已有研究证明 EF 分配和 PROP 分配都存在 [1, 25]。然而，当物品不可分割时，PROP 分配（因此 EF 分配）不一定存在。例如，将单个物品分配给两个对该物品的成本均非零的代理人时，就会出现这种情况。因此，研究人员提出了这些公平性概念的若干种放宽形式。至多一件物品无嫉妒（EF1）是无嫉妒性最受广泛研究的一种放宽形式，由 Lipton 等人提出 [33]。如果从嫉妒者的物品束中移除一件物品后，任意两个代理人之间的嫉妒都能消除，则称该分配满足 EF1。研究表明，在物品 [33], 、chores 以及混合物品 [14, 5]的情形下，EF1 分配始终存在。另一种放宽形式是 Caragiannis 等人提出的至多任意一件物品无嫉妒（EFX） [18], ，它比 EF1 更强，要求移除物品束中的任意一件物品后，嫉妒都能消除。然而，与 EF1 不同，只有在一些非常特殊的情形下才保证存在 EFX 分配[22, 4, 32, 36]。一般情况下 EFX 分配是否存在，仍是最重要的开放问题之一。类似地，至多一件物品比例性（PROP1） [23] 和至多任意一件物品比例性（PROPX） [9] 是比例性的两种知名放宽形式。已有研究证明，物品 [23] 和 chores [9], 的情形下均存在 PROP1 分配；而在物品情形下，PROPX 分配可能不存在 [9] ，在 chores 情形下则可以通过多项式时间算法找到 [32]。关于公平分配问题的更详细综述，请参阅 Amanatidis 等人 [2] 和 Aziz 等人 [8]近期发表的综述。

*澳门大学 IOTSC。 {xiaoweiwu,yc27429,yc17423}@um.edu.mo。作者按字母顺序排列。

加权情形。传统的公平分配问题关注的是代理人承担相同义务的情形，而在现实世界中，代理人承担的义务往往并不相同。例如，担任领导职位的人通常被期望承担更多责任，以完成任务集。为对这类应用进行建模，研究人员提出了加权（或非对称）情形 [19, 32]。在加权情形中，每个代理人 $i \in N$ 都有一个权重 $w_i > 0$，用于表示代理人 i 在 chores 上承担的义务，并且有 $\sum_{i \in N} w_i = 1$。请注意，在非加权情形下，对于所有 $w_i = 1/n$，都有 $i \in N$。Chakraborty 等人 [19] 提出了用于物品分配的加权至多一件物品无嫉妒（WEF1），并证明 WEF1 分配始终存在，且可在多项式时间内计算。Li 等人 [32]研究了 chores 分配，并提出了一种算法，可针对相同排序（IDO）实例计算 WEF1 分配，并针对一般实例计算 WPROPX 分配。一般实例中是否存在 WEF1 分配仍未可知，且已有多项研究将其列为开放问题[19, 32, 8, 12]。在本文中，我们对这一开放问题给出了肯定答案。

效率。除了公平性，效率也是衡量分配质量的另一项重要指标。遗憾的是，效率与公平性往往相互冲突，例如，许多公平分配的效率保证都很差。因此，公平且有效的分配是否存在，近年来受到了广泛关注。常见的效率指标包括社会成本 $\sum_{i \in N} c_i(X_i)$ 和帕累托最优性。如果不存在另一种分配，能够在不增加其他代理人成本的情况下，降低某个代理人的成本，则称该分配为帕累托最优（PO）。对于物品分配，Caragiannis 等人 [18] 证明，对于无权重代理人，使纳什社会福利最大化的分配满足 EF1 且为帕累托最优。对于家务分配，EF1 且为帕累托最优的分配是否存在，仍是一个重大开放问题。目前只在一些特殊情形下已知存在满足 EF1 且为帕累托最优的分配，例如两个代理人 [5]和双值实例 [30, 24]。此外，用于衡量公平性约束导致的社会福利／成本损失的公平价格（PoF）也日益受到关注 [13, 17, 12, 11, 35]。

1.1 我们的贡献

本文研究不可分任务的 WEF1 分配的存在性、计算方法和效率。我们首先提出一种基于加权轮流选择协议的多项式时间算法，并证明任务总是存在 WEF1 分配。

结果 1 (定理 3.2) 。对于加权代理人的任务分配，存在一种可计算 WEF1 分配的多项式时间算法。

与已有研究类似， [19, 32, 7, 21], 我们的算法使用加权选取序列来决定代理人挑选其最喜欢物品的顺序。因此，我们的算法适用于序数设定，即我们只知道每位代理人对物品的排序（而非实际成本）。我们的分析基于对加权情形下选取序列算法的一种自然连续解释；Li 等人 [32] 最先使用这种解释，证明了 IDO 实例存在 WEF1 分配。此外，借助连续解释，我们重现了 Chakraborty 等人 [19] 关于物品存在 WEF1 分配的证明。我们还确定了选取序列能够保证其他加权公平性概念（例如 WEF(x, y) [21]）的充要条件。

我们还研究兼具公平性与效率的分配。我们考虑双值实例，其中存在两个取值 a、$b > 0$ 和 $a \neq b$，使得对于所有 $i \in N$ 和 $e \in M$，$c_i(e) \in \{a, b\}$，并提出一种多项式时间算法，用于计算 WEF1 和帕累托最优分配。

结果 2 (定理 4.2) 。对于加权代理人的家务分配，存在一种多项式时间算法，可为双值实例计算 WEF1 和帕累托最优分配。

双值实例被视为公平分配问题中的重要特例，并已在物品 [29, 3] 和家务 [24, 30, 36]方面得到广泛研究。我们的结果将 Garg 等人 [30] 和 Ebadian 等人 [24] 的结果推广到了加权情形。除了双值实例外，我们还证明，对于两个代理人，也存在 WEF1 和帕累托最优分配（见附录B）。

最后，我们考察公平价格（PoF），它衡量公平性约束导致的效率损失。具体而言，我们刻画 WEF1 的价格，即 WEF1 分配的最低社会成本与无约束分配的最低社会成本之比。对于非加权情形，已有研究表明，当代理人数量不少于三人时，EF1 的价格无界；而对于两个代理人，该价格为$_5{}_4$ [35]。我们将 Sun 等人 [35] 的结果推广到加权情形，证明对于两个代理人，WEF1 的价格为 $\frac{4+\alpha}{4}$，其中 $\alpha = \frac{\text{最大值}\{w_1, w_2\}}{\text{最小值}\{w_1, w_2\}}$ 是代理人权重之比。

结果 3（定理5.2）。对于加权代理人的家务分配，当代理人数为三个或更多时，WEF1 价格无界；当有两个代理人时，WEF1 价格为 $\frac{4+\alpha}{4}$，其中 $\alpha = \frac{\text{最大值}\{w_1, w_2\}}{\text{最小值}\{w_1, w_2\}}$。

1.2 其他相关工作

除了 PROP1 和 PROPX，MMS [16] 与任意价格份额 [10] 也是 PROP 的另外两种常见放宽形式。关于具有一般权重的代理人，文献 [26, 6], 研究了 任意价格份额（APS）公平性由 Babaioff 等人提出。[10]他们证明，对于物品，总存在 -近似的 APS 分配；对于家务，总存在 2-近似的 APS 分配。近期，Feige 和 Huang 将家务的近似比改进至 1。733 。关于效率，研究已证明，对于家务 [15], 以及物品与任务的混合 [9]，总存在 WPROP1 和帕累托最优分配。WPROPX 和帕累托最优分配是否总是存在，仍是未知问题。

除了 WEF1 之外，Chakraborty 等人 [21] 还提出了 EF1 的弱加权版本（WWEF1）。当代理人不带权重时，WEF1 和 WWEF1 都会退化为 EF1。他们证明，对于物品分配，在加权情形下，最大化加权纳什社会福利（WNSW）无法满足 WEF1，但能保证 WWEF1。他们还提出了 WEF(x, y)，将 WEF1 和 WWEF1 推广到更一般的情形；以及 WPROP(x, y)，将 WPROP1 推广到更一般的情形。最近，Aziz 等人 [7] 和 Hoefer 等人 [31] 研究了至多一次转移的加权无嫉妒（WEF1T），它等价于 WEF(1, 1)，并提出了用于物品分配的随机算法，保证事前 WEF 和事后 WEF1T（WEF(1, 1)）。

2 预备知识

我们研究如何将一组 m 不可分割物品（任务） M 公平地分配给一组 n 代理人 N，其中每位代理人 $i \in N$ 都有一个权重 $w_i > 0$，且$\sum_{i\in N} w_i = 1$。当对所有 $i \in N$都有 $w_i = 1/n$ 时，我们称该实例为无权重实例。物品的一个子集（例如 $X \subseteq M$）称为一个物品束。每位代理人 $i \in N$ 都有一个可加成本函数 c_i： $2^M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，该函数为每个物品束指定一个成本。为方便起见，我们用 $c_i(e)$表示 $c_i(\{e\})$，即代理人 $i \in N$ 对物品 $e \in M$的成本，因此对所有 $X \subseteq M$，都有 $c_i(X) = \sum_{e\in X} c_i(e)$。不失一般性（w.l.o.g.），我们假设成本函数已归一化，即 $\forall i \in N$, $c_i(M) = 1$。我们分别用 $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ 和 $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$表示代理人的权重和成本函数。为简化记号，对于任意 $X \subseteq M$和 $e \in M$，我们分别用 $X + e$ 和 $X - e$ 表示 $X \cup \{e\}$ 和$X \setminus \{e\}$。一个分配 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 是对物品 M的一个 n-划分，使得对所有 $i \neq j$和 $\cup_{i\in N} X_i = M$，都有 $X_i \cap X_j = \emptyset$，其中代理人 i 获得物品束 X_i。给定一个实例 $I = (N, M, \mathbf{w}, \mathbf{c})$，我们的目标是找到一个对所有代理人都公平的分配 $\mathbf{X}$。

我们首先介绍家务分配中的加权无嫉妒性（WEF）。

定义 2.1（WEF）。如果对于任意代理人 i、 $j \in N$，分配 X 都满足.....，则称分配 X 为加权无嫉妒（WEF）分配。

$$\frac{c_i(X_i)}{w_i} \leq \frac{c_i(X_j)}{w_j}.$$

请注意，当实例为无权重时，WEF 的概念与无嫉妒性（EF）的概念一致。因此，WEF 分配不一定存在。接下来，我们研究至多移除一个物品的加权无嫉妒性（WEF1），这是对 WEF 的一种放宽。

定义 2.2（WEF1）。如果对于任意代理人i、 $j \in N$，要么 $X_i = \emptyset$，要么存在一个物品 $e \in X_i$，使得.....，则称分配 X 为至多移除一个物品的加权无嫉妒（WEF1）分配。

$$\frac{c_i(X_i - e)}{w_i} \leq \frac{c_i(X_j)}{w_j}.$$

最后，我们定义帕累托最优性（PO），用于评估分配的效率。

定义 2.3（PO）。如果 $c_i(X'_i) \leq c_i(X_i)$ 对所有$i \in N$ 都成立，且至少对一个代理人不等式严格成立，则称分配 X' 帕累托支配另一个分配 X。如果分配 X 不被任何其他分配支配，则称其为帕累托最优（PO）分配。

在附录 C中，我们给出了一些证明和示例，以展示 WEF1 概念与其他公平性概念之间的联系。与物品分配不同，WEF1 并不能推出 WPROP1 [19],，我们证明，对于家务分配，每个 WEF1 分配都是 WPROP1。另一方面，我们证明，WPROP1 分配无法保证 WEF1（或其任何近似）。我们还证明，对于家务分配，WEF1 对 APS（由 Babaioff 等人提出的一种公平性标准 ($2 -$ 最小 $_{i\in N}\{w_i\}$)近似，适用于加权代理人）的近似比是紧的。

3 加权 EF1 家务分配

本节介绍一种用于计算 WEF1 分配的多项式时间算法。在无权重情形下，家务的 EF1 分配可以通过嫉妒环消除算法 [33, 14]或轮流算法 [5]计算。正如 Chakraborty 等人所示，将第一种算法扩展到加权情形时，对于物品分配会失效 [19]。主要原因是，当参与其中的代理人权重不同时，交换物品束可能无法消除嫉妒环。出于同样的原因，嫉妒环消除算法无法直接扩展到家务分配的加权情形。相比之下，轮流算法已成功扩展至加权情形，成为加权选取序列协议 [19], ，用于计算物品分配的 WEF1 分配。与轮流算法类似，在加权选取序列协议中，代理人轮流挑选自己最喜欢的未分配物品。每一轮中， i 最小的 $|X_i|/w_i$ 代理人被选中挑选一件物品（若出现平局，则按代理人索引打破平局），其中 X_i 表示代理人当前获得的物品集合 i 。请注意，在无权重情形下，该算法退化为轮流算法。遗憾的是，通过以下简单示例，我们将证明，即使只有两个代理人，该算法也无法计算出家务的 WEF1 分配。

例3.1。 考虑一个包含 $n = 2$ 个代理人、权重为 $w_1 = 0.3$ 和 $w_2 = 0.7$的实例，以及 $m = 3$个物品。两个代理人具有相同的成本函数，其成本如表 *1*所示，其中 $\epsilon > 0$任意小。运行加权选取序列协议得到分配 $X_1 = \{e_1\}$ 和$X_2 = \{e_2, e_3\}$，该分配不是 WEF1，因为即使移除任意物品 e后，X_2， $c_2(X_2 - e)/w_2$仍然远大于 $c_2(X_1)/w_1$。

	e_1	e_2	e_3
代理人 1	ϵ	1	1
代理人 2	ϵ	1	1

表1：显示加权选取序列协议无法实现家务分配的实例。

该算法失败的原因在于，代理人 2 挑选的物品更多（与代理人 1 挑选的物品相比），而且这发生在代理人 1 挑选其最喜欢的物品之后。在物品分配问题中，这并不是问题，因为物品是按照价值从高到低进行分配的；但对于家务分配而言，这会导致严重的嫉妒。有趣的是，我们观察到，如果允许代理人 2 在代理人 1 之前挑选两个物品，那么所得分配将满足 WEF1。这启发我们设计了反向加权挑选序列（RWPS）算法。该算法生成的代理人序列与加权选取序列协议中的序列相同，但随后将该序列反转，以决定代理人的挑选序列。尽管这两种算法非常相似，正如我们将在下一节中展示的那样，我们的分析与 Chakraborty 等人 [19], 的分析截然不同，也更为简洁，并且可以说更为直观。

3.1 反向加权挑选序列

本节提出反向加权挑选序列（RWPS）算法（详见算法1），用于计算家务分配的 WEF1 分配。

算法。我们为每个代理人 $i \in N$ 维护一个变量 s_i，其初始值为 $s_i = 0$。我们称 s_i 为代理人 i的大小。第一阶段中，我们按如下方式生成一个长度为 m 的代理人序列 σ： 在第 t 轮（其中 $t = 1, 2, \ldots, m$）中，令 $\sigma(t)$ 为具有最小 s_i 的代理人（若平局，则选择索引最小的代理人），并将 s_i 增加 $1/w_i$。第二阶段中，我们让代理人按照 $(\sigma(m)\ \sigma(m-1) \ldots, \sigma(1))$ 的顺序挑选物品。轮到代理人 $i = \sigma(t)$ 时，她会挑选自己最喜欢的未分配物品，即在她自己的成本函数下，所有未分配物品中成本最低的物品。我们将 $(\sigma(1)\ \sigma(2) \cdots, \sigma(m))$ 称为正向序列，将 $(\sigma(m)\ \sigma(m-1) \cdots, \sigma(1))$ 称为反向序列或挑选序列。由于该序列长度为 m，最终分配中所有物品都会被分配。

在本节中，我们证明以下主要结果。

定理3.2。 对于任务的分配，反向加权选取序列算法（算法 *1*）可在多项式时间内计算出 WEF1 分配。

请注意，我们的算法与 Chakraborty 等人提出的算法唯一的区别 [19] 在于，他们使用正向序列作为挑选序列，而我们使用反向序列。对于物品分配，他们证明了截至第t轮的部分分配，对于任意 $t = 1$，2，....., m，始终满足 WEF1，且其证明基于数学归纳法。然而，对于 chores，我们无法保证部分分配始终满足 WEF1，例如，考虑例3.1 (其中代理人2 在第二阶段开始时挑选了两个物品)。因此，我们不采用数学归纳法，而是

算法 1：逆权重选取序列算法

输入：具有可加成本估值的实例 $< M, N, \mathbf{w}, \mathbf{c} >$。

初始化所有 $i \in N$ 的 $X_i \leftarrow \emptyset$ 和 $s_i \leftarrow 0$，以及 $P \leftarrow M$；

对于 $t = 1, 2, \ldots, m$ **do**

  令 $i^* \leftarrow \arg\min_{i \in N}\{s_i\}$，平局时按代理人索引打破平局；

  设置 $\sigma(t) \leftarrow i^*$，并更新 $s_{i^*} \leftarrow s_{i^*} + 1/w_{i^*}$；

对于 $t = m, m-1, \cdots, 1$ **do**

  令 $i \leftarrow \sigma(t)$ 和 $e^* \leftarrow \arg\min_{e \in P}\{c_i(e)\}$，按物品索引打破平局；

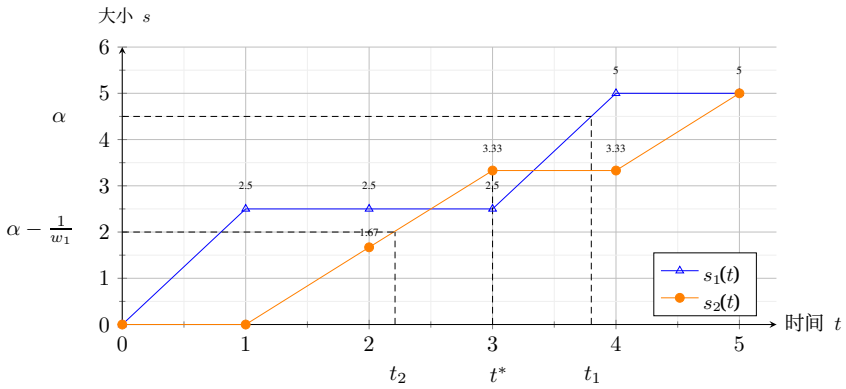
  更新 $X_i \leftarrow X_i + e^*$ 和 $P \leftarrow P - e^*$；

输出：$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。

从挑选序列的连续视角进行分析，这种方法最初用于分析为 IDO 实例中的 chores 计算 WEF1分配的算法[32]。

连续视角。假设在第一阶段确定正向序列时，在轮次t 中选中代理人 i 后，变量 s_i 以每单位时间 $1/w_i$ 的速率连续增加，变量 s_j 保持不变，对所有 $j \neq i$均如此。因此，我们可以设想 s_i：$[0, m] \to [0, m]$ 是一个非递减连续函数，其中 $s_i(t)$表示变量 s_i 在时间 $t \in [0, m]$的值。类似地，在第二阶段让代理人按照保留序列挑选物品时，我们假设在轮次$t = m$、$m-1$、.....、1 中，代理人 $i = \sigma(t)$以速率 1 连续消耗她挑选的物品，时间区间为 $(t-1, t]$。请注意，轮次 m 实际上是第二阶段的第一轮，而轮次 1 是最后一轮。为避免混淆，我们将仅使用轮次索引 t 来指代轮次。

例3.3。考虑一个包含 $n = 2$ 个代理人和 $m = 5$ 个物品的实例。设 $w_1 = 0.4$ 和$w_2 = 0.6$。执行算法 1 后，正向序列为 (1, 2, 2, 1, 2)。我们可以在连续域上绘制函数s_1 和 s_2，如下所示，其中时间区间 $(t-1, t]$ 对应于算法 1 中的第 t 轮。在时间 $t = 0$、1、2、3、4，规模较小的代理人 s_i（t）将以 $1/w_i$ 的速率增长，直至时间 $t+1$。当 s_1 增加时，其速率为 $1/w_1 = 5/2$；当 s_2 增加时，其速率为 $1/w_2 = 5/3$。



Fig图 1：两个代理人的规模函数，其中 $s_1(t_1) = \alpha, t^* = \lfloor t_1 \rfloor$，且 t_2 满足 $s_2(t_2) = \alpha - 1/w_1$。

假设第二阶段结束后，$X_1 = \{e_1, e_2\}$，其中 e_1 由代理人 1 在第 $t = 1$轮选出，e_2 在第 $t = 4$轮选出；$X_2 = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$，其中 e'_1、e'_2 和 e'_3 分别由代理人 2 在第$t = 2$、$t = 3$ 和 $t = 5$ 轮选出。注意，由于挑选序列是反向序列，因此我们有 $c_1(e_1) \geq c_1(e_2)$，且 $c_2(e'_1) \geq c_2(e'_2) \geq c_2(e'_3)$。我们可以用连续时间域等价地表示该分配，如图 2 所示，其中每个矩形代表一个物品，宽度为 1；若该物品由代理人 i选出，则高度为 $1/w_i$。

在算法和分配的连续视角下，我们证明定理 3.2。

定理 **3.2** 的证明：任取两个代理人 i，$j \in N$，我们证明代理人 i对 j 是 WEF1 的。假设在最终分配 $X_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ 中，物品按照其被选取的轮次索引递增顺序排列。因此，我们有

$$c_i(e_1) \geq c_i(e_2) \geq \cdots \geq c_i(e_k).$$

类似地，我们定义 $X_j = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_{k'}\}$。接下来我们证明 $\frac{c_i(X_i - e_1)}{w_i} \leq \frac{c_i(X_j)}{w_i}$。

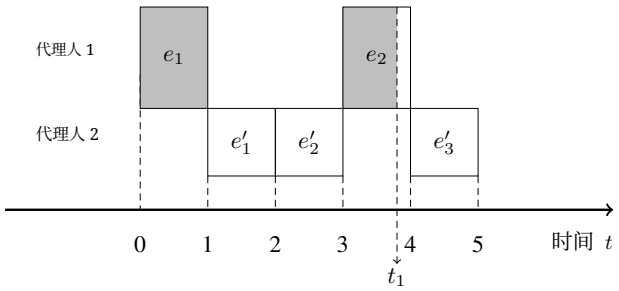


图 2：分配的连续视角示意图，其中阴影区域的大小为 $s_1(t_1)$。

现在，我们从连续视角考察 $c_{i(X_i)\ w_i}$ 如何随着 t 从0 连续增加到 m而变化。回顾一下， $s_i(t)$ 表示时刻 t 物品 X_i 的大小除以 w_i，而 $s_i(m) = k/w_i$。当 $s_i(t)$ 从 $(z-1)/w_i$ 增加到 z/w_i 时，其中 $z \in [k]$，物品 e_z 正由代理人 i 持续消耗。令 $\rho : (0, k/w_i] \to \mathbb{R}^+$ 为一个连续函数，使得 $\rho(\alpha)$ 表示当 $s_i(t)$ 达到 α 时，代理人 i 正在消耗的物品的成本。特别地，我们有

$$\rho(\alpha) = c_i(e_z), \quad \text{for } \alpha \in \left(\frac{z-1}{w_i}, \frac{z}{w_i}\right], \text{ where } z \in \{1, 2, \cdots, k\}.$$

根据定义， ρ 是一个非递增函数。

类似地，我们定义 ρ'： $(0, k'/w_j] \to \mathbb{R}^+$ 是一个连续函数，使得 $\rho'(\alpha)$ 表示在代理人 i 的成本函数下，当 $s_j(t)$ 达到 α 时，代理人 j 正在消耗的物品的成本。因此我们有

$$\rho'(\alpha) = c_i(e'_z), \quad \text{for } \alpha \in \left(\frac{z-1}{w_j}, \frac{z}{w_j}\right], \text{ where } z \in \{1, 2, \cdots, k'\}.$$

根据 ρ 和 ρ'的定义，我们有

$$\frac{c_i(X_i - e_1)}{w_i} = \int_{\frac{1}{w_i}}^{\frac{k}{w_i}} \rho(\alpha) d\alpha, \quad \text{and} \quad \frac{c_i(X_j)}{w_j} = \int_0^{\frac{k'}{w_j}} \rho'(\alpha) d\alpha.$$

接下来，我们将证明两个有用的引理，以表明 $c_{i\ (X_i - e_1)\ w_i} \leq c_{i\ (X_j)\ w_j}$。

引理 3.4。我们有 $(k-1)/w_i \leq k'/w_j$。

证明。回顾一下，每当 $s_i(t)$ 增加时，其值都会增加 $1/w_i$。考虑时刻 t'，此时 $s_i(t)$ 开始从 $(k-1)/w_i$ 增长，即 $t' = \max\{t : s_i(t) = (k-1)/w_i\}$。在时刻 t'，由于选择让 $s_i(t')$ 增长，我们必有 $s_i(t') \leq s_j(t')$。因此我们有

$$k'/w_j = s_j(m) \geq s_j(t') \geq s_i(t') = (k-1)/w_i,$$

如所要求的。 □

引理 3.5。对于所有 $\alpha \in \left(\frac{1}{w_i}, \frac{k}{w_i}\right)$，我们有 $\rho(\alpha) \leq \rho'(\alpha - \frac{1}{w_i})$。

证明。任取 α，并假设 $\rho(\alpha) = c_i(e_z)$，即 $\alpha \in \left(\frac{z-1}{w_i}, \frac{z}{w_i}\right]$。令 t_1 为满足$s_i(t_1) = \alpha$的最小[1]。令 t^* 为小于 t_1 的最大整数。根据定义，从时刻 t^* 到 t^*+1， $s_i(t)$从 $(z-1)/w_i$增长到 z/w_i，且 $t_1 \in (t^*, t^*+1]$。令 t_2为满足 $s_j(t_2) = \alpha - 1/w_i$的最早时刻。根据定义，我们有 $\rho'(\alpha - 1/w_i) = c_i(e'_x)$，其中 e'_x 是代理人 j 在时刻 t_2 正在消耗的物品。图1给出了一个示例，说明了 t_1、 t^* 和 t_2的定义，其中 $i = 1$ 和 $j = 2$。

由于在时间 t^*，选择让 s_i 增长，因此我们有

$$s_i(t^*) = (z-1)/w_i \leq s_j(t^*).$$

由于 $\alpha \in \left(\frac{z-1}{w_i}, \frac{z}{w_i}\right]$，，我们有 $\alpha - 1/w_i \leq (z-1)/w_i$。回想一下， t_2是满足$s_j(t_2) = \alpha - 1/w_i$的最小值。由于 $s_j(t^*) \geq (z-1)/w_i \geq \alpha - 1/w_i$，且 $s_j(t)$ 是非递减的，我们有 $t_2 \leq t^*$。由于 $t_1 \in (t^*, t^*+1]$，我们有 $t_2 \leq t^* < t_1$。换言之，在算法 1 的第二阶段中，“代理人 i 将物品 e_z 放入 X_i”这一事件发生的时间严格早于“代理人 j 将物品 e'_x 放入 X_j”这一事件。由于代理人 i 在 e'_x 仍未分配时选择物品 e_z，我们有 $c_i(e_z) \leq c_i(e'_x)$，这意味着 $\rho(\alpha) = c_i(e_z) \leq c_i(e'_x) = \rho'(\alpha - 1/w_i)$，从而完成证明。 □

[1]回想一下，当 $\alpha = z/w_i$ 时，可能存在多个 t 值，使得 $s_i(t) = \alpha$。[2]回想一下，代理人按照反向序列挑选物品，并且在任意时刻，至多有一个代理人正在消耗物品。

根据引理3.4 和3.5，我们有

$$\frac{c_i(X_i \setminus \{e_1\})}{w_i} = \int_{\frac{1}{w_i}}^{\frac{k}{w_i}} \rho(\alpha)d\alpha \le \int_{\frac{1}{w_i}}^{\frac{k}{w_i}} \rho'\left(\alpha - \frac{1}{w_i}\right)d\alpha = \int_{0}^{\frac{k-1}{w_i}} \rho'(\alpha)d\alpha \le \int_{0}^{\frac{k'}{w_j}} \rho'(\alpha)d\alpha = \frac{c_i(X_j)}{w_j},$$

其中，第一个不等式由引理 3.5 得出，第二个不等式由引理 3.4得出。因此，代理人 i 对代理人 j满足 WEF1。由于代理人 i 和 j 是任意选取的，因此该分配满足 WEF1。显然，算法 1 的运行时间为 $O(mn)$，至此证明完成。 ■

备注：物品分配。请注意，我们的连续视角也可用于分析物品情形下的选取序列 [7, 19, 20, 31]。我们以加权选取序列协议[19] 为例，并在附录A.1 中给出一种使用连续视角证明返回的分配为 WEF1 的替代性、更简洁的证明。

3.2 一般选取序列的分析

我们介绍的 RWPS 算法属于选取序列算法这一类。

- 在第一阶段，算法确定一个代理人序列，该序列取决于代理人的权重，但独立于成本函数。
- 在第二阶段，算法按照第一阶段确定的挑选序列，让代理人轮流挑选自己最喜欢的未分配物品。

在 RWPS 算法中，第一阶段选取一个正向序列 $\sigma = (\sigma(1) \ldots, \sigma(m))$，而将反向序列 $(\sigma(m) \ldots, \sigma(1))$ 用作挑选序列。我们将这类算法称为反向选取序列算法，并将 $\sigma = (\sigma(1) \ldots, \sigma(m))$ 称为正向序列，将 $(\sigma(m) \ldots, \sigma(1))$ 称为反向序列（即实际的挑选序列）。回忆一下，大小

$$s_i(t) = \frac{|\{t' : \sigma(t') = i, t' \le t\}|}{w_i} \tag{1}$$

代理人 i 的大小衡量的是在时间 t 之前，代理人 i 在序列中出现的加权次数，对所有 $t \in \{0, 1, \ldots, m\}$ 均如此。我们已证明，如果对所有 $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$，

$$\sigma(t) = \arg\min_{i \in N}\{s_i(t-1)\},$$

那么所得分配满足 WEF1。接下来，我们将考察其他挑选序列，并确定所得分配满足其他公平性要求的条件。请注意，我们也可以采用此前介绍的连续视角，例如，让代理人按照反向序列连续消耗物品，以分析这些算法。

我们研究弱加权至多一件物品无嫉妒（WWEF1）和至多一次转移的加权无嫉妒（WEF1T）这两种公平性概念。Chakraborty 等人 [19] 和 Aziz 等人 [7], 分别首次在物品分配问题中提出了这两种概念。下文将这些概念扩展到家务分配问题。

Defi义 3.6（WWEF1）。若分配 X 满足以下条件，则称其为弱加权至多一件物品无嫉妒（WWEF1）：对任意 r *any* 代理人 i、$j \in N$，存在一件物品 $e \in X_i$，使得

$$\frac{c_i(X_i - e)}{w_i} \le \frac{c_i(X_j)}{w_j} \quad or \quad \frac{c_i(X_i)}{w_i} \le \frac{c_i(X_j + e)}{w_j}.$$

定义 3.7（WEF1T）。若分配 X 满足以下条件，则称其为至多一次转移的加权无嫉妒（WEF1T）：对任意代理人 i、$j \in N$，存在一件物品 $e \in X_i$，使得

$$\frac{c_i(X_i - e)}{w_i} \le \frac{c_i(X_j + e)}{w_j}.$$

上述对加权无嫉妒的放宽形式，加上 WEF1，都可以统一在 WEF(x, y) 这一公平性概念之下。该概念最初由 Chakraborty 等人 [21] 针对物品分配提出。下文将其扩展到家务分配。

[3]事实上，这一类等价于一般的选取序列算法，因为我们只需将其逆序定义为该序列即可。不过，为了便于分析并保持一致，我们令 σ 为第一阶段确定的序列。

定义 3.8（WEF(x, y)）。对于任意 $x, y \in [0, 1]$，如果对于任意代理人 $i, j \in N$，都存在一个物品 $e \in X_i$，使得：则分配 X 是在移除 (x, y) 后加权无嫉妒的（WEF(x, y）

$$\frac{c_i(X_i) - x \cdot c_i(e)}{w_i} \leq \frac{c_i(X_j) + y \cdot c_i(e)}{w_j}$$

根据定义，WEF1 等价于 WEF(1, 0)；WEF1T 等价于 WEF(1, 1)；当且仅当对于任意代理人 i、j、$\in N$，代理人 i 对代理人 j 满足 WEF(1, 0) 或 WEF(0, 1) 时，分配是 WWEF1。下面，我们将确立选取序列算法返回的分配保证满足 WEF(x, y) 的条件。

定理 3.9. 当且仅当对于任意 $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 以及任意代理人 i、$j \in N$，下式成立时，反向选取序列算法能够计算出满足 WEF(x, y) 的分配：

$$s_i(t) - \frac{x}{w_i} \leq s_j(t) + \frac{y}{w_j},$$

其中 $s_i(t)$ 的定义与 (1)中相同。

证明。 我们首先证明该性质足以保证满足 WEF(x, y)。任取代理人 i，$j \in N$，并令X_i 和 X_j 分别为代理人 i 和 j 在最终分配中获得的物品束。与定理 3.2类似，令 $X_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ 和 $X_j = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\}$，其中物品按其被选取轮次的索引递增顺序排列。因此，我们有 $c_i(e_1) \geq c_i(e_2) \geq \cdots \geq c_i(e_k)$。下面，我们证明

$$\frac{c_i(X_i) - x \cdot c_i(e_1)}{w_i} \leq \frac{c_i(X_j) + y \cdot c_i(e_1)}{w_j}.$$

设 $\rho : (0, k/w_i] \to \mathbb{R}^+$ 是一个连续函数，使得当 $s_i(t)$ 达到 α 时，$\rho(\alpha)$ 表示代理人 i 正在消耗的物品的成本。特别地，我们有

$$\rho(\alpha) = c_i(e_z), \quad \text{for } \alpha \in \left(\frac{z-1}{w_i}, \frac{z}{w_i}\right], \text{ where } z \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

类似地，我们定义 $\rho' : (0, k'/w_j] \to \mathbb{R}^+$ 为一个连续函数，使得当 $s_j(t)$ 达到 α 时，在代理人 i 的成本函数下，$\rho'(\alpha)$ 表示代理人 j 正在消耗的物品的成本。因此，我们有

$$\rho'(\alpha) = c_i(e'_z), \quad \text{for } \alpha \in \left(\frac{z-1}{w_j}, \frac{z}{w_j}\right], \text{ where } z \in \{1, 2, \ldots, k'\}.$$

根据 ρ 和 ρ' 的定义，我们有

$$\frac{c_i(X_i) - x \cdot c_i(e_1)}{w_i} = \int_{\frac{x}{w_i}}^{\frac{k}{w_i}} \rho(\alpha) d\alpha, \quad \text{and} \quad \frac{c_i(X_j) + y \cdot c_i(e_1)}{w_j} = \int_0^{\frac{k'}{w_j}} \rho'(\alpha) d\alpha + \frac{y}{w_j} \cdot c_i(e_1).$$

利用定理在 $t = m$ 处给出的条件，我们立即得到以下结果。

断言 3.1。我们有 $\frac{k}{w_i} - \frac{x}{w_i} - \frac{y}{w_j} \leq \frac{k'}{w_j}$。

接下来，我们提出一个与引理非常相似的断言3.5。

断言 3.2. 对于所有 $\alpha \in \left(\frac{x}{w_i} + \frac{y}{w_j}, \frac{k}{w_i}\right)$，我们有 $\rho(\alpha) \leq \rho'\left(\alpha - \frac{x}{w_i} - \frac{y}{w_j}\right)$。

证明。任取 α，并假设 $\rho(\alpha) = c_i(e_z)$，即 $\alpha \in \left(\frac{z-1}{w_i}, \frac{z}{w_i}\right]$。令 t_1 为满足 $s_i(t_1) = \alpha$ 的最小值。利用定理在 $t = t_1$ 处给出的条件，我们有

$$s_i(t_1) - \frac{x}{w_i} - \frac{y}{w_j} = \alpha - \frac{x}{w_i} - \frac{y}{w_j} \leq s_j(t_1).$$

令 t_2 为使 $s_j(t_2) = \alpha - x/w_i - y/w_j$ 成立的最小值。根据定义，我们有 $\rho'(\alpha - x/w_i - y/w_j) = c_i(e'_p)$，其中 e'_p 是代理人 j 在时刻 t_2 正在消耗的物品。由于 $s_j(t_2) = \alpha - \frac{x}{w_i} - \frac{y}{w_j} \leq s_j(t_1)$，且 $s_j(t)$ 是非递减的，因此我们有 $t_2 \leq t_1$。换句话说，在选取序列算法的第二阶段中，“代理人 i 将物品 e_z 放入 X_i”这一事件严格早于“代理人 j 将物品 e'_p 放入 X_j”这一事件。由于代理人 i 在 e'_p 仍未分配时挑选物品 e_z，我们有$c_i(e_z) \leq c_i(e'_p)$，这意味着 $\rho(\alpha) = c_i(e_z) \leq c_i(e'_p) = \rho'(\alpha - x/w_i - y/w_j)$，从而完成证明。

□

结合命题 3.1 和 3.2，我们得到

$$\frac{c_i(X_i) - x \cdot c_i(e_1)}{w_i} = \int_{\frac{x}{w_i}}^{\frac{x}{w_i}+\frac{y}{w_j}} \rho(\alpha)d\alpha + \int_{\frac{x}{w_i}+\frac{y}{w_j}}^{\frac{k}{w_i}} \rho(\alpha)d\alpha$$

$$\leq \frac{y}{w_j} \cdot c_i(e_1) + \int_{\frac{x}{w_i}+\frac{y}{w_j}}^{\frac{k}{w_i}} \rho'\left(\alpha - \frac{x}{w_i} - \frac{y}{x_j}\right) d\alpha = \frac{y}{w_j} \cdot c_i(e_1) + \int_0^{\frac{k}{w_i}-\frac{x}{w_i}-\frac{y}{w_j}} \rho'(\alpha)d\alpha$$

$$\leq \frac{y}{w_j} \cdot c_i(e_1) + \int_0^{\frac{k'}{w_j}} \rho'(\alpha)d\alpha = \frac{c_i(X_j) + y \cdot c_i(e_1)}{w_j}.$$

其中，第一个和第二个不等式分别由断言 3.2 和断言 3.1得出。

最后，我们证明该条件是确保 WEF(x, y) 的必要条件。反设不然，存在$t \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 使得对于某些 $i, j \in N$， $s_i(t) - \frac{x}{w_i} > s_j(t) + \frac{y}{w_j}$。考虑一个实例，其中有 t个物品对所有代理人的成本均为 1，另有 $m - t$ 个物品对所有代理人的成本均为 0。按照反向选取序列，得到

$$\frac{c_i(X_i) - x \cdot c_i(e)}{w_i} = s_i(t) - \frac{x}{w_i}, \quad \text{and} \quad \frac{c(X_j) + y \cdot c_i(e)}{w_j} = s_j(t) + \frac{y}{w_j},$$

这意味着代理人 i 对代理人 j不满足 WEF(x, y)，矛盾。 □

根据定理3.9，我们得到以下推论。

推论 3.10. 反向选取序列算法计算出的分配为 WEF1，当且仅当对于任意$t \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 以及任意一对代理人 $i, j \in N$，都有 $s_i(t) - \frac{1}{w_i} \leq s_j(t)$。

因此，要确保 WEF1，基本上只能使用 RWPS。任何其他能够确保 WEF1 的算法，都可以视为采用了不同平局打破规则的 RWPS。

推论 3.11. 当且仅当对于任意 $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$和任意一对代理人 i、$j \in N$，都有 $s_i(t) - \frac{1}{w_i} \leq s_j(t) + \frac{1}{w_j}$ 时，反向选取序列算法才能计算出 WEF1T (WEF(1, 1)) 分配。

推论 3.12. 当且仅当对于任意 $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$和任意一对代理人 i、$j \in N$，都有 $s_i(t) \leq s_j(t) + {}^{1}\!/_{\text{最小值}\{w_i, w_j\}}$ 时，反向选取序列算法才能计算出加权无嫉妒 1 分配。

此外，我们证明了可以为任意 (x, y) 计算 $x + y \geq 1$分配，方法是提供一种类似于算法 1 的算法（算法及分析见附录 A.2）。

4 双值实例的 WEF1 与帕累托最优

在本节中，我们重点研究公平且高效的分配的计算，并探讨 WEF1 和帕累托最优分配的存在性。Garg 等人 [30] 和 Ebadian 等人 [24] 证明，当代理人具有相同权重时，对于双值实例（定义见下文），EF1 和帕累托最优分配是存在的。在本节中，我们使用类似的证明框架，证明对于双值实例，WEF1 和帕累托最优分配始终存在，并且可以高效地计算得到。

我们首先给出双值实例的定义。

定义 4.1（双值实例）。如果存在常数 a、$b \geq 0$，使得对于任意代理人 $i \in N$ 和物品 $e \in M$，都有 $c_i(e) \in \{a, b\}$，则称一个实例为双值实例。

对于满足 $a \neq b$ 的非零 a、b，我们可以对成本函数进行缩放，使得对于某个 $k > 1$，有 $c_i(e) = \{1, k\}$。如果 $c_i(e) = k$，则称物品 e 对代理人 i 而言是大物品；否则称其对 i 而言是小物品。此外，如果存在一个代理人 $i \in N$，使得对于所有 $e \in M$ 都有 $c_i(e) = k$，我们可以重新缩放成本，使得对于所有 $e \in M$ 都有 $c_i(e) = 1$。因此，不失一般性地，我们可以假设对于所有 $i \in N$，至少存在一个物品 $e \in M$，使得 $c_i(e) = 1$。

在本节中，我们证明以下主要结果。

定理 4.2. 存在一种算法，能够在多项式时间内为任意给定的双值实例计算出 WEF1 且帕累托最优的分配。

首先，我们根据物品的成本将其分为两组，如下所示。

定义 4.3（物品组）。若对所有 $i \in N, c_i(e) = k$，物品 $e \in M$a 都是始终为大的物品，则称其为始终为大的物品。令 M^+ 包含所有始终为大的物品，令 M^- 包含其余物品：

$$M^+ = \{e \in M : \forall i \in N, c_i(e) = k\}, \quad M^- = \{e \in M : \exists i \in N, c_i(e) = 1\}.$$

Fisher市场。在 Fisher市场中，存在一个价格向量 p，为每个任务 $e \in M$ 设定价格$p(e) > 0$。对于任意子集 $X_i \subseteq M$，令 $p(X_i) = \sum_{e \in X_i} p(e)$。给定价格向量 p，我们将代理人 i 对任务 e 的每单位痛苦价格比定义为 $\alpha_{i,e} = c_i(e)/p(e)$，并将代理人 i 的最小痛苦价格比（MPB 比率）定义为 $\alpha_i \ \alpha_i = \min_{e \in M}\{\alpha_{i,e}\}$。对于每个代理人 i，我们定义 $\text{MPB}_i = \{e \in M : \alpha_{i,e} = \alpha_i\}$，并将每个物品 $e \in \text{MPB}_i$ 称为代理人 i的 MPB 物品。若分配 X 与价格 p 构成均衡（X, p），则称其为（Fisher市场）均衡；此时每个代理人只会获得其 MPB chores，即对于任意 $i \in N$，$X_i \subseteq \text{MPB}_i$。

定义 4.4（pWEF1）。若均衡 (X,p) 满足：对于任意 i、$j \in N$，都存在一个物品 $e \in X_i$，使得

$$\frac{p(X_i - e)}{w_i} \leq \frac{p(X_j)}{w_j}.$$

在本节中，我们称 $p(X_i)/w_i$ 为代理人 i的（加权）支出。为方便记号，给定均衡 (X, p)，我们用 $\hat{p}_i$ 表示移除价格最高的物品后代理人 i 的（加权）支出，即

$$\hat{p}_i = \min_{e \in X_i} \left\{ \frac{p(X_i - e)}{w_i} \right\}.$$

下文中，若 $\hat{p}_i > p(X_j)/w_j$，则称代理人 i 强烈嫉妒代理人 j。注意，当且仅当没有代理人强烈嫉妒其他代理人时，该均衡才是 pWEF1。

引理 4.5. 若均衡 (X,p) 是 pWEF1，则分配 X 满足 WEF1 且为帕累托最优。

证明。我们首先证明分配 X 是帕累托最优的。若分配 X 连同价格 p 构成一个均衡，则对于任意代理人 $i \in N$、任意物品 $e \in X_i$ 以及任意 $j \neq i$，都有

$$\frac{c_i(e)}{\alpha_i} = \frac{c_i(e)}{\alpha_{i,e}} = p(e) = \frac{c_j(e)}{\alpha_{j,e}} \leq \frac{c_j(e)}{\alpha_j}.$$

因此，该分配使目标函数 $\sum_{i \in N} c_i(X_i)/\alpha_i$ 最小化。任何帕累托改进都会使该目标函数严格减小，从而导致矛盾。因此，分配 X 是帕累托最优的。

接下来，我们证明分配 X 满足 WEF1。由于均衡 (X, p) 满足 pWEF1，对于任意代理人i和 $j \in N$，都存在一个物品 $e \in X_i$ 使得 $p(X_i - e)/w_i \leq p(X_j)/w_j$。注意，由于 (X, p) 是均衡，代理人 i 和 j 获得的物品都具有 MPB 比率。于是我们有

$$\frac{c_i(X_i - e)}{w_i} = \alpha_i \cdot \frac{p(X_i - e)}{w_i} \leq \alpha_i \cdot \frac{p(X_j)}{w_j} \leq \frac{c_i(X_j)}{w_j},$$

其中，最后一个等式成立是因为代理人 i 对任意物品的单位价格痛苦比都至少为 α_i。 □

定义 4.6 (大额支出者和最低支出者)。 给定一个均衡 $(\mathbf{X},\mathbf{p})$，代理人 $b \in N$ 若满足 $b = \arg\max_{i \in N}\{\hat{p}_i\}$，则称为最大支出者；代理人 l 若满足 $l = \arg\min_{i \in N}\left\{p(X_i)/w_i\right\}$[4]。

我们证明，如果最大支出者不强烈嫉妒最低支出者，那么该分配满足 pWEF1。

引理 4.7. 若均衡 (X,p) 中，最大支出者 b 不强烈嫉妒最低支出者 l，则该均衡满足 pWEF1。

证明. 对任意代理人 i、$j \in N$，我们证明代理人 i 不强烈嫉妒代理人 j。注意， b 是最大支出者， l 是最低支出者。根据定义可得

$$\min_{e \in X_i}\left\{\frac{p(X_i - e)}{w_i}\right\} = \hat{p}_i \leq \hat{p}_b = \min_{e \in X_b}\left\{\frac{p(X_b - e)}{w_b}\right\} \quad \text{and} \quad \frac{p(X_l)}{w_l} \leq \frac{p(X_j)}{w_j}.$$

回忆一下，最大支出者 b 不强烈嫉妒最低支出者 l，即

$$\min_{e \in X_b}\left\{\frac{p(X_b - e)}{w_b}\right\} \leq \frac{p(X_l)}{w_l}.$$

因此，我们有 $\min_{e \in X_i}\left\{p(X_i - e)/w_i\right\} \leq p(X_j)/w_j$，从而 (X, p) 是 pWEF1。 □

[4] 在全文中，选取最大支出者时，若出现平局，我们选择索引最小的代理人。选取最低支出者时也遵循相同原则。因此，在本文其余部分中，当采用这一平局处理规则时，我们将 b（分别为 l）称为“最大”（分别为“最低”）支出者。

根据上述引理，要判断 (X,p) 是否为 pWEF1，只需考虑最大支出者b 对最低支出者 l的嫉妒。如果 b 强烈嫉妒 l，我们就尝试将某个物品从 X_b 重新分配给 X_l，并可能更新某些物品的价格，同时确保所得分配和价格构成一个新的均衡。我们证明，这样的重新分配总是可行的，并且通过多项式次重新分配，可以消除最大支出者对最低支出者的嫉妒。首先，我们计算一个初始均衡 ($\mathbf{X}^0$,$\mathbf{p}^0$)，并据此将代理人划分为不同的组。

4.1 初始均衡与代理人组

下面，我们给出一个算法（算法 2），用于计算一个初始均衡 ($\mathbf{X}$,$\mathbf{p}$) 和代理人组 $\{N_r\}_{r\in[R]}$，它们具有一些有用的性质（见引理 4.8）。

初始价格。我们将价格向量 p 设为 $p(e) = \min_{i\in N}\{c_i(e)\}$。因此，对于所有 $e \in M^-$，我们有 $p(e) = 1$；对于所有 $e \in M^+$，我们有 $p(e) = k$。

分配。我们首先计算一个使社会成本最小化的分配 X：对于每个 $e \in M^-$，将其分配给一个任意的代理人 i，满足 $c_i(e) = 1$；M^+ 中的物品则任意分配。然后，我们基于 X 按如下方式构造一个有向图 G_X。对于每一对 i、$j \in N$，如果存在一个物品 $e \in X_i$，使得$e \in \text{MPB}_j$，那么我们就从 j 向 i创建一条 MPB 边。如果存在一条从代理人 j 到另一代理人 i 的路径，满足 $\hat{}p_i > {}^{p}(X_j)\, w_j$，我们就沿着该路径反向执行一系列物品转移。当不存在此类路径时，初始分配 X 的计算即告完成。

代理人组。我们选出最大支出者 b_1，并找出能够通过 MPB 路径到达 b_1 的代理人。我们将这些代理人以及代理人 b_1一并加入第一个代理人组 N_1。确定组 N_1后，我们在剩余代理人 $N \setminus N_1$ 中选出最大支出者 b_2，重复上述步骤，并令N_2 包含 b_2 以及能够通过 MPB 路径到达 b_2 的代理人。递归地，我们将代理人划分为若干组（N_1、N_2、$\cdots$、N_R）。我们将 N_1 称为最高组，将 N_R称为最低组。根据构造，每个组 N_r都有一个代表代理人 b_r，组 $N_r \setminus \{b_r\}$ 中的每个代理人都存在一条通往该代表代理人的 MPB 路径。

算法 2：初始价格、分配和代理人组的计算

输入：一个双值实例 $<M$、N、w、c $>$1 对所有 $i \in N$、$P \leftarrow M$，初始化 $X_i \leftarrow \emptyset$；2 对所有 $e \in M^-$，设置 $p(e) = 1$；并对所有 $e \in M^+$，设置 $p(e) = k$；// 第一阶段：计算初始分配 3 计算一个社会成本最小化分配 X；4 构造有向图 $G_X = (N, E)$：若 $X_i \cap \text{MPB}_j \neq \emptyset$，则从 j 到 i 添加一条 MPB 边；5 当存在一条路径 $i_k \to \cdots \to i_0$ 使得 $\hat{}p_{i_0} > {}^{p}(X_{i_k})\, w_{i_k}$ 时，执行；6 对 $l = 1$、2、$\cdots$、k 执行；7 选取一个物品 $e \in X_{i_{l-1}} \cap \text{MPB}_{i_l}$，若出现平局，则选取价格最高的物品；8 更新 ~~$X_{i_{l-1}}$~~ $\leftarrow X_{i_{l-1}} - e$ 和 $X_{i_l} \leftarrow X_{i_l} + e$；// 第二阶段：计算代理人组 9 初始化 $R \leftarrow 0$、$N' \leftarrow N$；10 当 $N' \neq \emptyset$ 时，执行；11 令 $b \leftarrow \text{argmax}_{i\in N'}\{\hat{}p_i\}$，若出现平局，则选取索引最小的代理人；12 更新 $R \leftarrow R + 1$，并令 $N_R \leftarrow \{b\} \cup \{i \in N' :$ 在 $G_X\}$ 中，存在一条从 i到 b的 MPB 路径；13 $N' \leftarrow N' \setminus N_R$；输出：$\mathbf{X} = \{X_1, \cdots, X_n\}$、p、$\{N_r\}_{r\in[R]} = \{N_1, \cdots, N_R\}$。

如果组 N_r 中的所有代理人彼此之间都满足 pWEF1，则称该组为 pWEF1。

引理 4.8。 算法 *2* 返回一个分配$\mathbf{X}$，其价格为 $\mathbf{p}$，代理人组为 $\{N_r\}_{r\in[R]}$，并具有以下性质

1. (X, p) 是一个均衡，并且对所有 $i \in N$，$\alpha_i = 1$。2. 对所有 i、$j \in N$，如果 j 属于比 i 更低的组（即存在 $r < r'$ 使得 $i \in N_r$、$j \in N_{r'}$），那么对所有 $e \in X_i$，我们有 $c_j(e) = k$。3. 所有始终为大的物品都分配给最低组：$M^+ \subseteq \bigcup_{i\in N_R} X_i$。

4. 对于所有 $r \in [R]$，代理人组 N_r 均满足 pWEF1。

证明。对于性质 1：根据我们设置初始价格的方式，我们有 $\alpha_i = \min_{e \in M} \left\{ \frac{c_i}{p}(e) \quad (e) \right\} = 1$ 对所有 $i \in N$ 都成立。由于我们从社会成本最小化分配开始（在该分配中，对所有 $i \in N$，$\overline{X_i} \subseteq \text{MPB}_i$），并且仅当 $e \in \text{MPB}_i$ 时，才将物品 e 重新分配给代理人 i，因此我们可以确保在最终分配中，对所有 $i \in N$，$X_i \subseteq \text{MPB}_i$。因此，(X, p) 是一个均衡。

对于性质 2：假设存在 $e \in X_i$，使得 $c_j(e) = 1$。那么我们有 $e \in \text{MPB}j$，并且存在一条从 j 到 i 的 MPB 边。令 b_r 为组 N_r 的代表代理人。根据组 N_r的构造，i 可以通过一条 MPB 路径到达 b_r。因此，j 也可以通过一条 MPB 路径到达 b_r，这就产生了矛盾，因为这意味着应将 j 纳入 N_r。

对于性质 3：按照类似的论证，假设存在一个物品 $e \in M^+$，它被分配给满足 $r < R$ 的代理人 $i \in N_r$。那么，每个代理人 $j \in N_R$ 都存在一条指向 i 的 MPB 边，因为 $e \in \text{MPB}j$。因此，j可以到达 N_r 的代表代理人 b_r，这会导致矛盾，因为 $j \notin N_r$。

对于性质 4：回想一下，每个代理人 $i \in N_r$ 都可以通过一条 MPB 路径到达代表代理人 b_r，并且$\hat{}p_{b_r} \geq \hat{}p_i$。此外，我们有$\hat{}p_{b_r} \leq {}^{p}(X_i)\, w_i$，否则，从 i ~~到 b_r~~ 的路径就应当在算法的第一阶段中得到解决2，当时计算$\mathbf{X}$。

因此，对于所有 i、$j \in N_r$，我们都有 $\hat{}p_i \leq \hat{}p_{b_r} \leq {}^{p}(X_j)\, w_j$，这意味着 i 对 j 满足 pWEF1。 □

引理 4.9。 算法 2 在多项式时间内运行。

证明。 注意：（1）计算初始价格 $\mathbf{p}$ 需要 $O(m)$ 时间；（2）计算社会成本最小化分配需要 $O(nm)$ 时间；（3）在第二阶段，给定初始分配，计算代理人组需要 $O(nm)$ 时间，因为每个组都可以通过识别 G_X 的连通分量来计算。因此，为证明算法在多项式时间内运行，只需说明算法 2 第 5—8 行中的 while 循环能在多项式时间内结束。注意，计算 G_X 需要 $O(nm)$ 时间，而解决一条 MPB 路径需要 $O(m)$ 时间。下面我们将证明，通过谨慎选择要解决的 MPB 路径，while 循环会在 $O(knm)$ 轮次后结束。

回想一下，在每个 while 循环中，我们会找到一条路径 $i_k \to \cdots \to i_0$with $\hat{}p_{i_0} > p(X_{i_k})/w_{i_k}$，并通过将一个最小价格比物品从代理人 i_{l-1} 转移给代理人 i_l来处理这条路径，其中 $l = 1、2、\ldots、k$。我们将 i_k称为这条路径的起始代理人，将 i_0 称为终止代理人。如果存在多条这样的路径，我们选择使 $\hat{}p_{i_0}$最大的那条。注意，可以在 $O(nm)$ 时间内找到这样的路径。我们将一个 while 循环称为一轮，并用 $t = 1、2、\ldots$ 对各轮进行索引。我们用 X_i^t 表示第 t轮开始时代理人 i 的物品束。同样，我们定义第 t轮开始时的 $\hat{}p_i^t$ 和路径 $i_k^t \to \cdots \to i_0^t$。

断言 4.1. 我们有 $\hat{}p_{i_0^0}^0 \geq \hat{}p_{i_0^1}^1 \geq \cdots \geq \hat{}p_{i_0^t}^t$。

证明。考虑选择路径 $i_k^t \to \cdots \to i_0^t$ 的轮次 t。我们证明，对于所有满足 $l \neq k$ 的代理人 i_l^t，在本轮物品转移后，其支出不会增加，即 $p(X_{i_l^t}^t) \geq p(X_{i_l^t}^{t+1})$。反设不然，则必有 i_l^t 从 i_{l-1}^t 获得某个物品 e，且 $p(e) = k$，并将一个满足 $p(e') = 1$ 的物品 e' 转移给代理人 i_{l+1}^t。然而，这是不可能的，因为始终为大的物品 e 是所有代理人的最小价格比物品；由于我们在平局时选择价格最高的物品，该物品应转移给代理人 i_{l+1}^t。因此，每一轮中只有起始代理人的支出会增加。这意味着 $\hat{}p_{i_0^{t+1}}^{t+1} \leq \hat{}p_{i_0^t}^t$，因为在第 $t+1$ 轮开始时，与第 t 轮相比，支出增加的唯一代理人是 i_k^t，其当前支出为 $\hat{}p_{i_k^t}^{t+1} \leq p(X_{i_k^t}^t)/w_{i_k^t} < \hat{}p_{i_0^t}^t$。 □

我们进一步证明，如果某个代理人两次被认定为终止代理人，那么她第二次出现时的支出（扣除移除一件物品后的支出）会严格更少。

C断言 4.2. 如果代理人 i 在轮次 t_1 和 t_2 中都是终止代理人，其中 $t_1 < t_2$，那么我们有 $\hat{}p_i^{t_1} > \hat{}p^{t_i}$ ².

证明。反设 $\hat{}p_i^{t_1} = \hat{}p_i^{t_2}$，则 i 必须在 t_1 和 t_2 之间的某一轮次中作为起始代理人获得某件物品。令 $t < t_2$ 为 i 作为起始代理人的最后一轮次。令 j 为相应的终止代理人。我们有 $\hat{}p_j^t > {}^{p}(X_i^t)\, w_i$。由于 t 是 t_2 之前 ~~i的支~~出增加的最后一轮次，因此我们有 $\hat{}p_i^{t_2} \leq {}^{p}(X_i^t)\, w_i < \hat{}p_j^t$，这与断言 4.1 矛盾，~~因~~为由断言 4.1 可知，我们有 $\hat{}p_i^{t_2} = \hat{}p_i^{t_1} \geq \hat{}p_j^t$。 □

注意，对于每个代理人 i，$\hat{}p_i$的值至多为 $\frac{km-1}{w_i}$。如上所述，每个代理人最多只能被识别为终止代理人 km 次，因为每次出现都会使 $\hat{}p_i$ 至少减少 $\frac{1}{w_i}$。因此，轮次总数至多为 knm。总之，算法 2 可在 $O(kn^2m^2)$ 时间内完成。 □

4.2 分配算法与不变量

本节介绍一种算法，该算法从初始均衡（记为 $(\mathbf{X}^0,\mathbf{p}^0)$）出发，通过一系列物品重新分配和价格提高，构造一个 pWEF1 均衡 (X,p)。算法分轮次进行。在每一轮中，我们识别最大支出者 b 和最低支出者 l。

- 如果 b 相对于 l 满足 pWEF1，则算法终止并输出分配。根据引理4.7，我们可以保证输出的均衡满足 pWEF1。
- 否则，我们将沿着一条 MPB 路径把一个物品从 b 重新分配给 l，在此过程中，我们可能会将包含 b 的代理人组中各代理人所拥有的所有物品的价格提高 k 倍。

在介绍算法的完整细节之前，我们先说明，在整个过程中，以下不变量始终得到维护。为便于记号表示，我们用 $N_{\leq i}$ 表示 $\bigcup_{j\leq i} N_j$。同样地，我们定义 $N_{<i}$、$N_{\geq i}$ 和 $N_{>i}$。

不变量 4.10（均衡不变量）。在任意时刻，我们都有 (X,p) 构成一个均衡 *m.*

I不变量 4.11（pWEF1 不变量）。对于所有 $r \in [R]$，代理人组 N_r 在均衡 (X,p) 中满足 pWEF1 .

不变量 4.12（升价组不变式）。存在 $r^* \in [R]$，使得所有组 N_1、...、N_{r^*-1} 恰好被提升一次；所有组 N_{r^*}、...、N_R 均未被提升。此外

- 对于所有 $i \in N_{<r^*}$，我们都有 $\alpha_i = 1/k$ 和 $X_i \subseteq X_i^0$，也就是说，代理人 i 没有获得任何新的 物品；
- 对于所有 $i \in N_{\geq r^*}$，我们都有 $\alpha_i = 1$ 和 $X_i^0 \subseteq X_i$，也就是说，代理人 i 没有失去任何物品。

注意，在算法开始时，两个不变式都成立，此时 $(\mathbf{X},\mathbf{p}) = (\mathbf{X}^0,\mathbf{p}^0)$，并且所有组都未被提升（例如，$r^* = 1$），由引理 4.8可知。此外，不变量 4.12 意味着最后一个组N_R 永远不会被提升，因为 $R \geq r^*$ 对于所有 $r^* \in [R]$ 都成立；这进一步意味着 $M^+ \subseteq \bigcup_{i\in N_R} X_i$，因为未提升的代理人没有失去任何物品。

推论 4.13。组 N_R 未被提升，且 $M^+ \subseteq \bigcup_{i\in N_R} X_i$。

接下来，我们将介绍该算法的完整细节（伪代码见算法 3 ）。

完整算法。我们首先调用算法 2，该算法返回初始均衡 (X, p)，然后不断修改该均衡，直到其成为 pWEF1。为便于分析，我们使用 $(\mathbf{X}^0,\mathbf{p}^0)$ 表示该初始均衡。在每一轮（while 循环）中，我们确定最大支出者 b 和最低支出者 l。如果 b 相对于 l 满足 pWEF1，则输出 (X, p) 并终止（引理 4.7 保证该均衡是 pWEF1）。否则，我们检查 l 是否已被提升。如果 l 尚未被提升，则提升包含 b 的组（如果该组尚未被提升），然后将一个物品从 b 分配给 l（我们可以证明，X_b 中的所有物品都是相对于 l的 MPB 物品）。如果 l 已被提升，那么我们可以证明（见引理 4.19），b 必定已经被提升，并且存在一个未被提升的代理人 i，该代理人在过去的某一轮中从 l 获得了物品。然后，我们将已从 l 重新分配给 i 的物品返还给 X_l，并将一个物品从 b 重新分配给 l。

算法 3：寻找 WEF1 且帕累托最优的分配

输入：一个双值实例 $< M, N,$ w, c >1 令 (X, p $\{N_r\}_{r\in[R]}$) 为算法 2 返回的结果；// 将均衡记为 $(\mathbf{X}^0,\mathbf{p}^0)$ 2 初始化未提升代理人的集合 $U \leftarrow N$; 3 while 循环 True do 4 令 $b \leftarrow$ arg max$_{i\in N}\{\hat{} p_i\}$ 为最大支出者；5 令 $l \leftarrow$ arg min$_{i\in N}\left\{ {}^{p(X_i)}{}_{w_i} \right\}$ 为最低支出者；6 if $\hat{}$ $p_b \leq {}^{p}(x_l)\, w_l$ then 7 输出 (X, p) 并终止。8 假设 $b \in N_r$ 和 $l \in N_{r'}$；// 根据不变量 4.11，我们有 $r \neq r'$ 9 if $l \in U$ then ~~10~~ if $b \in U$ then 11 将 $\bigcup_{i\in N_r} X_i$ 中所有任务的价格提高 k 倍；

12 $U \leftarrow U \setminus N_r$; 13 任取一个 $e \in X_b$; // 根据引理 4.18，我们有 $X_b \subseteq$ MPB$_l$ 14 更新 $X_b \leftarrow X_b - e, X_l \leftarrow X_l + e$; 15 否则 16 我们有 $b \in N \setminus U$ 和 $\exists i \in U$，且 $X_i \cap X_l^0 \neq \emptyset$；// 见引理 4.19 17 任取 $e_1 \in X_b \cap$MPB$_i$ 和 $e_2 \in X_i \cap X_l^0$; 18 更新 $X_b \leftarrow X_b - e_1$, $X_l \leftarrow X_l + e_2$ 和 $X_i \leftarrow X_i + e_1 - e_2$;

4.3 算法的性质

记号。下文中，我们将 while 循环称为一轮，并将各轮的索引记为 $t = 0$，1，2，.....。我们用 $\mathbf{X}^t$ 和 $\mathbf{p}^t$ 表示第t[5]轮开始时的分配和价格。我们用 b^t 和 l^t 分别表示第 t轮开始时确定的最大支出者和最低支出者。注意，$\mathbf{X}^{t+1}$ 和 $\mathbf{p}^{t+1}$ 是第 t轮结束时的分配和价格。

除了已介绍的不变量外，我们还引入几个涉及多个轮次的不变量。显然，在第一轮开始时（当 $t = 0$ 时），这些不变量都成立。

不变式 4.14（最低支出不变量）。最低支出者在不同轮次的支出不会递减：$p^0\left(X^0_{l^0}\right) \leq p^1\left(X^1_{l^1}\right) \leq \ldots \leq p^t\left(X^t_{l^t}\right)$。

不变量 4.15（最大支出者不变量）。在第 t 轮开始时被确定为最大支出者的 b^t，从未在第 1、2、.....、t 轮被确定为最低支出者。此外，如果 b 未被提高，即对于某个 $r \geq r^*$，$b \in N_r$，那么对所有 $i \in N_r$，这一性质都成立。

不变式 4.16（价格不变式）。在每一轮中，代理人 i 的支出保持不变，除非本轮提高了 i，或者 i 是本轮的最大支出者或最低支出者。此外，对于所有 $e \in M$，$p(e) \in \{1, k\}$。

下文中，我们固定某一轮 t，并假设在第 t 轮开始时，均衡不变量（不变量 4.10）、pWEF1 不变量（不变量 4.11）、升价组不变式（不变量 4.12）、最低支出不变量（不变量 4.14）、最大支出者不变量（不变量 4.15）和价格不变量（不变式 4.16）均得到维持。回想一下，所有不变量在第 0 轮开始时均成立。此外，我们假设到目前为止算法定义良好。我们假设 b^t 强烈嫉妒 l^t（否则算法会终止）。我们将展示算法的若干性质，并利用这些性质证明在第 t 轮结束时各不变量仍得到维持。上下文清楚时，为了简化记号，我们省略上标 t。首先，我们展示关于第 t 轮的最大支出者 b 和最低支出者 l 的若干性质，以说明算法定义良好。设 r^* 如不变量 4.12 中所定义，即 $N_{<r^*}$ 中的所有代理人恰好被升价一次，而 $N_{\geq r^*}$ 中的所有代理人均未被升价。利用不变量 4.15，我们证明，如果最大支出者 b 尚未被升价，那么 b 必定属于索引最小的未提升组。这有助于证明在第 t 轮结束时不变量 4.12 得到维持：当我们提升包含 b 的组时，需要确保被提升的组是 N_{r^*}。

引理 4.17. 如果 $b \in U$，那么我们有 $b \in N_{r^*}$。

证明。 根据不变量 4.12，对于所有未提升的代理 $i \in U$，我们有 $X^0_i \subseteq X_i$。也就是说，代理人 i 没有失去任何物品。此外，根据算法的设计，X^0_i是真子集 X_i 当且仅当 i 在某一轮中被认定为最低支出者，且该轮早于 t。

假设 $b \in N_r$ 对于某个 $r \geq r^* + 1$成立。根据不变量 4.15，代理人 b 从未被认定为最低支出者，这一点与 $b \in U$ 一起意味着 $X_b = X^0_b$ 且 $\hat{}p_b = \hat{}p^0_b$。令 $b' = \arg\max_{i \in N_{r^*}}\{\hat{}p^0_i\}$。注意，$\hat{}p_{b'} \geq \hat{}p^0_{b'}$，因为 b' 没有失去任何物品。由于 b 是最大支出者，我们有

$$\hat{p}^0_b = \hat{p}_b \geq \hat{p}_{b'} \geq \hat{p}^0_{b'} \geq \hat{p}^0_b,$$

其中，最后一个不等式成立是由于初始代理组的计算原则。因此，所有不等式都应取等号，但这会导致矛盾，因为在第 t 轮中，b' 应当是最大支出者（回想一下，每次选择最大支出者时，我们都使用相同的平局处理规则，即选择索引最小的代理人）。 □

上述引理几乎可以直接推出以下结论。

引理 4.18。如果 $l \in U$，那么在第 13 行我们有 $X_b \subseteq \text{MPB}_l$。

证明。假设 $l \in N_{r'}$ 且 $b \in N_r$。由于 b 强烈嫉妒 l，根据不变量 4.11，我们知道 b 和 l 来自不同的组。此外，根据引理 4.17，我们有 $r \leq r^* < r'$。根据不变量 4.15，我们有 $X_b \subseteq X^0_b$。于是，根据代理人组的性质（见引理 4.8），对于所有 $e \in X_b$，我们有 $c_l(e) = k$。由于在第 13 行，代理人 b 已经被提升，因此对于所有 $e \in X_b$，我们有 $p(e) = k$，这意味着 $e \in \text{MPB}_l$，因为 $\alpha_l = 1$（根据不变量 4.12）。 □

下一个引理表明，算法3 的第 16 行定义良好。

引理 4.19。如果 l 已被提升，那么 b 也已被提升，并且存在一个未提升的代理 $i \in U$，在某一轮中于 t 之前从 l 获得了某个物品。

[5]请注意，这些记号与算法 ($\mathbf{X}^0$,$\mathbf{p}^0$) 返回的初始均衡记号一致（2）。

证明。我们首先证明 X_l 是 X_l^0的真子集。根据不变式4.12，由于 l 已被提升，因此我们有 $X_l \subseteq X_l^0$。假设 $X_l = X_l^0$，那么以下情况之一成立：(1) l 从未被认定为最大支出者（因此没有失去任何物品）；或者 (2) l 曾被认定为最大支出者并失去某个物品，但后来又被认定为（已提升的）最低支出者，并取回了失去的物品。

对于情形（1），设 $t' < t$ 为 l 被提高的轮次。根据假设，l 与 b^t 属于同一组。因此 b^t 相对于 l 在 $(\mathbf{X}^{t'}, \mathbf{p}^{t'})$中满足 pWEF1，由不变式 4.11可知。因此我们有

$$\frac{p(X_l)}{w_l} \geq \frac{k \cdot p^{t'}(X_l^{t'})}{w_l} \geq k \cdot \hat{p}_{b^{t'}}^{t'} \geq k \cdot \hat{p}_b^{t'} \geq \hat{p}_b,$$

其中，第一个不等式成立是因为 l 没有失去任何物品，而 l 在轮次 t'中被提高；第二个不等式成立是因为 $b^{t'}$ 相对于 l 在 $(\mathbf{X}^{t'}, \mathbf{p}^{t'})$中满足 pWEF1；第三个不等式成立是因为 $b^{t'}$ 在轮次 t'开始时是最大支出者；最后一个不等式成立是因为 b 在轮次 t之前没有收到任何物品，根据不变式 4.15。于是产生矛盾，因为 b 强烈嫉妒 l （在 $(\mathbf{X},\mathbf{p})$中）。

对于情形（2），设 t_1 为 l 被提高的轮次，并设 $t_2 \geq t_1$ 为 l 首次被认定为最大支出者的轮次。根据 t_2 的定义和不变式4.15，l 在轮次 t_2之前既没有失去也没有收到任何物品。因此我们有 $X_l^{t_1} = X_l^0 = X_l$。由于 l 在轮次 t_1 中被提高，按照情形（1）中的相同分析，我们有

$$\frac{p(X_l)}{w_l} = \frac{k \cdot p^{t_1}(X_l^{t_1})}{w_l} \geq k \cdot \hat{p}_{b^{t_1}}^{t_1} \geq k \cdot \hat{p}_b^{t_1} \geq \hat{p}_b,$$

这也与 b 在 (X, p) 中强烈嫉妒 l 这一事实相矛盾。

因此，l 作为最大支出者，必定在第 t 轮之前失去过某件物品，且该物品尚未被取回。令 $e \in X_l^0 \setminus X_l$ 为任意这样一件物品，并假设 $e \in X_i$。那么根据不变式4.12，i 在第 t 轮开始时尚未提高，因为 $X_i \not\subseteq X_i^0$。接下来需要证明 b 在第 t 轮开始时会提高。

假设 b 在第 t 轮开始时尚未提高。令 $t' < t$ 为代理人 l 作为最大支出者失去某件物品的最后一轮。那么我们有

$$\hat{p}_l^{t'} \leq \frac{p(X)}{w_l} < \hat{p}_b \leq \hat{p}_b^{t'},$$

其中，第一个不等式成立是因为 t' 是 l 失去某件物品的最后一轮；第二个不等式成立是因为 b 在 l 中强烈嫉妒 $(\mathbf{X},\mathbf{p})$；第三个不等式成立是因为我们假设 b 从未提高过，并且没有获得任何物品（根据不变式 4.15）。因此，这导致矛盾，因为 b 应当是第 t' 轮的最大支出者。因此，b 必定在第 t 轮开始时已提高，证明完毕。 □

4.4 不变量的维护

本节将证明：假设在第 t 轮开始时（识别出大额支出者和最低支出者之后）所有陈述的不变量均成立，那么到第 t 轮结束时，它们仍将全部成立（假设算法在第 t轮期间不会终止）。

引理 4.20. 均衡不变量（不变量*4.10*）在第 t 轮结束时得以维持。

证明。要证明 $(\mathbf{X}^{t+1},\mathbf{p}^{t+1})$ 是一个均衡，我们需要说明：

(1) 提高某个组的价格不会导致任何 $i \in N$ 出现 $X_i \not\subseteq \text{MPB}_i$。

(2) 第 t 轮期间发生的所有重新分配都沿着 MPB 边进行。

Fo对于第一个性质，注意，根据不变量4.15 和4.12，如果代理人 $i \in N_{r^*}$ 在本轮中被提升时，则我们有 $X_i = X_i^0$和 $p(e) = 1$ 对所有 $e \in X_i$均成立。

- 对于所有 $j \in N_{<r^*}$，由于 $\alpha_j = 1/k$，提升组 N_{r^*} 不会影响 $X_j \subseteq \text{MPB}j$。
- 对于所有 $j \in N_{r^*}$，α_j 从 1 降至 $1/k$，但对于所有 $e \in X_j$，我们有 $\alpha_{j,\,e} = 1/k$，这意味着 $X_j \subseteq$MPBj。
- 对于所有 $j \in N_{>r^*}$，由引理4.8可知，$c_j(e) = k$ 对所有价格上调（从1 至k）的物品都成立。因此，α_j 仍保持为1，并且我们仍有 $X_j \subseteq \text{MPB}j$。

对于第二个性质，我们先考虑 l 未被上调的情况。由引理 4.18 可知，分配给 l 的物品属于 MPB_l。现在假设 l 被上调。那么根据引理 4.19，b 也会被上调，且该算法会将 $e_2 \in X_i \cap X_l^0$中的一个物品重新分配给 l，并将一个物品从 b 重新分配给 i。由不变量 4.12 可知，$\alpha_b = \alpha_l = 1/k$ 且 $\alpha_i = 1$。当 e_2 从 l 分配给 i时，$p(e_2)$ 已经被上调（从 1 上调至 k）。因此，$\alpha_{l、e_2} = {}^{c_l}(e_2)\ p(e_2) = 1/k$，这意味着 $e_2 \in$ 属于 MPB_l。由于 b 属于一个被上调的组，而 i 未被上调，因~~此 $e_i(e_1) = k$~~。此外，由于 $p(e_1) = k$，所以$\alpha_{i、e_1} = 1$，这意味着 $e_1 \in$ 属于 MPB_i。

□

引理 4.21。 在第 t 轮结束时，pWEF1 不变量（不变量*4.11*）仍然成立。

证明。 根据不变量 4.16，在第 t 轮中，只有最大支出者 b、最低支出者 l 以及本轮价格上调的代理人的价格会发生变化。此外，提高整个组的价格不会影响该组内的 pWEF1 性质。因此，只需考虑本轮没有代理人的价格上调的情形，并证明在第 N_r 轮结束时，包含 b 的组 $N_{r'}$ 和包含 l 的组在第 t 轮结束时仍满足 pWEF1。根据不变量 4.11，在第 N_r 轮开始时，组 N_r' 和 t 均满足 pWEF1。

- 对于 N_r，由于只有 b 的支出会减少，只需证明在第 $i \in N_r \setminus \{b\}$ 轮结束时，没有代理人 b会嫉妒 t。注意，根据不变量4.16，i 的支出不会改变。由于 b 在本轮结束时的支出至少为 $\hat{}p_b$（因为 b 在本轮失去一件物品），且 $\hat{}p_i \le \hat{}p_b$（因为 b是最大支出者），我们得出结论：在第 i 轮结束时，b 对 t 满足 pWEF1。

- 对于 $N_{r'}$，由于只有 l 的支出增加，因此只需证明在第 t 轮结束时，代理人 l 不嫉妒任何其他代理人 $i \in N_{r'}$。这显然成立，因为在第 t 轮开始时，代理人 l 的支出最低，并且在本轮中 l 只收到一件物品。

因此，均衡 $(\mathbf{X}^{t+1}, \mathbf{p}^{t+1})$ 也是 pWEF1。 □

引理 4.22。 升价组不变式（不变量 *4.12*）在第 t 轮结束时仍然成立。

证明。只需考虑包含 b 的组在本轮被升价的情况。回忆引理 4.17，我们有 $b \in N_{r^*}$。因此，升价 N_{r^*} 会使 r^* 在第t轮结束时增加 1。注意，我们必有 $r^* \le R-1$，否则（$b \in N_R$）最低支出者 $l \notin N_R$ 会被升价，这意味着 b 已经被升价（根据引理 4.19），从而产生矛盾。此外，根据不变量 4.15，每个代理人 $i \in N_{r^*}$ 都没有收到任何物品，这意味着 $X_i^{t+1} \subseteq X_i^0$。由于对所有 $i \in N_{r^*}$，在第 t 轮开始时都有 $\alpha_i = 1$，因此在第 t 轮结束时有 $\alpha_i = 1/k$。因此，不变量 4.12 得以维持。□

引理 4.23. 最低支出不变量（不变量*4.14*）在第 t 轮结束时仍然成立。

证明。要证明 $p^{t+1}(X_{l^{t+1}}^{t+1})\ w_{l^{t+1}} \ge {}^{p}(X_l)\ w_l$，只需说明每个代理人 $i \in N$ 的支出至少为 ${}^{p}(X_l)\ w_l$。根据不变量4.16，只有 b 的支出会减少。由于 b 只失去一个物品，她在第 t 轮结束时的支出至少为 $\hat{}p_b$。由于 b 强烈嫉妒 l，我们有 $\hat{}p_b \ge {}^{p}(X_l)\ w_l$，这意味着第 t 轮结束时 b 的支出至少为 ${}^{p}(X_l)\ w_l$。

□

引理 4.24. 最大支出者不变量（不变量*4.15*）在第 t 轮结束时仍然成立。

证明。回顾一下，第 $t+1$ 轮中的大额支出者和最低支出者由我们在第 t 轮结束时计算出的均衡决定。为证明该引理，我们需要证明：

(1) 在轮次 $t+1$ 开始时，最大支出者 b^{t+1} 在轮次 1、2、……、$t+1$ 中从未被认定为最低支出者；

(2) 如果 $b^{t+1} \in N_r$ 在轮次 $t+1$ 开始时尚未增加，那么所有代理人 $i \in N_r$ 在轮次 1、2、……、$t+1$ 中都从未被认定为最低支出者。

我们先考虑在轮次 $t+1$ 开始时 b^{t+1} 尚未增加的情况。假设该陈述不成立，并令 $t' \le t$ 为某个代理人 $i \in N_r$ 最后一次被认定为最低支出者的轮次，即 $i = l^{t'}$。注意，i 可以是 b^{t+1}。根据定义，在轮次 $t'+1$、$t'+2$、……、t 中，N_r 中的代理人没有获得任何物品；在轮次 t' 中，只有代理人 $i \in N_r$ 获得了一件物品。

- 如果 $i \ne b^{t+1}$，则有

$$\hat{p}_{b^{t+1}}^{t+1} \le \hat{p}_{b^{t+1}}^{t'} \le \frac{p^{t'}(X_i^{t'})}{w_i} \le \frac{p^{t+1}(X_{l^{t+1}}^{t+1})}{w_{l^{t+1}}},$$

其中，第一个不等式成立是因为 b^{t+1} 没有收到任何物品，并且在轮次t'、$t'+1$、……、t中均未被提高；第二个不等式成立是因为代理人 i 和 b^{t+1} 属于同一组；最后一个不等式则由不变量4.14得出。

• 类似地，如果 $i = b^{t+1}$，则有

$$\hat{p}^{t+1}_{b^{t+1}} \le \hat{p}^{t'+1}_{b^{t+1}} \le \frac{p^{t'}(X^{t'}_{b^{t+1}})}{w_{b^{t+1}}} \le \frac{p^{t+1}(X^{t+1}_{l^{t+1}})}{w_{l^{t+1}}}, \tag{2}$$

其中第一个不等式成立，是因为 b^{t+1} 没有获得任何物品，且在轮次$t'+1$、$t'+2$、.....、t中没有被提高；第二个不等式成立，是因为代理人 b^{t+1} 在轮次t'中只失去了一件物品；最后一个不等式则由不变式4.14得出。

因此，由于 b^{t+1} 强烈嫉妒 l^{t+1}，我们得到了矛盾。

剩下需要考虑的是 b^{t+1} 在轮次 $t+1$ 开始时已被提高的情况，并证明命题（1）。反设不然，令 $t' \le t$ 为 b^{t+1} 最后一次被认定为最低支出者的轮次。如果 b^{t+1}在轮次 t' 开始时已被提高，那么不等式（2）仍然成立，因此会得到矛盾。如果 b^{t+1}在轮次 t' 开始时尚未被提高，那么根据不变式 b^{t+1} 不可能是最大支出者，也不可能在轮次 $t'+1$、$t'+2$、.....、t中被提高，因为 $X^{t'+1}_{b^{t+1}} \not\subseteq X^0_{b^{t+1}}$，由不变式4.15 和 4.12可知。因此，同样会得到矛盾，因为我们假设 b^{t+1} 在轮次 $t+1$ 开始时已被提高。 □

引理 4.25。 价格不变式（不变式*4.16*）在第 t 轮结束时仍然成立。

证明。我们首先证明，当第 t 轮结束时，对于所有 $e \in M$， $p(e) \in \{1, k\}$。假设 N_r 在第 t 轮中被提高。根据不变式4.15，对于所有 $i \in N_r$，代理人 i 在第 t 轮之前没有收到任何物品，即 $X_i \subseteq X^0_i$。根据不变式4.12，对于所有 $i \in N_r$，我们有 $\alpha_i = 1$，这意味着对于所有 $e \in X_i \subseteq$，MPB_i 中的 $p(e) = {}^{c_i(e)}{}_{\alpha_i} = 1$。因此，提高 e 的价格不会违反该不变式。

接下来，我们证明，对于所有未被提高、也不是大支出者或最低支出者的代理人 i，其支出 i 在第 t 轮中不会改变。如果第 t 轮开始时 l 未被提高，则算法会将一个物品从 b 重新分配给 l，结论显然成立。如果第 t 轮开始时 l 已被提高，则只需考虑沿路径 $b \to i \to l$ 进行重新分配的情况。根据引理 4.19，未被提高的 i 会收到一个物品 $e_1 \in X_b \cap$，该物品属于 MPB_i，并失去一个物品 $e_2 \in X_i \cap X^0_l$。由于算法重新分配的每个物品都已被提高，因此我们有 $p(e_1) = p(e_2) = k$，这意味着更新 $X_i \leftarrow X_i + e_1 - e_2$ 后， i 的支出保持不变。 □

鉴于所有不变量均得到保持，要证明定理 4.2，只需说明该算法在多项式数量的轮次内终止。

引理 4.26。 算法 *3* 在多项式时间内终止。

证明。 可以验证，算法 3 的每一轮都在 $O(m+n)$ 时间内完成。因此，只需说明该算法在多项式数量的轮次后终止。我们考察不同轮次中的最低支出者，并关注任意代理人 i的出现情况。根据算法的设计，在 i 是最低支出者的每一轮中， X_i 的大小都会增加 1。此外，根据不变量4.15，代理人 i 在 i 首次被认定为最低支出者后，就不再是最大支出者。因此，i 最多能被认定为最低支出者 m 次，因为它每次以最低支出者身份出现，物品束大小都会增加一。因此，轮次总数至多为 nm，这意味着算法在 $O((m+n)nm)$ 时间内终止。 □

5 公平价格

本节重点讨论公平价格，该概念在 [13, 17] 中提出，用于衡量公平性约束导致的效率损失。与先前的研究 [35, 12, 32]，一样，我们假设成本函数是归一化的，即对所有 $i \in N$， $c_i(M) = 1$。我们用 $\text{sc}(\mathbf{X}) = \sum_{i \in N} c_i(X_i)$ 表示分配 X 的社会成本。本节分析 WEF1 的公平价格（PoF）。给定一个实例 $\mathcal{I}$，相对于 WEF1 的 PoF 定义为 WEF1 分配的最低社会成本与（无约束）最优社会成本之比。

定义 5.1（WEF1 的 PoF）。给定实例 $\mathcal{I}$，WEF1 的公平价格定义为a s

$$\text{PoF}(\mathcal{I}) = \min_{\textit{WEF1 allocation } \mathbf{X}} \left\{ \frac{\text{sc}(\mathbf{X})}{\text{opt}(\mathcal{I})} \right\},$$

其中，$\text{opt}(\mathcal{I})$ 表示不受约束的最优社会成本。WEF1 的公平价格定义为所有实例中的最大公平价格，例如，$\text{PoF} = \sup_{\mathcal{I}}\{\text{PoF}(\mathcal{I})\}$。

对于无权重情形，Sun 等人 [35] 已证明，当 $n \geq 3$ 时，EF1 价格无界。对于 $n = 2$，EF1 价格为 5 4，并且存在一种算法，对于任意给定的、涉及 $\mathcal{I}$ 两个代理人的实例，都能计算出一个 EF1 分配 X，使其社会成本 sc(X) $\leq \frac{5}{4} \cdot$ opt($\mathcal{I}$)。本节研究 WEF1 的公平价格（WEF1 价格）。Sun 等人[35] 的结果表明，当 $n \geq 3$ 时，WEF1 价格无界。因此，我们考虑 $n = 2$ 的情形，并证明 WEF1 价格为 $(4+\alpha)/4$，其中 $\alpha = \frac{\text{最大}\{w_1,w_2\}}{\text{最小}\{w_1,w_2\}} \geq 1$ 表示两个代理人之间的权重比。注意，当 $\alpha = 1$ 时，该比值在无权重情形下与5 4 一致。

定理 5.2。 WEF1 的价格为 $(4+\alpha)/4$ 对于具有两个代理人且满足 $\frac{\max\{w_1,w_2\}}{\min\{w_1,w_2\}} = \alpha$.

为了证明该定理，我们首先给出一个实例 $\mathcal{I}$，使得任何 WEF1 分配的社会成本至少为 $\frac{4+\alpha}{4} \cdot$opt($\mathcal{I}$)；然后，我们提出一种算法，对于任意给定的实例 $\mathcal{I}$，该算法都能计算出一个社会成本至多为 $\frac{4+\alpha}{4} \cdot$ opt($\mathcal{I}$) 的 WEF1 分配。

考虑以下实例 $\mathcal{I}$，其中有 $w_1 = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ 和 $w_2 = \frac{1}{1+\alpha}$，其中 $\alpha \geq 1$。两个代理人的成本函数如表 2 所示，其中 $\epsilon > 0$ 任意小。

	e_1	e_2	e_3
代理人 1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
代理人 2	$\frac{\alpha}{\alpha+2} - 2\epsilon$	$\frac{1}{\alpha+2} + \epsilon$	$\frac{1}{\alpha+2} + \epsilon$

表 2：用于为 WEF1 价格提供下界的困难实例。

对于给定的实例，最优社会成本为 opt($\mathcal{I}$ $= \frac{2}{\alpha+2} + 2\epsilon$ $X_1 =$ $\{e_1\}$ $X_2 = \{e_2, e_3\}$ 1 $e \in X_2$)，由分配，实现。然而，该分配并非 WEF，因为对于所有，我们都有

$$\frac{c_2(X_2 - e)}{w_2} = \frac{\alpha+1}{\alpha+2} + \epsilon \cdot (\alpha+1) > \frac{\alpha+1}{\alpha+2} - 2\epsilon \cdot (1 + \frac{1}{\alpha}) = \frac{c_2(X_1)}{w_1}.$$

因此，任何 WEF1 分配 X 至多将 $\{e_2, e_3\}$ 中的一个物品分配给代理人 2，从而得到

$$sc(\mathbf{X}) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha+2} + \epsilon.$$

因此，对于具有两个代理人且满足 $\frac{\max\{w_1,w_2\}}{\min\{w_1,w_2\}} = \alpha$ 的实例，WEF1 价格为

$$\text{PoF} \geq \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha+2} + \epsilon}{\frac{2}{\alpha+2} + 2\epsilon} = \frac{\alpha + 4 + 2\epsilon \cdot (\alpha+2)}{4 + 4\epsilon \cdot (\alpha+2)} = \frac{4+\alpha}{4} + O(\epsilon).$$

接下来，我们给出一种算法，用于计算达到 WEF1 价格的 WEF1 分配。

引理 5.3. 存在一种算法，对于任意给定的实例 $\mathcal{I}$，若其中两个代理人的权重比为 $\frac{\max\{w_1,w_2\}}{\min\{w_1,w_2\}} = \alpha$，则该算法能计算出一个社会成本至多为 $\frac{4+\alpha}{4} \cdot$opt($\mathcal{I}$) 的 WEF1 分配。

证明。对于两个代理人，我们考虑加权调整赢家算法（见算法 4）。我们按照物品成本比率 $\frac{c_1(e)}{c_2(e)}$ 的非递减顺序为物品编制索引，即

$$\frac{c_1(e_1)}{c_2(e_1)} \leq \frac{c_1(e_2)}{c_2(e_2)} \leq \cdots \leq \frac{c_1(e_m)}{c_2(e_m)}.$$

令 $O_1 = \{e \in M : c_1(e) < c_2(e)\}$，且 $O_2 = \{e \in M : c_1(e) \geq c_2(e)\}$。注意，分配 O $= (O_1, O_2)$ 使社会成本最小，即 sc(O) $=$ opt($\mathcal{I}$)。如果 O 是 WEF1，则我们的算法终止并输出 O。否则，我们按如下方式计算一个 WEF1 分配。

对于所有整数 t，令 $L(t) = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$，且 $R(t) = \{e_t, e_{t+1}, \ldots, e_m\}$。注意，$L(t)$ 和 $R(t)$ 可能为空，例如当 $t < 1$ 或 $t > m$ 时。令 f 为满足以下条件的最大索引

$$\frac{c_2(R(f+1))}{w_2} > \frac{c_2(L(f-1))}{w_1}.$$

我们返回分配 X，其中 $X_1 = L(f)$ 和 $X_2 = R(f+1)$。

算法 4：加权调整赢家算法

输入：满足 $c_1(e_1)/c_2(e_1) \le c_1(e_2)/c_2(e_2) \le \cdots \le c_1(e_m)/c_2(e_m)$ 的双代理人实例 1 令 $O_1 = \{e \in M : c_1(e) < c_2(e)\}$和 $O_2 = \{e \in M : c_1(e) \ge c_2(e)\}$；2 若分配 (O_1, O_2) 是 WEF1，则输出：O $= \{O_1, O_2\}$. 3 否则 4 不失一般性，假设 $c_1(O_1)/w_1 \le c_2(O_2)/w_2$ (否则我们反转代理人和物品的索引)； 5 找到最大索引 f，使得 $c_2(R(f+1))/w_2 > c_2(L(f-1))/w_1$；6 $X_1 \leftarrow L(f)$, $X_2 \leftarrow R(f+1)$；输出：X $= \{X_1, X_2\}$。

下面我们证明，分配 X 是 WEF1，且 sc(X) $\le \frac{4+\alpha}{4} \cdot$sc(O)。根据 f 的定义，我们知道代理人 2 对代理人 1 满足 WEF1，因为

$$\frac{c_2(X_2 - e_{f+1})}{w_2} = \frac{c_2(R(f+2))}{w_2} \le \frac{c_2(L(f))}{w_1} = \frac{c_2(X_1)}{w_1}.$$

我们还可以得到，代理人 1 对代理人 2 满足 WEF1，因为

$$\begin{aligned}\frac{c_1(X_1 - e_f)}{w_1} &= \frac{c_1(L(f-1))}{w_1} = \frac{c_1(L(f-1))}{c_2(L(f-1))} \cdot \frac{c_2(L(f-1))}{w_1} \\ &< \frac{c_1(L(f-1))}{c_2(L(f-1))} \cdot \frac{c_2(R(f+1))}{w_2} \le \frac{c_1(X_2)}{c_2(X_2)} \cdot \frac{c_2(R(f+1))}{w_2} = \frac{c_1(X_2)}{w_2},\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由此得出（回顾一下，物品按照 $c_1(e)/c_2(e)$ 的非递减顺序排列）

$$\frac{c_1(L(f-1))}{c_2(L(f-1))} = \frac{\sum_{t=1}^{f-1} c_1(e_t)}{\sum_{t=1}^{f-1} c_2(e_t)} \le \frac{c_1(e_f)}{c_2(e_f)} \le \frac{\sum_{t=f+1}^{m} c_1(e_t)}{\sum_{t=f+1}^{m} c_2(e_t)} = \frac{c_1(X_2)}{c_2(X_2)}.$$

接下来，我们证明 sc(X) $= c_1(X_1) + c_2(X_2) \le \frac{4+\alpha}{4} \cdot$ sc(O)。

回顾一下，$O_1 = \{e \in M : c_1(e) < c_2(e)\}$，以及 $O_2 = \{e \in M : c_1(e) \ge c_2(e)\}$，这意味着$c_1(O_1) \le c_2(O_1)$，且 $c_2(O_2) \le c_1(O_2)$。此外，不失一般性，我们假设 $c_1(O_1)/w_1 \le c_2(O_2)/w_2$。为便于后续表述，我们用 A 和 B 分别表示 $c_1(O_1)$ 和 $c_2(O_2)$。于是我们有$\frac{A}{w_1} \le \frac{B}{w_2}$，且 sc(O) $= A + B$。由于成本函数已归一化，因此

$$c_1(O_2) = 1 - A \quad \text{and} \quad c_2(O_1) = 1 - B.$$

下面，我们将 sc(X) 上界为 A 和 B 的函数。

主张 5.1。我们有 $A \le w_1$、$B \ge w_2$ 和 $O_1 \subsetneq X_1$。

证明。根据定义和假设，我们有

$$\frac{A}{w_1} \le \frac{B}{w_2} \le \frac{c_1(O_2)}{w_2} = \frac{1-A}{w_2},$$

这意味着 $A \le w_1$。上述不等式还意味着，在分配 O 中，代理人 1 不嫉妒代理人 2。由于 O 不是 WEF1，代理人 2 必定嫉妒代理人 1，即

$$\frac{B}{w_2} > \frac{c_2(O_1)}{w_1} = \frac{1-B}{w_2},$$

这意味着 $B \ge w_2$。对于最后一个性质，如果 O_1 不是 X_1 的真子集，那么我们有 $X_1 \subseteq O_1$ 和 $O_2 \subseteq X_2$。由于在分配 X 中，代理人 2 对代理人 1 满足 WEF1，因此在 O 中，代理人 2 对代理人 1 也应满足 WEF1，这意味着 O 是 WEF1，与前述结论矛盾。□

主张 5.2。我们有 sc(X) $\le 1 - \frac{1-A-B}{B} \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot (1-B)$

证明。 根据主张 5.1，我们有 $O_1 \subsetneq X_1$ 且 $X_2 \subsetneq O_2$。因此我们有

$$c_1(X_1) = 1 - c_1(X_2) \le 1 - \frac{c_1(O_2)}{c_2(O_2)} \cdot c_2(X_2),$$

其中，不等式成立是因为 X_2 是 O_2 的真子集，且包含了 O_2 中成本比率最大的物品。此外，根据 f 的定义，我们有

$$c_2(X_2) = c_2(R(f+1)) > \frac{w_2}{w_1} \cdot c_2(L(f-1)) \geq \frac{w_2}{w_1} \cdot c_2(O_1).$$

综合这些界，我们得到

$$\begin{aligned} c_1(X_1) + c_2(X_2) &\leq 1 - \frac{c_1(O_2)}{c_2(O_2)} \cdot c_2(X_2) + c_2(X_2) = 1 - \left(\frac{c_1(O_2)}{c_2(O_2)} - 1\right) \cdot c_2(X_2) \\ &\leq 1 - \left(\frac{c_1(O_2)}{c_2(O_2)} - 1\right) \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot c_2(O_1) = 1 - \frac{1-A-B}{B} \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot (1-B), \end{aligned}$$

其中第二个不等式成立，是因为 $c_1(O_2) \geq c_2(O_2)$ 且 $c_2(X_2) > \frac{w_2}{w_1} \cdot c_2(O_1)$。 □

根据上述结论，令 $C = \frac{w_2}{w_1}$，我们有

$$\frac{\mathrm{sc}(\mathbf{X})}{\mathrm{sc}(\mathbf{O})} \leq \frac{1 - \frac{1-A-B}{B} \cdot C \cdot (1-B)}{A+B} = \frac{C}{A+B} \cdot \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} + 1\right) + \frac{C(1-B)}{B}.$$

根据结论 5.1 我们有 $B \geq w_2$，这意味着

$$\frac{1}{C} - \frac{1}{B} + 1 = \frac{1}{w_2} - \frac{1}{B} \geq 0.$$

因此，$\mathrm{sc}(\mathbf{X})\ \mathrm{sc}(\mathbf{O})$ 的上界在 $A = 0$ 时达到最大值，由此得到

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{sc}(\mathbf{X})}{\mathrm{sc}(\mathbf{O})} &\leq \frac{C}{B}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B} + 1\right) + \frac{C(1-B)}{B} = \frac{2C+1}{B} - \frac{C}{B^2} - C \\ &= \left(\frac{2C+1}{2\sqrt{C}}\right)^2 - \left(\frac{2C+1}{2\sqrt{C}} - \frac{\sqrt{C}}{B}\right)^2 - C \\ &\leq \left(\frac{2C+1}{2\sqrt{C}}\right)^2 - C = 1 + \frac{1}{4C} = 1 + \frac{w_2}{4 \cdot w_1} \leq \frac{4+\alpha}{4}, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式由定义 $\alpha = \text{最大}\{w_1, w_2\}\ \text{最小}\{w_1, w_2\}$ 得出。因此，我们有 sc(X) $\leq \frac{4+\alpha}{4}$·sc(O)，证明完毕。 □

6 结论

本文研究了加权 EF1 这一公平性概念，并尝试全面刻画不可分任务分配中的 WEF1。我们证明，任务总是存在 WEF1 分配，并基于加权选取序列算法提出了一种多项式时间算法来计算此类分配。我们进一步考察满足其他公平性概念的选取序列，例如满足 WEF(x, y) 且带有 $x + y \geq 1$ 的情形。我们还研究了兼具公平性与效率的分配，并证明双值实例中存在 WEF1 和帕累托最优分配。最后，我们考察了 WEF1 的公平价格，并对两个代理人情形下的 WEF1 价格给出了紧确刻画。

我们的工作留下了许多有趣的开放问题。例如，混合情形（物品与任务的混合）中是否存在 WEF1 分配，仍不得而知。对于具有一般可加成本函数的代理人，在分配任务时是否存在（加权）EF1 和帕累托最优分配，也尚不清楚。我们认为，探索代理人的成本函数超出可加情形时是否存在 WEF1 分配，也是一个有趣的研究方向。

参考文献

[1] N. Alon. 分割项链。《数学进展》，63(3):247–253, 1987年。[2] G. Amanatidis, H. Aziz, G. Birmpas, A. Filos-Ratsikas, B. Li, H. Moulin, A. A. Voudouris, and X. Wu. 不可分割物品的公平分配：综述。CoRR, abs/2208.08782, 2022年。[3] G. Amanatidis, G. Birmpas, A. Filos-Ratsikas, A. Hollender, and A. A. Voudouris. 最大纳什福利及其他关于 EFX 的故事。《理论计算机科学》，863:69–85, 2021年。

[4] G. Amanatidis, E. Markakis, and A. Ntokos. 一石多鸟：通过嫉妒环消除使 EFX 和广义最大最小份额超越 1/2。《理论计算机科学》，841:94–109, 2020年。[5] H. Aziz, I. Caragiannis, A. Igarashi, and T. Walsh. 不可分物品与任务的公平分配。自主智能体与多智能体系统，36(1):3, 2022年。[6] H. Aziz, H. Chan, and B. Li. 不可分任务的加权最大最小份额分配。载于 IJCAI，第 46–52 页。ijcai.org, 2019年。[7] H. Aziz, A. Ganguly, and E. Micha. 权益下的双全公平性。., 2022年。[8] H. Aziz, B. Li, H. Moulin, and X. Wu. 不可分物品的算法公平分配：综述与新问题。CoRR, abs/2202.08713, 2022年。[9] H. Aziz, H. Moulin, and F. Sandomirskiy. 计算帕累托最优且近似比例分配的多项式时间算法。运筹学快报，48(5):573–578, 2020年。[10] M. Babaioff, T. Ezra, and U. Feige. 面向具有任意权益的代理人的公平份额分配。载于 ACM经济学与计算会议，第 127 页。ACM, 2021年。[11] S. Barman, U. Bhaskar, and N. Shah. 不可分物品公平价格的最优界。载于网络与电子商务国际会议，计算机科学讲义第 12495 卷，第 356–369 页。Springer, 2020年。[12] X. Bei, X. Lu, P. Manurangsi, and W. Suksompong. 不可分物品的公平价格。理论计算机系统，65(7):1069–1093, 2021年。[13] D. Bertsimas, V. F. Farias, and N. Trichakis. 公平价格。运筹学，59(1):17–31, 2011年。[14] U. Bhaskar, A. R. Sricharan, and R. Vaish. 关于不可分任务和混合资源的近似无嫉妒。载于近似算法与随机化国际研讨会，莱布尼茨国际信息学论文集第 207 卷，第 1:1–1:23 页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2021年。[15]S. Brˆanzei and F. Sandomirskiy. 任务竞争性分配算法。CoRR, abs/1907.01766, 2019年。[16] E. Budish. 组合分配问题：基于等收入的近似竞争均衡。政治经济学杂志，119(6):1061–1103, 2011年。[17] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, P. Kanellopoulos, and M. Kyropoulou. 公平分配的效率。理论计算机系统，50(4):589–610, 2012年。[18] I. Caragiannis, D. Kurokawa, H. Moulin, A. D. Procaccia, N. Shah, and J. Wang. 最大纳什福利所体现的不合理公平性。ACM经济学与计算汇刊，7(3):12:1–12:32, 2019年。[19] M. Chakraborty, A. Igarashi, W. Suksompong, and Y. Zick. 不可分物品分配中的加权无嫉妒。ACM经济学与计算汇刊，9(3):18:1–18:39, 2021年。[20] M. Chakraborty, U. Schmidt-Kraepelin, and W. Suksompong. 加权公平分配中的选取序列与单调性。人工智能，301:103578, 2021年。[21] M. Chakraborty, E. Segal-Halevi, and W. Suksompong. 重新审视不可分物品的加权公平性概念。载于 AAAI，第 4949–4956 页。AAAI出版社，2022年。[22] B. R. Chaudhury, J. Garg, and K. Mehlhorn. 三个代理人时 EFX 存在。载于 ACM经济学与计算会议，第 1–19 页。ACM, 2020年。[23] V. Conitzer, R. Freeman, and N. Shah. 公平公共决策。载于 ACM经济学与计算会议，第 629–646 页。ACM, 2017年。[24] S. Ebadian, D. Peters, and N. Shah. 如何公平分配简单和困难的任务。载于 AAMAS，第 372–380 页。自主智能体与多智能体系统国际基金会（IFAAMAS），2022年。[25] F. Edward Su. 租房和谐：公平分配中的斯佩纳引理。美国数学月刊，106(10):930–942, 1999年。[26] A. Farhadi, M. Ghodsi, M. T. Hajiaghayi, S. Lahaie, D. M. Pennock, M. Seddighin, S. Seddighin, and H. Yami. 面向非对称代理人的不可分物品公平分配。人工智能研究杂志，64:1–20, 2019年。

[27] U. Feige 和 X. Huang。任务的挑选序列。CoRR，abs/2211.13951，2022年。[28] D. Foley。资源分配与公共部门。Yale Economic Essays，第 45–98 页，1967 年。[29] J. Garg 和 A. Murhekar。用少量效用值计算公平且有效的分配。载于 SAGT，计算机科学讲义第 12885 卷，第 345–359 页。Springer，2021年。[30] J. Garg、A. Murhekar 和 J. Qin。二值偏好下任务的公平且有效分配。载于 AAAI，第 5043–5050 页。AAAI出版社，2022年。[31] M. Hoefer、M. Schmalhofer 和 G. Varricchio。两全其美：拥有权益的代理人。CoRR，abs/2209.03908，2022年。[32] B. Li、Y. Li 和 X. Wu。不可分任务的近似（加权）比例分配。载于 WWW，第 122–131 页。ACM，2022年。[33] R. J. Lipton、E. Markakis、E. Mossel 和 A. Saberi。不可分物品的近似公平分配。载于 ACM经济学与计算会议，第 125–131 页。ACM，2004 年。[34] H. Steinhaus。公平分割问题。Econometrica，16:101–104，1948年。[35] A. Sun、B. Chen 和 X. V. Doan。不可分任务分配中公平性标准与效率之间的联系。载于 AAMAS，第 1281–1289 页。ACM，2021年。[36] S. Zhou 和 X. Wu。不可分任务的近似 EFX 分配。载于 IJCAI，第 783–789 页。ijcai.org，2022年。

A 其他选取序列算法的分析

A.1 物品分配

在本节中，我们将连续视角应用于物品分配。我们为 [19] 中的定理 3.3 给出一种替代且更简单的证明。在物品分配中，每位代理人都有一个加性估值函数 $v_i: 2^M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$，代理人希望最大化其物品束的效用。’

定义 A.1（物品的 WEF1）。如果对于任意 i、$j \in N$，都存在一个物品 $e \in X_j$，使得

$$\frac{v_i(X_i)}{w_i} \geq \frac{v_i(X_j - e)}{w_j}.$$

引理 A.2。加权选取序列协议 *[19]* 可在多项式时间内计算出适用于物品分配的 WEF1 分配。

证明。任取两个代理人 i、$j \in N$，我们证明代理人 i 对 j 满足 WEF1。设 $X_i = \{e_1, \cdots, e_k\}$ 和 $X_j = \{e'_1, \cdots, e'_{k'}\}$ 分别为代理人 i 和 j 在最终分配中获得的物品束。与之前的分析类似，我们假设物品按照其被选取轮次的索引递增顺序排列。下面我们证明 $v_i(X_i)/w_i \geq v_i(X_j - e'_1)/w_j$。

我们定义一个连续非增函数 $\rho: (0, k/w_i] \to \mathbb{R}^+$，使得 $\rho(\alpha) = v_i(e_z)$，对于$\alpha \in \left(\frac{z-1}{w_i}, \frac{z}{w_i}\right]$,，其中 $z \in \{1, 2, \ldots, k\}$。类似地，我们定义 $\rho': (0, k'/w_j] \to \mathbb{R}^+$为一个连续函数：$\rho'(\alpha) = v_i(e'_z)$，对于 $\alpha \in \left(\frac{z-1}{w_j}, \frac{z}{w_j}\right]$,，其中 $z \in \{1, 2, \ldots, k'\}$.。根据 ρ和 ρ'的定义，我们有

$$\frac{c_i(X_i)}{w_i} = \int_0^{\frac{k}{w_i}} \rho(\alpha)d\alpha, \quad \text{and} \quad \frac{c_i(X_j - e'_1)}{w_j} = \int_{\frac{1}{w_j}}^{\frac{k'}{w_j}} \rho'(\alpha)d\alpha.$$

接下来，我们给出两个有用的技术性断言，以证明 $v_i(X_i)/w_i \geq v_i(X_j - e'_1)/w_j$。

断言 A.1. 我们有 $k/w_i \geq (k'-1)/w_j$。

证明。考虑时刻 t'，此时 $s_j(t)$ 开始从 $(k'-1)/w_j$ 增长，即 $t' = \max\{t : s_j(t) = (k'-1)/w_j\}$。在时刻 t'，由于选择让 $s_j(t')$ 增长，我们必有 $s_j(t') \leq s_i(t')$。因此，我们有 $k/w_i \geq s_i(t') \geq s_j(t') = (k'-1)/w_j$，得证。 □

断言 A.2. 对所有 $\alpha \in \left(\frac{1}{w_j}, \frac{k'}{w_j}\right]$,，都有 $\rho\left(\alpha - \frac{1}{w_j}\right) \geq \rho'(\alpha)$。

证明。任取 α，并假设 $\rho'(\alpha) = v_i(e'_z)$，即 $\alpha \in \left(\frac{z-1}{w_j}, \frac{z}{w_j}\right]$。令 t_2 为满足 $s_j(t_2) = \alpha$ 的最小值。令 t^* 为小于 t_2 的最大整数。根据定义，从时刻 t^* 到 t^*+1，$s_j(t)$ 从 $(z-1)/w_j$ 增长到 z/w_j，且 $t_2 \in (t^*, t^*+1]$。令 t_1 为满足 $s_i(t_1) = \alpha - 1/w_j$ 的最小值。根据定义，我们有 $\rho(\alpha - 1/w_j) = v_i(e_x)$，其中 e_x 是代理人 i 在时刻 t_1 正在消耗的物品。由于在时刻 t^*，选择 $s_j(t)$ 增长，因此有 $s_j(t^*) = (z-1)/w_j \leq s_i(t^*)$。由于 $\alpha \in \left(\frac{z-1}{w_j}, \frac{z}{w_j}\right]$,，我们有 $\alpha - 1/w_j \leq (z-1)/w_j$。回顾一下，$t_1$ 是满足 $s_i(t_1) = \alpha - 1/w_j$ 的最小值。由于$s_i(t^*) \geq (z-1)/w_j \geq \alpha - 1/w_j$，且 $s_i(t)$ 单调不减，因此有 $t_1 \leq t^*$。由于 $t_2 \in (t^*, t^*+1]$，我们有 $t_1 \leq t^* < t_2$。换言之，“代理人 i 选取物品 e_x”这一事件发生的时间严格早于“代理人 j 选取物品 e'_z”这一事件。由于代理人 i 在 e'_z 仍可用时选取物品 e_x，因此有$v_i(e_x) \geq v_i(e'_z)$，这意味着 $\rho(\alpha - 1/w_j) = v_i(e_x) \geq v_i(e'_z) = \rho'(\alpha)$，证明得证。 □

结合命题 A.1 和 A.2，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{c_i(X_i)}{w_i} &= \int_0^{\frac{k}{w_i}} \rho(\alpha)d\alpha \geq \int_0^{\frac{k'-1}{w_j}} \rho(\alpha)d\alpha \geq \int_0^{\frac{k'-1}{w_j}} \rho'\left(\alpha + \frac{1}{w_j}\right)d\alpha \\ &= \int_{\frac{1}{w_j}}^{\frac{k'}{w_j}} \rho'(\alpha)d\alpha = \frac{c_i(X_j - e'_1)}{w_j},\end{aligned}$$

其中，第一个不等式由断言 A.1 推出，第二个不等式由断言 A.2推出。因此，代理人 i 对代理人 j满足 WEF1，证明完成。 □

A.2 任务的 WEF(x, y) 分配计算

本节提出一种算法，用于计算 chores 的 WEF(x, y) 分配，该算法适用于任意 $x+y \geq 1$，且与算法 1 类似。我们首先构造一个正向序列，然后让代理人按照反向序列依次挑选自己最喜欢的剩余物品。在算法开始时，我们对所有 $i \in N$ 设置 $s_i = 0$。接着，按照以下步骤确定正向序列 $(\sigma(1) \cdots, \sigma(m))$：对于每个$l \in \{1, 2, \cdots, m\}$，我们设置 $\sigma(l) \leftarrow i^*$，其中 i^* 满足对于任意 $j \neq i^*$，$s_{i^*} + \frac{1-x}{w_i} \leq s_j + \frac{y}{w_j}$，然后更新 $s_{i^*} \leftarrow s_{i^*} + \frac{1}{w_{i^*}}$。我们将在引理 A.3 的证明中说明，当 $x + y \geq 1$ 时，这样的代理人总是存在。然后，根据定理 3.9，我们可以证明所得分配满足 WEF(x, y)。

算法 5：用于 WEF(x, y) 的反向加权选取序列算法

输入：一个实例 $< M, N$、w、c $>$，具有可加成本函数。

初始化所有 $i \in N$ 和 $P \leftarrow M$ 的 $X_i \leftarrow \emptyset$ 以及 $s_i \leftarrow 0$；

对于 $t \in \{1, 2, \cdots, m\}$，执行

  令 i^* 为满足 $s_{i^*} + \frac{1-x}{w_{i^*}}$ 的任意代理人 $\leq s_j + \frac{y}{w_j}$ 对于任意 $j \in N \setminus \{i^*\}$；

  $\sigma(t) \leftarrow i^*, s_{i^*} \leftarrow s_{i^*} + \frac{1}{w_{i^*}}$;

对于 $t \in \{m, m-1, \cdots, 1\}$ 执行

  $i \leftarrow \sigma(t)$, $e^* \leftarrow \arg\min_{e \in P}\{c_i(e)\}$，任意打破平局；

  $X_i \leftarrow X_i + e^*, P \leftarrow P \setminus \{e^*\}$;

输出：X $= \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$。

引理 A.3. 算法 5 计算 WEF$(x,\ y)$ 适用于所有 $x,\ y \in [0, 1]$ 且满足 $x + y \geq 1$。

证明。 我们证明第 i^* 行中指定的代理人 3 始终存在于算法 5 中。具体而言，令

$$i^* = \arg\min_{i \in N} \left\{ s_i + \frac{1-x}{w_i} \right\}.$$

由于 $x + y \geq 1$，对于所有 $j \in N$，我们有

$$s_{i^*} + \frac{1-x}{w_{i^*}} \leq s_j + \frac{1-x}{w_j} \leq s_j + \frac{y}{w_j}.$$

因此，第 i^* 行中指定的代理人 3 始终存在，且该算法定义良好。因此，对于正向选取序列中长度为 t 的任意前缀，我们有 $s_i - \frac{x}{w_i} \leq s_j + \frac{y}{w_j}$ 对于任意 $i,\ j \in N$。根据定理 3.9 可知，算法 5 在多项式时间内计算 WEF$(x,\ y)$ 分配。 □

我们指出，$x + y \geq 1$ 是确保上述算法定义良好所必需的。反之，假设 $x + y < 1$，那么当 $t = 1$ 时，代理人 i^* 不存在；此时所有代理人的权重相同，因为对于所有 i、$j \in N$，我们总有 $\frac{1-x}{w_i} > \frac{y}{w_j}$。

B 两个代理人的 WEF1 和帕累托最优

当只有两个代理人时，加权调整赢家算法 [19] 可在多项式时间内计算物品的 WEF1 和帕累托最优分配。在本节中，我们将证明，存在一种算法，能够在多项式时间内为两个代理人的 chores 实例计算 WEF1 和帕累托最优分配。

定理 B.1. 对于两个代理人的 chores 加权分配，存在一种算法，能够始终在多项式时间内计算 chores 的 WEF1 和帕累托最优分配。

证明。给定任意 chores 实例 $\mathcal{I} =< M, N,$ w, c $>$，我们构造一个相应的物品实例$\mathcal{I}' =< M, N,$ w′, v $>$，使得对于任意 $i \in N, e \in M$，估值函数满足 $v_i(e) = c_i(e)$，且权重满足 $w'_1 = w_2, w'_2 = w_1$。注意，已有证明表明，两个代理人存在 WEF1 和帕累托最优分配 [19]。令 X′ $= \{X'_1, X'_2\}$ 为 $\mathcal{I}'$的一个 WEF1 和帕累托最优分配。然后，我们通过 $X_1 = X'_2, X_2 = X'_1$计算 chores 的一个分配 X。我们证明该分配 X 是 WEF1 且帕累托最优。

请注意，对于两个代理人的情形，我们有 $M = X_1 \cup X_2$，从而得到 $X_1 = M \setminus X'_1, X_2 = M \setminus X'_2$。我们首先证明分配 X 是帕累托最优。反设不然，存在另一个分配 X$^* = \{X^*_1, X^*_2\}$ 支配 X。不失一般性地，假设 $c_i(X^*_1) < c_1(X_1)$ $c_2(X^*_2) \leq c_2(X_2)$。那么对于实例 $\mathcal{I}'$，我们有 $v_1(M \setminus X^*_1) > v_1(M \setminus X_1) = v_1(X'_1)$，且 $v_2(M \setminus X^*_2) \geq v_2(M \setminus X_2)$ $= v_2(X'_2)$,

这与 X′ 是帕累托最优这一事实矛盾。接下来，我们证明分配 X 是 WEF1。请注意，在分配 X′ 中，对于任意 $i \neq j$，都存在一个物品 $e \in X_j$，使得

$$\frac{v_i(X_i')}{w_i'} \geq \frac{v_i(X_j' - e)}{w_j'} \Rightarrow \frac{c_i(X_j)}{w_j} \geq \frac{c_i(X_i - e)}{w_i}.$$

该推论成立，因为 $X_i = X_j'$ 以及 $w_i' = w_j$。因此，对于实例 $\mathcal{I}$中的 chores，分配 X 是 WEF1 且为帕累托最优。

□

C WEF1 与其他公平性概念

本节讨论 WEF1 这一公平性概念与其他概念之间的关系，包括加权至多一项比例公平（WPROP1）和任意价格份额（APS）。我们证明，WEF1 蕴含 WPROP1，且是任意价格份额的（$2 - \min_{i \in N} w_i$）近似。

定义 C.1（WPROP1）。若对于任意 $i \in N$，都存在一项物品 $e \in X_i$，使得

$$c_i(X_i - e) \leq w_i \cdot c_i(M).$$

众所周知，在无权重情形下，无论是物品分配还是家务分配，EF1 都蕴含 PROP1。然而，当代理人具有一般权重时，Chakraborty 等人 [19] 证明，对于物品分配，WEF1 分配不一定满足 WPROP1。与此相反，我们将在下文证明，对于家务分配，任何 WEF1 分配都满足 WPROP1。

引理 C.2. 任何 WEF1 分配都是 WPROP1，但反之不成立。

证明. 设 X 为任意 WEF1 分配。固定任意代理人 i，令 $e^* = \arg\max_{e \in X_i} \{c_i(e)\}$ 为 X_i中成本最高的物品。根据 WEF1 的定义，对于所有 $j \in N$，我们有

$$\frac{c_i(X_i - e^*)}{w_i} \leq \frac{c_i(X_j)}{w_j} \quad \Rightarrow \quad \frac{w_j}{w_i} \cdot c_i(X_i - e^*) \leq c_i(X_j).$$

因此我们有

$$c_i(X_i - e^*) = w_i \cdot \frac{\sum_{j \in N} w_j}{w_i} \cdot c_i(X_i - e^*) \leq w_i \cdot \sum_{j \in N} c_i(X_j) = w_i \cdot c_i(M),$$

这意味着该分配是 WPROP1。

最后，通过下面这个简单的例子，我们说明 WPROP1 无法保证（任何有界的近似意义上的）WEF1，即使对于具有相同成本函数的两个对称代理人也是如此。

	e_1	e_2	e_3
代理人 1	ϵ	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
代理人 2	$\boxed{\epsilon}$	1	1

表 3：示例说明 WPROP1 并不蕴含 WEF1，其中 $\epsilon > 0$ 可以任意小。

很容易看出，由方框标出的物品构成的分配满足 WPROP1[6]，，但不满足 WEF1，因为对于所有 $e \in X_1$，$c_1(X_1 - e) \geq 1/\epsilon \cdot c_1(X_2)$。

□

接下来，我们研究任意价格份额（APS）公平这一公平性概念。Babaioff 等人 [10] 针对物品分配提出了这一概念，随后又在 [32, 27] 中将其调整至任务情形。

固定任意代理人 $i \in M$。如果对于所有 $e \in M$，$r_e \geq 0$，且$r(M) = \sum_{e \in M} r_e = c_i(M)$，我们就称 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$ 为奖励向量。令 R 为所有奖励向量构成的集合。代理人 i的任意价格份额 APS_i 定义为满足以下条件的最小值：无论奖励向量如何设定，代理人 i 总能找到一个任务子集，使其总奖励至少为 w_i，且总成本至多为 APS_i。

定义 C.3（APS）。权重为 w_i 的代理人 i 的任意价格份额（APS）定义为

$$\text{APS}_i = \max_{r \in R} \min_{S \subseteq M} \left\{ c_i(S) : \sum_{e \in S} r_e \geq w_i \cdot c_i(M) \right\}.$$

[6]事实上，该分配满足 WPROPX，这是一种公平性概念，要求对于所有 $i \in N$ 和 $e \in X_i$，$c_i(X_i - e) \leq w_i \cdot c_i(M)$。

如果对于所有 $i \in N$，均有 $c_i(X_i) \leq \alpha \cdot \mathsf{APS}_i$，则称该分配为 α-APS 分配。

引理 C.4. 若分配 X 满足 WEF1，则它是 $(2 - \min_{i \in N} w_i)$-任意价格份额分配。然而，任意价格份额分配无法保证 WEF1 的常数近似。

证明。 任取一个代理人 i。我们证明 $\mathbf{X}$ 是 $(2 - w_i)$-APS 分配给 i。众所周知，例如参见 [32]，我们有以下关于APS_i的性质：

$$\mathsf{APS}_i \geq \max\left\{ w_i \cdot c_i(M),\ \max_{e \in M}\{c_i(e)\} \right\}.$$

令 $e^* = \arg\max_{e \in X_i}\{c_i(e)\}$ 表示 X_i 中成本最高的物品。由于 X 满足 WEF1，我们有

$$\begin{aligned} c_i(X_i - e^*) &= w_i \cdot \frac{\sum_{j \in N} w_j}{w_i} \cdot c_i(X_i - e^*) \\ &\leq w_i \cdot \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_i(X_j) + w_i \cdot c_i(X_i - e^*) = w_i \cdot c_i(M) - w_i \cdot c_i(e^*). \end{aligned}$$

因此我们有

$$c_i(X_i) \leq w_i \cdot c_i(M) + (1 - w_i) \cdot c_i(e^*) \leq \mathsf{APS}_i + (1 - w_i) \cdot \mathsf{APS}_i = (2 - w_i) \cdot \mathsf{APS}_i,$$

其中，第二个不等式成立是因为 $\mathsf{APS}_i \geq w_i \cdot c_i(M)$ 和 $\mathsf{APS}_i \geq c_i(e^*)$。

接下来，我们给出一个实例，说明近似比 $(2 - \min_{i \in N} w_i)$ 是紧的。考虑以下包含 n 个具有相同成本函数的对称代理人的实例。

代理人	e_1	e_2	e_3	$\cdots$	e_n	e_{n+1}	$\cdots$	e_{2n-1}
1	$\boxed{\frac{1}{n}}$	$\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{n^2}$
2	$\frac{1}{n}$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$	$\cdots$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{n^2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-1$	$\frac{1}{n}$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\boxed{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{n^2}$
n	$\frac{1}{n}$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$	$\boxed{\frac{1}{n^2}}$	$\cdots$	$\boxed{\frac{1}{n^2}}$

表 4：一个表明近似比 $2 - \min_{i \in N} w_i = 2 - \frac{1}{n}$ 是紧的实例。

如表 4 所示，有 $2n-1$ 个物品需要分配给 n 个对称代理人，对所有 $i \in N$，我们都有 $\mathsf{APS}_i = \mathsf{APS} \geq 1/n$。事实上，我们有 $\mathsf{APS} = 1/n$，因为给定任意奖励向量，物品束 $\{e_1\}$、$\{e_2, e_{n+1}\}$、$\{e_3, e_{n+2}\}$、……、$\{e_n, e_{2n-1}\}$ 中必有一个的奖励至少为 $1/n$；在定义 APS 时，可以选择该物品束，以确保成本为 $1/n$。考虑由方框标出的物品所表示的分配 X。由于除代理人 1 以外的所有代理人的成本均为 $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$，且移除 e_1 后代理人 1 的成本为 $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$，因此该分配满足 EF1。然而，该分配并不优于 $\left(2 - \frac{1}{n}\right)$-APS，因为 $c_1(X_1) = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \mathsf{APS}$。

最后，我们给出一个简单示例，说明即使在无权重情形下，APS 分配也不能保证对 WEF1 有任何常数近似。考虑一个包含四件物品 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 的实例，其中有三个成本函数为 $c = (1, 1/2, 1/2, \epsilon)$ 的相同代理人，且 $\epsilon > 0$ 任意小。将 e_1 分配给代理人 1、将 $\{e_2, e_3\}$ 分配给代理人 2、将 e_4 分配给代理人 3 后，我们得到一个 APS 分配 X，因为对所有 $i \in N$，$\mathsf{APS} \geq c(e_1) = 1$。然而，该分配远非 EF1，因为对所有 $e \in X_2$，$c(X_2 - e) = 1/2 \geq \omega(1) \cdot \epsilon = \omega(1) \cdot c(X_3)$。□