arXiv:2301.08093v1 [math.RA] 19 Jan 2023

三角环上的某些广义 Jordan 映射迫使其具有可加性

SK AZIZ、ARINDAM GHOSH 和 OM PRAKAS H*

Abstract. 本文证明，对于三角环 $\mathcal{T}$ 上的映射 δ ，若满足 $\delta(ab+ba) = \delta(a)b+a\tau(b)+\delta(b)a+b\tau(a)$，对所有 a、$b \in \mathcal{T}$ 均成立；并且对于某些满足 $\tau(ab+ba) = \tau(a)b+a\tau(b)+\tau(b)a+b\tau(a)$ 的映射 τ，其定义在 $\mathcal{T}$ 上，则该映射为可加映射。此外，本文还证明，若映射 T定义在 $\mathcal{T}$ 上，且对所有a、$b \in \mathcal{T}$满足 $T(ab) = T(a)b = aT(b)$，则该映射为可加映射。进一步地，我们证明，若三角环 $\mathcal{T}$上的映射 D 对所有 a、$b \in \mathcal{T}$ 以及整数 m、$n \geq 1$ 满足 $(m+n)D(ab) = 2mD(a)b + 2naD(b)$，则 D 为可加映射。

1. Introduction

设 R 为一个环。若映射 $f\colon R \to R$ 满足

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

对所有 a， $b \in R$。1957年，Herstein [5] 将环上的Jordan导子引入为一个可加映射 $\tau\colon \ R \to R$ 满足

$$\tau(a^2) = \tau(a)a + a\tau(a)$$

对所有 $a \in R$。他还证明，满足某些挠限制的素环上的任意Jordan导子都是导子。2003年，Jing和Lu [6] 引入了广义Jordan导子，并证明在无2-挠素环上，每个广义Jordan导子都是广义导子。回顾一下，若可加映射 $\delta\colon R \to R$ 满足

$$\delta(a^2) = \delta(a)a + a\tau(a)$$

对所有 $a \in R$ ，且存在某个Jordan导子 $\tau\colon R \to R$。1952年，Wendel [13]引入了中心化子的概念。若可加映射 $T\colon R \to R$ 满足

$$T(ab) = T(a)b$$

对所有的 $a, b \in R$。类似地，我们定义环上的右中心化子。若可加映射 $T\colon R \to R$ 满足 T 同时是左中心化子和右中心化子，则称其为双侧中心化子。2014年，Ali 和 Fo˘sner [1] 引入了 (m,n)-导子的概念。设 $m, n \geq 0$ 为整数。若可加映射 $D\colon R \to R$ 满足

$$(m+n)D(ab) = 2mD(a)b + 2naD(b),$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16W10, 16S50.*Key words and phrases.* 可加性，Jordan导子，双侧中心化子，(m,n)-导子，三角环。 * 通讯作者。

对所有的 $a,b \in R$。事实上，对于 $m = 1$ 和 $n = 1$， D 是 2-挠无环 R 上的正规导子。

设 $n \geq 2$ 为任意整数。若对于某个 $a \in R$ ， $na = 0$蕴含 $a = 0$，则称环 R 为 n-挠无。对于满足某些函数方程的环上的映射何时可加，这是一个有趣的问题。Rickart [9] 于 1948年首次提出了这个问题。他证明，任意布尔环 B 到任意环 S 的双射乘法映射都是可加的。后来，Johnson 在[7]中对这些结果进行了广泛研究。1969年，Martindale III [8] 证明，在环 R 中存在满足某些条件的一族幂等元时，环 R 到任意环 S 的任意乘法同构都是可加的。1991年，Daif [2] 在假设 Martindale 条件的情况下证明，环 R 上的任意乘法导子都是可加的。后来，2009年，Wang [11] 利用 Martindale 条件证明，任意 n-乘法导子 d 都是可加的，其中 $n > 1$ 为整数。他证明，在巴拿赫空间X 上的标准算子代数 A 中，若 $dim(X) \geq 2$，则任意 n-乘法同构或 n-乘法导子都是可加的。

此外，2011年，Wang[12] 证明，三角环 $\mathcal{T}$ 上的任意 n乘法导子 d 在对 $\mathcal{T}$ 作出一些假设的情况下都是可加的。2014年，Ferreira [3]证明，从 n三角矩阵环 $\mathcal{T}$ 到任意环 $\mathcal{S}$ 的每个 m乘法同构，在对 $\mathcal{T}$ 作出一些假设的情况下都是可加的，其中 n、 $m > 1$ 为整数。他还证明，每个 m乘法导子 $\mathcal{T}$ 都是可加的。2015年，Ferreira [4] 再次对此进行研究，并证明三角环 $\mathcal{T}$ 上的映射 τ 满足

$$\tau(ab + ba) = \tau(a)b + a\tau(b) + \tau(b)a + b\tau(a)$$

对所有 a、 $b \in \mathcal{T}$，在对 $\mathcal{T}$作出一些假设的情况下都是可加的。此外，如果 $\mathcal{T}$无 2-挠，那么 τ 是Jordan导子。Ferreira的结果 [4] 促使我们研究乘法广义Jordan导子在何种条件下能在三角矩阵环上成为可加映射。本文对上述问题给出了肯定的回答。

2014年，El-Sayed等人[10] 证明，在带有非平凡幂等元的素环上，满足以下条件的每个映射 T

$$T(ab) = T(a)b \tag{1.1}$$

对所有 a、 $b \in R$，都是可加的。注意，若环 R 满足：对于某些 a、 $b \in R$ ， $aRb = 0$蕴含 $a = 0$ 或 $b = 0$ ，则称其为素环；若对于某些 $a \in R$ ， $aRa = 0$ 蕴含 $a = 0$，则称其为半素环。因此，每个素环都是半素环，但反之不成立。受 El-Sayed等人 [10], 的工作启发，我们证明，在 $\mathcal{T}$上的映射 T 若满足

$$T(ab) = T(a)b = aT(b),$$

对所有 a、 $b \in \mathcal{T}$，都是可加的。

此外，我们证明，任何在 $\mathcal{T}$ 上的映射 D 若满足

$$(m + n)D(ab) = 2mD(a)b + 2naD(b),$$

对所有 a、$b \in \mathcal{T}$ 以及某些整数 m、$n \geq 1$，均成立，则该映射可加。

本文中，我们采用 Wang 给出的三角代数定义[12]。

定义 1.1. 设 A 和 B 是两个环，M 是一个 (A, B)-双模，使得

(a) M 作为左 A-模和右 B-模是忠实的；(b) 若 $m \in M$ 满足条件 $AmB = 0$，则推出 $m = 0$。

则环

$$\mathcal{T} = \mathrm{Tri}(A, M, B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} \mid a \in A, b \in B, m \in M \right\},$$

在通常的矩阵加法和乘法下称为三角环。

Let $\mathcal{T}_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \mid a \in A \right\}$, $\mathcal{T}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & m \\ & 0 \end{pmatrix} \mid m \in M \right\}$ and $\mathcal{T}_{22} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & b \end{pmatrix} \mid b \in B \right\}$.

于是 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{11} \oplus \mathcal{T}_{12} \oplus \mathcal{T}_{22}$。以下，$t_{ij} \in \mathcal{T}_{ij}$。此外，若 $j \neq k \mathrm{where} j$，则 $t_{ij}t_{kl} = 0$, $k \in \{1, 2\}$。

2. GENERALIZED JORDAN DERIVATIONS ON TRIANGULARRINGS

定理 2.1. 设 $\mathcal{T}$ 是一个三角环，满足以下条件：

(i) 对某个 $a \in A$，$aA = 0$ 蕴含 $a = 0$；(ii) 对某个 $b \in B$，$bB = 0$ 蕴含 $b = 0$；(iii) A 和 B 是含幺环。

若函数 $\delta : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 满足

$$\delta(ab + ba) = \delta(a)b + a\tau(b) + \delta(b)a + b\tau(a),$$

对所有 $a, b \in \mathcal{T}$，其中 $\tau : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 满足

$$\tau(ab + ba) = \tau(a)b + a\tau(b) + \tau(b)a + b\tau(a),$$

对所有的 $a, b \in \mathcal{T}$，则 δ 是可加的。此外，如果 $\mathcal{T}$ 是无 2-挠的，那么 δ 是广义 Jordan导子。

由于 $\tau : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 满足定理 3.1 中的所有条件 [4]，τ 是可加的。本节中，我们经常在不加说明的情况下使用三角环 $\mathcal{T}$ 的全部三个条件、定理 δ 中所述的映射 τ 的条件2.1，以及 τ的可加性。注意，$\delta(0) = 0$。在证明定理2.1之前，我们先讨论几个必要的引理。

引理 2.2. 设 $a \in \mathcal{T}_{11}$、$b \in \mathcal{T}_{22}$ 和 $m \in \mathcal{T}_{12}$。那么

$$\begin{aligned} &(i)\ \delta(a + m) = \delta(a) + \delta(m), \\ &(ii)\ \delta(b + m) = \delta(b) + \delta(m). \end{aligned} \tag{2.1}$$

证明. 设 $t_2 \in \mathcal{T}_{22}$。那么

$$\begin{aligned}&\delta[(a+m)t_2 + t_2(a+m)]\\ &= \delta(a+m)t_2 + (a+m)\tau(t_2) + \delta(t_2)(a+m) + t_2\tau(a+m).\end{aligned} \tag{2.2}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\delta[(a+m)t_2 + t_2(a+m)]\\ &= \delta(mt_2) = \delta(0) + \delta(mt_2+0)\\ &= \delta(at_2 + t_2a) + \delta(mt_2 + t_2m)\\ &= \delta(a)t_2 + a\tau(t_2) + \delta(t_2)a + t_2\tau(a)\\ &+ \delta(m)t_2 + m\tau(t_2) + \delta(t_2)m + t_2\tau(m).\end{aligned} \tag{2.3}$$

由于 τ 是可加的，比较（2.2）和（2.3），可得

$$\begin{aligned}&[\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]t_2 = 0\\ &\implies [\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]_{12}t_2 = 0\\ &\text{and } [\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]_{22}t_2 = 0.\end{aligned} \tag{2.4}$$

分别利用定义1.1和定理2.1中的条件 (b) 和 (ii)，可得

$$\begin{aligned}&[\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]_{12} = 0\\ &\text{and } [\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]_{22} = 0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

现在，为了证明 $[\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]_{11} = 0$，令 $n \in \mathcal{T}_{12}$。则

$$\begin{aligned}&\delta[(a+m)n + n(a+m)] = \delta(an)\\ &= \delta(an+na) + \delta(mn+nm)\\ &= \delta(a)n + a\tau(n) + \delta(n)a + n\tau(a) + \delta(m)n + m\tau(n) + \delta(n)m + n\tau(m).\end{aligned} \tag{2.6}$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}&\delta[(a+m)n + n(a+m)]\\ &= \delta(a+m)n + (a+m)\tau(n) + \delta(n)(a+m) + n\tau(a+m)\\ &= \delta(a+m)n + (a+m)\tau(n) + \delta(n)(a+m) + n(\tau(a)+\tau(m)) \text{ (By additivity of } \tau).\end{aligned} \tag{2.7}$$

比较等式（2.6）和（2.7），

$$\begin{aligned}&[\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]_{11}n = 0\\ &\implies [\delta(a+m) - \delta(a) - \delta(m)]_{11} = 0 \text{ (by condition (a) of Definition 1.1).}\end{aligned} \tag{2.8}$$

因此，$\delta(a+m) = \delta(a) + \delta(m)$。类似地，我们可以证明 $\delta(b+m) = \delta(b) + \delta(m)$。□

引理 2.3. 设 $a \in \mathcal{T}_{11}$, $b \in \mathcal{T}_{22}$ 和 $m, n \in \mathcal{T}_{12}$。则

$$\delta(am+nb) = \delta(am) + \delta(nb). \tag{2.9}$$

证明。由于 $am + nb = (a+n)(m+b) + (m+b)(a+n)$，根据引理 2.2 以及 τ的可加性，我们有

$$\begin{aligned}\delta(am+nb) &= \delta[(a+n)(m+b)+(m+b)(a+n)]\\ &= \delta(a+n)(m+b)+(a+n)\tau(m+b)\\ &+ \delta(m+b)(a+n)+(m+b)\tau(a+n)\\ &= (\delta(a)+\delta(n))(m+b)+(a+n)(\tau(m)+\tau(b))\\ &+ (\delta(m)+\delta(b))(a+n)+(m+b)(\tau(a)+\tau(n))\\ &= \delta(am+ma)+\delta(nb+bn)+\delta(mn+nm)+\delta(ab+ba)\\ &= \delta(am)+\delta(nb).\end{aligned} \tag{2.10}$$

□

引理 2.4. 设 $m,n\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$\delta(m+n)=\delta(m)+\delta(n). \tag{2.11}$$

证明。由于我们假设定理 A 和 B 中的两个都是含幺环2.1，将 $a=1$ 和 $b=1$ 代入引理 2.3，即可得到所需结果。□

引理 2.5. 设 $a_1,a_2,\in\mathcal{T}_{11}$ 和 $b_1,b_2,\in\mathcal{T}_{22}$。则

$$\begin{aligned}&(i)\ \delta(a_1+a_2)=\delta(a_1)+\delta(a_2),\\ &(ii)\ \delta(b_1+b_2)=\delta(b_1)+\delta(b_2).\end{aligned} \tag{2.12}$$

证明。设 $t_2\in\mathcal{T}_{22}$。则

$$\begin{aligned}&\delta(a_1+a_2)t_2+(a_1+a_2)\tau(t_2)+\delta(t_2)(a_1+a_2)+t_2\tau(a_1+a_2)\\ &=\delta[(a_1+a_2)t_2+t_2(a_1+a_2)]=\delta(0)=0\\ &=\delta(a_1t_2+t_2a_1)+\delta(a_2t_2+t_2a_2)\\ &=\delta(a_1)t_2+a_1\tau(t_2)+\delta(t_2)a_1+t_2\tau(a_1)\\ &+\delta(a_2)t_2+a_2\tau(t_2)+\delta(t_2)a_2+t_2\tau(a_2).\end{aligned} \tag{2.13}$$

由于 τ 是可加的，由（2.13）可得

$$\begin{aligned}&[\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]t_2=0\\ &\Longrightarrow\ [\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]_{12}t_2=0\\ &\text{and } [\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]_{22}t_2=0.\end{aligned} \tag{2.14}$$

分别利用定义b）和（ii）中的条件1.1以及定理2.1，可得

$$\begin{aligned}&[\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]_{12}=0\\ &\text{and } [\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]_{22}=0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

现在，为证明 $[\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]_{11}=0$，令 $m\in\mathcal{T}_{12}$。则（2.16）

$$\begin{aligned}&\delta(a_1+a_2)m+(a_1+a_2)\tau(m)+\delta(m)(a_1+a_2)+m\tau(a_1+a_2)\\ &=\delta[(a_1+a_2)m+m(a_1+a_2)]\\ &=\delta[(a_1m+ma_1)+(a_2m+ma_2)]\\ &=\delta(a_1m+ma_1)+\delta(a_2m+ma_2)\ \text{(By Lemma 2.4)}\\ &=\delta(a_1)m+a_1\tau(m)+\delta(m)a_1+m\tau(a_1)+\delta(a_2)m+a_2\tau(m)+\delta(m)a_2+m\tau(a_2).\end{aligned}$$

由（2.16）以及 τ的可加性可知

(2.17)
$$\begin{aligned}
&[\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]m=0\\
&\implies [\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]_{11}m=0\\
&\implies [\delta(a_1+a_2)-\delta(a_1)-\delta(a_2)]_{11}=0 \text{ (by condition (a) of Definition 1.1).}
\end{aligned}$$

因此，$\delta(a_1+a_2)=\delta(a_1)+\delta(a_2)$。类似地，我们可以证明 $\delta(b_1+b_2)=\delta(b_1)+\delta(b_2)$.

□

引理 2.6. 设 $a\in\mathcal{T}_{11}$、$b\in\mathcal{T}_{22}$ 和 $m\in\mathcal{T}_{12}$。那么

$$\delta(a+m+b)=\delta(a)+\delta(m)+\delta(b). \tag{2.18}$$

证明. 设 $t_2\in\mathcal{T}_{22}$。那么

(2.19)
$$\begin{aligned}
&\delta(a+m+b)t_2+(a+m+b)\tau(t_2)+\delta(t_2)(a+m+b)+t_2\tau(a+m+b)\\
&=\delta[(a+m+b)t_2+t_2(a+m+b)]\\
&=\delta(mt_2+bt_2+t_2b)\\
&=\delta(bt_2+t_2b)+\delta(mt_2) \text{ (By Lemma 2.2)}\\
&=\delta(bt_2+t_2b)+\delta(t_2m+mt_2)+\delta(at_2+t_2a)\\
&=\delta(b)t_2+b\tau(t_2)+\delta(t_2)b+t_2\tau(b)+\delta(t_2)m+t_2\tau(m)\\
&+\delta(m)t_2+m\tau(t_2)+\delta(a)t_2+a\tau(t_2)+\delta(t_2)a+t_2\tau(a)\\
&\implies [\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]t_2=0 \text{ (Using additivity of } \tau)\\
&\implies [\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]_{12}t_2=0\\
&\text{and } [\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]_{22}t_2=0.
\end{aligned}$$

利用定义 b 的条件和 ii，以及定理 1.1 和定理2.1，我们有

(2.20)
$$\begin{aligned}
&[\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]_{12}=0\\
&\text{and } [\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]_{22}=0.
\end{aligned}$$

设 $t_1\in\mathcal{T}_{11}$。那么

(2.21)
$$\begin{aligned}
&\delta(a+m+b)t_1+(a+m+b)\tau(t_1)+\delta(t_1)(a+m+b)+t_1\tau(a+m+b)\\
&=\delta[(a+m+b)t_1+t_1(a+m+b)]\\
&=\delta(at_1+t_1a+t_1m)\\
&=\delta(at_1+t_1a)+\delta(t_1m) \text{ (By Lemma 2.2)}\\
&=\delta(at_1+t_1a)+\delta(t_1m+mt_1)+\delta(bt_1+t_1b)\\
&=\delta(a)t_1+a\tau(t_1)+\delta(t_1)a+t_1\tau(a)+\delta(t_1)m+t_1\tau(m)\\
&+\delta(m)t_1+m\tau(t_1)+\delta(b)t_1+b\tau(t_1)+\delta(t_1)b+t_1\tau(b)\\
&\implies [\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]t_1=0\\
&\implies [\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]_{11}t_1=0\\
&\implies [\delta(a+m+b)-\delta(a)-\delta(m)-\delta(b)]_{11}=0\\
&\text{（根据定理 2.1）。}
\end{aligned}$$

因此，由（2.20）和（2.21），$\delta(a+m+b)=\delta(a)+\delta(m)+\delta(b)$。 □

现在，我们准备证明定理 2.1。

定理 2.1的证明。 令 $t \in \mathcal{T}$且 $u \in \mathcal{T}$。则 $t = t_{11} + t_{12} + t_{22}$ 且 $u = u_{11} + u_{12} + u_{22}$其中 t_{ij}, $u_{ij} \in \mathcal{T}_{ij}$且 i, $j \in \{1, 2\}$。现在,

$$\begin{aligned}
\delta(t+u) &= \delta((t_{11}+t_{12}+t_{22})+(u_{11}+u_{12}+u_{22})) \\
&= \delta((t_{11}+u_{11})+(t_{12}++u_{12})+(t_{22}+u_{22})) \\
&= \delta(t_{11}+u_{11})+\delta(t_{12}+u_{12})+\delta(t_{22}+u_{22}) \text{ (By Lemma 2.6)} \\
&= \delta(t_{11})+\delta(u_{11})+\delta(t_{12})+\delta(u_{12})+\delta(t_{22})+\delta(u_{22}) \\
&\text{(By Lemma 2.4 and 2.5)} \\
&= \delta(t_{11})+\delta(t_{12})+\delta(t_{22})+\delta(u_{11})+\delta(u_{12})+\delta(u_{22}) \\
&= \delta(t_{11}+t_{12}+t_{22})+\delta(u_{11}+u_{12}+u_{22}) \text{ (By Lemma 2.6)} \\
&= \delta(t)+\delta(u).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

因此， δ 是可加的。

令 $\mathcal{T}$为无 2-挠的。根据定理 3。1, [4], τ 是一个 Jordan导子。对于任意 $t \in \mathcal{T}$,

$$\begin{aligned}
&2\delta(t^2) = \delta(2t^2) = \delta(tt+tt) = 2[\delta(t)t + t\tau(t)] \\
&\Longrightarrow \ \delta(t^2) = \delta(t)t + t\tau(t).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

因此， δ 是一个广义Jordan导子。 □

下面的例子表明，去掉定理（iii）中的条件1.1 并不会影响该定理的结论。

例2.7。设 $\mathcal{T} = \mathrm{Tri}(2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} \mid a \in 2\mathbb{Z},\, b \in 3\mathbb{Z},\, m \in \mathbb{Z} \right\}$, 其中 $2\mathbb{Z}$ 是偶整数环， $3\mathbb{Z}$ 是3倍整数环，而 $\mathbb{Z}$ 是整数双模（$2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}$）。注意， $2\mathbb{Z}$ 和 $3\mathbb{Z}$ 是无幺环。定义 τ: $\mathcal{T} \to \mathcal{T}$如下:

$$\tau \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a + \beta m - \alpha b \\ & 0 \end{pmatrix},$$

其中 α, $\beta \in \mathbb{Z}$。那么很容易验证 τ 满足定理3。1 中[4]的所有假设。因此， τ 是可加的，也是一个Jordan导子。定义δ： $\mathcal{T} \to \mathcal{T}$如下:

$$\delta \begin{pmatrix} a & m \\ & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\gamma & \alpha a + (\beta+\gamma)m + \mu b \\ & wb \end{pmatrix},$$

其中 γ, μ 以及 $w \in \mathbb{Z}$。接着，通过常规验证可知， δ 满足定理2.1 除条件（iii）之外的所有条件，其对应映射 τ 如上所述。此外，我们也可以很快验证， δ 是可加的，因此是一个广义Jordan导子。

例子 2.7 促使我们将定理2.1 在不假设条件（iii）的情况下作为一个猜想提出。

猜想2.8. 设 $\mathcal{T}$是满足以下条件的三角环:

(i) 对于某个 $a \in A$, $aA = 0$ 蕴含 $a = 0$;

(ii) 对于某个 $b \in B$， $bB = 0$ 蕴含 $b = 0$。

若映射 $\delta : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$满足

$$\delta(ab + ba) = \delta(a)b + a\tau(b) + \delta(b)a + b\tau(a),$$

对所有 $a, b \in \mathcal{T}$，其中 $\tau : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$满足

$$\tau(ab + ba) = \tau(a)b + a\tau(b) + \tau(b)a + b\tau(a),$$

对所有 $a, b \in \mathcal{T}$，则 δ 是可加的。此外，若 $\mathcal{T}$无 2-挠，则 δ 是广义Jordan导子。

3. TWO-SIDED CENTRALIZERS ON TRIANGULAR RINGS

定理 3.1. 设 $\mathcal{T}$ 是满足以下条件的三角环：

(i) 对某个 $a \in A$， $Aa = 0$ 蕴含 $a = 0$; (ii) 对某个 $b \in B$， $bB = 0$ 蕴含 $b = 0$; (iii) 对某个 $a \in A$， $aA = 0$ 蕴含 $a = 0$。

若映射 $T : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 满足

$$T(ab) = T(a)b = aT(b),$$

对所有 a、 $b \in \mathcal{T}$ 均成立，则 T 是可加的。此外， T 是双侧中心化子。

引理 3.2. 设 $a \in \mathcal{T}_{11}$、 $b \in \mathcal{T}_{22}$ 和 $m \in \mathcal{T}_{12}$。则

$$\begin{aligned} &(i)\ T(a + m) = T(a) + T(m), \\ &(ii)\ T(b + m) = T(b) + T(m). \end{aligned} \tag{3.1}$$

证明. 设 $t_2 \in \mathcal{T}_{22}$。现在，我们有

$$T[(a + m)t_2] = T(a + m)t_2. \tag{3.2}$$

此外，

$$\begin{aligned} T[(a + m)t_2] = T(mt_2) &= 0 + T(mt_2) \\ &= T(at_2) + T(mt_2) \\ &= T(a)t_2 + T(m)t_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

比较恒等式（3.2）和（3.3），

$$\begin{aligned} &[T(a + m) - T(a) - T(m)]t_2 = 0 \\ &\quad \implies [T(a + m) - T(a) - T(m)]_{12}t_2 = 0 \\ &\text{and } [T(a + m) - T(a) - T(m)]_{22}t_2 = 0 \\ &\quad \implies [T(a + m) - T(a) - T(m)]_{12} = 0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1)} \\ &\text{and } [T(a + m) - T(a) - T(m)]_{22} = 0 \text{ (By condition (ii) of Theorem 3.1).} \end{aligned} \tag{3.4}$$

令 $n \in \mathcal{T}_{12}$。我们有

$$T[(a + m)n] = T(a + m)n. \tag{3.5}$$

此外，

$$T[(a + m)n] = T(an) + 0 = T(an) + T(mn) = T(a)n + T(m)n. \tag{3.6}$$

比较（3.5）和（3.6），可得

$$
\begin{aligned}
&[T(a+m)-T(a)-T(m)]n=0\\
&\Longrightarrow [T(a+m)-T(a)-T(m)]_{11}n=0\\
&\Longrightarrow [T(a+m)-T(a)-T(m)]_{11}=0 \text{ (By Condition (a) of Definition 1.1).}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

因此，利用（3.4）和（3.7），可得引理 i 中的（3.2）。类似地，可得引理ii中的（3.2）。□

引理 3.3. 设 $a\in\mathcal{T}_{11}, b\in\mathcal{T}_{22}$ 和 $m,n\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$T(am+nb)=T(am)+T(nb). \tag{3.8}$$

证明. 由于 $am+nb=(a+n)(b+m)$，我们有

$$
\begin{aligned}
T(am+nb)&=T((a+n)(b+m))\\
&=(a+n)T(b+m)\\
&=(a+n)(T(b)+T(m)) \text{ (By (ii) of Lemma 3.2).}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
T(am)+T(nb)&=T(am)+T(nm)+T(nb)+T(ab)\\
&=aT(m)+nT(m)+nT(b)+aT(b)\\
&=(a+n)T(m)+(a+n)T(b)\\
&=(a+n)(T(m)+T(b)).
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

比较（3.9）和（3.10），即可得到所需结果。 □

引理 3.4. 设 $b\in\mathcal{T}_{22}$ 和 $m,n\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$T(mb+nb)=T(mb)+T(nb). \tag{3.11}$$

证明. 设 $a\in\mathcal{T}_{11}$。则

$$T[a((m+n)b)]=aT((m+n)b). \tag{3.12}$$

此外，

$$
\begin{aligned}
T[a((m+n)b)]&=T(a(mb)+(an)b)\\
&=T(a(mb))+T((an)b) \text{ (By Lemma 3.3)}\\
&=aT(mb)+aT(nb).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

比较 (3.12) 和 (3.13)，我们有

$$
\begin{aligned}
&a[T(mb+nb)-T(mb)-T(mb)]=0\\
&\Longrightarrow a[T(mb+nb)-T(mb)-T(nb)]_{11}=0\\
&\& \ a[T(mb+nb)-T(mb)-T(nb)]_{12}=0\\
&\Longrightarrow [T(mb+nb)-T(mb)-T(nb)]_{11}=0 \text{ (By condition (i) of Theorem 3.1)}\\
&\& \ [T(mb+nb)-T(mb)-T(nb)]_{12}=0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1).}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

设 $p\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$T[p((m+n)b)]=pT((m+n)b). \tag{3.15}$$

此外,

$$\begin{aligned} T[p((m+n)b)] &= T[p(mb+nb)] \\ &= T(0) = 0 \\ &= T(p(mb)) + T(p(nb)) \\ &= pT(mb) + pT(nb). \end{aligned} \tag{3.16}$$

比较 (3.15) 和 (3.16),

$$\begin{aligned} & p[T(mb+nb) - T(mb) - T(nb)] = 0 \\ & \implies p[T(mb+nb) - T(mb) - T(nb)]_{22} = 0 \\ & \implies [T(mb+nb) - T(mb) - T(nb)]_{22} = 0 \text{ (By condition (a) of Definition 1.1).} \end{aligned} \tag{3.17}$$

因此，由 (3.14) 和 (3.17) 可得该结果。 □

引理 3.5。设 $m, n \in \mathcal{T}_{12}$。那么

$$T(m+n) = T(m) + T(n). \tag{3.18}$$

证明。设 $b \in \mathcal{T}_{22}$。那么

$$T((m+n)b) = T(m+n)b. \tag{3.19}$$

Now,

$$\begin{aligned} T((m+n)b) &= T(mb+nb) \\ &= T(mb) + T(nb) \text{ (By Lemma 3.4)} \\ &= T(m)b + T(n)b. \end{aligned} \tag{3.20}$$

由 (3.19) 和 (3.20),

$$\begin{aligned} & [T(m+n) - T(m) - T(n)]b = 0 \\ & \quad \implies [T(m+n) - T(m) - T(n)]_{12}b = 0 \\ & \quad \& \; [T(m+n) - T(m) - T(n)]_{22}b = 0 \\ & \quad \implies [T(m+n) - T(m) - T(n)]_{12} = 0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1)} \\ & \quad \& \; [T(m+n) - T(m) - T(n)]_{22} = 0 \text{ (By condition (ii) of Theorem 3.1).} \end{aligned} \tag{3.21}$$

令 $p \in \mathcal{T}_{12}$。则

$$T((m+n)p) = T(m+n)p. \tag{3.22}$$

此外,

$$T((m+n)p) = T(0) = 0 = T(mp) + T(np) = T(m)p + T(n)p. \tag{3.23}$$

比较（3.22）和（3.23），

$$\begin{aligned} & [T(m+n) - T(m) - T(n)]p = 0 \\ & \quad \implies [T(m+n) - T(m) - T(n)]_{11}p = 0 \\ & \quad \implies [T(m+n) - T(m) - T(n)]_{11} = 0 \text{ (By condition (a) of Definition 1.1).} \end{aligned} \tag{3.24}$$

由（3.21）和（3.24），可得结论。 □

引理 3.6. 设 a_1、 $a_2 \in \mathcal{T}_{11}$ 和 b_1、 $b_2 \in \mathcal{T}_{22}$。 则

$$\begin{aligned} &(i)\ T(a_1+a_2)=T(a_1)+T(a_2)\\ &(ii)\ T(b_1+b_2)=T(b_1)+T(b_2). \end{aligned} \tag{3.25}$$

证明。设 $t_2 \in \mathcal{T}_{22}$。于是

$$T((a_1+a_2)t_2)=T(a_1+a_2)t_2. \tag{3.26}$$

Now,

$$T((a_1+a_2)t_2)=T(0)=T(a_1t_2)+T(a_2t_2)=T(a_1)t_2+T(a_2)t_2. \tag{3.27}$$

比较（3.26）与（3.27），

$$\begin{aligned} &[T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]t_2=0\\ &\quad\Longrightarrow [T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]_{12}t_2=0\\ &\ \&\ [T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]_{22}t_2=0\\ &\quad\Longrightarrow [T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]_{12}=0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1)}\\ &\ \&\ [T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]_{22}=0 \text{ (By condition (ii) of Theorem 3.1).} \end{aligned} \tag{3.28}$$

设 $m \in \mathcal{T}_{12}$。于是

$$T((a_1+a_2)m)=T(a_1+a_2)m. \tag{3.29}$$

此外,

$$\begin{aligned} T((a_1+a_2)m)&=T(a_1m+a_2m)\\ &=T(a_1m)+T(a_2m) \text{ (By Lemma 3.5)}\\ &=T(a_1)m+T(a_2)m. \end{aligned} \tag{3.30}$$

比较（3.29）与（3.30），

$$\begin{aligned} &T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]m=0\\ &\quad\Longrightarrow [T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]_{11}m=0\\ &\quad\Longrightarrow [T(a_1+a_2)-T(a_1)-T(a_2)]_{11}=0 \text{ (By condition (a) of Definition 1.1).} \end{aligned} \tag{3.31}$$

由 (3.28) 和 (3.31)，可得引理 i中的 (3.6)。类似地，我们可以证明引理ii中的 (3.6)。□

引理 3.7. 设 $a \in \mathcal{T}_{11}$、 $b \in \mathcal{T}_{22}$ 和 $m \in \mathcal{T}_{12}$。 则

$$T(a+m+b)=T(a)+T(m)+T(b). \tag{3.32}$$

证明。设 $a_1 \in \mathcal{T}_{11}$。 则

$$T((a+m+b)a_1)=T(a+m+b)a_1. \tag{3.33}$$

此外,

$$\begin{aligned} T((a+m+b)a_1)&=T(aa_1+ma_1+ba_1)\\ &=T(aa_1)\\ &=T(aa_1)+T(ma_1)+T(ba_1)\\ &=T(a)a_1+T(m)a_1+T(b)a_1. \end{aligned} \tag{3.34}$$

由（3.33）和（3.34），

$$
\begin{aligned}
&[T(a+m+b)-T(a)-T(m)-T(b)]a_1=0\\
&\implies [T(a+m+b)-T(a)-T(m)-T(b)]_{11}a_1=0\\
&\implies [T(a+m+b)-T(a)-T(m)-T(b)]_{11}=0\\
&\text{(By condition (iii) of Theorem 3.1).}
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

设 $t_2 \in \mathcal{T}_{22}$。则

$$
T((a+m+b)t_2)=T(a+m+b)t_2 \tag{3.36}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
T((a+m+b)t_2) &= T(at_2+mt_2+bt_2)\\
&= T(mt_2+bt_2)\\
&= T(mt_2)+T(bt_2) \quad [\text{By (ii) of Lemma 3.2 }]\\
&= T(at_2)+T(mt_2)+T(bt_2)\\
&= T(a)t_2+T(m)t_2+T(b)t_2.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

比较（3.36）和（3.37），

(3.38)

$[T(a+m+b) - T(a) - T(m) - T(b)]t_2 = 0$
$\implies [T(a+m+b)-T(a)-T(m)-T(b)]_{12}t_2=0$
& $[T(a+m+b) - T(a) - T(m) - T(b)]_{22}t_2 = 0$
$\implies [T(a+m+b) - T(a) - T(m) - T(b)]_{12} = 0$ (由定义 1.1 的条件 (b) 得出) &
$[T(a+m+b) - T(a) - T(m) - T(b)]_{22} = 0$ (由定理 3.1 的条件 (ii) 得出)。

Thus, by (3.35) and (3.38), we have $T(a+m+b)=T(a)+T(m)+T(b)$. □

现在，我们可以证明定理 3.1。

定理 *3.1* 的证明。设 $t \in \mathcal{T}$和 $u \in \mathcal{T}$。则 $t = t_{11}+t_{12}+t_{22}$ 和 $u = u_{11}+u_{12}+u_{22}$ 其中 $t_{ij},\ u_{ij} \in \mathcal{T}_{ij}$ 和 $i,\ j \in \{1,2\}$。我们有

$$
\begin{aligned}
T(t+u) &= T((t_{11}+t_{12}+t_{22})+(u_{11}+u_{12}+u_{22}))\\
&= T((t_{11}+u_{11})+(t_{12}+u_{12})+(t_{22}+u_{22}))\\
&= T(t_{11}+u_{11})+T(t_{12}+u_{12})+T(t_{22}+u_{22}) \text{ (By Lemma 3.7)}\\
&= T(t_{11})+T(u_{11})+T(t_{12})+T(u_{12})+T(t_{22})+T(u_{22})\\
&\text{(By Lemma 3.5 and 3.6)}\\
&= T(t_{11})+T(t_{12})+T(t_{22})+T(u_{11})+T(u_{12})+T(u_{22})\\
&= T(t_{11}+t_{12}+t_{22})+T(u_{11}+u_{12}+u_{22}) \text{ (By Lemma 3.7)}\\
&= T(t)+T(u).
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

因此，T 是可加的，且 T 是双侧中心化子。 □

现在，我们给出一个例子，说明并非每个三角环 $\mathcal{T}$ 都是素环。

例 3.8. 设 $\mathcal{T}=\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ & 3\mathbb{Z} \end{pmatrix}$。则

$$\text{但 } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ & 3\mathbb{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix},$$

因此，$\mathcal{T}$不是半素环，因而也不是素环。

4. (m,n)-DERIVATIONS ON TRIANGULAR RINGS

定理 4.1. 设 $m>0, n>0$ 为整数，且 $\mathcal{T}$ 为满足以下条件的三角环：(i) 对某个 $a\in A$，$aA=0$ 蕴含 $a=0$；(ii) 对某个 $b\in B$，$bB=0$ 蕴含 $b=0$；(iii) 对某个 $a\in A$，$Aa=0$ 蕴含 $a=0$；(iv) $\mathcal{T}$是 $mn(m+n)$-无挠的。

若映射 $D:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$满足

$$(m+n)D(ab)=2mD(a)b+2naD(b)$$

对所有 a、$b\in\mathcal{T}$，则 D是可加的。此外，D是一个 (m,n)-导子。

本节中，我们经常使用三角环 $\mathcal{T}$的所有四个条件，以及定理 D 中所述映射4.1 的条件，而不再逐一说明。注意，$D(0)=0$。在证明定理 4.1之前，我们先给出几个引理。

引理 4.2。设 $a\in\mathcal{T}_{11}$、$p\in\mathcal{T}_{12}$ 和 $b\in\mathcal{T}_{22}$。则

$$\begin{aligned} &(i)\ D(a+p)=D(a)+D(p)\\ &(ii)\ D(b+p)=D(b)+D(p). \end{aligned} \tag{4.1}$$

证明。设 $c\in\mathcal{T}_{22}$。则

$$(m+n)D((a+p)c)=2mD(a+p)c+2n(a+p)D(c). \tag{4.2}$$

此外，

$$\begin{aligned} (m+n)D((a+p)c)&=(m+n)D(pc)\\ &=(m+n)[D(ac)+D(pc)]\\ &=2mD(a)c+2naD(c)+2mD(p)c+2npD(c). \end{aligned} \tag{4.3}$$

比较（4.2）和（4.3），

$$\begin{aligned} &2m[D(a+p)-D(a)-D(p)]c=0\\ &\quad\Longrightarrow [D(a+p)-D(a)-D(p)]c=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\ &\quad\Longrightarrow [D(a+p)-D(a)-D(p)]_{12}c=0\\ &\ \&\ [D(a+p)-D(a)-D(p)]_{22}c=0\\ &\quad\Longrightarrow [D(a+p)-D(a)-D(p)]_{12}=0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1)}\\ &\ \&\ [D(a+p)-D(a)-D(p)]_{22}=0 \text{ (By condition (ii) of Theorem 4.1).} \end{aligned} \tag{4.4}$$

设 $a_1\in\mathcal{T}_{11}$。那么

$$(m+n)D((a+p)a_1)=2mD(a+p)a_1+2n(a+p)D(a_1). \tag{4.5}$$

此外，

$$\begin{aligned}(m+n)D((a+p)a_1) &= (m+n)D(aa_1)\\ &= (m+n)[D(aa_1)+D(pa_1)]\\ &= 2mD(a)a_1+2naD(a_1)+2mD(p)a_1+2npD(a_1).\end{aligned} \tag{4.6}$$

比较 (4.5) 和 (4.6)，可得

$$\begin{aligned}&2m[D(a+p)-D(a)-D(p)]a_1=0\\ &\implies [D(a+p)-D(a)-D(p)]a_1=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\ &\implies [D(a+p)-D(a)-D(p)]_{11}a_1=0\\ &\implies [D(a+p)-D(a)-D(p)]_{11}=0 \text{ (By condition (i) of Theorem 4.1).}\end{aligned} \tag{4.7}$$

由 (4.4) 和 (4.7)，可得引理 i 的（4.2）。类似地，可证明引理ii 的（4.2）。□

引理 4.3。设 $a\in\mathcal{T}_{11}$, $b\in\mathcal{T}_{22}$ 和 $p,q\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$D(ap+qb)=D(ap)+D(qb). \tag{4.8}$$

证明。由于 $(ap+qb)=(a+q)(p+b)+(p+b)(a+q)$,

$$\begin{aligned}(m+n)D(ap+qb) &= D((a+q)(p+b)+(p+b)(a+q))\\ &= 2mD(a+q)(p+b)+2n(a+q)D(p+b)\\ &= 2m(D(a)+D(q))(p+b)+2n(a+q)(D(p)+D(b))\\ &\quad\text{(By Lemma 4.2)}\\ &= 2mD(a)p+2naD(p)+2mD(q)b+2nqD(b)\\ &\quad+2mD(q)p+2nqD(p)+2mD(a)b+2naD(b)\\ &= (m+n)[D(ap)+D(qb)+D(qp)+D(ab)]\\ &= (m+n)[D(ap)+D(qb)].\end{aligned} \tag{4.9}$$

利用定理iv的条件（4.1 以及上述等式（4.9），可得所需结果。□

引理 4.4. 设 $b\in\mathcal{T}_{22}$ 和 $p,q\in\mathcal{T}_{12}$. 那么

$$D(pb+qb)=D(pb)+D(qb). \tag{4.10}$$

证明。令 $a\in\mathcal{T}_{11}$。于是

$$(m+n)D[a((p+q)b)]=2mD(a)(p+q)b+2naD((p+q)b). \tag{4.11}$$

Also,

$$\begin{aligned}(m+n)D[a((p+q)b)] &= (m+n)D[a(pb)+(aq)b]\\ &= (m+n)[D(apb)+D(aqb)] \text{ (By Lemma 4.3)}\\ &= 2mD(a)(pb)+2naD(pb)+2mD(a)(qb)+2naD(qb).\end{aligned} \tag{4.12}$$

比较（4.11）和（4.12，我们得到

$$
\begin{aligned}
&2na[D((p+q)b)-D(pb)-D(qb)]=0\\
&\Longrightarrow a[D((p+q)b)-D(pb)-D(qb)]=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\
&\Longrightarrow a[D(pb+qb)-D(pb)-D(qb)]_{11}=0\\
&\ \& \ a[D((pb+qb)-D(pb)-D(qb)]_{12}=0\\
&\Longrightarrow [D(pb+qb)-D(pb)-D(qb)]_{11}=0 \text{ (By condition (iii) of Theorem 4.1)}\\
&\ \& \ [D((pb+qb)-D(pb)-D(qb)]_{12}=0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1).}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

设 $s\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$
(m+n)D[s(pb+qb)]=2mD(s)(pb+qb)+2nsD(pb+qb). \tag{4.14}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
(m+n)D[s(pb+qb)]&=(m+n)D(0)\\
&=(m+n)D(spb)+(m+n)D(sqb)\\
&=2mD(s)pb+2nsD(pb)+2mD(s)qb+2nsD(qb).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

比较（4.14）和（4.15），

$$
\begin{aligned}
&2ns[D(pb+qb)-D(pb)-D(qb)]=0\\
&\Longrightarrow s[D(pb+qb)-D(pb)-D(qb)]=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\
&\Longrightarrow s[D(pb+qb)-D(pb)-D(qb)]_{22}=0\\
&\Longrightarrow [D(pb+qb)-D(pb)-D(qb)]_{22}=0 \text{ (By condition (a) of Definition 1.1).}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

由（4.13）和（4.16），可得所需结果。 □

引理4.5。设 $p,q\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$
D(p+q)=D(p)+D(q). \tag{4.17}
$$

证明。设 $b\in\mathcal{T}_{22}$。于是

$$
(m+n)D((p+q)b)=2mD(p+q)b+2n(p+q)D(b). \tag{4.18}
$$

此外，

$$
\begin{aligned}
(m+n)D((p+q)b)&=(m+n)(D(pb)+D(qb)) \text{ (By Lemma 4.4)}\\
&=2mD(p)b+2npD(b)+2mD(q)b+2nqD(b).
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

比较 (4.18) 和 (4.19)，

$$
\begin{aligned}
&2m[D(p+q)-D(p)-D(q)]b=0\\
&\Longrightarrow [D(p+q)-D(p)-D(q)]b=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\
&\Longrightarrow [D(p+q)-D(p)-D(q)]_{12}b=0\\
&\ \& \ [D(p+q)-D(p)-D(q)]_{22}b=0\\
&\Longrightarrow [D(p+q)-D(p)-D(q)]_{12}=0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1)}\\
&\ \& \ [D(p+q)-D(p)-D(q)]_{22}=0 \text{ (By condition (ii) of Theorem 4.1).}
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

设 $s\in\mathcal{T}_{12}$。则

$$
(m+n)D((p+q)s)=2mD(p+q)s+2n(p+q)D(s). \tag{4.21}
$$

此外,

$$\begin{aligned}(m+n)D((p+q)s) &= (m+n)D(0)\\ &= (m+n)(D(ps)+D(qs))\\ &= 2mD(p)s+2npD(s)+2mD(q)s+2nqD(s).\end{aligned} \tag{4.22}$$

由（4.21）和（4.22），

$$\begin{aligned}&2m[D(p+q)-D(p)-D(q)]s=0\\ &\implies [D(p+q)-D(p)-D(q)]s=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\ &\implies [D(p+q)-D(p)-D(q)]_{11}s=0\\ &\implies [D(p+q)-D(p)-D(q)]_{11}=0 \text{ (By condition (a) of Definition 1.1).}\end{aligned} \tag{4.23}$$

由（4.20）和（4.23），可得所需结果。 □

引理 4.6. 设 $a_1, a_2 \in \mathcal{T}_{11}$ 和 $b_1, b_2 \in \mathcal{T}_{22}$。则

$$\begin{aligned}&(i)\ D(a_1+a_2)=D(a_1)+D(a_2)\\ &(ii)\ D(b_1+b_2)=D(b_1)+D(b_2).\end{aligned} \tag{4.24}$$

证明。设 $t_2 \in \mathcal{T}_{22}$。则

$$(m+n)D((a_1+a_2)t_2)=2mD(a_1+a_2)t_2+2n(a_1+a_2)D(t_2). \tag{4.25}$$

此外,

$$\begin{aligned}(m+n)D((a_1+a_2)t_2) &= (m+n)D(0)\\ &= (m+n)(D(a_1t_2)+D(a_2t_2))\\ &= 2mD(a_1)t_2+2na_1D(t_2)+2mD(a_2)t_2+2na_2D(t_2).\end{aligned} \tag{4.26}$$

比较（4.25）与（4.26），

$$\begin{aligned}&2m[D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]t_2=0\\ &\implies [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]t_2=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\ &\implies [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]_{12}t_2=0\\ &\&\ [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]_{22}t_2=0\\ &\implies [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]_{12}=0 \text{ (By condition (b) of Definition 1.1)}\\ &\&\ [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]_{22}=0 \text{ (By condition (ii) of Theorem 4.1).}\end{aligned} \tag{4.27}$$

设 $p \in \mathcal{T}_{12}$。则

$$(m+n)D((a_1+a_2)p)=2mD(a_1+a_2)p+2n(a_1+a_2)D(p). \tag{4.28}$$

此外,

$$\begin{aligned}(m+n)D((a_1+a_2)p) &= (m+n)D(a_1p+a_2p)\\ &= (m+n)[D(a_1p)+D(a_2p)] \text{ (By Lemma 4.5)}\\ &= 2mD(a_1)p+2na_1D(p)+2mD(a_2)p+2na_2D(p).\end{aligned} \tag{4.29}$$

利用（4.28）和（4.29），

(4.30)
$$\begin{aligned}
&2m[D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]p=0\\
&\Longrightarrow [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]p=0 \text{ (By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\
&\Longrightarrow [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]_{11}p=0\\
&\Longrightarrow [D(a_1+a_2)-D(a_1)-D(a_2)]_{11}=0 \text{ (By condition (a) of Definition 1.1)}
\end{aligned}$$

由（4.27）和（4.30），我们有引理 i 中的（4.6）。类似地，我们可以证明引理ii 中的（4.6）。
□

引理4.7。设 $a\in\mathcal{T}_{11}$、$p\in\mathcal{T}_{12}$ 和 $b\in\mathcal{T}_{22}$。则

$$D(a+p+b)=D(a)+D(p)+D(b). \tag{4.31}$$

证明。设 $a_1\in\mathcal{T}_{11}$。则

$$(m+n)D((a+p+b)a_1)=2mD(a+p+b)a_1+2n(a+p+b)D(a_1). \tag{4.32}$$

此外，

$$\begin{aligned}
(m+n)D((a+p+b)a_1)&=(m+n)D(aa_1)\\
&=(m+n)[D(aa_1)+D(pa_1)+D(ba_1)]\\
&=2mD(a)a_1+2naD(a_1)+2mD(p)a_1\\
&+2npD(a_1)+2mD(b)a_1+2nbD(a_1)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

比较（4.32）和（4.33），可得

$$\begin{aligned}
&2m[D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]a_1=0\\
&\Longrightarrow [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]a_1=0\\
&\text{(By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\
&\Longrightarrow [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]_{11}a_1=0\\
&\Longrightarrow [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]_{11}=0\\
&\text{(By condition (i) of Theorem 4.1).}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

设 $t_2\in\mathcal{T}_{22}$。则

$$(m+n)D((a+p+b)t_2)=2mD(a+p+b)t_2+2n(a+p+b)D(t_2). \tag{4.35}$$

此外，

$$\begin{aligned}
(m+n)D((a+p+b)t_2)&=(m+n)D(pt_2+bt_2)\\
&=(m+n)[D(pt_2)+D(bt_2)] \text{ (By Lemma 4.2)}\\
&=(m+n)[D(at_2)+D(pt_2)+D(bt_2)]\\
&=2mD(a)t_2+2naD(t_2)+2mD(p)t_2\\
&+2npD(t_2)+2mD(b)t_2+2nbD(t_2).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

比较（4.35）和（4.36），我们得到

$$
\begin{aligned}
&2m[D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]t_2=0\\
&\implies [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]t_2=0\\
&\text{(By condition (iv) of Theorem 4.1)}\\
&\implies [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]_{12}t_2=0\\
&\&\ [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]_{22}t_2=0\\
&\implies [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]_{12}=0\\
&\text{(By condition (b) of Definition 1.1)}\\
&\&\ [D(a+p+b)-D(a)-D(p)-D(b)]_{22}=0\\
&\text{(By condition (ii) of Theorem 4.1).}
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

由（4.34）和（4.37），即可得到所需结果。 □

现在，我们可以证明定理4.1。

定理*4.1*的证明。设 a， $b\in\mathcal{T}$。则 $a=a_{11}+a_{12}+a_{22}$且 $b=b_{11}+b_{12}+b_{22}$，其中 a_{ij}，$b_{ij}\in\mathcal{T}_{ij}$。

$$
\begin{aligned}
D(a+b)&=D(a_{11}+a_{12}+a_{22}+b_{11}+b_{12}+b_{22})\\
&=D(a_{11}+b_{11}+a_{12}+b_{12}+a_{22}+b_{22})\\
&=D(a_{11}+b_{11})+D(a_{12}+b_{12})+D(a_{22}+b_{22})\ \text{(By Lemma 4.7)}\\
&=D(a_{11})+D(b_{11})+D(a_{12})+D(b_{12})+D(a_{22})+D(b_{22})\\
&\text{(By Lemma 4.5 and 4.6)}\\
&=D(a_{11})+D(a_{12})+D(a_{22})+D(b_{11})+D(b_{12})+D(b_{22})\\
&=D(a_{11}+a_{12}+a_{22})+D(b_{11}+b_{12}+b_{22})\ \text{(By Lemma 4.7)}\\
&=D(a)+D(b).
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

因此， D 是可加的。于是， D 是一个（m， n）-导子。 □

Acknowledgement

第一作者感谢印度政府大学拨款委员会（UGC）通过编号 Sr. No-2121540952、参考编号 20/12/2015(ii)EU-V（日期为 31/08/2016）提供经费支持；全体作者感谢印度理工学院巴特那分校提供研究设施。

References

[1] S. Ali 和 A. Foˇsner，关于环上的广义 (m, n)-导子和广义 (m, n)-Jordan 导子，*Algebra Colloq.* **21**(03) (2014年), 411–420. [2] M. N. Daif，乘法导子何时可加？，*Int. J. Math. Math. Sci.* **14**(3) (1991年), 615–618. [3] B. L. M. Ferreira，三角形 n-矩阵环上的乘法映射，

Int. J. Math. Game ( )

Theory Algebr. **23** 2 2014 1 14

( ), – . [4] B. L. M. Ferreira，三角矩阵环上的 Jordan 导子， *Extracta Math.* **30**(2) (2015年), 181–190.[5] I. N. Herstein，素环上的 Jordan 导子， *Proc. Amer. Math. Soc.* **8**(6) (1957), 1104–1110.

[6] W. Jing 和 S. Lu，素环和标准算子代数上的广义 Jordan 导子，*Taiwan. J. Math.* **7**(4) (2003), 605–613. [7] R. E. Johnson，具有唯一加法的环，*Proc. Amer. Math. Soc.* **9**(1) (1958), 57–61. [8] W. S. Martindale III，乘法映射何时可加？，

Proc. Amer. Math. Soc. ( ) ( ), **21** 3 1969 695 698
– . [9] C. E. Rickart，环和格之间的一一映射，*Bull. Amer. Math. Soc.* **54**(8) (1948 年), 758–764. [10] M. S. T. E.-Sayiad、M. N. Daif 和 V. D. Filippis，左中心化子的乘法性迫使其可加，*Bol. Soc. Parana. Mat.* **32**(1) (2014年), 61–69. [11] Y. Wang，环上乘法映射的可加性，*Comm. Algebra* **37**(7) (2009年), 2351–2356.[12] Y. Wang，三角环上乘法映射的可加性，*Linear Algebra Appl.* **434**(3) (2011年), 625–635. [13] J. G. Wendel，群代数的左中心化子与同构，*Pacific J. Math.* **2**(2) (1952), 251–261.

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Patna, Patna-801106 *Email address*: aziz_2021ma22@iitp.ac.inDepartment of Mathematics, Government Polytechnic Kishanganj, Kishanganj-855116*Email address*: E-mail: arindam.rkmrc@gmail.comDepartment of Mathematics, Indian Institute of Technology Patna, Patna-801106*Email address*: om@iitp.ac.in