arXiv:2301.08097v1 [cond-mat.quant-gas] 19 Jan 2023

近简并连续谱中的自旋-1气体弱束缚少体态

Yaakov Yudkin[1]，Paul S. Julienne[2]，和 Lev Khaykovich[1]
[1]*Department of Physics and QUEST Center and Institute of Nanotechnology and Advanced Materials, Bar-Ilan University, Ramat-Gan 5290002, Israel and*[2]*Joint Quantum Institute (JQI), University of Maryland and NIST, College Park, Maryland 20742, USA*（日期：2023年1月20日）

玻色锂原子超冷碰撞的一个显著特征是存在两个近简并二体连续谱。本文在包含两个原子连续谱和一个闭合分子通道的最简模型框架内，研究了这种近简并对窄费什巴赫共振附近少体物理的影响。该模型可用于分析弱束缚二聚体和三聚体的自旋组成。在二体扇区中，模型定性再现了锂体系中久经验证的耦合道计算所描述的现象学，并着重强调和阐明了其特殊之处。在三体扇区中，我们发现，与单连续谱情形相比，Efimov三聚体能级遵循不同的函数形式，而阈值保持不变。这个包含两个原子连续谱的三通道模型，补充了我们此前建立的包含两个分子通道的三通道模型 [1]，并表明实验观测到的第一激发Efimov能级的奇异行为 [2] 极有可能是由相互作用势的短程细节造成的。

I. 引言

过去二十年来，超冷原子实验推动我们对少体系统的认识取得了非凡进展。特别引人关注的是费什巴赫共振附近、 [3],所谓奇点附近的散射，因为发散的二体相互作用会产生种类繁多的束缚团簇，其性质是散射长度 [4–7] 的普适函数。多项实验和理论研究已成功确立了这种普适性 [8–11]。

除散射长度 a 外，系统的尺寸和能量长度尺度由三体参数决定；对于短程二体相互作用势，这一参数还遵循另一种普适性。Efimov-范德瓦耳斯普适性将三体参数与底层二体势 [的范德瓦耳斯长度 R_{vdW} 联系起来

12–14]。虽然这一点适用于宽共振 [15–18], 但研究表明，在窄共振附近，三体参数会偏离这种普适性 [19–23]。

尽管如今人们已充分理解普适性的概念，玻色锂（^{7}Li）在多个方面偏离了普适性，仍令实验学家和理论学家困惑。首先， ^{7}Li 相当好地符合 Efimov-范德华普适性，尽管它的所有共振都很窄 [24]。此外，研究表明，要对实验结果进行建模，需要相对复杂的多通道理论 [25] ；有时，能量上相距甚远的通道也会发挥关键作用 [26]。另外，有人推测，必须考虑一般的三体力，才能使实验与理论定量吻合 [27]。最后，人们观察到，计时器的能谱会穿越进入原子-二聚体连续谱（或经历避免交叉），而非与之合并 [2]。

虽然典型的少体实验是在处于绝对基态的原子上进行的（即 a-

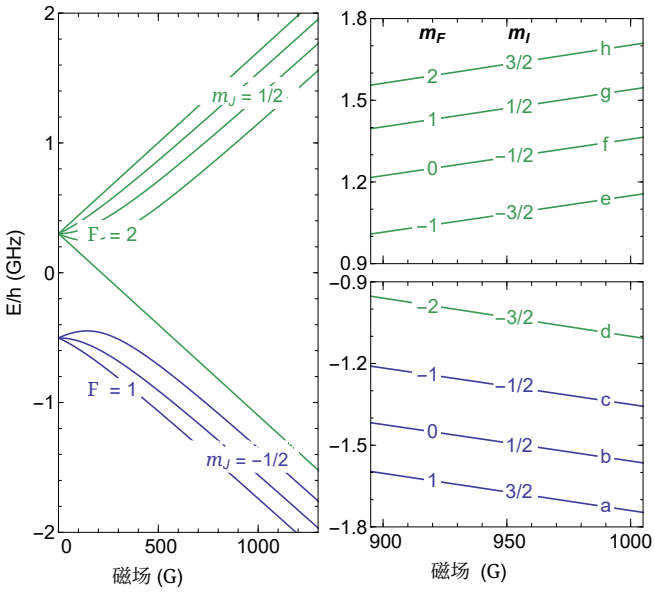

图1. ^{7}Li $2S_{1/2}$ 基态超精细能级的能量随磁场 B 变化的曲线，磁场单位为高斯。图中标出了本文中使用的能级标记。

态），但在 ^{7}Li 中，第二低能态（b-态，见图 1）已被证明对偶极弛豫具有异常的稳定性 [24]。因此，玻色锂是开展单一自旋态或两种自旋态混合实验的理想物种 [28] 。特别是，它为比较两个通道的少体物理（例如三体参数和 Efimov 谱）提供了机会 [24, 29]。

对于 ^{7}Li（以及许多其他物种），费什巴赫共振出现在较强磁场 B下，此时 $\mu_B B \gg A_{hf}$ （其中 μ_B 为玻尔磁子，A_{hf} 为超精细结构常数），塞曼位移 $\sim \mu_B B m_J$ 占主导地位，超过超精细分裂

$\sim A_{hf} m_J m_I$。这里， m_J和 m_I分别是电子角动量（自旋 + 轨道）和核自旋的投影， $m_F = m_J + m_I$ （图1）。因此，考察 $m_J = -1/2$子集内部的差异时，塞曼位移会相互抵消，超精细分裂（$\sim A_{hf}/2$）则占主导地位。对超精细相互作用作一阶近似时，最低能的一对（a， b）与次低能的一对（b， c）之间的差异相同，因此两个二体 bb 和 ac 通道简并。更高阶效应会解除简并，能级差约为数兆赫至数十兆赫。此外， bb通道和 ac通道的总自旋投影相同，因此两者之间可以发生守恒能量的自旋交换耦合。同自旋态在bb通道中的这种近简并，以及它在 aa通道中的缺失，促使我们比较弱束缚态的自旋组成。事实上，完整的二体耦合通道计算表明，近阈值 bb 本征态具有不可忽略的 ac布居；我们在此通过构建一个针对 bb通道 [30]的简化模型，探讨其影响。构建该模型的另一个重要动机，是试图理解近期实验 [2]中观测到的、原子-二聚体阈值附近第一激发Efimov能级的奇异行为。尽管这一尝试最终未能成功，但它表明，答案或许隐藏在原子间相互作用势的短程细节之中。

本文的组织结构如下。首先，在第 ^{7}节介绍 bbLi 的二体扇区可观测量，并展示 aa通道相较于 bb通道的独特性。在第 III节中，我们引入一个 [30]通道模型，该模型通过三个通道 aa捕捉相关物理。模型的二体散射和束缚态可观测量将在第 IV节推导。我们将结果与标准的双通道模型进行比较，并展示其与 bbLi 的 ^{7}通道和 ac通道散射的完整耦合道计算在定性上的一致性。在第 V 节中，我们将该模型应用于三体扇区，并发现三聚体束缚能的函数形式发生了改变。尽管阈值不受 ac通道影响，但束缚能始终低于不存在该通道时的情况。随后，我们将简要讨论锂少体难题，以及所建立模型的意义

在第 VI 节中，我们总结全文。

注意，结合此前建立的、包含一个开放原子通道和两个闭合分子通道的模型（该模型用于再现重叠的费什巴赫共振） [1, 22], ，当前的处理补充了在简化理论的明确框架下对 bb通道中 ^{7}Li复杂性的描述。因此，我们在第VI节对实验结果进行了有意义的比较。

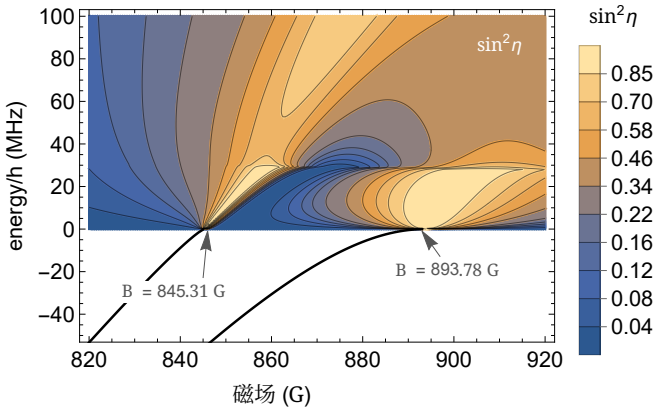

图2. 两个处于b态的原子的耦合道计算，显示了 $E > 0$ 的弹性散射的 $\sin^2 \eta_{bb}(E,\ B)$以及 $E < 0$的二聚体结合能。这里，$E = 0$ 是磁场为 B时两个处于 b 态的原子的能量。在 ac阈值（$E/h = 28$ 兆赫）处，散射呈现尖 cusp行为。

II. 锂-7

bb通道在$B_{\text{res处}bb} = 893.78(4)$ G 处有一个费什巴赫共振，此外，在 845.31(4) G [31, 32]处还有第二个相互重叠、窄得多的共振。前者是我们关注的共振，但后者的影响也不能完全忽略。鉴于文献 [1]已对此进行了深入探讨，我们沿用该研究的结论，并在此聚焦于额外的闭合原子 ac通道。

我们的耦合道计算基于参考文献 [32] 中确定的分子势，并包含所有具有相同总角动量投影 M_{tot}的 s波二体通道；在本例中，该投影就是两个原子的总自旋投影之和。束缚态或散射波函数写作$|\psi(R)\rangle = \sum_{ij} \phi_{ij}(R)\,|ij\rangle$，其中 ij 表示耦合道基组中所有具有相同 M_{tot}的原子态所对应的道指标，而分量 ϕ_{ij} 则根据总能量 E反映闭合或开放通道边界条件。图2展示了两个束缚态的能量 $E < 0$，其 $M_F = 0$低于 bb通道阈值；同时还展示了阈值以上 $E > 0$ 时由 $\sin^2 \eta_{bb}(E, B)$ 表示的弹性散射，其中 $\eta_{bb}(E, B)$是 bb通道的渐近相移。随着两个束缚态进入bb 散射连续谱并显现为共振特征，阈值以上仍保持强烈的近幺正弹性散射，并在 ac 阈值处呈现尖 cusp行为。

$M_{\text{tot}} = 0$束缚态的八个分量 bb 位于893.78G共振以下9 G的通道中，如图3(a)所示。除了 bb和 ac通道外，还有另外六个二体通道： ae， bf， cg， dh，eg 以及 ff （见图1）。在共振位置附近（893.78 G）， ac通道仅高于$E_{ac} - E_{bb}/h = 28$兆赫 bb的通道阈值（见图2），而其他六个原子通道至少包含一个 $m_J =$

$+1/2$ 自旋分量，使得塞曼位移令它们的能量远高于 bb 或 ac 通道（$\gtrsim 2$ GHz，$B > 800$ G）。因此，后两个通道中的波函数分量行为与其他六个通道截然不同。首先，自旋交换相互作用 $bb \to ac \to bb$ 相对较强，能量分母仅使其受到轻微抑制。此外，bb 和 ac 分量可以延伸到比其他六个分量远得多的距离，远超范德瓦耳斯长度（如同晕二聚体）；而其余六个分量的作用范围较短，即它们在范德瓦耳斯长度之外的振幅会迅速衰减 R_{vdW}。由于 R_{vdW} 是我们问题中最小的相关长度尺度（我们可以忽略短程“化学”过程），因此可将其视为趋近于零。在这一范围内受限的双原子通道因而类似于点状分子。与双通道模型中的典型情况一样 [33, 34], ，我们也将分量局限于短程范围内（量级为 R_{vdW} 或更小）的六个通道归类为“分子通道”，而将分量延伸至远超 R_{vdW} 的两个通道称为“原子通道”。本文中我们将始终采用这一术语。

在下文第 III 节的 bb通道模型中，我们将两个长程分量视为独立的原子通道，并将所有闭合通道归为一组 [30], ，从而将八通道问题简化为有效的三通道模型。利用这一简化，图 3(b) 展示了布居数对磁场的依赖性，相关讨论见下文。

与八通道 bb 情形不同，aa通道在$B_{\mathrm{res},aa} = 737.69(2)$ G [32], 处有一个孤立的费什巴赫共振，但不存在自旋投影相同的近邻通道 $M_{\mathrm{tot}} = 2$。因此，其余四个通道（ag、bh、fh 和 gg）共同构成分子通道，从而使 aa通道成为一个将同质核五通道情形简化为有效双通道模型的典型例子，详见参考文献 [35]。

我们注意到，在耦合通道框架内，将八个（五个）通道简化为三个（两个）通道，并非仅仅是把“分子通道”归为一组这么简单。实际上，在短程处，“原子通道”也可能对分子束缚态有非零贡献 [35]。

比较 aa 和 bb 通道的散射长度与二聚体结合能，表明其有效

第二个近简并连续谱的影响。为此，我们采用完整的耦合道计算 [36] ，并将两个通道的可观测量分别按各自的共振位置进行平移。

值得一提的是，bb 通道的两个共振和 aa 通道的一个共振，均源于同一裸分子 $\nu = 41$ 在单重态势能 [32] 中具有不同核自旋投影的 $J = 0$ 束缚态。此外，由于这三个共振都处于较大的磁场下，自由原子态的电子自旋均朝下，因此对应于分子三重态

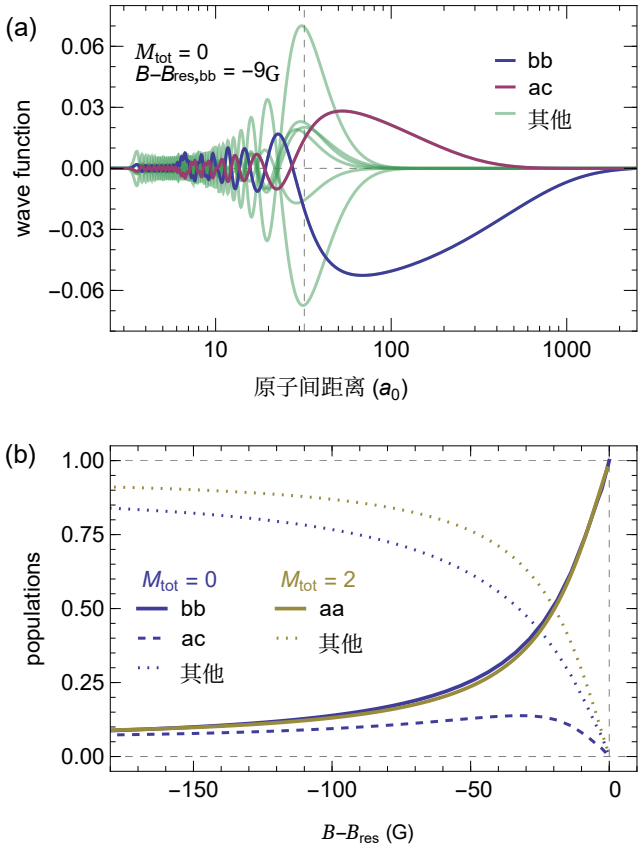

图 3. (a) 在 $M_{\mathrm{tot}} = 0$二体通道基底中，接近共振处的二聚体束缚态的波函数分量（见正文），其中 $a_0 \approx 0.0529$nm 为一个长度原子单位。竖直虚线处，所有六个能量相距较远的通道（浅绿色）均达到最大值，该处表示范德瓦耳斯长度 $R_{\mathrm{vdW}} = 32$ a_0。bb 和 ac 分量均延伸至远超 R_{vdW}的范围。注意横轴采用对数刻度。(b) 布居数的磁场依赖性。

态。因此，bb 和 aa 通道中裸分子的差分磁矩几乎相同（相差不超过 3%）。

aa 和 bb 通道的散射长度如图4(a)所示，二者极为相似。这两个通道之间的主要差异源于 bb通道中的额外共振。该共振的存在导致在$B - B_{\mathrm{res},bb} = -44$G处出现零交叉，因此产生较大的梯度；而 aa通道中没有这一现象。我们还展示了ac散射长度，由于强自旋交换耦合导致非弹性碰撞损失，原子散射至开放的 bb连续谱，因此该散射长度为复数。其结构，尤其是虚部的双峰和实部的拐点，源于两个共振相互重叠。

bb 和 aa 的散射长度相近，表明这两个二聚体的结合能也相当。此外，预计与 bb通道中的窄共振相关的额外二聚体会

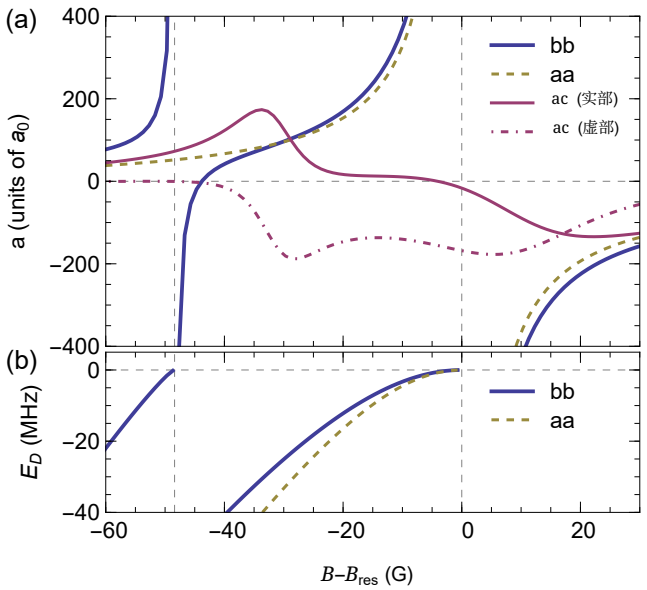

图4. ^{7}Li bb和 aa通道的磁场依赖性：(a) 散射长度；(b) 二聚体结合能。

使 bb 二聚体在 893.7 G 附近的束缚更深，这是由于二聚体-二聚体能级排斥所致（参见文献 [1], , 尤其是其中的附录 C）。然而，如图 4(b) 所示，bb通道中的二聚体远比 aa通道中的二聚体浅，并且其普适范围略大，其中 $E_D \sim a^{-2}$ [37]。

各种通道的布居数 $0 \leq \int |\phi_{ij}(R)|^2 \, dR \leq 1$ 如图 3(b)所示。原子 bb和aa 通道的行为相似，而分子通道则有所不同。在 bb情形下，分子通道（远离共振时占主导地位，即在深结合能二聚体处）的增长速度较慢，这是由于 ac通道中存在布居数。后者在$B - B_{\mathrm{res},bb} = -30$ G时达到最大布居数 ~ 14 %，随后像原子通道一样衰减。

aa二聚体的自旋组成随磁场的变化，是闭通道主导共振的典型特征，并且可由一个简单的双通道模型重现，该模型包含一个开放原子通道和一个闭合分子通道 [33, 38, 39]；另见参考文献 [35]。相比之下， ac 布居的独特行为标志着一种非平凡自旋组成的出现。我们在下文中成功地用三通道模型（bb、 ac和一个闭合分子通道）对其进行建模。由此自然引出的问题涉及三体扇区：Efimov 三聚体会受到与 ac通道接近及其不可忽略的布居怎样的影响？在全耦合通道模型中寻找答案极其耗费计算资源。本文介绍的直接而全面的三通道模型已在二体扇区中通过基准验证，无需太多额外复杂性即可应用于三体扇区。此外，由于模型本身简单，任何偏离双通道模型的情况都必然由 ac通道导致。

III. 模型描述

我们考虑自旋-1粒子（即总自旋 $F = 1$），其自旋投影为 $m_F = 1$、0、-1 ，并分别记作$\sigma = a$、b、c = 1、2、3（图1中的最低三个态）。与旋量气体少体物理的其他研究 [40, 41], 不同，我们在较大的磁场下（$\mu_B B \gg A_{hf}$）研究，并采用单一且明确的入射自旋通道（ bb通道）。该模型旨在描述共振散射及其相关的弱束缚态。为此，除由 $\sigma = a$、 b、 c构成的原子通道外，我们还假设存在能量失谐为$E_{\mathrm{mol},\sigma}$的双原子分子能级。在冷原子实验中，$E_{\mathrm{mol},\sigma}$ 可通过外部磁场调节。对于闭合分子通道，指标 σ 表示不属于分子的自旋种类，其自旋投影例如为$M_F^{(\sigma=3)} = m_F^{(\sigma=1)} + m_F^{(\sigma=2)}$ 。我们关注由这些粒子构成的总自旋投影为零（$M_{\mathrm{tot}} = 0$）的二体和三体系统。因此，在二体扇区中有两个原子通道（连续态），即 bb 和ac，它们通过一个 $M_F = 0$ 分子态（闭合通道）耦合。对于我们关注的能量，原子 bb通道开放，而ac通道闭合。三体扇区也有两个连续态，即 bbb（开放）和abc （闭合）。然而，具有$M_{\mathrm{tot}} = 0$ 的三体束缚态可以由一个双原子分子和一个附加粒子以三种不同方式组成：（1）一个$M_F = 0$ 分子与一个 $m_F = 0$ 原子；（2）一个 $M_F = +1$分子与一个 $m_F = -1$ 原子；（3）一个 $M_F = -1$分子与一个 $m_F = 1$ 原子。

我们接下来写出系统的哈密顿量：

$$\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{atom}} + \hat{H}_{\mathrm{mol}} + \hat{H}_{\mathrm{int}}. \tag{1}$$

原子和分子部分是三种自旋种类的总和：$H_{\mathrm{atom/mol}} = \sum_\sigma H_{\mathrm{atom/mol},\,\sigma}$，其中包括动能和能量失谐：

$$\hat{H}_{\mathrm{atom},\sigma} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_\sigma \right) \hat{a}^\dagger_{\sigma,\vec{k}} \hat{a}_{\sigma,\vec{k}} \tag{2}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{mol},\sigma} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{4m} + E_{\mathrm{mol},\sigma} \right) \hat{d}^\dagger_{\sigma,\vec{k}} \hat{d}_{\sigma,\vec{k}}. \tag{3}$$

这里，$\hat{a}^\dagger_{\sigma,\,\vec{k}}$ ($\hat{d}^\dagger_{\sigma,\,\vec{k}}$) 产生类型为$\sigma$、质量为 m ($2m$)、能量失谐为 E_σ ($E_{\mathrm{mol},\,\sigma}$)且动量为 $\hbar k$ 的原子（分子）。分子失谐 $E_{\mathrm{mol},\,\sigma}$ 可调，并用作表征相对于共振的磁场失谐的替代量。相互作用有两部分：

$$\hat{H}_{\mathrm{int}} = \sum_\sigma \hat{H}_{\mathrm{int},\sigma} + \hat{H}_{\mathrm{int},22}. \tag{4}$$

第一项将两个与 σ 不同的原子转化为 σ 类型的分子，反之亦然。明确写出为

对于 $\sigma = 3$，它是

$$\hat{H}_{\mathrm{int},3} = \Lambda_3 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\hat{d}^\dagger_{3,\vec{q}} \hat{a}_{1,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}_{2,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} + \hat{a}^\dagger_{2,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}^\dagger_{1,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{d}_{3,\vec{q}} \right). \quad (5)$$

第二部分将两个 $\sigma = 2$ 原子结合，形成一个 $\sigma = 2$分子：

$$\hat{H}_{\mathrm{int},22} = \Lambda_{22} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\hat{d}^\dagger_{2,\vec{q}} \hat{a}_{2,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}_{2,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} + \hat{a}^\dagger_{2,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}^\dagger_{2,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{d}_{2,\vec{q}} \right). \quad (6)$$

ˆ我们强调，参与$H_{\mathrm{int},22}$ 的分子ˆ与$H_{\mathrm{int},2}$中的分子相同，即自旋投影为$M_F = 0$ 的分子。

式（1）中的哈密顿量未包含 bb-或 ac-通道内的散射，因为这类散射通常可以忽略；尤其对于 ^{7}Li，相较于本文所讨论的共振散射更是如此。若存在零能共振，则是一个例外，参见例如文献 [42, 43]。此外，也未纳入直接的 bb-到ac 耦合。这种自旋交换可以通过$M_F = 0$ 分子间接实现，因此在费什巴赫共振附近会得到共振增强。直接耦合的形式与任一原子通道内的背景散射相同；为求简洁，本文忽略了这种耦合。

该哈密顿量可视为同核与异核版本双通道模型的融合，其中通过将同核分子与具有相同自旋的异核分子合并而实现这一综合。对于 $\Lambda_\sigma = 0$ ($\Lambda_{22} = 0$)，可重新得到标准同核（异核）双通道模型，从而能够在下文中进行定量比较。

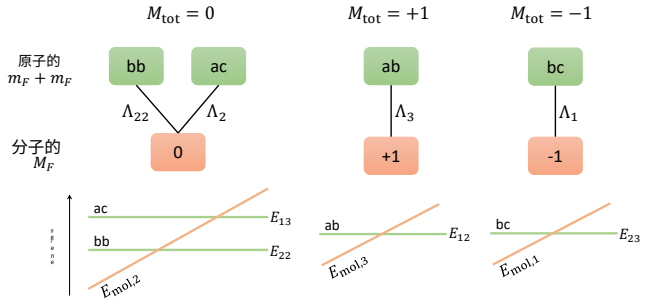

图 5. $F = 1$中三种可能的二体扇区示意图。上方图示展示了裸态及其通过ˆ H_{int}产生的耦合。下方示意了裸态能量随控制$E_{\mathrm{mol},\sigma}$ 的参数变化的依赖关系。

IV. 二体

在 $M_{\mathrm{tot}} = 0$ 二体扇区中，最一般的二体波函数为

$$|\psi_0\rangle = \beta_2 \hat{d}^\dagger_{2,\vec{q}=0}|0\rangle + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \alpha_{ac}\left(\vec{k}\right) \hat{a}^\dagger_{3,\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{1,-\vec{k}}|0\rangle + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \alpha_{bb}\left(\vec{k}\right) \hat{a}^\dagger_{2,\vec{k}} \hat{a}^\dagger_{2,-\vec{k}}|0\rangle \quad (7)$$

其中我们选择了质心参考系。与 ^{7}Li 中的情况一样，我们选择 $E_{22} = 2E_2$ bb通道的能量低于 $E_{13} = E_1 + E_3$ ac通道的能量： $E_{13} > E_{22}$。图 5 展示了三个裸态，以及哈密顿量所引起的耦合。解耦的同质（异质）核波函数 $|\psi_{\mathrm{hom}}\rangle$ ($|\psi_{\mathrm{het}}\rangle$) 可通过代入 $\alpha_{ac} = 0$ ($\alpha_{bb} = 0$) （附录 A）得到。在 $M_{\mathrm{tot}} = \pm 1$二体扇区中， $|\psi_{+1}\rangle$ 和 $|\psi_{-1}\rangle$ 等价于$|\psi_{\mathrm{het}}\rangle$。

下面我们求解薛定谔方程 ˆ$H|\psi_0\rangle = E|\psi_0\rangle$，并得到散射性质及相应束缚态的表达式。将 H 和 $|\psi_0\rangle$ 直接代入 $H|\psi_0\rangle = E|\psi_0\rangle$ ，可得到三个耦合方程，每个方程对应一个裸态投影。自由粒子振幅具有洛伦兹形式 [，见下文方程（8）] ，因此对它们进行三维积分会发散。为避免无穷大，必须引入高动量截断 $k_{\text{cut-off}}$ ，并用它对 H 和 $|\psi_0\rangle$中的所有量进行重整化，使其变为无量纲。例如，重整化动量 k 为 $k = k/k_{\text{cut-off}}$，重整化分子振幅 β_2 为 $\tilde{\beta}_2 = \beta_2 k^{3/2}$ 截断，而重整化耦合常数 $\Lambda_{\sigma,\ 22}$ 为 $\tilde{\Lambda}_{\sigma,\ 22} = \Lambda_{\sigma,\ 22} k^{3/2}$ 截断$/E_{\text{cut-off}}$，其中 $E_{\text{cut-off}} = \hbar^2 k^2_{\text{cut-off}}/m$ 为截断能量。请注意，原子振幅 $\alpha_{\mathrm{ac,\ bb}}$ 已经是无量纲的，因此无需重整化。经过这一步后， $k_{\text{cut-off}}$不再出现在耦合方程中。此后，所有无量纲的重整化量均以波浪号表示。

为作说明，我们使用表 I 中的参数来考察各种二体可观测量，并将其与同核和异核情形下的可观测量进行比较。我们为所有模-˜ ˜ ˜ ˜型选择相同的耦合常数，即 $\Lambda_{22} = \Lambda_2 = \Lambda_{\mathrm{hom}} = \Lambda_{\mathrm{het}}$，以保持微观模型一致，从而进行定量比较。我们注意到，由于玻色增强，同核情形的有效耦合$\sqrt{2}$ 大于异核情形，因此前者的共振更宽（附录B）。将 $M_{\mathrm{tot}} = 0$ 模型与同核模型进行比较，相当于比较 ^{7}Li bb- 和 aa-通道的可观测量。

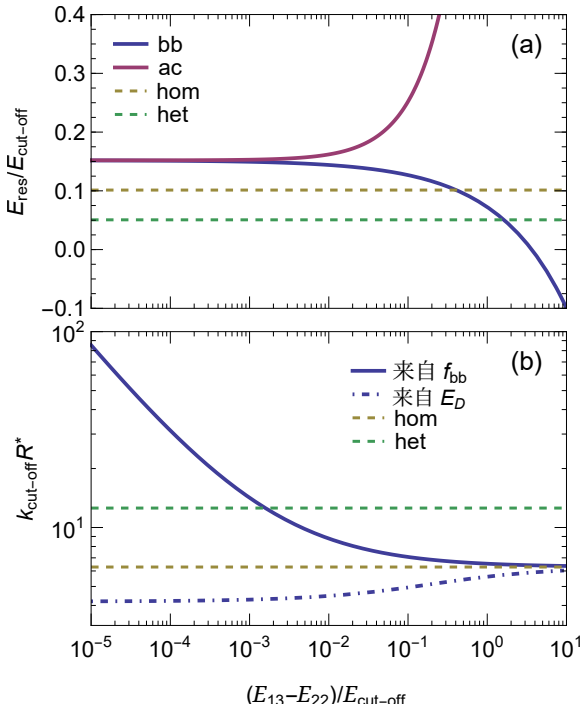

图 6. E_{13}依赖关系。(a) bb-和 ac-共振位置表示为连续态之间能量劈裂的函数。(b) 对比了提取 R^*_{bb} 的两种可能方法。实线表示式（13）。

A. 散射性质

这里，对于处于 bb通道、能量为$E = E_{22} + E_0$的两个原子，其中 $E_0 = \hbar^2 k_0^2/m > 0$ 是它们的相对动能，我们推导弹性散射振幅 $f_{bb}(k_0)$ 的表达式。当 $E_0 < E_{13}$ 时， ac通道关闭， $bb \to bb$ 是唯一可能发生的散射事件。然而，当 $E_0 \geq E_{13}$ 时，能量上还允许发生另一种散射过程，即非弹性散射 $bb \to ac$。因此，在入射动能高于 ac 阈值时，弹性与非弹性散射过程相互竞争， $f_{bb}(k_0)$ 相较于对应的双通道模型结果有所降低。同样，处于 ac 通道、能量为 $E = E_{13} + E_0$ 的两个原子既可以弹性散射回 ac通道，也可以非弹性散射至 bb通道。

为了求出 $f_{bb}(k_0)$，我们使用 $\hat{H}|\psi_0\rangle =$ $(E_{22} + E_0)|\psi_0\rangle$ 将 bb 和 ac 原子通道振幅 $\alpha_{bb}\left(\tilde{k}\right)$ 和 $\alpha_{ac}\left(\tilde{k}\right)$ 表示为闭合 $\tilde{}$ 分子振幅 β_2:

$$\alpha_{bb}\left(\tilde{k}\right) = (2\pi)^3 \delta\left(\tilde{k} - \tilde{k}_0\right) - \frac{\tilde{\Lambda}_{22}\tilde{\beta}_2}{\tilde{k}^2 - \tilde{k}_0^2} \tag{8a}$$

$$\alpha_{ac}\left(\tilde{k}\right) = (2\pi)^3 \delta\left(\tilde{k} - \sqrt{\tilde{k}_0^2 - \Delta\tilde{E}}\right) - \frac{\tilde{\Lambda}_2\tilde{\beta}_2}{\tilde{k}^2 - \tilde{k}_0^2 + \Delta\tilde{E}} \tag{8b}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$其中 $\Delta E = E_{13} - E_{22} > 0$ 是两个原子通道之间的能量差。从散射理论的角度来看， δ-函数表示入射平面波，第二项则是散射的球对称波。对于 α_{bb} 中的波，$\tilde{}$其 k-矢量的模为 k_0 ，因此两种波在任意动能下都存在。然而，对于 α_{ac} ，只有当动能 $\sqrt{\tilde{k}_0^2 - \Delta\tilde{E}}$ 时， $\tilde{k}_0^2$ 才是实数（即波能够传播），也就是说动能等于或大于 $\Delta\tilde{E}$。此外，散射波的来源有两种。尽管根据哈密顿量所定义的连通性（图 5），所有散射事件都必须经过分子，但分子可以源自 bb 或 ac 原子通道。这一点可由分子振幅的形式清楚地看出，其表达式为

$$\tilde{\beta}_2\left(\tilde{k}_0\right) = -\frac{2\tilde{\Lambda}_{22}\Theta\left(\tilde{k}_0\right) + \tilde{\Lambda}_2\Theta\left(\tilde{k}_0 - \sqrt{\Delta\tilde{E}}\right)}{D\left(\tilde{k}_0\right)}, \tag{9}$$

其中

$$D\left(\tilde{k}_0\right) = \left(\tilde{E}_{\mathrm{mol},2} - \tilde{E}_{22} - \tilde{k}_0^2\right) - \frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{2\pi^2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{\Delta\tilde{E} - \tilde{k}_0^2}\right) - \frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{\pi^2}\left(1 - i\frac{\pi}{2}\tilde{k}_0\right). \tag{10}$$

分子通道的振幅是两个项之和，分别对应两个来源。海维赛德阶跃函数 $\Theta(x)$ 源于两个不同的连续谱阈值，并在 ac- 通道关闭时阻止粒子流入。第一项中的因子 2 源于玻色增强。因此，弹性 $bb \to bb$ 散射的散射振幅为

$$\tilde{f}_{bb}\left(\tilde{k}_0\right) = \frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{2\pi}\frac{\Theta\left(\tilde{k}_0\right)}{D\left(\tilde{k}_0\right)}, \tag{11}$$

其中我们使用了来自 α_{bb} 的散射波，以及源自 bb 通道的分子振幅项。为了推导 $ac \to ac$ 弹性散射振幅的表达式，我们考虑相对于 ac 阈值测量的动能 $\delta E_0 = \hbar^2 (\delta k_0)^2/m > 0$（即超额能量），其定义为

	bb (22)	ac (2)	hom	het
$\tilde{\Lambda}$	1	1	1	1
$\tilde{E}_{\mathrm{thr}}$	0	0.0004	0	0
$\tilde{E}_{\mathrm{res}}$	0.1504	0.1524	0.1013	0.0507
$\tilde{R}^\star$	18.78	-	6.28	12.57

表 I. 前两行列出了图 6-9所用的参数。后两行则是获得的共振位置和强度。

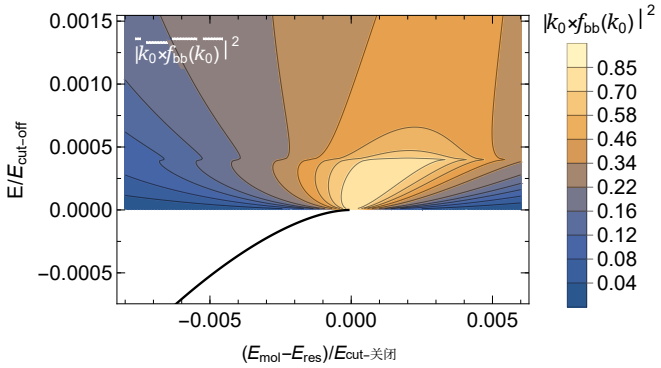

图7. 对于 $E > 0$，图中展示了 $\left|\tilde{k}_0 \cdot \tilde{f}_{bb}\left(\tilde{k}_0\right)\right|^2$ 随~裸分子能量 E_{mol}（平移至共振位置）以及 $\tilde{E}_0$ 两个自由粒子的动能 $E < 0$ 变化的等高线图。二聚体结合能在共振处为零，其 $M_{\mathrm{tot}} = 0$模型性质可直接与图2中的完整耦合道计算结果进行比较。

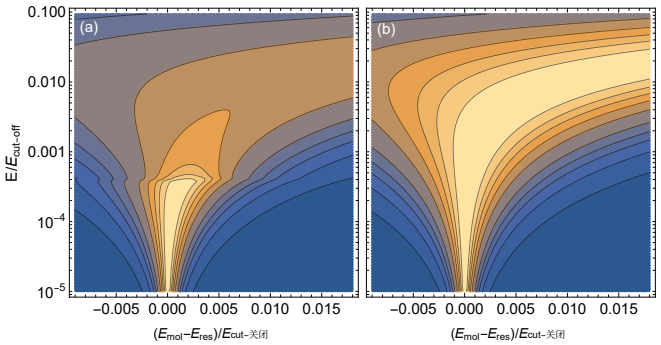

图8. (a) $\left|\tilde{k}_0 \cdot \tilde{f}_{bb}\left(\tilde{k}_0\right)\right|^2$的等高线图，如图7 所示，但采用对数纵轴。(b) 作为比较，图中还展示了双通道同核情形。此处以及图2和图7中的色标相同。

$E = E_{22} + \Delta E + \delta E_0$ 或 $\tilde{k}_0^2 = \Delta\tilde{E} + \delta\tilde{k}_0^2$。取来自 α_{ac} 的散射波以及源自 ac 通道的分子振幅项，我们得到

$$\tilde{f}_{ac}\left(\delta\tilde{k}_0\right) = \frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{4\pi} \frac{\Theta\left(\delta\tilde{k}_0\right)}{D\left(\sqrt{\Delta\tilde{E} + \delta\tilde{k}_0^2}\right)}. \tag{12}$$

作为第一个可观测量，我们提取共振位置 $\tilde{E}_{\mathrm{res},\ i}$（$i = \{bb, ac, \text{同质}, \text{异质}\}$），即裸的~分子能量 $E_{\mathrm{mol},\ 2}$ 在散射长度发散且满足条件 $\tilde{f}_i^{-1}\left(\tilde{k}_0 = 0\right) = 0$ 时所取的值（表 I）。对于简并连续谱，即当 $E_{13} = E_{22}$时，bb-共振位置和 ac-共振位置相同，且等于同核与异核模型之和。对于阈值不相等的情况，ac-共振位置随 $|E_{13} - E_{22}|$ 线性增加，而 bb-共振位置则下降如 $\sim \sqrt{E_{13} - E_{22}}$；见图 6(a)。一个能量上相距甚远~但耦合强度相同的 ac-通道（$\Lambda_{22} = \Lambda_2 = 1$）会导致~ bb-共振位置移至同核（$\Lambda_2 = 0$）共振位置以下。然而，在实际情况下，Λ_2 应随 $|E_{13} - E_{22}|$ 增大而~减小。在 $\Lambda_2 \to 0$ 的极限下，$E_{\mathrm{res},\ bb}$~趋近于$E_{\mathrm{res},\ \mathrm{hom}}$的值。

下文中，使用共振位置 $E_{\mathrm{res},\ bb}$ 来平移分子能量轴，使 bb- 共振位于原点。

的等高线图 $0 \le \left|\tilde{k}_0 \cdot \tilde{f}_{bb}\left(\tilde{k}_0\right)\right|^2 \le 1$，其等价于 $\sin^2\eta$ [44]，展示了ac阈值嵌入 bb连续谱中的效应（图7）。与 ^{7}Li（图 2）中一样，我们观察到阈值处的尖 cusp行为。与同核双通道模型相比，阈值以上的 $bb \to bb$ （弹性）散射减小，这是因为ac阈值以上 $bb \to ac$ （非弹性）散射增加（图 8）。

虽然图7和8中的等高线图很有启发性，但冷原子实验通常处于 $k_0 \to 0$极限。在这种情况下，可以将散射振幅按 k_0 的幂次展开，并将其系数与有效程展开 $\left[\tilde{f}_{bb}\left(\tilde{k}_0\right)\right]^{-1} = -\tilde{a}_{bb}^{-1} - i\tilde{k}_0 + \tilde{r}_{e,\ bb}\tilde{k}_0^2/2$进行比较，从而得到散射长度 $\tilde{a}_{bb}$ [图9(a)] 和有效程 $r_{e,\ bb}$的表达式。后者与参数 $R_{bb}^\star = -r_{e,\ bb}/2$ 有关，该参数可表征费什巴赫共振的窄窄程度（表I）。从图9(a)可以看到，a_{bb} 与 a_{hom}完全相同，即其以 E_{mol} 为单位的宽度由 bb-通道决定。然而，这种看似完美的重合具有误导性，因为在图9(a)中，我们按照各自（不同的，见表I）$E_{\mathrm{res},\ i}$平移了两个共振。更重要的是，$R_{bb}^\star > R_{\mathrm{hom}}^\star$，这表明 bb 共振极点强度因额外的 ac-通道靠近而增加，甚至超过 $R_{\mathrm{het}}^\star$。事实上，

$$\tilde{R}_{bb}^\star = \frac{2\pi}{\tilde{\Lambda}_{22}^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{4\tilde{\Lambda}_{22}^2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{E}_{13} - \tilde{E}_{22}}} \tag{13}$$

由两项构成。第一项是~来自 bb通道的贡献，与 $R_{\mathrm{hom}}^\star$相同。第二项与能量差的平方根成反比。因此，两个连续态越接近，~极点就越强。值得注意的是，在极限 $\Lambda_2 \to 0$ 下，以及在极限 $E_{13} \gg E_{22}$下，$R_{bb}^\star \to R_{\mathrm{hom}}^\star$ 正如预期。

转向 ac 阈值时，散射长度 a_{ac}由 $\tilde{a}_{ac} = -\tilde{f}_{ac}\left(\delta\tilde{k}_0 = 0\right)$得到，是复数[图 9(a)]。在极点位置，Re $a_{ac} = 0$ 为零，而 Im a_{ac} 达到最大值。将 $f_{ac}(k_0)$ 展开到零阶以上没有意义，因为线性项 $\sim k_0$ 不满足光学定理所要求的与参数无关性。

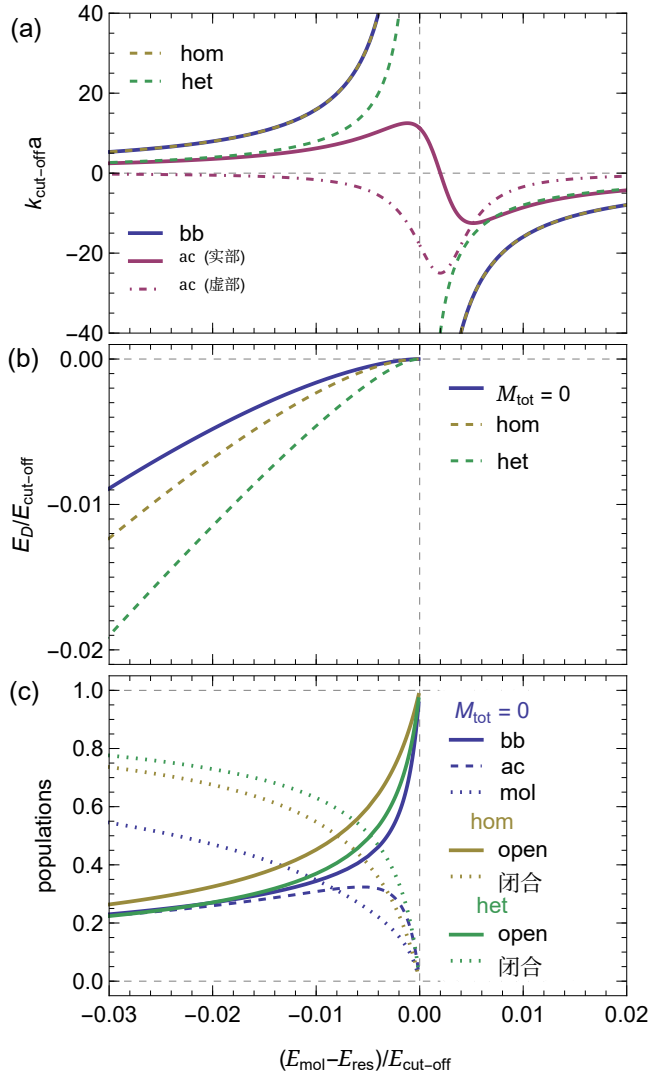

图9. 二体扇区。(a) 散射长度 $\tilde{a}$as 随裸分子能量 $\tilde{E}_{\text{mol}}$ 变化的曲线。bb 和 ac 曲线分别平移了 $E_{\text{res},\ bb}$，而同质（异质）曲线平移了 $E_{\text{res},\ \text{hom}}$ ($\tilde{E}_{\text{res},\ \text{het}}$)。$bb$ 和同质曲线重合。(b) 二聚体结合能相对于（较低的）连续谱阈值的变化曲线。(c) 对比了 (b) 中三种模型的开放通道和闭合通道布居数。

B. 束缚能

现在我们讨论薛定谔方程的负能量解，即 Feshbach 二聚体的束缚能。一种求解方法是寻找 $k_0 = i\lambda$, $\lambda > 0$ 的散射振幅的极点。另一种方法是求解薛定谔方程，其中$E_D = E_{22} - \hbar^2\lambda^2/m < E_{22}$ 将其简化为求解

以下方程：

$$\left(\tilde{E}_{\text{mol},2} - \tilde{E}_{22} + \tilde{\lambda}^2\right) - \frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{2\pi^2}\left[1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{\tilde{E}_{13} - \tilde{E}_{22} + \tilde{\lambda}^2}\right] - \frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{\pi^2}\left[1 - \frac{\pi}{2}\tilde{\lambda}\right] = 0. \quad (14)$$

我们注意到，对 ¨ 求解薛定谔方程会得到 $E_D = E_{13} - \hbar^2\lambda^2/m$ 的不同解，λ 但束缚能（可观测量）相同 E_D。额外的原子通道并不会产生额外的二聚体，而是使二聚体具有混合的 bb 和 ac 自旋组态。（这应与具有两个分子通道的三通道模型 [1]相区别。）其数值解与图9(b) 中的同核和异核二聚体进行了比较。有趣的是，尽管我们上文已证明，ac通道会增大极点强度（即增大 $R^\star$），但 $M_{\text{tot}} = 0$二聚体比同核模型中的二聚体更浅，且其普适范围（其中 $E_D \sim a^{-2}$）有所扩大。事实上，同核二聚体的函数形式能够描述˜ ˜具有 $M_{\text{tot}} = 0$ 的 $\Lambda = 1.12$ 或 $R^\star = 4.364$的二聚体。我们得出结论：反直觉的是，增加 ac通道会增大极点强度，同时也会扩大普适范围，而这两者通常呈相反的关联。

为了在更一般的情形下阐明这一点，˜图6(b) 对比了通过展开散射振幅 $R^\star_{bb}$ 式 [（13）] 得到的数值与˜$R^\star_{bb}$ 通过拟合二聚体与同核二聚体得到的数值。当连续谱间隔较大时，两者相等；但随着它们趋于简并，˜这两个数值之间的差距逐渐增大。值得注意的是，$R^\star_{bb}$ 从二聚体中提取的˜ ˜ ˜ ˜值趋近于 $R^\star_{\text{hom}}R^\star_{\text{het}}/$（$R^\star_{\text{hom}} + R^\star_{\text{het}}$），当$E_{13} \to E_{22}$（附录C）。

观察原子通道和分子通道中的布居数，或许能帮助我们理解这种违反直觉的行为。给定二聚体的束缚波数 $\lambda > 0$，有（附录E）

$$P_{\text{bb}} = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{8\pi\tilde{\lambda}}\right) \quad (15a)$$

$$P_{\text{ac}} = \frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{8\pi\sqrt{\tilde{\lambda}^2 - \tilde{E}_{22} + \tilde{E}_{13}}}\right) \quad (15b)$$

$$P_{\text{mol}} = \frac{1}{\mathcal{N}}, \quad (15c)$$

其中

$$\mathcal{N} = \frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{8\pi\tilde{\lambda}} + \frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{8\pi\sqrt{\tilde{\lambda}^2 - \tilde{E}_{22} + \tilde{E}_{13}}} + 1, \quad (16)$$

对于 bb、ac 和分子通道而言，分别如此。这些函数绘于图9(c) 中。远离共振时，ac- 通道的布居表现得如同一个

原子通道，并趋近于零，因为二聚体呈现出以闭合通道为主的特征。接近共振时，二聚体变为由 bb 开放通道主导，而 ac 通道布居也趋近于零。在此之间，布居会达到最大值，因为 $|E_D - E_{22}| \approx |E_{13} - E_{22}|$。与同核和异核模型的开放通道布居相比，$bb$布居消减得更快，这符合极点更强（$R^\star$更大）的预期。然而，在同核和异核模型中，分子通道布居的增长速度都慢于闭合通道。这与二聚体的束缚能较浅相符。缺失的布居当然存在于 ac-通道中。换言之，ac-通道的临近会更快地耗尽 bb-通道，使得 bb-共振看起来不那么由开放通道主导（即更窄，$R^\star$更大）。但从二聚体的角度来看，原子通道布居是 $P_{\rm bb} + P_{\rm ac}$ 之和，这意味着共振更由开放通道主导（即普适范围更大）。正是这种二重性导致了极点强度与普适范围之间（不同寻常的）相关性。

将 $M_{\rm tot} = 0$ 模型的可观测量与同核模型进行对比，让人联想到 bb-和 aa-通道在 ^{7}Li 中的比较（见图4）。因此，我们得出结论，附近的 ac-通道导致了所观察到的差异。通过将模型拟合到耦合道散射长度和 $R^\star$ 的 ^{7}Li 数据，可以求得模型的三个裸参数（裸共振位置 +和两个耦合常数）。然而，模型与耦合道二聚体之间只有在较小的束缚能范围内才具有定量一致性。我们观察到，对于两个通道，模型预测的二聚体束缚程度都比耦合道计算结果浅。我们将这种差异归因于真实相互作用势的范德瓦耳斯尾，模型未能将其纳入其中。不过，模型确实忠实地再现了由 ac-通道导致的浅化效应。

V. 三体

在具有三个粒子且总自旋投影为 $M_{\rm tot} = 0$ 的系统中，连续谱中存在两种可能的自旋构型

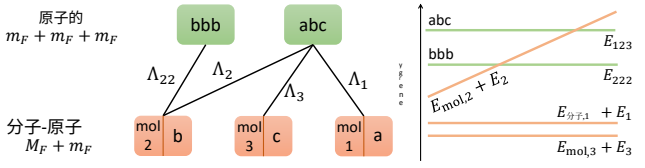

图10. $M_{\rm tot} = 0$ 三体扇区的示意图。左侧插图展示了裸态及其通过$\hat{}$ $H_{\rm int}$产生的耦合。右侧展示了裸态能量对控制$E_{{\rm mol},\ \sigma}$ 的参数的依赖性。

：（i） bbb；（ii） abc [45]。每一对（bb、ac、 ab、bc）均与具有相应自旋投影的分子耦合；如上文所述，bb 和 ac 对通过 $M_F = 0$ 分子耦合。后者也是两个三体连续谱之间的连接（图10）。最一般的三体波函数为

$$
\begin{aligned}
|\psi_{\rm 3B}\rangle = &\sum_\sigma \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \beta_\sigma\left(\vec{q}\right) \hat{d}^\dagger_{\sigma,\vec{q}} \hat{a}^\dagger_{\sigma,-\vec{q}} |0\rangle \\
&+ \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \alpha_{bbb}\left(\vec{q},\vec{k}\right) \hat{a}^\dagger_{2,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}^\dagger_{2,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}^\dagger_{2,-\vec{q}} |0\rangle \\
&+ \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \alpha_{abc}\left(\vec{q},\vec{k}\right) \hat{a}^\dagger_{3,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}^\dagger_{1,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \hat{a}^\dagger_{2,-\vec{q}} |0\rangle
\end{aligned}
\tag{17}
$$

其基础是三个相互解耦的二体子系统 $|\psi_{\rm 3B}\rangle$，即 $|\psi_0\rangle$ [方程（7）]、 $|\psi_{+1}\rangle$ 以及 $|\psi_{-1}\rangle$ （图5）。在三体扇区中，这些相互解耦的二体子系统由于共同连续谱而发生耦合（附录D）。

求解$\hat{|}\psi_{\rm 3B}\rangle = E|\psi_{\rm 3B}\rangle$ 结合 $E = E_{222} - \hbar^2\lambda^2/m$ 可得到关于分子-原子振幅 $\beta_\sigma(q)$和束缚波数 λ的三个耦合方程：

$$
\begin{aligned}
&\left[f_\sigma\left(\tilde{q}\right) - g_\sigma\left(\tilde{q}\right)\right] \tilde{\beta}_\sigma\left(\tilde{q}\right) - \delta_{\sigma,2} g_{22}\left(\tilde{q}\right) \tilde{\beta}_2\left(\tilde{q}\right) \\
&\quad - \sum_{\sigma' \neq \sigma} \int_0^\infty d\tilde{k} L_{\sigma,\sigma'}\left(\tilde{q},\tilde{k}\right) \tilde{\beta}_{\sigma'}\left(\tilde{k}\right) \\
&\quad - \delta_{\sigma,2} \int_0^\infty d\tilde{k} L_{22}\left(\tilde{q},\tilde{k}\right) \tilde{\beta}_2\left(\tilde{k}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

这里我们定义了这些函数

$$
f_\sigma\left(\tilde{q}\right) = \left(\frac{3\tilde{q}^2}{4} + \tilde{E}_\sigma + \tilde{E}_{{\rm mol},\sigma} - \tilde{E}_{222} + \tilde{\lambda}^2\right) \tag{19a}
$$

$$
g_\sigma\left(\tilde{q}\right) = \frac{\tilde{\Lambda}_1^2}{2\pi^2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3\tilde{q}^2}{4} + \tilde{E}_{123} - \tilde{E}_{222} + \tilde{\lambda}^2}\right) \tag{19b}
$$

$$
g_{22}\left(\tilde{q}\right) = \frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{\pi^2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3\tilde{q}^2}{4} + \tilde{\lambda}^2}\right) \tag{19c}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\sigma,\sigma'}\left(\tilde{q},\tilde{k}\right) = &\frac{\tilde{\Lambda}_\sigma \tilde{\Lambda}_{\sigma'}}{4\pi^2} \\
&\times \ln\left(\frac{\tilde{k}^2 + \tilde{k}\tilde{q} + \tilde{q}^2 + \tilde{E}_{123} - \tilde{E}_{222} + \tilde{\lambda}^2}{\tilde{k}^2 - \tilde{k}\tilde{q} + \tilde{q}^2 + \tilde{E}_{123} - \tilde{E}_{222} + \tilde{\lambda}^2}\right)
\end{aligned}
\tag{19d}
$$

$$
L_{22}\left(\tilde{q},\tilde{k}\right) = \frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{\pi^2} \ln\left(\frac{\tilde{k}^2 + \tilde{k}\tilde{q} + \tilde{q}^2 + \tilde{\lambda}^2}{\tilde{k}^2 - \tilde{k}\tilde{q} + \tilde{q}^2 + \tilde{\lambda}^2}\right) \tag{19e}
$$

参数			
通道	bb	ac	ab/bc
σ	22	2	3/1
$\tilde{\Lambda}$	1	1	1
$\tilde{E}_{\rm thr}$	0	0.0004	0.0002
$\tilde{E}_{\rm mol} - \tilde{E}_{\rm res}$	vary	-	−0.0008
$\tilde{a}$	vary	-	100
特征			
	$M_{\rm tot} = 0$	hom	het
$\tilde{a}_\star$	2.88	2.88	5.77
$R^\star/a_\star$	6.53	2.18	2.18
$\tilde{a}_-$	−37.89	−69.2	−137.2
$R^\star/a_-$	−0.496	−0.091	−0.091
$\tilde{\kappa}_\star$	0.0199	0.0187	0.0094
$R^\star\kappa_\star$	0.374	0.118	0.118

表 II. 上：图 11 中使用的参数。 $\tilde{E}_{\rm thr}$ 表示连续谱阈值能量。下：基态 Efimov 三聚体的各种特征值——见图 11(a)。

为了更高效地对方程 (18) 进行数值计算，我们令 $\sigma = 1$ 和$\sigma = 3$ 的参数相等，即 $\beta_1 = \beta_3$, $\Lambda_1 = \Lambda_3$, $E_1 = E_3$ 和 $E_{\rm mol,1} = E_{\rm mol,3}$。这样一来，(18) 中的三个方程便简化为两个（分别对应 $\sigma = 2$ 和 $\sigma = 1$）。此外，我们固定 $E_{\rm mol,1}$ 的取值，只改变 $E_{\rm mol} = E_{\rm mol,2}$，以追踪穿越 Feshbach 共振时的束缚能。图 11(a) 展示了使用表 II 中参数得到的三聚体基态能谱，并将其与同核与异核模型进行比较。我们还在表 II 中提取了能谱的常见特征，即与二聚体-原子连续谱的合并点（$a_\star$）、解离进入 bbb 连续谱时的情况（a_-），以及共振处的束缚波数 $\kappa_\star$。我们利用二体扇区的结果，从 $E_{\rm mol}$ 得到散射长度值 $\tilde{}$。此外，我们以 $R^\star$ 为基准对这些特征进行归一化，从而消除高动量截断的影响，使得能够与实验进行定量比较。

在 a_- 附近的斜率比双通道模型中的斜率小。不过，这只是因为仅改变了$E_{\rm mol,\ 2}$ 而保持其他参数不变所造成的假象。在纯异核模型中也观察到了相同现象。

将 $M_{\rm tot} = 0$ 能谱与同核双通道模型的能谱进行比较时，ac通道的影响显而易见。尽管能谱的极值点几乎重合，但在近简并连续谱下形成的三聚体在其最大值处束缚得不那么深。因此， ac通道的存在改变了能谱的函数形式，这表明在解读某些实验结果时应当谨慎。近二十年来，绝大多数与 Efimov 相关的测量都是在自由原子阈值或原子-二聚体阈值处进行的，旨在证实（或否定）普适性。图 11 (a) 的比较告诉我们，各自连续谱阈值处的极值点可能不足以表征

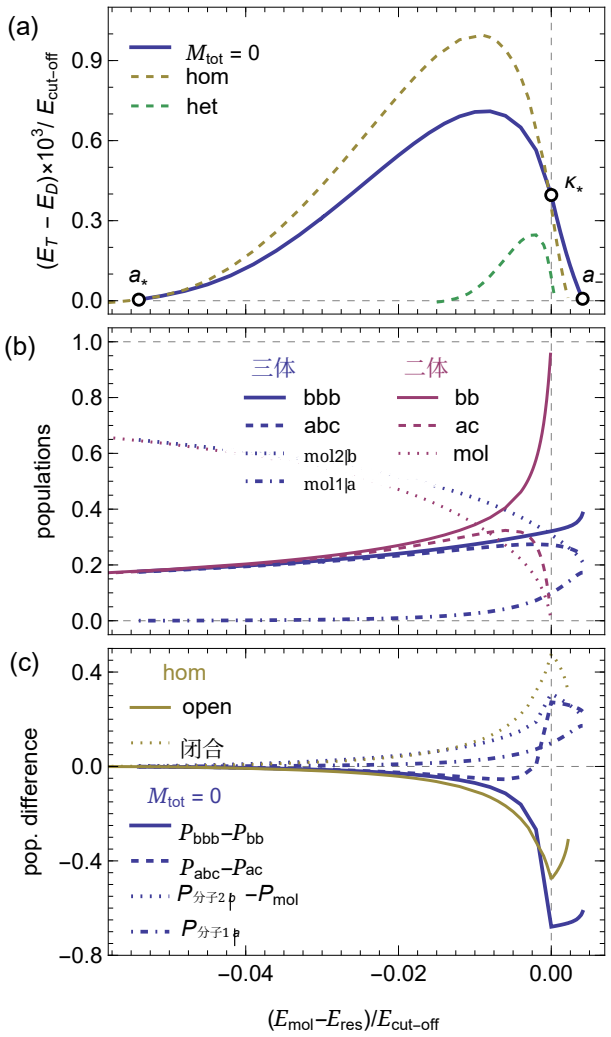

图11. 三体扇区。(a) 基态三聚体相对于二聚体的结合能随裸 $M_F = 0$ 分子能量的变化曲线。同核与异核三聚体之间的巨大差异完全可由玻色增强解释（附录B）。图中标出了提取表II 中 Efimov 特征的位置。(b) 展示了 bb+ac 模型的二体和三体扇区中各开放及闭合通道的布居数。(c) 将三体与二体布居数之差与同核模型中的相应差值进行了比较。

表征能级。

这里用微观参数来描述该模型，例如连续态与裸分子之间的耦合常数。在冷原子实验中研究费什巴赫共振时，人们会使用可观测量（如共振宽度 ΔB 和 $R^\star$参数）来表征观测到的行为。因此，表 II 中的 Efimov特征以 $R^\star$ 为单位列出 II。值得注意的是，由于玻色增强效应相互抵消，这种归一化使同核模型与异核模型等价。为展示 ac通道的影响，考虑一个给定的共振（给定 $R^\star$）。

如果不存在 ac通道，预计它与二聚体-原子连续谱的并合位置为 $a_{\star,\ \mathrm{hom}} = R^{\star}/2.18$。然而，如果知道该通道存在，则预计$a_{\star} = R^{\star}/6.53 < a_{\star,\ \mathrm{hom}}$ 会低 ~ 3 倍（参数见表 II）。

与二体扇区中的情况类似，我们也可以求出各种三原子通道和分子-原子通道的布居数，以探究三聚体的自旋组成（附录F）。所得表达式在 $\sigma = 1$ 和 3 分子通道的布居数相对于 $\sigma = 2$ 布居数较小时是准确的。当 $E_{\mathrm{mol}} \geq E_{\mathrm{res}}$时，这一近似不再成立，此时后者的布居数减小，并在 a_{-}处趋近于 0。事实上，在 a_{-}处，我们预期 bbb通道的布居数趋近于 1，而所有其他通道的布居数均趋于 0。在图11(b) 中，绘出了三聚体基态的布居数以及二体二聚体布居，但由于近似不再成立，这一特性并未体现出来。当$a_{\star}$时，三聚体的布居数渐近趋近于二聚体的布居数，表明两个能级合并——三聚体解离为一个二聚体和一个原子。图11(c) 也展示了这一点，其中绘出了三体与二体布居数之差。

在整个能谱中，三体 bbb （分子 $2|b$）布居数小于（大于）二体 bb （分子）布居数。同核模型中也有相同情况。然而，对比 abc 和 ac 布居数可以发现，从 a_{-} 移至 $a_{\star}$时， abc 布居数先较大（类似分子通道），随后与 ac 布居数交叉，最后从下方趋近于它（类似原子通道）。因此，在自由原子（二聚体-原子）阈值附近，abc通道表现得像分子（原子）通道。

与同核模型相比， $M_{\mathrm{tot}} = 0$ 模型的分子通道布居数较低。与二体扇区中的情况一样，这与其束缚能较小相一致。

VI. 对锂-7三聚体的意义

考虑到 ^{7}Li 的 bb- 通道具有重叠共振和近简并连续谱等特殊性质，这一近简并连续谱模型与我们先前提出的重叠共振模型 [1] 概括了渐近散射波函数的主要贡献。两者在二体扇区的表现都远胜于常规双通道模型，并且都预测三体扇区会有轻微变化。然而，它们都无法解释三聚体的异常特征。这两种最简模型都无法解释为何尽管共振很窄，三体参数仍具有普适性，也无法解释三聚体如何进入二聚体-原子连续谱。我们得出结论： ^{7}Li 三聚体能量主要受相互作用势短程细节的影响，而处理这些细节需要更复杂的理论方法 [27]。

VII. 结论

我们提出了一种简单直接、同时又切合实际且行之有效的模型，用于描述近简并连续谱存在时的共振相互作用。该模型再现了 ^{7}Li 二体扇区的现象学特征。由于模型中的相互作用势为硬核（这是最简单的情形），定量一致性有限。纳入更多相互作用势细节（例如范德瓦耳斯尾）应能进一步改善这一点；不过，各种可观测量呈现相应行为的物理机制是清楚的。具体而言，我们展示了窄共振如何具有扩大的普适范围，以及 Efimov 三聚体的函数形式如何发生改变。

未来一个值得探究的方向是多体物理。二体扇区扩展的普适范围有助于研究窄共振附近的普适性。

对于处于 b态 [46, 47]的钾-40极化全同费米子的 p波散射，也发现类似的构型十分重要。

致谢

我们感谢与 J. P. D'Incao、S. J. J. M. F. Kokkelmans 及其研究组成员进行的富有成效的讨论。

本研究部分由以色列科学基金会（第 1543/20 号资助）以及美国—以色列双边科学基金会（BSF，位于以色列耶路撒冷）和美国国家科学基金会的资助支持。

附录 A：异核双通道模型

标准双通道模型（一个开放的原子通道和一个闭合分子通道）既可用于全同玻色子（同核情形），也可用于可区分粒子（异核情形）。后者通常用于不同自旋态的费米子混合物（锂-6 是一个实际例子 [48]），当然也可用于任何可区分粒子，例如不同自旋玻色子。

$\sigma = 3$ 的异核二体波函数写作

$$|\psi_{\mathrm{het}}^{(\sigma=3)}\rangle = \beta_3 \hat{d}^{\dagger}_{3,\vec{q}=0}|0\rangle + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\alpha_3\left(\vec{k}\right)\hat{a}^{\dagger}_{1,\vec{k}}\hat{a}^{\dagger}_{2,-\vec{k}}|0\rangle. \tag{A1}$$

薛定谔方程 $\hat{H}|\psi^{(\sigma=3)}_{\text{异质}}\rangle = E|\psi^{(\sigma=3)}_{\text{异质}}\rangle$，其中 $\hat{H}$ 由方程（1）给出，并导出以下两个耦合方程

$$\beta_3\left(E_{\mathrm{mol},3} - E\right) + \Lambda_3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\alpha_3\left(\vec{k}\right) = 0 \tag{A2a}$$

$$\alpha_3(\vec{q})\left(\frac{\hbar^2 q^2}{m}+E_{12}-E\right)+\Lambda_3\beta_3=0 \tag{A2b}$$

第二个方程表明，自由粒子振幅 $\alpha_\sigma(\vec{q})$ 是其自变量 $\vec{q}$ 的洛伦兹分布，因此第一个方程中的积分会随 $|\vec{q}|$ 线性发散。为处理这种紫外发散，如正文（第IV节）所述，引入了高动量截断 $k_{\text{cut-off}}$。洛伦兹形式的 $\alpha_\sigma(\vec{q})$ 与位置空间中的预期指数形式（晕二聚体）一致。

一般而言，由于耦合常数 Λ_σ 以及分子和原子的失谐 $E_{\text{mol},\,\sigma}$ 和 E_σ 不同，方程（A2）在二体扇区会导出三个等价的方程。然而，若假设对所有 σ，$\Lambda_\sigma=\Lambda$、$E_{\text{mol},\,\sigma}=E_{\text{mol}}$ 和 $E_\sigma=0$，则各扇区的方程变得相同。此时，散射振幅 $\tilde{f}\left(\tilde{k}_0\right)=-\tilde{\Lambda}\tilde{\beta}\left(\tilde{k}_0\right)/4\pi$ 为

$$\frac{1}{\tilde{f}\left(\tilde{k}_0\right)}=\frac{4\pi\left(\tilde{E}_{\text{mol}}-\tilde{k}_0^2\right)}{\tilde{\Lambda}^2}-\frac{2}{\pi}\left[1-\frac{i\pi}{2}\tilde{k}_0\right] \tag{A3}$$

二聚体结合能 $-\tilde{\lambda}^2$ 可通过求解下式得到

$$\left(\tilde{E}_{\text{mol}}+\tilde{\lambda}^2\right)-\frac{\tilde{\Lambda}^2}{2\pi^2}\left(1-\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda}\right)=0. \tag{A4}$$

在三体扇区中，我们从下式出发

$$\begin{aligned}|\psi_{\text{het}}^{(3\text{B})}\rangle=&\sum_\sigma\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\beta_\sigma(\vec{q})\,\hat{d}^\dagger_{\sigma,\vec{q}}\hat{a}^\dagger_{\sigma,-\vec{q}}|0\rangle\\&+\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\alpha\left(\vec{q},\vec{k}\right)\hat{a}^\dagger_{3,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}}\hat{a}^\dagger_{1,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}}\hat{a}^\dagger_{2,-\vec{q}}|0\rangle\end{aligned} \tag{A5}$$

一般而言，这会导出三个耦合积分方程。假设三个二体子系统相同，则可将它们化为一个方程，即

$$\begin{aligned}&\left[\tilde{E}_{\text{mol}}+\frac{3\tilde{q}^2}{4}+\tilde{\lambda}^2-\frac{\tilde{\Lambda}^2}{2\pi^2}\left(1-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3\tilde{q}^2}{4}+\tilde{\lambda}^2}\right)\right]\tilde{\beta}(\tilde{q})\\&-\frac{\tilde{\Lambda}^2}{2\pi^2}\int_0^\infty d\tilde{k}\ln\left(\frac{\tilde{k}^2+\tilde{k}\tilde{q}+\tilde{q}^2+\tilde{\lambda}^2}{\tilde{k}^2-\tilde{k}\tilde{q}+\tilde{q}^2+\tilde{\lambda}^2}\right)\tilde{\beta}\left(\tilde{k}\right)=0,\end{aligned} \tag{A6}$$

其中，三聚体结合能为 $-\tilde{\lambda}^2$。

有关二体和三体扇区中开放通道与闭合通道的布居数，请参见附录 E。

附录 B：同核与异核双通道模型的对比

同核和异核情形下的推导是等价的。特别是，二体扇区相同这一假设对于同核系统而言是显而易见的。然而，当相互作用哈密顿量 $\sim\hat{d}^\dagger\hat{a}$ 作用于自由粒子波函数 $\sim\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger|0\rangle$ 时，同核模型允许通过两种途径生成分子，而异核模型则只有一种途径。这种效应称为玻色增强。因此，同核模型的二体和三体方程可通过代入 $\tilde{\Lambda}\to\sqrt{2}\tilde{\Lambda}$ 从上述异核方程得到。

虽然玻色增强通常在多体物理的背景下讨论（例如玻色子凝聚成玻色–爱因斯坦凝聚），但它在二体层面就已显现；通过比较同核与异核双通道模型，可以清楚地看到这一效应。从上述讨论可知，若 $\Lambda_{\text{het}}=\Lambda$，则 $\tilde{\Lambda}_{\text{hom}}=\sqrt{2}\tilde{\Lambda}$，也就是说，全同玻色子的开放通道与闭合通道之间的有效耦合大 $\sqrt{2}$ 倍。更强的耦合会使费什巴赫共振比异核模型中的更宽，并呈现出其所有特征：与裸共振的偏移更大、$R^\star$ 更小、二聚体更浅，以及远离共振时闭合通道布居数增加（开放通道布居数减少）的速度更慢。

在三体扇区中，较大的有效耦合会形成束缚更深的三聚体，而特征合并发生在离共振更远处。事实上，如果将图 11(a) 中异核三聚体的两个坐标轴均按 $\left(\tilde{R}^\star_{\text{het}}/\tilde{R}^\star_{\text{hom}}\right)^2=4$ 倍缩放，两条曲线便完全重合。

附录 C：E_D 的简并极限 $R^\star_{bb}$

正文中我们指出，在极限 $E_{13}\to E_{22}$ 下，从二聚体提取的 $R^\star_{bb}$ 值趋近于 $-R^\star_{\text{hom}}R^\star_{\text{het}}/\left(R^\star_{\text{hom}}+R^\star_{\text{het}}\right)$。

为推导这一极限，我们从二聚体的方程（14）束缚能出发，并代入 $E_{13}=E_{22}$。利用 $R^\star_{\text{hom}}=2\pi/\Lambda^2_{22}$ 和 $\tilde{R}^\star_{\text{het}}=4\pi/\tilde{\Lambda}^2_2$ 可得

$$\left(\tilde{E}_{\text{mol},2}-\tilde{E}_{22}+\tilde{\lambda}^2\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\tilde{R}^\star_{\text{hom}}}+\frac{1}{\tilde{R}^\star_{\text{het}}}\right)\left(1-\frac{\pi}{2}\tilde{\lambda}\right)=0. \tag{C1}$$

与式（A4）比较可得前述关于 $R^\star_{bb}$ 的表达式。

附录 D：从二体扇区到三体扇区

在正文中我们指出，$|\psi_{3\text{B}}\rangle$ 式（17）包含三个彼此不同且互不耦合的二体子系统，如图5所示。事实上，这一效应在异核双通道模型中也成立，其三体波函数（式（A5））包含三个式（A1）形式的二体子系统。为了说明如何从二体波函数推导出三体波函数，我们引入

算符

$$\hat{\mathcal{O}}_{\sigma=3}\left(\vec{q}\right)=\beta_3\left(\vec{q}\right)\hat{d}^{\dagger}_{3,\vec{q}}+\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\alpha_3\left(\vec{q},\vec{k}\right)\hat{a}^{\dagger}_{1,\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}}\hat{a}^{\dagger}_{2,-\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}} \tag{D1}$$

利用它，式（A1）可写为

$$|\psi^{(\sigma)}_{\text{het}}\rangle=\hat{\mathcal{O}}_{\sigma}\left(\vec{q}=0\right)|0\rangle. \tag{D2}$$

算符 $\hat{}\ \mathcal{O}_{\sigma}(\vec{q})$ 创建一个类型为σ 、质心动量为 $\hbar\vec{q}$的二体系统。我们向 $|\psi^{(\sigma)}{}_{\text{het}}\rangle$ 添加一个类型为 σ 、动量为 $-\hbar\vec{q}$ 的粒子，并对 $\sigma=1,2,3$ 求和，得到

$$|\psi^{(3\text{B})}_{\text{het}}\rangle=\sum_{\sigma}\int\frac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}\hat{\mathcal{O}}_{\sigma}\left(\vec{q}\right)\hat{a}^{\dagger}_{\sigma,-\vec{q}}|0\rangle. \tag{D3}$$

将此表达式与方程 (A5) 比较可知，β_σ振幅在二体和三体扇区中相同，而二体 α_σ振幅与三体 α振幅之间的关系为

$$\begin{aligned}\alpha\left(\vec{q},\vec{k}\right)=&\alpha_1\left(\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2},-\frac{\vec{k}}{2}-\frac{3\vec{q}}{4}\right)\\&+\alpha_2\left(\vec{q},\vec{k}\right)+\alpha_3\left(-\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2},-\frac{\vec{k}}{2}+\frac{3\vec{q}}{4}\right).\end{aligned} \tag{D4}$$

在同核情形下，开放通道原子的同一性使 σ 指标变得多余，因此可得出结论：三体 α振幅等于其对应的二体振幅，只是具有有限的质心动量。

附录 E：同核与异核模型中的开放与闭通道布居

我们基于二体扇区相同的假设，给出了异核模型中二体和三体扇区的开放通道与闭合通道布居数表达式。

在二体扇区中，二聚体的开放通道与闭合通道布居数为

$$P_{\text{open}}=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\left|\alpha\left(\vec{k}\right)\right|^2 \tag{E1a}$$

$$P_{\text{closed}}=\frac{1}{\mathcal{N}}\left|\beta\right|^2, \tag{E1b}$$

其中

$$\mathcal{N}=\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\left|\alpha\left(\vec{k}\right)\right|^2+\left|\beta\right|^2. \tag{E2}$$

利用式（A2）中的第二个方程，将 $\alpha\left(\vec{k}\right)$ 替换为 β，它恰好会抵消，从而得到

$$P_{\text{open}}=\frac{1}{\mathcal{N}}\left(\frac{\tilde{\Lambda}^2}{8\pi\tilde{\lambda}}\right) \tag{E3a}$$

$$P_{\text{closed}}=\frac{1}{\mathcal{N}} \tag{E3b}$$

and

$$\mathcal{N}=\frac{\tilde{\Lambda}^2}{8\pi\tilde{\lambda}}+1. \tag{E4}$$

在三体扇区中，与二体扇区类似，三聚体的布居数为

$$P_{\text{open}}=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\frac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\left|\alpha\left(\vec{q},\vec{k}\right)\right|^2 \tag{E5a}$$

$$P_{\text{closed}}=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\frac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}\left|\beta\left(\vec{q}\right)\right|^2, \tag{E5b}$$

且 $\mathcal{N}$ 是相应的归一化因子（两个积分之和）。自由粒子振幅 $\alpha\left(\vec{q},\vec{k}\right)$ 可通过薛定谔方程用分子-原子振幅 $\beta(\vec{q})$ 表示，据此可求解对k 的积分。因此，开放通道布居数可简化为

$$P_{\text{open}}=\frac{\tilde{\Lambda}^2}{8\pi\mathcal{N}}\int\frac{d^3\tilde{q}}{\left(2\pi\right)^3}\frac{\left|\beta\left(\tilde{q}\right)\right|^2}{\sqrt{3\tilde{q}^2/4+\tilde{\lambda}^2}}. \tag{E6}$$

由式（A6求得三聚体束缚波数及其波函数后，即可计算布居数。

与附录A中给出的方程不同，此处同核表达式与异核模型的表达式完全相同。然而，当将其绘制为 E_{mol} 的函数时，它们会如附录 B末尾所述有所不同，这是由于束缚能不同。

附录 F：三体扇区中开放通道与闭合通道布居数的推导

根据式（17）中的三体波函数，开放通道布居数为（i =bbb, abc）

$$P_i=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\frac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}\int\frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\left|\alpha_i\left(\vec{q},\vec{k}\right)\right|^2 \tag{F1}$$

闭合通道布居数为（$\sigma=1$，2，3）

$$P_{\sigma}=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\frac{d^3q}{\left(2\pi\right)^3}\left|\beta_{\sigma}\left(\vec{q}\right)\right|^2. \tag{F2}$$

归一化常数 $\mathcal{N}$ 由 $\sum_i P_i+\sum_\sigma P_\sigma=1$求得。由方程（18的解可得束缚波数 λ 和特征向量 β_σ 。因此很容易计算出闭通道布居。对于开通道布居，我们使用

薛定谔方程，以用 α_i 表示 β_σ，得到

$$P_{\mathrm{bbb}}=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\frac{d^3\tilde{q}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3}\left|\frac{\tilde{\Lambda}_{22}\beta_2\left(\tilde{q}\right)}{\tilde{k}^2+3\tilde{q}^2/4+\tilde{\lambda}^2}\right|^2 \tag{F3}$$

对于 bbb 个开放通道。由于 $\beta_2(\tilde{q})$ 与 k 无关，因此可以计算对后者的积分，得到

$$P_{\mathrm{bbb}}=\frac{\tilde{\Lambda}_{22}^2}{8\pi\mathcal{N}}\int\frac{d^3\tilde{q}}{(2\pi)^3}\frac{\left|\beta_2\left(\tilde{q}\right)\right|^2}{\sqrt{3\tilde{q}^2/4+\tilde{\lambda}^2}}. \tag{F4}$$

对于 i =abc，代换后得到

$$P_{\mathrm{abc}}=\frac{1}{\mathcal{N}}\int\frac{d^3\tilde{q}}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\tilde{k}}{(2\pi)^3}\times\left|\frac{\tilde{\Lambda}_1\beta_1\left(\vec{k}-\frac{\vec{q}}{2}\right)+\tilde{\Lambda}_2\beta_2\left(\tilde{q}\right)+\tilde{\Lambda}_3\beta_3\left(\vec{k}+\frac{\vec{q}}{2}\right)}{\tilde{k}^2+3\tilde{q}^2/4+\tilde{E}_{123}-\tilde{E}_{222}+\tilde{\lambda}^2}\right|^2. \tag{F5}$$

在此阶段，我们作出简化假设 $\beta_{1,\ 3}\ll\beta_2$，这等价于 $P_{1,\ 3}\ll P_2$，从而可以对 k积分：

$$P_{\mathrm{abc}}=\frac{\tilde{\Lambda}_2^2}{8\pi\mathcal{N}}\int\frac{d^3\tilde{q}}{(2\pi)^3}\frac{\left|\beta_2\left(\tilde{q}\right)\right|^2}{\sqrt{3\tilde{q}^2/4+\tilde{E}_{123}-\tilde{E}_{222}+\tilde{\lambda}^2}}. \tag{F6}$$

虽然 P_{bbb} 和 P_σ 的表达式是精确的，但 P_{abc} 的表达式是近似的。当$P_{1,\ 3}\approx P_2$ 时，该近似会失效； $E_{\mathrm{mol}}>E_{\mathrm{res}}$ [见图11(b,c)]。因此，这里推导的表达式无法很好地描述 a_- 处的布居数。

[1] Y. Yudkin 和 L. Khaykovich。重叠窄 Feshbach 共振的 Efimov 情景。*Phys. Rev. A*，103 063303，2021 : 。[2] Y. Yudkin、R. Elbaz 和 L. Khaykovich。Efimov 能级从原子-二聚体连续谱反弹，2020。[3] C. Chin、R. Grimm、P. Julienne 和 E. Tiesinga。超冷气体中的 Feshbach 共振。 *Rev. Mod. Phys.*，82 1225，2010: 。[4] E. Braaten 和 H.-W. Hammer。大散射长度少体系统中的普适性。 *Phys. Rep.*，428 259，2006 : 。[5] P. Naidon 和 S. Endo。Efimov物理：综述。 *Rep.* ，：。[6] *Prog. Phys.* 80 056001, 2017 C. H. Greene、P. Giannakeas 和 J. P´erez-R´ıos。普适少体物理与团簇形成。 *Rev. Mod.* ，：*Phys.* 89 035006, 2017 。[7] J. P. D'Incao。共振相互作用超冷量子气体中的少体物理。 *J. Phys. B: At. Mol. Opt.* ，：。[8] *Phys.* 51 043001, 2018 M. Zaccanti、B. Deissler、C. D'Errico、M. Fattori、M. Jona-Lasinio、S. M¨uller、G. Roati、M. Inguscio 和 G. Modugno。在原子系统中观测到 Efimov 谱。 *Nat. Phys.*，5:586–591，2009年。[9] F. Ferlaino、S. Knoop、M. Berninger、W. Harm、J. P. D'Incao、H.-C. N¨agerl 和 R. Grimm。发现与 Efimov 三聚体相关的普适四体态。*Phys. Rev. Lett.*，102:140401，2009年。[10] B. Huang、L. A. Sidorenkov、R. Grimm 和 J. M. Hutson。在 Efimov 情景中观测到第二个三原子共振。 *Phys. Rev. Lett.*，112:190401，2014年。[11] X. Xie、M. J. Van de Graaff、R. Chapurin、M. D. Frye、J. M. Hutson、J. P. D' Incao、P. S. Julienne、J. Ye 和 E. A. Cornell。在 [39] *Phys. Rev.* K中观测到 *Lett.* 125 243401, 2020 非普适 Feshbach 共振中的 Efimov 普适性。，：。

[12] M. Berninger、A. Zenesini、B. Huang、W. Harm、H. C. N¨agerl、F. Ferlaino、R. Grimm、P. Julienne 和 J. Hut- son。《超冷铯中 Efimov 态三体参数的普适性》。 *Phys. Rev. Lett.*，107 120401，2011 : .[13] J. Wang、J. P. D'Incao、B. D. Esry 和 C. H. Greene。《Efimov物理中三体参数普适性的起源》。 *Phys. Rev. Lett.*，108:263001，2012。[14] P. Naidon、S. Endo 和 M. Ueda。《Efimov三体参数的微观起源与普适性类别》。*Phys. Rev. Lett.*，112:105301，2014。[15] R. J. Wild、P. Makotyn、J. M. Pino、E. A. Cornell 和 D. S. Jin。《原子玻色-爱因斯坦凝聚体中 Tan接触的测量》。 *Phys. Rev. Lett.*，108 145305，2012 : .[16] S.-K. Tung、K. Jim´enez-Garc´ıa、J. Johansen、C. Parker 和 C. Chin。《^{6}Li-^{133}Cs混合物中Efimov态的几何标度》。 *Phys. Rev. Lett.*，113:240402，2014。[17] A. Zenesini、B. Huang、M. Berninger、H.-C. N¨agerl、F. Ferlaino 和 R. Grimm。《铯中的共振原子-二聚体碰撞：检验正散射长度下的普适性》。 *Phys. Rev. A*，90:022704，2014。[18] R. J. Fletcher、R. Lopes、J. Man、N. Navon、Smith R. P、M. W. Zwierlein 和 Z. Hadzibabic。《幺正玻色气体中的二体与三体接触》。 *Science* 355 377, ，：. 2017 [19] C. Ji、E. Braaten、D. R. Phillips 和 L. Platter。《Efimov特征有效程修正的普适关系》。*Phys. Rev. A*，92:030702，2015。[20] J. Johansen、B. J. DeSalvo、K. Patel 和 C. Chin。《检验宽、窄Feshbach共振下Efimov物理的普适性》。 *Nat. Phys.*，13:731，2017。[21] R. Chapurin、X. Xie、M. J. Van de Graaff、J. S. Popowski、J. P. D'Incao、P. S. Julienne、J. Ye 和 E. A. Cornell。《少体物理普适性极限的精密检验》。 *Phys. Rev. Lett.*，123:233402，2019。

[22]A. Li、Y. Yudkin、P. S. Julienne 和 L. Khaykovich。《Li-Cs混合物中窄费什巴赫共振附近的Efimov共振位置》。*Phys. Rev. A*，105 053304，2022 : .[23] J. Etrych、G. Martirosyan、A. Cao、J. A. P. Glidden、L. H. Dogra、J. M. Hutson、Z. Hadzibabic 和 C. Eigen。《精确确定费什巴赫共振，并检验 ^{39}K中的Efimov普适性。[24] N. Gross、Z. Shotan、O. Machtey、S.J.J.M.F. Kokkel- mans 和 L. Khaykovich。《 ^{7}Li两个核自旋子能级中的Efimov物理研究》。*C.R. Physique*，12:4– 12，2011。[25] Y. Wang 和 P. S. Julienne。《费什巴赫共振附近三个冷原子的普适范德瓦耳斯物理》。*Nat. Phys.*，10:768–773，2014。[26] T. Secker、D. J. M. Ahmed-Braun、P. M. A. Mestrom 和 S. J. J. M. F. Kokkelmans。《从宽到窄Feshbach共振的Efimov区域中的多通道效应》。 *Phys. Rev. A*，103:052805，2021年5月。[27] J. P. D'Incao：私人通信。[28] P. N. Jepsen、Y. K. Lee、I. Dimitrova H. Lin、Y. Mar- galit、W. W. Ho 和 W. Ketterle。《海森堡量子磁体中的长寿命幻影螺旋态》。*Nat. Phys.*，18 899: –904，2022。[29] N. Gross、Z. Shotan、S.J.J.M.F. Kokkelmans 和 L. Khaykovich。《超冷原子中与核自旋无关的短程三体物理》。 *Phys. Rev. Lett.*，105 103203，2010 : .[30] "*bb*-通道"指两个处于 b态的自由原子。所谓"在 *bb*-通道散射"，是指初态和末态均由两个彼此分离、处于 b态的原子组成的散射事件。然而，中间态是所有 $M_{\rm tot}=0$ 二体通道的叠加态。与 *bb*通道中的费什巴赫共振相关联的弱束缚二聚体具有 $M_{\rm tot}=0$ 自旋特征，其波函数在多个通道上都有投影。在共振位置，对 *bb*通道的投影趋近于1，因此该二聚体称为"*bb*-通道二聚体"。请注意，这种术语有些令人困惑：我们所说的 *bb*-通道模型（按上述含义描述散射和二聚体）包含 *bb*-通道（两个处于 b态的原子）、 ac-通道，以及由其余$M_{\rm tot}=0$ 二体通道构成的一个闭合通道。[31] K. Jachymski 和 P. S. Julienne。《重叠Feshbach共振的解析模型》。*Phys. Rev. A*，88:052701，2013。[32] P. S. Julienne 和 J. M. Hutson。《比较 ^{6}Li和 ^{7}Li中的宽Feshbach共振》。*Phys. Rev. A*，89:052715，2014。[33] D. S. Petrov。《窄费什巴赫共振附近的三玻色子问题》。 *Phys. Rev. Lett.*，93:143201，2004。[34] V. Gurarie 和 L. Radzihovsky。《共振配对费米超流体》。*Annals of Physics* 322 1 2 119, , 2007 2007 （）：–。一月特刊。[35] F. H. Mies、E. Tiesinga 和 P. S. Julienne。《利用时变磁场操控超冷原子碰撞中的费什巴赫共振》。 *Phys. Rev. A*，61 022721，2000 : .[36] 本文所有耦合道计算均仅使用 s-波基。[37] 可以产生非常相似的 aa 和 bb 散射长度（窄共振区域除外）

通过将 aa 通道的磁场坐标轴缩放 1.18 倍。在这种情况下，两个二聚体也重合了，这表明两个共振相同。然而，这种做法和结论至少有两个问题。首先，由于窄共振二聚体的排斥作用，如果两个共振相同， bb 二聚体应当更深。即使经过缩放，它仍未变得更深，这一事实表明 ac 通道具有使其变浅的效应。其次，缩放磁场坐标轴在物理上意味着改变裸分子的磁矩。然而，由于这两个共振源自单重态势中的同一个裸分子，这种改变并不符合物理实际。[38] Y. Castin。《简并费米气体的基本理论工具》。载于 C. Salomon、M. Inguscio、W. Ketterle 编，*Ultra-cold Fermi Gases Proceedings of the Enrico Fermi , Varenna School on Fermi gases* 2006 , 。[39] D S Petrov。《少原子问题》。*arXiv: Quantum Gases* 1206 5752, 2012 ，第 页。[40] V. E. Colussi 、 Chris H. Greene 和 J. P. D'Incao。《强关联旋量凝聚体中的三体物理》。*Phys. Rev. Lett.*，113:045302，2014年7月。[41] P. M. A. Mestrom、J.-L. Li、V. E. Colussi、T. Secker 和 S. J. J. M. F. Kokkelmans。《自旋-1玻色–爱因斯坦凝聚体中的三体自旋混合》。 *Phys. Rev. A*，104 023321，2021年8月。[42] M. Arndt、M. Ben Dahan、D. Gu´ery-Odelin、M. W. Reynolds 和 J. Dalibard。《在铯-铯碰撞中观测到零能共振》。 *Phys. Rev. Lett.*，79:625–628，1997年。[43] E. R. I. Abraham、W. I. McAlexander、J. M. Gerton、R. G. Hulet、R. Cˆot´e 和 A. Dalgarno。《 ^{6}Li 碰撞中的三重态 s 波共振以及 ^{6}Li 和 ^{7}Li 的散射长度》。*Phys. Rev. A*，55:R3299–R3302，1997年5月。[44]耦合通道计算的结果是散射矩阵 S_{ij}，它描述了从通道 i j $bb\to bb$ $bb\to ac$ 道的散射事件，例如 或 。由 S_{ij} 可以计算出 $T_{ij}=\delta_{ij}-S_{ij}$ 和 $\sin^2\eta_{ii}=|T_{ii}|^2/4$。对于 s波散射，$i\to i$ 散射振幅为 $f_{ii}=-T_{ii}/2ik$。因此，$\sin^2\eta_{ii}=|kf_{ii}|^2$ 与图2可直接与图7和图8相比较。[45] 正如第三节开头所述，这里讨论的是一种 $F=1$ 旋量气体。然而， ^{7}Li 的基态同时具有 $F=1$ 和 $F=2$ 部分（图1）。低能三体连续谱由具有 $J=-1/2$的三个粒子组成。形成这种连续谱有三种可能，即 bbb、 abc （ $E_{abc}-E_{bbb}=28$ 兆赫）和 aad （$E_{aad}-E_{bbb}=108$ 兆赫）。后一种情况被忽略，首先是因为它在 $F=1$ 旋量气体中不存在；其次，尽管能量接近，但其失谐几乎是主导阶 abc 贡献的四倍。[46] D. J. M. Ahmed-Braun、K. G. Jackson、S. Smale、C. J. Dale、B. A. Olsen、S. J. J. M. F. Kokkelmans、P. S. Julienne 和 J. H. Thywissen。《探测开放和闭合通道的 p波共振》。 *Phys. Rev. Research*，3 033269，2021年9月。[47] S. J. J. M. F. Kokkelmans：私人通信。[48] J. H. Huckans、J. R. Williams、E. L. Hazlett、R. W. Stites 和 K. M. O'Hara。《具有宽范围可调相互作用的三态费米气体中的三体复合》。*Phys. Rev. Lett.*，102:165302，2009年。