arXiv:2301.08100v2 [math.QA] 8 Jul 2023

关于超杨扬子代数 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$中心的一则说明

HAO CHANG 和 HONGMEI HU*

摘要。设 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$ 为与任意固定的 0^M1^N-序列 $\mathfrak{s}$ 相关联的超杨扬子代数。本文利用抛物生成元给出量子 Berezinian 的一个新公式，它推广了通常用 RTT 生成元或 Drinfeld 生成元表示的形式。

1. 引言

杨扬子代数由 Drinfeld 在其奠基性论文中引入[D1], 它们属于一个重要的量子群族, 与经典杨-巴克斯特方程的有理解相关。与李代数 Y_N 相关联的杨扬子代数 $\mathfrak{gl}_N$ 早在 1980 年前后就由 Faddeev 和圣彼得堡学派在其研究中加以考察。它是一个结合代数，可通过 Faddeev、Reshetikhin 和 Takhtadzhyan 提出的*RTT*形式（ [FRT]）来定义。

在[BK1], Brundan 和 Kleshchev 为 Y_N 找到了一个与 μ 的每种合成 N 对应的抛物表示。这种新的表示对应于 $\mathfrak{gl}_N$ 的一个形状为 μ 的分块矩阵分解。在特殊情形下，当 $\mu=(N)$ 时，这种表示恰好就是原始的 RTT 表示。另一极端情形下，当 $\mu=(1,\dots,1)$ $=(1^N)$ 时，相应的抛物表示只是 Drinfeld 在 [D2] 中提出的表示的一种变体；参见 [BK1，注 5.12]。

与李超代数 $\mathfrak{gl}_{M|N}$ 相关的超杨扬子由 Nazarov[Na] 通过 RTT 表示定义，作为 Y_N 的一种超类比。Gow [Gow2] 给出了与标准 01-序列对应的 Drinfeld 型表示。Peng [Peng3] 给出了与任意 01-序列 $\mathfrak{s}$ 对应的超杨扬子 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$ 的抛物表示。之后，Tsymbaliuk [Tsy] 引入了 Drinfeld 超杨扬子，在一种特殊情形下重现了 [Peng3] 的构造。最近，研究者借助奇反射描述了超杨扬子 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$ 的有限维不可约表示（[Mol2, Lu2]）。

众所周知， $Z(Y_N)$ 的中心由量子行列式 qdet $T(u)$ 的系数生成，参见 [MNO，定理 2.13]。此外，量子行列式 qdet $T(u)$ 可以用对角 Drinfeld 型生成元表示为因式分解（参见 [Mol1, 定理 1.10.5], [BK1，定理 8.6]）。对于超杨扬子 $Y_{M|N}$，Nazarov 定义了量子 Berezinian qsdet $T(u)$；在研究超杨扬子 $Y_{M|N}$ 时，它发挥的作用与量子行列式在 Y_N情形下的作用类似。量子 Berezinian qsdet $T(u)$ 也可以写成关于对角 Drinfeld 生成元的公式（[Gow1，定理 1]）。在其文章中， [Tsy], Tsymbaliuk 还利用量子 Berezinian 描述了与任意 01 序列相关的超杨扬子中心，该量子 Berezinian由对角 Drinfeld 生成元定义（

2020数学主题分类。17B37。 * 通讯作者。

量子 Berezinian，它由对角 Drinfeld 生成元定义（[Tsy，(2.41)],另见 [BG，注 2。5]），因此推广了 [Na],[Gow的结果。

抛物表示在研究有限 W-代数和有限 W-超代数中起着核心作用（参见 [BK2、Peng4]）。本文的目标是给出一个用对角抛物型生成元表示量子 Berezinian 的新公式。本文安排如下：第 2 节回顾（超）杨扬子代数 $Y_{M|N}$ 和抛物生成元的一些基本性质。对于杨扬子代数 Y_N，第 3 节证明量子行列式 qdet $T(u)$可以用对角抛物型生成元因式分解。第 4 节针对任意 01 序列，定义用 RTT生成元表示的量子 Berezinian qsdet $T(u)$。对于标准 01-序列，这一定义可追溯至[Na]。我们将证明，量子 Berezinian 可以分解为由对角抛物型生成元构成的乘积。特别地，对于元组 $(1,\dots,1)\ =(1^{M+N})$，这一分解与 Tsymbaliuk 在 [Tsy]中的公式一致。

2. 超杨扬子 $Y_{M|N}$

2.1. **RTT 表示。** 设 $\mathfrak{s}$是一个 0^M1^N-序列（或简称 01-序列），由 $\mathfrak{gl}_{M|N}$构成，它是由 M 0's 和 N 1's 组成的序列，按照某种顺序排列成一行。众所周知 [CW，第 1 节。3], 0^M1^N-序列的集合与 $\mathfrak{gl}_{M|N}$的单根系的 Weyl 群轨道之间存在双射。

对于给定的 $\mathfrak{s}$，与一般线性李超代数 相关联的超杨扬子 $\mathfrak{gl}_{M|N}$是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的含幺结合超代数，由 *RTT*生成元 [Na] $\{t_{i,j}^{(r)};\quad i,\ j=1,\ \dots\dots,\ M+N,\quad r\geq 1\}$ 满足以下关系：

$$\left[t_{i,j}^{(r)},t_{k,l}^{(s)}\right]=(-1)^{|i||j|+|i||k|+|j||k|}\sum_{t=0}^{\min(r,s)-1}\left(t_{k,j}^{(t)}t_{i,l}^{(r+s-1-t)}-t_{k,j}^{(r+s-1-t)}t_{i,l}^{(t)}\right),\tag{2.1}$$

其中 $|i|$ 表示 i的第 $\mathfrak{s}$，而 $t_i^{(r)}$ 的奇偶性$_j$ 对于 $r>0$ 定义为 $|i|+|j|$(模 2)，且式 (2.1) 中的括号表示超对易子。该代数记作 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$（或在不会引起混淆时记作 $Y_{M|N}$）。元素 $t_i^{(r)}$，$_j$ 若其奇偶性为 0（分别为 1），则称为偶（奇）元素。

在 [Na] 中的原始定义对应于 $\mathfrak{s}$ 为标准情形的情况，即

$$\mathfrak{s}^{st}=\overbrace{0\dots0}^{M}\overbrace{1\dots1}^{N}.\tag{2.2}$$

注释 1. 当 $N=0$ 且 $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}^{st}$时，超杨扬子 $Y_{M|N}$ 与通常的杨扬子代数 Y_M自然同构。

按照惯例，我们设定 $t_i^{(0)}{}_{,j}:=\delta_{i,j}$。我们常将所有 $r\geq 0$ 的生成元 $t_i^{(r)}{}_{,j}$ 放在一起，构成幂级数

$$t_{i,j}(u):=\sum_{r\geq 0}t_{i,j}^{(r)}u^{-r}\in Y_{M|N}[[u^{-1}]].$$

这些幂级数　　所有 $1 \le i,j \le M+N$ 的幂级数可以汇集到一个矩阵中

$$T(u) := \big(t_{i,j}(u)\big)_{1\le i,j\le M+N} \in \mathrm{Mat}_{M+N}(Y_{M|N}[[u^{-1}]]).$$

注意到矩阵 $T(u)$ 可逆，我们对矩阵 $T(u)$ 的逆矩阵各项采用如下记法:

$$T(u)^{-1} =: \big(t'_{i,j}(u)\big)_{i,j=1}^{M+N}.$$

用生成级数表示，定义关系式（2.1）等价于

$$[t_{i,j}(u), t_{k,l}(v)] = \frac{(-1)^{|i||j|+|i||k|+|j||k|}}{(u-v)}(t_{k,j}(u)t_{i,l}(v) - t_{k,j}(v)t_{i,l}(v)). \tag{2.3}$$

2.2. **超杨扬子代数之间的映射**。 对于任意固定的 0^M1^N- 序列 $\mathfrak{s}$，在 [Peng3 第 4] 节中有一些相关记法:

(1) $\check{}\mathfrak{s}$:=将 $\mathfrak{s}$ 中的 0 和 1 互换后得到的 0^N1^M-序列。(2) $\mathfrak{s}^r$:= $\mathfrak{s}$ 的反转。

(3) $\mathfrak{s}^\dagger$:= $(\check{}\mathfrak{s})^r$，即 $\check{}\mathfrak{s}$ 的反转。

若 $\mathfrak{s}_1$ 和 $\mathfrak{s}_2$ 是两个 01 序列，则 $\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$ 表示 $\mathfrak{s}_1$ 与 $\mathfrak{s}_2$的串接。

为便于后文参考，我们回顾如下结果，参见 [Peng3，命题 4。1]；另见[Gow2，第 4]节。

命题2.1。 (1) 由下式定义的映射 $\rho_{M|N}\colon Y_{M|N}(\mathfrak{s}) \to Y_{N|M}(\mathfrak{s}^\dagger)$

$$\rho_{M|N}\big(t_{ij}(u)\big) = t_{M+N+1-i,M+N+1-j}(-u)$$

是一个同构。

(2) 由下式定义的映射 $\omega_{M|N}\colon Y_{M|N}(\mathfrak{s}) \to Y_{M|N}(\mathfrak{s})$

$$\omega_{M|N}\big(T(u)\big) = \big(T(-u)\big)^{-1}$$

是一个自同构。

(3) 由下式定义的映射 $\zeta_{M|N}\colon Y_{M|N}(\mathfrak{s}) \to Y_{N|M}(\mathfrak{s}^\dagger)$

$$\zeta_{M|N} = \rho_{M|N} \circ \omega_{M|N}$$

是一个同构。

(4) 设 $p,q \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，并设 $\mathfrak{s}_1$ 为任意一个 0^p1^q-序列。令

$$\varphi_{p|q} : Y_{M|N}(\mathfrak{s}) \to Y_{p+M|q+N}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s})$$

为单射代数同态，它将每个 $t_i^{(r)}{}_{,j}$（属于 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$）映至 $t^{(r)}_{p+q+i,p+q+j}$（属于 $Y_{p+M|q+N}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s})$）。那么，由下式定义的映射 $\psi_{p|q}\colon Y_{M|N}(\mathfrak{s}) \to Y_{p+M|q+N}(\mathfrak{s}_1\mathfrak{s})$

$$\psi_{p|q} = \omega_{p+M|q+N} \circ \varphi_{p|q} \circ \omega_{M|N},$$

是一个单射同态。

我们称 $\psi_{p|q}$ 为移位映射，称 $\zeta_{M|N}$ 为交换映射。

2.3. **抛物生成元**。设 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ 是 $M+N$ 的一个给定合成，其长度为 n，并固定一个 0^M1^N-序列 $\mathfrak{s}$。

根据定义，矩阵 $T(u)$ 的顺序主子式均可逆。因此，它具有关于高斯分解（参见 [GR]） μ

$$T(u) = F(u)D(u)E(u)$$

对于唯一的分块矩阵

$$D(u) = \begin{pmatrix} D_1(u) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(u) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n(u) \end{pmatrix},$$

$$E(u) = \begin{pmatrix} I_{\mu_1} & E_{1,2}(u) & \cdots & E_{1,n}(u) \\ 0 & I_{\mu_2} & \cdots & E_{2,n}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{\mu_n} \end{pmatrix}, \; F(u) = \begin{pmatrix} I_{\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\ F_{2,1}(u) & I_{\mu_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n,1}(u) & F_{n,2}(u) & \cdots & I_{\mu_n} \end{pmatrix},$$

其中

$$D_a(u) = (D_{a;i,j}(u))_{1\le i,j\le \mu_a} \tag{2.4}$$

$$E_{a,b}(u) = (E_{a,b;i,j}(u))_{1\le i\le \mu_a, 1\le j\le \mu_b}, \quad F_{b,a}(u) = (F_{b,a;i,j}(u))_{1\le i\le \mu_b, 1\le j\le \mu_a} \tag{2.5}$$

分别为 $\mu_a \times \mu_a$、$\mu_a \times \mu_b$ 和 $\mu_b \times \mu_a$ 矩阵，对所有 $1 \le a \le n$ 属于(2.4)的$1 \le a < b \le n$ 以及所有$1 \le a < b \le n$ 属于(2.5)的均成立。这些矩阵的元素定义了幂级数

$$D_{a;i,j}(u) := \sum_{r\ge 0} D^{(r)}_{a;i,j} u^{-r}, \quad E_{a,b;i,j}(u) := \sum_{r\ge 1} E^{(r)}_{a,b;i,j} u^{-r}, \quad F_{b,a;i,j}(u) := \sum_{r\ge 1} F^{(r)}_{b,a;i,j} u^{-r}.$$

另请注意，所有子矩阵 $D_a(u)$' 均可逆，并且我们将 $\mu_a \times \mu_a$ 矩阵$D'_a(u) = \big(D'_{a;i,\ j}(u)\big)_{1\le i,\ j\le \mu_a}$ 定义为$D'_a(u) := \big(D_a(u)\big)^{-1}$。

事实上，代数 $Y_{M|N}$由元素 $\{D^{(r)}_{a\,i}; ,j;\ 1 \le a \le n, 1 \le i, j \le \mu_a, r \ge 0\}$, $\{E^{(r)}_{a\,i}; ,j;\ 1 \le a < n, 1 \le i \le \mu_a, 1 \le j \le \mu_{a+1}, r \ge 1\}$和 $\{F^{(r)}_{a\,i}; ,j;\ 1 \le a < n, 1 \le i \le \mu_{a+1}, 1 \le j \le \mu_a, r \ge 1\}$生成（[Peng3，定理 3.4 和注 3.5]）。这些生成元称为抛物生成元。下文中，必要时我们将使用记号 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$、$Y_{M|N}(\mu)$或 $Y_\mu(\mathfrak{s})$，以强调所选择的 $\mathfrak{s}$ 或 μ，或两者兼选。

必要时，我们会在记号中添加额外的上标 μ，以避免随着 μ 变化而产生歧义。我们将矩阵 $T(u)$ 写成分块形式：

$$T(u) = \begin{pmatrix} {}^{\mu}T_{1,1}(u) & \cdots & {}^{\mu}T_{1,n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^{\mu}T_{n,1}(u) & \cdots & {}^{\mu}T_{n,n}(u) \end{pmatrix},$$

其中 ${}^{\mu}T_{a,\,b}(u)$ 是一个 $\mu_a \times \mu_b$ 矩阵。根据 [GR], 的拟行列式，我们有如下描述（参见 [Peng3,(3.6)]）：

$$D_a(u) = \begin{vmatrix} {}^{\mu}T_{1,1}(u) & \cdots & {}^{\mu}T_{1,a-1}(u) & {}^{\mu}T_{1,a}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}^{\mu}T_{a-1,1}(u) & \cdots & {}^{\mu}T_{a-1,a-1}(u) & {}^{\mu}T_{a-1,a}(u) \\ {}^{\mu}T_{a,1}(u) & \cdots & {}^{\mu}T_{a,a-1}(u) & \boxed{{}^{\mu}T_{a,a}(u)} \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

鉴于 [Peng3, (4.1)], 我们有

$$\psi_{p|q}\big(t_{ij}(u)\big) = \begin{vmatrix} t_{1,1}(u) & \cdots & t_{1,p+q}(u) & t_{1,p+q+j}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{p+q,1}(u) & \cdots & t_{p+q,p+q}(u) & t_{p+q,p+q+j}(u) \\ t_{p+q+i,1}(u) & \cdots & t_{p+q+i,p+q}(u) & \boxed{t_{p+q+i,p+q+j}(u)} \end{vmatrix}. \tag{2.7}$$

注意到 (2.7) 蕴含 $\psi_{p|q}$ 仅依赖于 $p+q$ 因此，在适当情况下，我们可以简写为 $\psi_{p|q} = \psi_{p+q}$。于是，(2.6) 和 (2.7) 将推出

$$D_{a;i,j}(u) = \psi_{\mu_1+\cdots+\mu_{a-1}}(D_{1;i,j}(u)) \tag{2.8}$$

在特殊情形 $\mu = (M+N)$ 下，我们有 $T(u) = {}^{\mu}T_{1,1}(u)$。相应的抛物生成元恰好就是原来的 RTT生成元 $\{t_{i,j}^{(r)};\ 1 \le i,j \le M+N;\ r \ge 1\}$，见第 2.1 小节。在另一极端情形下，对于 $\mu = (1,\cdots,1)$，抛物生成元称为 Drinfeld 生成元。在这种情形下，所有的 $D_a(u)$'s 都是 1×1矩阵。为简洁起见，我们将使用 $d_a(u)$ 而非 $D_a(u)$。

3. Y_N的中心

当 $M = 0$和 $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^{st} = 0^M 1^N$时，合成 $Y_{0|N}(\mathfrak{s}) \xrightarrow{\zeta_{0|N}} Y_{N|0}(\mathfrak{s}^{\dagger}) \cong Y_N$是一个代数同构。本节将考虑通常的杨扬子代数 Y_N，并用抛物生成元描述 Y_N 的中心。

3.1. 量子行列式。 设 $X(u) = (x_{i,j}(u))_{i,j=1}^{\ell}$ 是一个任意矩阵，其元素是 u^{-1} 上系数取自 Y_N的形式幂级数。按照 [MNO], , 可以定义矩阵 的量子行列式 $X(u)$ 如下:

$$\operatorname{qdet} X(u) = \sum_{\sigma\in S_\ell} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1),1}(u) x_{\sigma(2),2}(u-1)\cdots x_{\sigma(\ell),\ell}(u-\ell+1), \tag{3.1}$$

其中 S_ℓ 是由 ℓ 个元素构成的对称群。

对于由 $\{1,\ldots,N\}$中的整数构成的元组 $\boldsymbol{i} = (i_1,\ldots,i_d)$和 $\boldsymbol{j} = (j_1,\ldots,j_d)$，令

$$T_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}(u) := (t_{i_k,j_l}(u))_{1\le k,l\le d} \tag{3.2}$$

表示相应的 $d\times d$ 子矩阵 $T(u)$。根据定义，有

$$\operatorname{qdet} T_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}(u) = \sum_{\pi\in S_d} \operatorname{sgn}(\pi) t_{i_{\pi(1)},j_1}(u) t_{i_{\pi(2)},j_2}(u-1)\cdots t_{i_{\pi(d)},j_d}(u-d+1). \tag{3.3}$$

我们提醒读者，我们的$T_{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}}(u)$与[BK1（8.2）]中使用的定义不同。同上中的$T_{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}}(u)$其实就是我们的量子行列式 $\operatorname{qdet} T_{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}}(u)$。

在特殊情形 $\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}=(1,\dots,N)$下，我们将量子行列式 $\operatorname{qdet} T_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}(u)$记作 $c_N(u)$，即

$$c_N(u)=\sum_{r\geq 0} c_N^{(r)}u^{-r}:=\operatorname{qdet} T_{(1,\dots,N),(1,\dots,N)}(u)=\operatorname{qdet} T(u). \tag{3.4}$$

3.2. **中心** Y_N。 根据 [MNO，定理 2。13], 系数 $c_N^{(1)}$， $c_N^{(2)}$， ... 的$\operatorname{qdet} T(u)$代数独立，并生成中心 $Z(Y_N)$的 Y_N。此外，用 Drinfeld 生成元表示时，众所周知（见 [BK1，定理 8。6]）：

$$c_N(u)=d_1(u)d_2(u-1)\cdots d_N(u-N+1). \tag{3.5}$$

对于 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们记 $\psi_m:\ Y_N\hookrightarrow Y_{m+N}$ 为移位映射（见命题 2.1(4)）。

引理 3.1。 [BK1，引理 8。5] 设 $\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{j}$是 d 个互异整数构成的元组，取自 $\{1,\dots,N\}$。则

$$\psi_m(\operatorname{qdet} T_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}}(u))=c_m(u+m)^{-1}\operatorname{qdet} T_{m\#\boldsymbol{i},m\#\boldsymbol{j}}(u+m),$$

其中 $m\#\boldsymbol{i}$ 表示$(m+d)$-元组$(1,\dots,m,m+i_1,\dots,m+i_d)$，而 $m\#\boldsymbol{j}$ 的定义类似。

设 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ 是给定的 N 的一个合成，其长度为 n。对于每个 $1\leq i\leq n$，定义部分和

$$p_i(\mu):=\mu_1+\cdots+\mu_{i-1}. \tag{3.6}$$

子矩阵 $\{D_i(u);\ 1\leq i\leq n\}$ 在 (2.6) 中定义（另见 [BK1, (5.2)]）。我们希望将 (3.4) 和 (3.5) 推广，以抛物生成元的形式描述 $c_N(u)$。

命题 3.2. 对于 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)$ 和 $1\leq i\leq n$，有

$$\operatorname{qdet}{}^{\mu}D_i(u-p_i(\mu))=\prod_{k=p_i(\mu)+1}^{p_{i+1}(\mu)} d_k(u-k+1).$$

特别地，

$$c_N(u)=\operatorname{qdet} D_1(u-p_1(\mu))\operatorname{qdet} D_2(u-p_2(\mu))\dots\operatorname{qdet} D_n(u-p_n(\mu)).$$

证明。 对于 $i\geq 1$， 令 $\bar{\mu}:=(\mu_i,\mu_{i+1},\dots,\mu_n)$。应用移位映射 (2.8)，得到

$${}^{\mu}D_i(u-p_i(\mu))=\psi_{p_i(\mu)}({}^{\bar{\mu}}D_1(u-p_i(\mu))),$$

其中 ${}^{\bar{\mu}}D_1(u-p_i(\mu))\in Y_{\mu_i+\cdots+\mu_n}$。注意，(2.6) 蕴含 ${}^{\bar{\mu}}D_1(u)={}^{\bar{\mu}}T_{1,1}(u)$。令 $\boldsymbol{\mu_i}=(1,\dots,\mu_i)$，根据引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{qdet}{}^{\mu}D_i(u-p_i(\mu)) &= \psi_{h_i}(\operatorname{qdet}{}^{\bar{\mu}}T_{1,1}(u-p_i(\mu)))\\ &= c_{h_i}(u)^{-1}\operatorname{qdet} T_{p_i(\mu)\#\boldsymbol{\mu_i},p_i(\mu)\#\boldsymbol{\mu_i}}(u)\end{aligned}$$

由于元素 $\{d_i(u);\ 1\leq i\leq N\}$ 相互对易（参见 [BK1, (5.9)]），对（3.5）应用两次即可得到

$$\operatorname{qdet}{}^{\mu}D_i(u-p_i(\mu))=\prod_{k=p_i(\mu)+1}^{p_{i+1}(\mu)} d_k(u-k+1).$$

最后一个断言同样由（3.5）得出。 □

4. $Y_{M|N}$的中心

4.1. **超杨扬子** $Y_{M|N}(\mathfrak{s}^{st})$。在本小节中，我们始终假设 $Y_{M|N}=Y_{M|N}(\mathfrak{s}^{st})$ 是与标准 0^M1^N-序列（见（2.2））相对应的超杨扬子。根据 [Na], 我们将矩阵 $T(u)$ 的量子 *Berezinian*（超行列式）定义为如下幂级数:

$$\begin{aligned}\operatorname{qsdet} T(u) &:= \sum_{\rho\in S_M}\operatorname{sgn}(\rho)t_{\rho(1),1}(u)t_{\rho(2),2}(u-1)\cdots t_{\rho(M),M}(u-M+1)\\ &\times \sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)t'_{M+1,M+\sigma(1)}(u-M+1)\cdots t'_{M+N,M+\sigma(N)}(u-M+N)\\ &= 1+\sum_{r\geq 1}b^{(r)}_{M|N}u^{-1}. \end{aligned}\tag{4.1}$$

这些元素 $\{b^{(r)}_{M|N};\ r>0\}$ 生成了中心 $Z(Y_{M|N})$ 的 $Y_{M|N}$([Gow2，定理 4])。根据 [Gow1，定理 1], 量子 Berezinian 可以用 Drinfeld 生成元表示如下:

$$\begin{aligned}b_{M|N}(u):=1+\sum_{r\geq 1}b^{(r)}_{M|N}u^{-1} &= d_1(u)d_2(u-1)\cdots d_M(u-M+1)\\ &\times d_{M+1}(u-M+1)^{-1}\cdots d_{M+N}(u-M+N)^{-1}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

现在设 λ 是长度为 m的 M 的一个合成， ν 是长度为 n的 N 的一个合成。我们用 $\mu=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\mid\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$ 表示 $(M|N)$ 的合成，并继续使用记号 $p_i(\lambda)$ 和 $p_i(\nu)$, 分别表示 λ 和 ν 的部分和，定义见 (3.6)。

命题 4.1。与 $\mu=(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m\mid\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n)$相对应，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{qsdet} T(u)&=\operatorname{qdet} D_1(u-p_1(\lambda))\operatorname{qdet} D_2(u-p_2(\lambda))\ldots\operatorname{qdet} D_m(u-p_m(\lambda))\\ &\times\operatorname{qdet} D'_{m+1}(u-M+p_2(\nu))\operatorname{qdet} D'_{m+2}(u-M+p_3(\nu))\ldots\operatorname{qdet} D'_{m+n}(u-M+N).\end{aligned}\tag{4.3}$$

证明。为方便起见，记

$$b_1(u):=\operatorname{qdet} D_1(u-p_1(\lambda))\operatorname{qdet} D_2(u-p_2(\lambda))\ldots\operatorname{qdet} D_m(u-p_m(\lambda))$$

and

$$b_2(u):=\operatorname{qdet} D'_{m+1}(u-M+p_2(\nu))\operatorname{qdet} D'_{m+2}(u-M+p_3(\nu))\ldots\operatorname{qdet} D'_{m+n}(u-M+N),$$

也就是说， $b_1(u)$（分别为 $b_2(u)$）是式（4.3）中的第一部分（分别为第二部分）。

显然， $b_1(u)$ 是 $Y_{M|N}$ 由集合 $\{t^{(r)}_{i,j}$ 生成的子代数中的一个元素； $1\leq i,\ j\leq M$, $r>0\}$。该子代数与杨扬子代数 Y_M 同构，同构映射由标准包含映射 $Y_M\hookrightarrow Y_{M|N}$ 给出，它将每个生成元 $t^{(r)}_{i,\ j}$ 映射到 $Y_{M|N}$中同名的生成元。因此，命题 3.2 结合式（3.5）可得

$$b_1(u)=d_1(u)d_2(u-1)\cdots d_M(u-M+1).$$

现在考虑

$$\overleftarrow{\mu}:=(\nu_n,\ldots,\nu_1\mid\lambda_m,\ldots,\lambda_1),$$

的反转 μ，它是以下各项的合成：$(N|M)$。由于 [Peng1，(4.6)]，$b_2(u)$ 是同构 $\zeta_{N|M}$：$Y_{N|M}(\overleftarrow{\mu})$ $\to Y_{M|N}(\mu)$ 的像，像为

$$\operatorname{qdet} D_n(u-M+p_2(\nu))\operatorname{qdet} D_{n-1}(u-M+p_3(\nu))\cdots\operatorname{qdet} D_1(u-M+p_{n+1}(\nu)).$$

鉴于 [Peng1, (7.7)], 此处乘积的顺序无关紧要。再次利用命题 3.2和 (3.5)，我们得到

$$b_2(u)=\zeta_{N|M}(c_N(u-M+N))=\zeta_{N|M}(d_1(u-M+N)d_2(u-M+N-1)\cdots d_N(u-M+1)),$$

并且 [Gow2, (11)]推出

$$b_2(u)=d_{M+1}(u-M+1)^{-1}\cdots d_{M+N}(u-M+N)^{-1}.$$

于是，由 (4.2) 立即可得我们的断言。 □

4.2. 任意01-序列。 本节中，必要时我们将在记号中添加一个额外的上标 $\mathfrak{s}$，以避免 $\mathfrak{s}$ 变化时产生歧义。我们首先考虑特殊情形 $M=N=1$。

引理 4.2。 以下关系在 $Y_{1|1}(01)[[u^{-1}]]$ 中成立：

$$t_{1,1}(u)t_{2,1}(u-1)=t_{2,1}(u)t_{1,1}(u-1), \tag{4.4}$$

$$t_{2,2}(u)t_{2,1}(u-1)=t_{2,1}(u)t_{2,2}(u-1), \tag{4.5}$$

$$t_{2,1}(u)t_{2,1}(u-1)=0, \tag{4.6}$$

$$t_{1,1}(u)t_{2,2}(u-1)-t_{2,2}(u)t_{1,1}(u-1)=t_{1,2}(u)t_{2,1}(u-1)+t_{2,1}(u)t_{1,2}(u-1). \tag{4.7}$$

证明。这些结论可由定义关系推出。令 $(i,\ j,\ k,\ l)=(1,\ 1,\ 2,\ 1)$ 以及 $v:=u-1$，由（2.3）可得

$$[t_{1,1}(u),t_{2,1}(u-1)]=t_{2,1}(u)t_{1,1}(u-1)-t_{2,1}(u-1)t_{1,1}(u).$$

这立即推出（4.4）。对于（4.5），我们分别在（2.3）中令 (i,j,k,l) =(2, 2, 2, 1) 和 (i,j,k,l) =(2,1,2,2)。于是得到

$$[t_{2,2}(u),t_{2,1}(u-1)]=t_{2,2}(u-1)t_{2,1}(u)-t_{2,2}(u)t_{2,1}(u-1),$$

and

$$[t_{2,1}(u),t_{2,2}(u-1)]=t_{2,1}(u-1)t_{2,2}(u)-t_{2,1}(u)t_{2,2}(u-1).$$

因此，

$$2t_{2,2}(u)t_{2,1}(u-1)=t_{2,2}(u-1)t_{2,1}(u)+t_{2,1}(u-1)t_{2,2}(u)=2t_{2,1}(u)t_{2,2}(u-1).$$

由此得到（4.5）。注意以下关系

$$[t_{2,1}(u),t_{2,1}(u-1)]=t_{2,2}(u-1)t_{2,1}(u)-t_{2,2}(u)t_{2,1}(u-1).$$

由于 $t_{2,}$1(u) 和 $t_{2,}$1$(u-1)$ 均为奇数，因此由上式可直接得到方程 (4.6)。为建立关系式 (4.7)，令 (i,j,k,l) =(1, 1, 2, 2)，并在 (2.3) 中取 $v:=u-1$，化简后可得

$$t_{1,1}(u)t_{2,2}(u-1)-t_{2,2}(u-1)t_{1,1}(u)=t_{2,1}(u)t_{1,2}(u-1)-t_{2,1}(u-1)t_{1,2}(u). \tag{4.8}$$

同理可得

$$t_{2,2}(u-1)t_{1,1}(u)-t_{2,2}(u)t_{1,1}(u-1)=t_{1,2}(u)t_{2,1}(u-1)+t_{2,1}(u-1)t_{1,2}(u). \tag{4.9}$$

关系式（4.7）现在可由（4.8）和（4.9）推出。 □

正如 [Peng2], 所观察到的， $Y_{M|N}$ 的定义与 $\mathfrak{s}$ 的选择无关。显然，任何重新标记映射 $t_{i,\ j}(u)\mapsto t_{\sigma(i),\ \sigma(j)}(u)$，只要保持生成元的宇称，其中 σ 是对称群 S_{M+N} 中的一个置换，就能延拓为相应超杨扬子代数之间的同构。

特别地，超杨扬子代数 $Y_{1|1}(01)$ 和 $Y_{1|1}(10)$ 通过赋值$t_{i,\ j}^{10}(u)\mapsto t_{3-i,\ 3-j}^{01}(u)$ 同构。记 σ_1 为相应的同构。

以下两个结果见于 [Lu2，第 3 节。3]（另见 [Lu1，注 3。11], [HM，命题 3。6]以及 [LM，第 4 节。3]）。这里我们给出详细证明。

引理 4.3. 令 $\sigma_1:\ Y_{1|1}(10)\ \to Y_{1|1}(01)$ 为上述定义的代数同构。则

$$\sigma_1(d_1^{10}(u)^{-1}d_2^{10}(u))=d_1^{01}(u-1)d_2^{01}(u-1)^{-1}.$$

证明。 拟行列式的定义（2.6）蕴含

$$d_1^{10}(u)^{-1}d_2^{10}(u)=t_{1,1}^{10}(u)^{-1}(t_{2,2}^{10}(u)-t_{2,1}^{10}(u)t_{1,1}^{10}(u)^{-1}t_{1,2}^{10}(u)),$$

因此

$$\sigma_1(d_1^{10}(u)^{-1}d_2^{10}(u))=t_{2,2}^{01}(u)^{-1}(t_{1,1}^{01}(u)-t_{1,2}^{01}(u)t_{2,2}^{01}(u)^{-1}t_{2,1}^{01}(u)).$$

于是，只需证明

$$\begin{aligned}t_{2,2}^{01}(u)t_{1,1}^{01}(u-1)\ &=\ (t_{1,1}^{01}(u)-t_{1,2}^{01}(u)t_{2,2}^{01}(u)^{-1}t_{2,1}^{01}(u))\\ &\quad\times(t_{2,2}^{01}(u-1)-t_{2,1}^{01}(u-1)t_{1,1}^{01}(u-1)^{-1}t_{1,2}^{01}(u-1)).\end{aligned}$$

这由（4.4）-（4.7）得出。 □

更一般地，设 $\mathfrak{s}=(s_1\cdots s_{M+N})$ 是一个 01 序列。假设 $\mathfrak{s}\neq\mathfrak{s}^{st}$，即 $\mathfrak{s}$ 不是 (2.2) 中定义的标准 01-序列。那么存在 $1\leq i\leq M+N-1$ 使得 $(s_is_{i+1})=(10)$。取满足 $(s_is_{i+1})=(10)$ 的 i，并令 $\bar{\mathfrak{s}}$ 为将 s_i 和 s_{i+1} 交换后由 $\mathfrak{s}$ 得到的 01 序列。我们有如下同构：

$$\sigma_i:Y_{M|N}(\mathfrak{s})\to Y_{M|N}(\bar{\mathfrak{s}});\ t_{k,l}^{\mathfrak{s}}(u)\mapsto t_{\sigma_i(k),\sigma_i(l)}^{\bar{\mathfrak{s}}}(u), \tag{4.10}$$

其中 σ_i 是对称群 S_{M+N} 中的简单反射 $(i,i+1)$，我们仍将诱导的同构记为 σ_i。

注 2. 正如审稿人指出的，上述同构（4.10）恰好是 [Mol2] 和 [Lu2]，中所讨论的奇反射；在这些论文中，他们关注的是 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$ 的表示论。

命题 4.4. 我们有

$$\sigma_i(d_i^{\mathfrak{s}}(u)^{-1}d_{i+1}^{\mathfrak{s}}(u))=d_i^{\bar{\mathfrak{s}}}(u-1)d_{i+1}^{\bar{\mathfrak{s}}}(u-1)^{-1}.$$

证明。 若 $i=1$，则 $(s_1s_2)=(10)$。存在一个标准嵌入 $Y_{1|1}(10)\hookrightarrow Y_{M|N}(\mathfrak{s})$，在该嵌入下 $t_{i,\ j}(u)\in Y_{1|1}(10)$ 映射为 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$中同名的元素。在此情况下，引理4.3 给出所述断言。

假设 $i>1$。令 $\mathfrak{s}_1:=(s_1\cdots s_{i-1})$ 以及 $\mathfrak{s}_2:=(s_i\cdots s_{M+N})$，于是 $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2$。此外，令 $\bar{\mathfrak{s}}_2$ 为由 01- 序列经交换 $\mathfrak{s}_2$ 中的 s_i 和 s_{i+1} 得到的序列。显然，$\bar{\mathfrak{s}}=\mathfrak{s}_1\bar{\mathfrak{s}}_2$。将移位映射应用两次（见（2.8））， 再结合（2.7），可得

$$\begin{aligned}\sigma_i(d_i^{\mathfrak{s}}(u)^{-1}d_{i+1}^{\mathfrak{s}}(u)) &= \sigma_i(\psi_{i-1}(d_1^{\mathfrak{s}_2}(u)^{-1}d_2^{\mathfrak{s}_2}(u)))\\ &= \psi_{i-1}(\sigma_1(d_1^{\mathfrak{s}_2}(u)^{-1}d_2^{\mathfrak{s}_2}(u)))\\ &= \psi_{i-1}(d_1^{\bar{\mathfrak{s}}_2}(u-1)^{-1}d_2^{\bar{\mathfrak{s}}_2}(u-1))\\ &= d_i^{\bar{\mathfrak{s}}}(u-1)^{-1}d_{i+1}^{\bar{\mathfrak{s}}}(u-1).\end{aligned}$$

□

给定一个 01 序列 $\mathfrak{s}=(s_1\cdots s_{M+N})$，存在 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_M\le M+N$和 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_N\le M+N$，使得 $s_{i_k}=0$ 且 $s_{j_l}=1$ 对所有 $1\le k\le M$ 和$1\le l\le N$都成立。显然，$i's$ 和 $j's$ 由 $\mathfrak{s}$唯一确定。

定义。矩阵 $T^{\mathfrak{s}}(u)$ 的量子 *Berezinian*（超行列式）定义为

$$\begin{aligned}\operatorname{qsdet}T^{\mathfrak{s}}(u):=\quad &\sum_{\rho\in S_M}\operatorname{sgn}(\rho)t_{i_{\rho(1)},i_1}(u)t_{i_{\rho(2)},i_2}(u-1)\cdots t_{i_{\rho(M)},i_M}(u-M+1)\\ &\times\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)t'_{j_1,j_{\sigma(1)}}(u-M+1)\cdots t'_{j_N,j_{\sigma(N)}}(u-M+N).\end{aligned}\tag{4.11}$$

注 3. (1) 当 $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}^{st}$ 是标准 01-序列时，我们有 $i_k=k$ 和 $j_l=M+l$ 对所有 $1\le k\le M$ 和 $1\le l\le N$ 均成立，因此 (4.11) 还原了 Nazarov 最初的定义 (4.1)。

(2) 对任意置换 $\theta\in S_M$ 和 $\tau\in S_N$，根据 [MNO，注 2。8] 可得

$$\begin{aligned}\operatorname{qsdet}T^{\mathfrak{s}}(u)=\quad &\operatorname{sgn}(\theta)\sum_{\rho\in S_M}\operatorname{sgn}(\rho)t_{i_{\rho(1)},i_{\theta(1)}}(u)t_{i_{\rho(2)},i_{\theta(2)}}(u-1)\cdots t_{i_{\rho(M)},i_{\theta(M)}}(u-M+1)\\ &\times\operatorname{sgn}(\tau)\sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)t'_{j_{\tau(1)},j_{\sigma(1)}}(u-M+1)\cdots t'_{j_{\tau(N)},j_{\sigma(N)}}(u-M+N).\end{aligned}\tag{4.12}$$

注意，置换 $\sigma_{\mathfrak{s}}\in S_{M+N}$ 由 $i_k\mapsto k, j_l\mapsto M+l$; $1\le k\le M$, $1\le l\le N$ 定义，并给出一个同构（仍记作 $\sigma_{\mathfrak{s}}$）：

$$\sigma_{\mathfrak{s}}:Y_{M|N}(\mathfrak{s})\to Y_{M|N}(\mathfrak{s}^{st});\ t_{i,j}^{\mathfrak{s}}(u)\mapsto t_{\sigma_{\mathfrak{s}}(i),\sigma_{\mathfrak{s}}(j)}^{\mathfrak{s}^{st}}(u).\tag{4.13}$$

特别地,

$$\sigma_{\mathfrak{s}}(\operatorname{qsdet}T^{\mathfrak{s}}(u))=\operatorname{qsdet}T^{\mathfrak{s}^{st}}(u).\tag{4.14}$$

这与 [Gow2、定理 4]（见第 4.1 节）推出，量子 Berezinian $\operatorname{qsdet}T^{\mathfrak{s}}(u)$ 的系数生成了 $Z(Y_{M|N}(\mathfrak{s}))$ 的中心 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$。

沿用 [Tsy],的定义

$$b_{M|N}^{\mathfrak{s}}(u):=1+\sum_{r\ge1}b^{\mathfrak{s}(r)}u^{-r}=\tilde{d}_1(u_1)\tilde{d}_2(u_2)\cdots\tilde{d}_{M+N}(u_{M+N}),\tag{4.15}$$

其中

$$\tilde{d}_i(u):=\begin{cases}d_i(u) & \text{if } s_i=0\\ d_i(u)^{-1} & \text{if } s_i=1\end{cases},\tag{4.16}$$

而

$$u_1 = u + s_1 \text{ and } u_{i+1} = \begin{cases} u_i - 1 & \text{if } s_i = s_{i+1} = 0 \\ u_i + 1 & \text{if } s_i = s_{i+1} = 1 \\ u_i & \text{if } s_i \neq s_{i+1} \end{cases}. \tag{4.17}$$

注意 th 我们的定义 u_1 与 [Tsy（2.41）中给出的定义略有不同].

以下结果由 Tsymbaliuk 得到 [Tsy，定理 2。43], 他使用了 Drinfeld 型表示的定义关系 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$ [Gow2], [Peng3]。

定理 4.5。 </style}我们有 $(u) = \operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}}(u)$。特别地，元素 $\{b^{\mathfrak{s}(r)};\ r \geq 1\}$ 是中心元素。

证明。 若 $\mathfrak{s}$ 是标准 01-序列，则 $\operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}}(u)$ 就是通常的量子 Berezinian（4.1），而（4.2）即得所述结论。

或者，存在一个整数 $1 \leq i \leq M+N-1$，使得 $(s_i s_{i+1}) = (10)$。令

$$k := \min\{i;\ (s_i s_{i+1}) = (10),\ 1 \leq i \leq M+N-1\}.$$

令 σ_k 为由简单反射 $(k, k+1) \in S_{M+N}$ 诱导的同构（见 4.10）。我们用 $\bar{\mathfrak{s}} := (\bar{s}_1 \cdots \bar{s}_{M+N})$ 表示从 $\mathfrak{s}$ 得到的 01 序列，即交换 s_k 和 s_{k+1} 后所得的序列。注意，在表达式 (4.15) 中，$\tilde{d}_k(u_k)\tilde{d}_{k+1}(u_{k+1}) = d_k(u_k)^{-1} d_{k+1}(u_k)$。命题 4.4 与 [GR, I.2.5] 合用可推出

$$\sigma_k(b^{\mathfrak{s}}_{M|N}(u)) = b^{\bar{\mathfrak{s}}}_{M|N}(u).$$

将上述论证中的 $\mathfrak{s}$ 替换为 $\bar{\mathfrak{s}}$，重复这一过程，直到得到标准 01 序列。注意，过程中所应用的所有简单对换 σ_k 的合成等于置换 $\sigma_{\mathfrak{s}}$。于是得到

$$\sigma_{\mathfrak{s}}(b^{\mathfrak{s}}_{M|N}(u)) = b^{\mathfrak{s}^{st}}_{M|N}(u) \in Y_{M|N}(\mathfrak{s}^{st})[[u^{-1}]].$$

因此，该断言由（4.2）和（4.14）得出。 □

例。 设 $\mathfrak{s} = (1010)$ 是一个 $0^2 1^2$-序列。根据定义，$(i_1, i_2) = (2, 4)$，$(j_1, j_2) = (1, 3)$。因此

$$\begin{aligned} \operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}}(u) = \quad & (t_{2,2}(u)t_{4,4}(u-1) - t_{4,2}(u)t_{2,4}(u-1)) \\ & \times (t'_{1,1}(u-1)t'_{3,3}(u) - t'_{1,3}(u-1)t'_{3,1}(u)). \end{aligned}$$

置换 $\sigma_{\mathfrak{s}} \in S_4$ 由下式给出： $2 \mapsto 1$， $4 \mapsto 2$， $1 \mapsto 3$， $3 \mapsto 4$。映射 $\sigma_{\mathfrak{s}}$（4.13）可以写成以下同构的合成：

$$\sigma_{\mathfrak{s}} : Y_{2|2}(1010) \xrightarrow{\sigma_1} Y_{2|2}(0110) \xrightarrow{\sigma_3} Y_{2|2}(0101) \xrightarrow{\sigma_2} Y_{2|2}(0011);$$

$$b^{1010}_{2|2}(u) \mapsto b^{0110}_{2|2}(u) \mapsto b^{0101}_{2|2}(u) \mapsto b^{0011}_{2|2}(u).$$

更一般地，对于每个 $1 \leq i \leq M+N$，我们令

$$T_{(1,\ldots,i),(1,\ldots i)}(u) := (t_{k,l}(u))_{1 \leq k,l \leq i}$$

是 $i \times i$ $T^{\mathfrak{s}}(u)$ 的子矩阵，其行和列均由集合 $\{1, \ldots, i\}$ 编号，并令

$$\mathfrak{s}_{i,1} := (s_1, \ldots, s_i) \qquad \mathfrak{s}_{i,2} := (s_{i+1}, \ldots, s_{M+N}).$$

由此可得 $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_i, \ {}_1\mathfrak{s}_i, \ {}_2\mathfrak{s}_i$。量子超子式 $\operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}_i, \ {}_1(1,\dots,i), \ (1,\dots,i)}$ 可按与 (4.11) 相同的方式定义。下面的推论是对 [BK1，定理 8.7 (i)] 的超代数推广。

推论 4.6。对于 $1 \le i \le M+N$，我们有

$$\tilde{d}_i(u_i) = \operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}_{i-1},1}_{(1,\dots,i-1),(1,\dots,i-1)}(u)^{-1} \operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}_i,1}_{(1,\dots,i),(1,\dots,i)}(u)$$

证明。记 m_i 和 n_i 分别为$\mathfrak{s}_i$中 0 和 1 的个数，因此$\mathfrak{s}_i$,1 是一个$0^{m_i}1^{n_i}$-序列。容易看出，由元素$\{t^{(r)}_{k,l}\}^i_{k,l=1}$ 生成的子代数同构于超杨扬子 $Y_{m_i|n_i}(\mathfrak{s}_i,1)$。考虑标准嵌入 $\iota: Y_{m_i|n_i}(\mathfrak{s}_i,1) \hookrightarrow Y_{M|N}(\mathfrak{s})$，在此嵌入下，$t^{(r)}_{i,j} \in Y_{m_i|n_i}(\mathfrak{s}_i,1)$ 映射为 $Y_{M|N}(\mathfrak{s})$ 中同名的元素。由定理 4.5 得

$$\operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}_i,1}_{(1,\dots,i),(1,\dots,i)}(u) = b^{\mathfrak{s}_i,1}_{m_i|n_i}(u) \in Y_{m_i|n_i}(\mathfrak{s}_{i,1})[[u^{-1}]].$$

由于（2.6），我们得到

$$\operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}_i,1}_{(1,\dots,i),(1,\dots,i)}(u) = \tilde{d}_1(u_1)\tilde{d}_2(u_2)\cdots\tilde{d}_i(u_i) \in Y_{M|N}(\mathfrak{s})[[u^{-1}]].$$

直接计算即可得证。 □

现在我们考虑第2.3节中定义的抛物生成元。固定一个 0^M1^N-序列$\mathfrak{s} = (s_1 \dots s_{M+N})$，并令 $\mu = (\mu_1, \dots\dots, \mu_n)$ 为一个给定的 $M+N$的合成，其长度为 n。我们将 $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1\mathfrak{s}_2\cdots\mathfrak{s}_n$ 分成 n 个子序列，依据 μ，其中 $\mathfrak{s}_1$ 是由 μ_1 的前 $\mathfrak{s}$位数字组成的子序列，$\mathfrak{s}_2$ 是由接下来的 μ_2 位数字组成的子序列 $\mathfrak{s}$，依此类推。

对于每个 $1 \le a \le n$，令 p_a 和 q_a 分别表示 $\mathfrak{s}_a$中 0 和 1 的个数。那么每个 $\mathfrak{s}_a$ 都是 $\mathfrak{gl}_{p_a|q_a}$的一个$0^{p_a}1^{q_a}$-序列，并且对所有 $1 \le i \le \mu_a$，令

$$a \star i := \mu_1 + \cdots + \mu_{a-1} + i = p_a(\mu) + i$$

并定义限制奇偶性 $|i|_a$ 为

$$|i|_a := \text{ the } i-\text{th digits of } \mathfrak{s}_a = |a \star i|.$$

此外，存在 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{p_a} \le \mu_a$和 $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{q_a} \le \mu_a$ 使得 $|i_k|_a = 0$ 且 $|j_l|_a = 1$ 对所有 $1 \le k \le p_a$ 和 $1 \le l \le q_a$。类似于（4.11），我们定义对角元素 $D_a(u)$ 的量子 Berezinian（2.4）为

$$\begin{aligned}\operatorname{qsdet} D_a(u) := & \sum_{\rho \in S_{p_a}} \operatorname{sgn}(\rho) D_{a;i_{\rho(1)},i_1}(u) D_{a;i_{\rho(2)},i_2}(u-1)\cdots D_{a;i_{\rho(p_a)},i_{p_a}}(u-p_a+1) \\ & \times \sum_{\sigma \in S_{q_a}} \operatorname{sgn}(\sigma) D'_{a;j_1,j_{\sigma(1)}}(u-p_a+1)\cdots D'_{a;j_{q_a},j_{\sigma(q_a)}}(u-p_a+q_a). \end{aligned} \tag{4.18}$$

令 $\{u_i; \ 1 \le i \le M+N\}$ 由（4.17）定义。特别地，$u_{a\star 1} = u_{p_a(\mu)+1}$。

定理 4.7。设 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ 是 $M+N$ 的一个合成，且 $\mathfrak{s} = (s_1 \cdots s_{M+N})$ 是一个0^M1^N-序列。对于 $a \ge 1$，我们有

$$\operatorname{qsdet} {}^{\mu}D_a(u_{a\star 1} - |1|_a) = \tilde{d}_{a\star 1}(u_{a\star 1})\tilde{d}_{a\star 2}(u_{a\star 2})\cdots\tilde{d}_{a\star\mu_a}(u_{a\star\mu_a})$$

特别是，

$$\operatorname{qsdet} T^{\mathfrak{s}}(u) = \operatorname{qsdet} D_1(u) \operatorname{qsdet} D_2(u_{2\star 1} - |1|_2)\cdots\operatorname{qsdet} D_n(u_{n\star 1} - |1|_n).$$

证明。 对于 $1 \le a \le n$，令 $\bar{\mu} := (\mu_a, \mu_{a+1}, \dots, \mu_n)$ 以及 $\bar{\mathfrak{s}} := \mathfrak{s}_a \cdots \mathfrak{s}_n$。 由（2.8）可得

$$ {}^{\mu}D_a(u_{a\star 1} - |1|_a) = \psi_{p_a(\mu)}({}^{\bar{\mu}}D_1(u_{a\star 1} - |1|_a)), $$

其中 ${}^{\bar{\mu}}D_1(u_{a\star 1} - |1|_a) \in Y_{\bar{\mu}}(\bar{\mathfrak{s}})$。根据 (2.6)，我们有 ${}^{\mu}D_1(u) = {}^{\mu}T_{1,\ 1}(u)$，因此定理4.5保证

$$ \begin{aligned} \operatorname{qsdet}\ {}^{\mu}D_a(u_{a\star 1} - |1|_a) &= \psi_{p_a(\mu)}(\operatorname{qsdet}\ {}^{\bar{\mu}}T_{1,1}(u_{a\star 1} - |1|_a)) \\ &= \psi_{p_a(\mu)}(b^{\mathfrak{s}_a}_{p_a|q_a}(u_{a\star 1} - |1|_a)) \\ &= \tilde{d}_{a\star 1}(u_{a\star 1})\tilde{d}_{a\star 2}(u_{a\star 2}) \cdots \tilde{d}_{a\star \mu_a}(u_{a\star \mu_a}), \end{aligned} $$

这里最后一个等式同样由 (2.8) 得出。由于限制奇偶性 $|1|_1$ 恰好是 s_1，结论由定理 4.5 以及 $b^{\mathfrak{s}}_{M|N}(u)$ (4.15) 的定义得出。 □

例。 设 $\mathfrak{s} = (1010)$ 是一个 $0^2 1^2$-序列且 $\mu = (2, 2)$，于是

$u_1 = u + 1$， $u_2 = u + 1$， $u_3 = u_{2\star 1} = u + 1$， $u_4 = u_{2\star 2} = u + 1$ 和 $|1|_1 = s_1 = 1$，

$|1|_2 = s_3 = 1$.根据定义 (4.18)，我们有

$$ \operatorname{qsdet} D_1(u) = D_{1;2,2}(u) D'_{1;1,1}(u) $$

and

$$ \operatorname{qsdet} D_2(u_{2\star 1} - |1|_2) = \operatorname{qsdet} D_2(u) = D_{2;2,2}(u) D'_{2;1,1}(u). $$

因此，

$$ \operatorname{qsdet} T^{1010}(u) = D_{1;2,2}(u) D'_{1;1,1}(u) D_{2;2,2}(u) D'_{2;1,1}(u). $$

致谢

谨此感谢陆康提出的宝贵意见。我们尤其感谢审稿人细致审阅本文，并提出了许多建设性的意见和建议，帮助改进了原稿。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：11801204、11801394）和中央高校基本科研业务费专项资金（项目编号：CCNU22QN002）的资助。

参考文献

[BG] J. Brundan 和 S. M. Goodwin，惠特克余不变量 $GL(m|n)$。《数学进展》**347** (2019), 273–339.[BK1] J. Brundan 和 A. Kleshchev，杨扬子代数的抛物型表示 $Y(\mathfrak{gl}_n)$。《数学物理通讯》**254**(2005), 191–220.[BK2] J. Brundan 和 A. Kleshchev，移位杨氏量子群与有限 W-代数。《数学进展》**200** (2006), 136–195.[CW] S.-J. Cheng 和 W. Wang，《李超代数的对偶性与表示》。数学研究生教程，第**144**卷，美国数学学会, 2013.[D1] V. G. Drinfeld，*Hopf* 代数与量子杨–巴克斯特方程。《苏联数学文献》**32** (1985), 254–258.[D2] V. G. Drinfeld，杨氏量子群与量子仿射代数的新实现。《苏联数学文献》**36**(1988), 212–216.[FRT] L. Faddeev、N. Reshetikhin 和 L. Takhtadzhyan，李群与李代数的量子化。《列宁格勒数学杂志》**1** (1990), 193–225.[GR] I. Gelfand 和 V. Retakh，拟行列式 *I*。《数学精选》**3** (1997), 517–546.

[Gow1] L. Gow，关于杨扬子代数 $Y(\mathfrak{gl}_{m|n})$及其量子 Berezinian。《捷克物理学杂志》55 (2005), 1415–1420.[Gow2] L. Gow，杨扬子代数 $Y(\mathfrak{gl}_{m|n})$的高斯分解。《数学物理通讯》276 (2007), 799–825.[HM] C. Huang 和 E. Mukhin， $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 与 $\mathfrak{gl}_k$ 高丹模型的对偶性。《代数杂志》548 (2020), 1–24.[Lu1] K. Lu，超杨扬子代数与量子仿射超代数表示的盖尔范德-采特林基。《数学物理通讯快报》111 (2021), 第6期，论文编号145.[Lu2] K. Lu，关于超杨扬子代数的奇反射与贝特假设的一点注记。《数学物理通讯快报》112 (2022), 第2期，论文编号29.[LM] K. Lu 和 E. Mukhin，关于与 $\mathfrak{gl}_{1|1}$相关的超对称 XXX 自旋链。《数学物理通讯》386 (2021), 711–747.[Mol1] A. Molev，杨扬子代数与经典李代数。数学调查与专著，第143卷，美国数学学会，普罗维登斯（2007）。[Mol2] A. Molev，与 $\mathfrak{gl}(m|n)$相关的杨扬子代数中的奇反射。《数学物理通讯快报》112 (2022), 第1期，论文编号8.[MNO] A. Molev、M. Nazarov 和 G. Olshanskii，杨扬子代数与经典李代数。《俄罗斯数学调查》51 (1996), 205–282.[Na] M. Nazarov，量子 Berezinian 与经典卡佩利恒等式。《数学物理通讯快报》21 (1991), 123–131.[Peng1] Y. Peng，超杨扬子代数 $Y(\mathfrak{gl}_{M|N})$的抛物型表示。《数学物理通讯》307 (2011), 229–259.[Peng2] Y. Peng，有限 W-超代数与截断超扬子代数。《数学物理通讯快报》104 (2014), 89–102.[Peng3] Y. Peng，任意 01 序列对应的超杨扬子代数 $Y(\mathfrak{gl}_{M|N})$的抛物型表示。《数学物理通讯》346 (2016), 313–347.[Peng4] Y. Peng，通过超杨扬子代数构造有限 W-超代数。《数学进展》377 (2021), 107459.[Tsy] A. Tsymbaliuk，所有嘉当数据下 A 型超杨扬子代数与量子仿射超代数的洗牌代数实现。《数学物理通讯快报》110 (2020), 2083–2111。（H. Chang）数学与统计学院、非线性分析与应用教育部重点实验室，华中师范大学，武汉 430079，中华人民共和国电子邮箱：chang@ccnu.edu.cn（H. Hu）数学科学学院，苏州科技大学，苏州 215009，中华人民共和国电子邮箱：hmhu@usts.edu.cn