arXiv:2301.08122v1 [math.NA] 19 Jan 2023

紧黎曼流形上的严格正定核

Jean Carlo Guella,

Unicamp，数学、统计与科学计算研究所，坎皮纳斯，巴西

雅宁·雅格

KU Eichst ¨att-因戈尔施塔特，机器学习与数据科学数学研究所，因戈尔施塔特，德国

2023年1月20日

摘要

本文研究紧黎曼流形上的严格正定核。我们给出确保一般核以及具有特定卷积结构的核严格正定的新条件。我们还给出这类核在乘积流形上的条件。作为示例，文中给出了二点齐性空间乘积的条件。

关键词： 严格正定核、协方差函数、二点齐性流形，

*2010*年数学学科分类： 33B10; 33C20; 42A16; 46E22; 65D05

1 引言

过去五年间，关于球面上正定核的新结果大量涌现，参见例如 [14,19] 及其中的参考文献；另有数量较少的研究关注其他流形 [1, 2,15–18]，包括二点齐性流形、环面及其乘积。大多数结果聚焦于各向同性正定核，即仅取决于其自变量之间测地距离的核。各向同性核用于逼近理论，常称为球面基函数或径向基函数 [19] ，例如应用于地统计学 [12]。它们在统计学中也十分重要，因为它们是高斯随机场的相关函数 [3]。近年来，对各向同性假设的一些例外包括文献 [10, 23]在球面上研究的轴对称核。

关于一般黎曼流形上的核方法，相关成果不多，其中 [8, 9, 21] 中的讨论构成了本文所介绍

*通讯作者。电子邮箱：janin.jaeger@ku.de

成果的基础。这些论文研究的是广义 Hermite 插值，而非经典插值；当然，它们也未包含后来针对特定流形得出的严格正定性结果。

本文将刻画紧致连通黎曼流形上的一般（严格）正定核。我们将给出仅要求连续且厄米的核所满足的充要条件。在这一抽象层面上的讨论旨在统一针对不同流形所采用的方法，并为研究新的特殊情形提供起点。这些结果将使我们能够重现此前针对各向同性核和卷积核所取得的结果，并补充新的结果。

我们将在第一节简要总结必要的定义，然后在第二节陈述正定核和严格正定核的刻画的一般结果。这些结果推广了针对球面这一特殊情形在 [4] 和 [5]中推导出的类似结果。同样在第二节中，我们将描述假设核具有卷积结构所带来的影响，并讨论此类核满足（严格）正定性的条件。作为特殊情形，我们将推导出定义在乘积流形上的核所满足的一个条件。在第三节中，我们将针对齐性流形这一特殊情形讨论这些结果，并给出关于双点齐性空间的乘积这一实例的具体结果；这些结果推广了关于各向同性核的已知结果。

1.1 定义与记号

我们研究 d 维紧黎曼流形 $\mathbb{M}$ 上的逼近。我们要研究的核可用于求解流形上的插值问题。具体而言，假设给定一个由互不相同的数据点组成的有限集 $\Xi \subset \mathbb{M}$，以及流形上某个可能在其他地方未知的函数 f 在这些点处的取值 $f(\xi) \in \mathbb{C}, \xi \in \Xi$。

逼近函数具有如下形式

$$s_f(\zeta) = \sum_{\xi \in \Xi} c_\xi K(\zeta, \xi), \qquad c_\xi \in \mathbb{C},\ \zeta \in \mathbb{M}, \tag{1}$$

其中 $K\colon \mathbb{M} \times \mathbb{M} \to \mathbb{C}$ 是核。求取满足以下条件的此类逼近函数 s_f 的问题

$$s_f(\xi) = f(\xi), \qquad \forall \xi \in \Xi, \tag{2}$$

在对 K 施加某些条件时有唯一解。

定义 1. 设 H 是一个带内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 的 $\mathbb{C}$-希尔伯特空间。那么，线性连续算子 $P\colon H \to H$ 称为正算子，如果它是自伴的，并且

$$\langle P(x), x \rangle \geq 0, \qquad \forall x \in H.$$

若线性连续算子 $P\colon H \to H$ 是自伴、有界且

$$\langle P(x), x \rangle > 0, \qquad \forall x \in H \setminus \{0\}.$$

我们假设所有的核都是厄米的，即它们满足 $K(\xi,\ \zeta)\ =K(\zeta,\ \xi)$，因此核的正定性将确保任意数据集的插值问题均可解。

定义 2。 厄米核 $K:\Omega\times\Omega\ \to\mathbb{C}$ 在且仅在矩阵 $K_\Xi=\{K(\xi,\zeta)\}_{\xi,\zeta\in\Xi}$ 通过左乘在$\mathbb{C}^{|\Xi|}$ 上诱导出一个正算子时，才称其在 Ω 上正定。这里所考虑的是任意有限集的互异点 $\Xi\subset\Omega$，且$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为标准复内积。

若 K_Ξ 通过左乘在 $\mathbb{C}^{|\Xi|}$ 上对任意有限集的互异点 Ξ诱导出一个严格正算子，则称该核为严格正定 。

我们决定采用给定的正定性定义，而不采用标准的基于矩阵的定义，原因有二。首先，在我们的特定情形下，借助算子记号，我们可以轻松地在有限维和无限维希尔伯特空间之间切换；其次，这样可以避免通常在使用半定矩阵定义正定核时出现的记号不一致问题。

我们简要总结紧致黎曼流形上的分析所需的结果。

拉普拉斯算子 $\triangle$ 在局部坐标中表示为

$$\triangle f=(\det(g_{i,j}))^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\det(g_{i,j}))^{1/2}\,g^{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

其中 $g_{i,j}$ 表示度量张量， $g^{i,j}$ 表示其逆的分量。

第一组结果引自 [6] 和 [7] ，其中给出了原始文献的出处。

定理 1 (斯图姆–刘维尔分解**)**。 假设 $\mathbb{M}$ 是一个紧致、连通的 d维流形。存在一个 $L^2(\mathbb{M})$ 的标准正交基 $\{f_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$，使得每个函数 f_ℓ 都是光滑的，且

$$\triangle f_\ell=\lambda_\ell f_\ell,\quad \ell\in\mathbb{N},$$

其中

$$0=\lambda_1<\lambda_2\le\lambda_3\le\ldots\le\lambda_\ell\le\ldots,\quad \lim_{\ell\to\infty}\lambda_\ell=+\infty,$$

且每个特征值的重数均有限。此外，存在两个普适常数 $C>0$ 和 ℓ^* ，使得对所有 $\ell\ge\ell^*$

$$|f_\ell(\xi)|\le C\lambda_\ell^{d/4},\quad \xi\in\mathbb{M}. \tag{3}$$

进一步记 N_{λ_ℓ} 为 λ_ℓ 在特征值列表中的重数，则

$$N_{\lambda_\ell}\le C_2\lambda_\ell^{d/2}. \tag{4}$$

此外，向量空间 张成空间$\{f_\ell|\ell\in\mathbb{N}\}$ 在所有 $\ell\in\mathbb{N}$ 的情况下都在 $C^\ell(\mathbb{M})$ 中稠密。

由于我们将使用定义在乘积流形$\mathbb{M}\times\mathbb{M}$上的核，注意：

对于上一条定理中的 $\mathbb{M}$，配备乘积度量的流形 $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ 允许使用 $f_\ell(\xi)f_{\ell'}(\zeta)$ 这一标准正交基函数，将所有函数 $L^2(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$分解为拉普拉斯算子在 $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ 上的特征函数（ξ，ζ）$\in\mathbb{M}\times\mathbb{M}$；与该基函数对应的特征值为 $(\lambda_\ell+\lambda_{\ell'})$。

在本文中，我们始终假设 K 是平方可积的，并且可以表示为

$$K(\xi,\zeta)=\sum_{\ell,\ell'=1}^{\infty}a_{\ell,\ell'}f_\ell(\xi)\overline{f_{\ell'}(\zeta)},\qquad\forall\xi,\zeta\in\mathbb{M},\tag{5}$$

其中，f_ℓ 构成 $\mathbb{M}$ 上拉普拉斯－贝尔特拉米算子的特征函数的标准正交基，且 $a_{\ell,\ell'}\in\mathbb{C}$。我们进一步假设该核是厄米的，这意味着对所有 ℓ，$\ell'\in\mathbb{N}$，均有 $a_{\ell,\ell'}=\overline{a_{\ell',\ell}}$。

众所周知，在上述刻画中也用到了这一点：$L^2(\mathbb{M})$中的每个函数都可以表示为如下形式的展开

$$g(\xi)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\hat{g}_\ell f_\ell(\xi),\qquad\text{with }\hat{g}_\ell=\int_{\mathbb{M}}g(\xi)\overline{f_\ell(\xi)}\,d\mu(\xi),\tag{6}$$

其中 $d\mu$ 是 $\det(g_{i,j})^{1/2}dx$。对于这一展开，帕塞瓦尔等式成立：

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{M})}=\sum_{\ell=1}^{\infty}|\hat{g}_\ell|^2.$$

此外，我们还需要定义 Sobolev 空间 $H^r(\mathbb{M})$：它是 $L^2(\mathbb{M})$ 中范数有限的子空间

$$\|g\|_{H^r(\mathbb{M})}:=\left(\sum_{\ell=1}^{\infty}(1+\lambda_\ell)^r|\hat{g}_\ell|^2\right)^{1/2},$$

其中 λ_ℓ 是与特征函数 f_ℓ对应的特征值。我们注意到，在这种情况下，$H^r(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$ 是一个 Sobolev 空间，其范数为

$$\|K\|_{H^r(\mathbb{M}\times\mathbb{M})}:=\left(\sum_{\ell,\ell'=1}^{\infty}(1+\lambda_\ell+\lambda_{\ell'})^r|a_{\ell,\ell'}|^2\right)^{1/2}.$$

我们还将引用 [6]中的定理 5所述的连续嵌入引理。

定理2。设 $\mathbb{M}$ 为一个紧流形。对于任意 $r>d/2$, $H^r(\mathbb{M})\subset C(\mathbb{M})$。

我们进一步引用同一篇论文（命题2）中关于 Sobolev 空间的以下结果。

引理1. 设 $\mathbb{M}$ 是紧的。给定 $s\in[0,\infty)$，索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{M})$ 是再生核希尔伯特空间，当且仅当对所有 $\xi\in\mathbb{M}$，都有

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}(1+\lambda_\ell)^{-s/2}|f_\ell(\xi)|^2<\infty.\tag{7}$$

2 （严格）正定核的刻画

我们首先利用系数 $a_{\ell,\ell'}$ 的性质刻画核的严格正定性。我们陈述的前两个结果与 Dyn、Narcowich 和 Ward 的结果密切相关 [8]，他们使用某些索伯列夫空间中的分布而非序列来描述正定性。本章其余结果推广了第二位作者与Buhamnn教授共同证明的、关于二球面和轴对称核的结果 [4] 和 [5] 。尽管许多证明技巧相似，为求完整且便于阅读，我们仍给出这一更一般情形的完整证明。首先，我们定义由复数序列构成的向量空间

$$Y := \operatorname{span}\left\{ (f_\ell(\xi))_{\ell=1}^{\infty} \,\middle|\, \xi \in \mathbb{M} \right\}.$$

若 K 连续，因此 $K \in L^2(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$，则级数 (5) 对所有 $\xi,\zeta \in \mathbb{M}$ 都收敛。另一个推论是

$$\int_{\mathbb{M}}\int_{\mathbb{M}} (K(\xi,\zeta))^2 \, d\mu(\xi)\, d\mu(\zeta) < \infty,$$

由正交性可知，这保证了 $\sum_{\ell}^{\infty}{}_{,\ell'=1} |a_{\ell,\ell'}|^2 < \infty$ ，并由此使线性算子

$$A(y) := \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell,\ell'} y_\ell \right)_{\ell'=1}^{\infty}, \qquad y \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ or } y \in Y, \tag{8}$$

在 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上有界，我们用它表示平方可和复数序列的集合。我们定义内积

$$\langle x, y\rangle := \sum_{\ell=1}^{\infty} x_\ell \overline{y_\ell}$$

并将其用于 $x, y \in \ell^2(\mathbb{N})$ 以及 $x, y \in Y$。尽管我们不知道对于元素 $y \in Y$， $A(y)$ 是否属于 $\ell^2(\mathbb{N})$，但我们知道任意一个 $y \in Y$ 都可以表示为 $y = \left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\ell(\xi)\right)_{\ell=1}^{\infty}$，因此

$$\langle A(y), y\rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell,\ell'} \sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\ell(\xi) \overline{\sum_{\zeta\in\Xi} c_\zeta f_\ell(\zeta)} = \sum_{\xi,\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) < \infty$$

由于 K 连续，我们可以交换求和顺序。

引理 2. 设 $K\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M} \to \mathbb{C}$ 是一个连续厄米核，其形式如(5)。当且仅当对所有 $y \in Y$， K 都是正定的，其中 $\langle A(y)\ y\rangle \geq 0$，且 A 如(8)所示。

证明. 设对所有 $y \in Y$， $\langle A(y)\ y\rangle \geq 0$，则对于任意两组互异点 $\Xi \subset \mathbb{M}$ 和 $c \in \mathbb{C}^{|\Xi|}$

$$\begin{aligned}\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) &= \sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} \sum_{\ell,\ell'=1}^{\infty} a_{\ell,\ell'} f_\ell(\xi)\overline{f_{\ell'}(\zeta)} \\ &= \sum_{\ell,\ell'=1}^{\infty} y_\ell a_{\ell,\ell'} \overline{y_{\ell'}} = \langle A(y), y\rangle \geq 0, \\ &\text{with } y = \left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_1(\xi)\right)_{\ell=1}^{\infty} \in Y.\end{aligned}$$

第二行中的求和顺序可以交换，因为级数对所有 ξ 都收敛，这是因为 K 连续。

为证明反方向，我们假设存在 $y \in Y$，使得 $\langle A(y)\ y\rangle < 0$。于是存在一个点的有限集 $\Xi \subset \mathbb{M}$，使得 $y = \left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_1(\xi)\right)_{\ell=1}^{\infty}$，并且

$$\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) = \sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{\ell'=1}^{\infty} y_\ell a_{\ell,\ell'} \overline{y_{\ell'}} < 0.$$

□

现在我们可以给出正定性的刻画。这种刻画更方便，因为它只要求 A 作为希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的算子所具有的性质。

推论 1. 设 $K\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{C}$ 是由(5)给出的连续厄米核。那么， K 是正定的，当且仅当 A 是 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的正算子，其中 A 如(8)所示。

证明。 通过取 s =0，可以很容易地从 [8], 的定理2.1 推出该结果。

□

要解决第1节中引入的插值问题，仅有正定性是不够的。我们必须研究更严格的假设，即严格正定性。采用引理 2 中使用的记号，可以表述如下：

定理 3。 设 $K\colon \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{C}$ 是具有 (5) 形式的厄米连续核。那么，当且仅当对所有 $y \in Y\setminus\{0\}$， K 都是严格正定的，其中 A 如 (8) 所示。

证明。 对于第一个方向，我们假设 K 是严格正定的。于是它也正定，因此根据引理 2，对于所有 $y \in Y$， $\langle A(y)\ y\rangle \geq 0$ 。此外，对于所有元素 $y \in Y\setminus\{0\}$，都存在一个由互异点组成的集合Ξ 以及不全为零的系数 c_ξ，使得 $y = \left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\ell(\xi)\right)_{\ell=1}^{\infty}$。

再一次

$$\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) = \langle A(y), y\rangle > 0,$$

只要 $y \neq 0$。完成第一种情形。

现在假设对所有 $y \in Y \setminus \{0\}$, $\langle A(y)\ y\rangle > 0$。根据引理 2, K 是正定的。进一步，我们证明对于一个有限的非空互异点集合 $\Xi \subset \mathbb{M}$

$$y = \left(\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\ell(\xi)\right)_{\ell=1}^{\infty} = 0 \in \mathbb{C}^\infty$$

当且仅当 $c = 0 \in \mathbb{C}^{|\Xi|}$。这是因为 f_ℓ 构成了 $L^2(\mathbb{M})$ 的一组基，并且

$$\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\ell(\xi) = 0, \qquad \forall \ell \in \mathbb{N},$$

这将意味着对所有 $f \in L^2(\mathbb{M})$, $\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f(\xi) = 0$，但 $L^2(\mathbb{M})$ 上的求值泛函线性无关。这证明了

$$\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) = \langle A(y), y\rangle > 0,$$

只要 $0 \neq c \in \mathbb{C}^{|\Xi|}$。 □

我们将发现, $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的严格正定性并非核严格正定的必要条件。为了不依赖核的光滑性假设进行研究，我们如下定义系数矩阵的可求和性。设

$$\tilde{A}^s = \left(\tilde{a}_{\ell,\ell'}\right)_{\ell,\ell'=0}^{\infty}, \text{ with } \tilde{a}^s_{\ell,\ell'} = (1+\lambda_\ell)^s \left|a_{\ell,\ell'}\right| (1+\lambda_{\ell'})^s .$$

我们注意到，核的光滑性具有以下推论:

引理 3. 设 K 为形式如(5)的核。若

$$\sum_{\ell,\ell'=0}^{\infty} |\tilde{a}^s_{\ell,\ell'}| < \infty, \quad s > 0, \tag{9}$$

则 $K \in H^{2s}(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$。

证明。由 (9) 可得

$$\begin{aligned}\infty &> \sum_{\ell,\ell'=0}^{\infty} |(1+\lambda_\ell)^s a_{\ell,\ell'} (1+\lambda_{\ell'})^s| \\ &\geq \sum_{\ell,\ell'=0}^{\infty} |(1+\lambda_\ell+\lambda_{\ell'})^s a_{\ell,\ell'}|.\end{aligned}$$

由此可得

$$\sum_{\ell,\ell'=0}^{\infty}(1+\lambda_\ell+\lambda_{\ell'})^{2s}|a_{\ell,\ell'}|^2\le\infty$$

由此可得，从而证明 $K\in H^{2s}(\mathbb{M}\times\mathbb{M})$。 □

引理 4. 设 K 是形式为 (5) 的核。若存在一个 $s\ge d/4$，使得$\sum_{\ell}^{\infty},\ _{\ell'=1}|\tilde{a}^{s}_{\ell,\ell'}|<\infty$，则对于每组 ℓ、$\ell'\in\mathbb{N}$，系数$a_{\ell,\ \ell'}$可通过以下方式唯一确定

$$a_{\ell,\ell'}=\int_{\mathbb{M}}\int_{\mathbb{M}}K(\xi,\zeta)\,\overline{f_\ell}(\xi)\,f_{\ell'}(\zeta)\,d\mu(\xi)\,d\mu(\zeta).\tag{10}$$

证明。 将核的表示式(5)代入(10)，再利用估计式(3)交换求和与积分的次序，即可得到该结论，因为这意味着绝对可和性。

□

注意，由于基函数的光滑性以及级数表示绝对收敛，上一引理中的核总是连续的。

引理 5. 设 $K:\ \mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{C}$ 是满足(9)的核，其中 $s\ge d/4$满足 $K(\xi,\zeta)=K(\zeta,\xi)$。那么，当且仅当对所有 $k\in\mathbb{N}$，矩阵$A_k:=(a_{\ell,\ell'})_{\ell,\ \ell'=1}^{k}$ 是半正定的， K才是正定的。

证明。 首先假设对于所有 k， A_k 都是正定的，且 K 如上所述。对于任意一组互异点 $\Xi\subset\mathbb{M}$、任意 $c\in\mathbb{C}^{|\Xi|}$，以及证明定理 3 时所用的 y，

$$\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi}c_\xi\overline{c_\zeta}K(\xi,\zeta)=\sum_{\ell,\ell'=1}^{\infty}y_\ell a_{\ell,\ell'}\overline{y_{\ell'}}=\lim_{k\to\infty}\sum_{\ell,\ell'=1}^{k}y_\ell a_{\ell,\ell'}\overline{y_{\ell'}}\ge 0.$$

反方向可由反证法得出：假设 A_k 不是半正定的，这与算子 A 在 ℓ^2 上的正定性矛盾；而推论 1 已证明，该正定性是核正定的必要条件。

□

定理 4。 设 K 是一个具有形式 (5) 的厄米核，并且对 $s\ge d/4$ 满足 (9) 。若 $\tilde{A}^{d/4}$ 满足一致严格对角占优性质，则该核严格正定：

$$\sum_{\ell'\neq\ell}\left|\tilde{a}^{d/4}_{\ell,\ell'}\right|<\sigma\left|\tilde{a}^{d/4}_{\ell,\ell}\right|,\quad\forall\ell\in\mathbb{N},$$

其中 $0<\sigma<1$ 与 ℓ 相互独立。

证明。我们发现，$\tilde{A}^{d/4}$ 的所有子矩阵都严格对角占优，且对角元素非零，因此是正定的。我们可以将 $\tilde{A}^{d/4}$ 的 Cholesky 分解定义为其子矩阵的有限维 Cholesky 分解的极限。我们将 $\tilde{A}^{d/4} = LL^*$ 记为无限维 Cholesky 分解矩阵；该矩阵存在，因为根据式 (9)，$\tilde{A}^{d/4}$ 在 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ 上正定且有界，L^* 是 L 的复共轭转置。

将 Cholesky 分解代入二次型

$$\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) = \|L\mathbf{y}\|_2^2, \tag{11}$$

其中 $\tilde{\mathbf{y}} = \left(\frac{1}{1+\lambda_\ell}()^{d/4} y_\ell\right)_{\ell=1}$ 是有界序列，这是由 (3) 中 Laplace-Beltrami 算子的特征函数估计得出的；由于其绝对可和性，我们可以重新排列求和顺序。

假设存在有界序列空间 $\ell^\infty(\mathbb{N})$中的一个元素，使得 $L^*x = 0$，那么 $L(L^*x) = \tilde{A}^{d/4}x = 0$；由于 L 的三角结构，并且根据 $\|L^*x\|^2 = x^T\tilde{A}^{d/4}x < \infty$（这又是 (9) 的推论），对于所有有界 x，L^*x 逐元素有限，因此我们可以交换乘法顺序。

现在只需证明，在有界序列空间中不存在满足 $\tilde{A}^{d/4}x = 0.$ 的特征向量。因此，我们可以采用 [24] 定理 1b 中关于无限矩阵非奇异性的结果。为方便读者，我们简要回顾其论证。

由严格对角占优可推知，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\tilde{a}_{\ell\,\ell}^{d/4}$，均非零。假设存在 $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$，使得 $\tilde{A}^{d/4}x = 0$ 且 $\|x\|_\infty = 1$。于是

$$\sum_{\ell'=1}^{\infty} \tilde{a}_{\ell,\ell'}^{d/4} x_{\ell'} = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; \sum_{\ell'\neq\ell}^{\infty} \tilde{a}_{\ell,\ell'}^{d/4} x_{\ell'} = -\tilde{a}_{\ell,\ell}^{d/4} x_\ell, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

由于 x 的范数为 1，存在一个值 $\ell \in \mathbb{N}$，使得 $|x_\ell| > \sigma$，并且

$$\sum_{\ell'\neq\ell}^{\infty} \left|\tilde{a}_{\ell,\ell'}^{d/4}\right| \geq \sum_{\ell'\neq\ell}^{\infty} \left|\tilde{a}_{\ell,\ell'}^{d/4} x_{\ell'}\right| \geq \left|\tilde{a}_{\ell,\ell}^{d/4}\right| \sigma.$$

这与假设矛盾，而使 (11) 等于零的唯一可能取值是 $\tilde{\mathbf{y}} = 0$。根据该序列的定义以及基函数的线性无关性可知，只有当对所有 $\xi \in \Xi$，$c_\xi = 0$ 时，这种情况才可能发生。

□

上述矩阵条件称为严格一致对角占优，它比对角占优更强。下一定理中，我们将证明，如果对 s增加一个更强的假设，那么 A^s 的对角占优就足够了。

定理 5. 设 $s \geq d/4$ 满足 $\sum_{\ell=0} (1+\lambda_\ell)^{-2s} |f_\ell(\xi)|^2 < \infty$，且形式为（5）的厄米核满足

$$\sum_{\ell,\ell'=0}^{\infty} \left|\tilde{a}^s_{\ell,\ell'}\right| < \infty,$$

那么，只要 A^s 严格对角占优，核就严格正定。

证明。与上一定理的证明类似，我们将 $A^s = LL^*$ 记为无限Cholesky分解矩阵；它之所以存在，是因为子矩阵 A^s_k 正定，且由 (9) 和$s \geq d/4$可知，矩阵在 $\ell^\infty(\mathbb{N})$ 上有界。

再次将 Cholesky 分解代入二次型，得到

$$\sum_{\xi\in\Xi}\sum_{\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) = \|L\mathbf{y}\|_2^2, \tag{12}$$

其中，$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{1+\lambda_\ell()^s} y_\ell\right)_{\ell=1}$ 现在是一个 $\ell^2(\mathbb{N})$ 序列，这是由关于 s 的条件所致。运用与上一个证明相同的论证，我们发现，若存在某个$x \in \ell^2(\mathbb{N})$ $L^*x = 0$，则 $L(L^*x) = \tilde{A}^s x = 0$。

因此，只需证明在空间$\ell^2(\mathbb{N})$中不存在满足 $\tilde{A}^s x = 0$.的特征向量

现在应用 [11]定理 5.1 即可得到该结果。为完整起见，我们针对当前情形给出调整后的证明。假设相对于零序列空间，0 是 A^s的一个特征值；该空间包含 $\ell^2(\mathbb{N})$，那么存在一个不等于零的零序列 x，使得 $A^s x = 0$。由于 $|x_i| \to 0$ 作为$i \to \infty$ 集合 $\{|x_i| : \ i \in \mathbb{N}\}$ 存在最大值，令 k 为使 $|x_k|$ 取最大值的整数。我们得到

$$|\tilde{a}^s_{k,k}||x_k| \leq \sum_{\ell\neq k} |\tilde{a}^s_{k,\ell}||x_\ell| \leq \sum_{\ell\neq k} |\tilde{a}^s_{k,\ell}||x_k|.$$

这意味着

$$|\tilde{a}^s_{k,k}| \leq \sum_{\ell\neq k} |\tilde{a}^s_{k,\ell}|,$$

这与严格对角占优矛盾。

□

2.1 卷积形式的核

对于一类特殊的核，我们可以简化严格正定性的条件。这类核也在 [8] 中进行过研究，并且能够大幅简化问题。设 K 为如下形式的核

$$K(\xi,\zeta) = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell f_\ell(\xi)\overline{f_\ell(\zeta)}, \qquad \forall \xi,\zeta \in \mathbb{M}. \tag{13}$$

我们将这类核称为卷积形式核，并定义集合

$$\mathcal{F} := \{\ell \in \mathbb{N} : a_\ell > 0\}.$$

定理 6。 形式如式(13) 的连续核是正定的，当且仅当 $a_\ell \geq 0$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立。它严格正定，当且仅当它是正定的，并且对任意有限集的互异点 Ξ，$\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\ell(\xi) = 0$，若对所有 $\ell \in \mathcal{F}$ 成立，则对所有 $\xi \in \Xi$都有 $c_\xi = 0$ 。在这种情况下，我们称 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{M}$上诱导严格正定性。

证明。 定理的第一部分直接由引理 2 得出，并且已在 [8] 中陈述。我们用反证法证明第二个结论，并假设 K 是连续正定的，但不是严格正定的。若 K 不是严格正定的，则存在一个非空的互异点集 Ξ 以及不全为零的系数 c_ξ ，使得

$$\sum_{\xi,\zeta\in\Xi} c_\xi \overline{c_\zeta} K(\xi,\zeta) = 0.$$

这等价于

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell y_\ell \overline{y_\ell} = 0, \tag{14}$$

其中 $y_\ell = \sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\ell(\xi)$，且由于连续性，求和次序可以交换。

由于我们知道所有加项都非负（因为 a_ℓ 非负），因此总和只有在所有加项都为零时才可能为零。对于指标$\ell \in \mathcal{F}$，这意味着 $y_\ell = 0$。

但根据引理的条件，这意味着对所有 $\xi \in \Xi$都有 $c_\xi = 0$ ，这与证明中的假设矛盾。

□

2.2 乘积流形上的结构

对于流形的乘积，我们可以将定理2.5, [18]中针对球面证明的一个充分条件推广。我们研究乘积结构 $\mathbb{M} \times \mathbb{H}$的流形上的严格正定性，其中 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{H}$ 均为连通紧黎曼流形。我们将再次聚焦于卷积核。现在，根据 [8], ，我们可以定义乘积流形上拉普拉斯-贝尔特拉米算子的特征函数的标准正交基，其形式为

$$f_\ell(\xi) g_j(\zeta), \quad (\xi,\zeta) \in \mathbb{M} \times \mathbb{H}, \tag{15}$$

其中， f_ℓ 是上一节中描述的 $L^2(\mathbb{M})$的基，而g_j 是 $L^2(\mathbb{H})$的类似标准正交基。

这些卷积形式核可以表示为式（13）所示的级数展开。具体而言，这样一个连续且厄米的核具有如下形式的表示：

$$K((\xi,\zeta),(\xi',\zeta')) = \sum_{(\ell,j)\in\mathbb{N}^2} a_{(\ell,j)} f_\ell(\xi) g_j(\zeta) \overline{f_\ell(\zeta') g_j(\xi')}, \tag{16}$$

其中 $a_{(\ell,j)} \in \mathbb{R}$ 以及 $(\xi,\ \zeta)$、$(\xi',\ \zeta') \in \mathbb{M}\times\mathbb{H}$。现在我们将推导此类核严格正定的充分条件。

引理 6. 形如(16) 的核是正定的，若对所有$(\ell, j) \in \mathbb{N}^2,\ \ a_{(\ell,j)} \geq 0$ 。若集合

$$\mathcal{G} := \{\ell:\ \ \mathcal{G}_\ell \text{ 在 } \mathbb{H}\} \text{ 上诱导严格正定性}$$

在 $\mathbb{M}$ 上诱导严格正定性，其中 $\mathcal{G}_\ell = \{j \in \mathbb{N}:\ (\ell, j) \in \mathcal{F}\}$。

证明。 第一部分直接由引理 6 得出。现在假设

$$\mathcal{G} := \{\ell : \mathcal{G}_\ell \text{ induces strict positive definiteness on } \mathbb{H}\}$$

在 $\mathbb{M}$ 上诱导严格正定性。根据针对乘积情形改写的引理 6，我们证明，对于 $\mathbb{M}\times\mathbb{H}$ 中任意有限个互不相同的数据点，记为 Ξ，假设

$$\sum_{(\xi,\zeta)\in\Xi} c_{(\xi,\zeta)} f_\ell(\xi) g_j(\zeta) = 0, \quad \forall\ (\ell, j) \in \mathcal{F}, \tag{17}$$

这将意味着所有系数都为零。最后一个公式经过调整，只对 ζ first 的不同取值求和。因此我们定义 $\Xi^1:\ \{\zeta \in \mathbb{H} : \exists(\xi,\ \zeta) \in \Xi\}$ 和 $\Xi_\zeta := \{\xi : (\xi,\ \zeta) \in \Xi\}$，并得到

$$\sum_{\zeta\in\Xi^1} \left(\sum_{\xi\in\Xi_\zeta} c_{(\xi,\zeta)} f_\ell(\xi) \right) g_j(\zeta) = 0, \quad \forall\ (\ell, j) \in \mathcal{F}.$$

外层求和必须为零，特别是对所有满足 $\ell \in \mathcal{G}$ 的有序对 $(\ell,\ j) \in \mathcal{F}$ 都成立。固定 $\ell \in \mathcal{G}$ 可知，$\mathcal{G}_\ell$ 在 $\mathbb{H}$ 上诱导出严格正定性；又由于所有 $\zeta \in \Xi^1$ 彼此不同，

$$\sum_{\zeta\in\Xi^1} \left(\sum_{\xi\in\Xi_\zeta} c_{(\xi,\zeta)} f_\ell(\xi) \right) g_j(\zeta) = 0, \quad \forall j \in \mathcal{G}_\ell,$$

意味着

$$\sum_{\xi\in\Xi_\zeta} c_{(\xi,\zeta)} f_\ell(\xi) = 0, \quad \forall \ell \in \mathcal{G}.$$

最后一个方程意味着，对于所有（$\xi,\ \zeta$），$c_{(\xi,\zeta)} = 0 \in \Xi$，因为所有 $\xi \in \Xi_\zeta$ 都彼此不同，且 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{M}$上具有严格正定性。 □

3 齐性流形上的严格正定性

我们额外假设流形是齐性的，并讨论这一假设对一般情形所带来的变化。我们用 G 表示该流形的等距变换群；由于流形是齐性的，该群在其上具有传递作用。

在 [13] 中讨论了这一情形下拉普拉斯算子的特征函数，我们沿用上一节关于特征函数和特征值的记号，并总结其附加性质。

由拉普拉斯算子在等距变换下的不变性，我们知道对于任意 $g \in G$:

$$\triangle f_\ell(g(\xi)) = \lambda_\ell f_\ell(g(\xi))$$

且 $f_\ell \cdot g$ 是与 f_ℓ 对应的同一特征值的特征函数。

我们引用 [13] 中关于特征函数的加法公式（引理 3.1 和定理 3.2）。从现在起，我们使用指标 k 来枚举拉普拉斯算子的不同特征值，$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$。对于任意 $\xi_0 \in \mathbb{M}$ 以及维数为 m_k 、对应于特征值 λ_k 的 $\triangle$ 的特征空间H_k ，存在唯一的函数 $f^k_{\xi_0}$ 满足

1. 它关于 ξ_0 是分带的，2. $f^k_{\xi_0}(\xi_0) = m_k^{1/2}$ ，3. $f^k_{\xi_0}$ 与 H_k 中任何在 ξ_0 处为零的函数正交，4. $\int_{\mathbb{M}} (f^k_{\xi_0}(\zeta))^2 \, d\mu(\zeta) = 1$。

此外，对于 H_k $f_{1,\,k}$，……，$f_{m_k,\,k}$ 的任意标准正交基，以及每个 ξ，$\zeta \in \mathbb{M}$ ，

$$\sum_{j=1}^{m_k} f_{j,k}(\xi)\overline{f_{j,k}(\zeta)} = m_k^{1/2} f^k_\zeta(\xi) = m_k^{1/2} f^k_\xi(\zeta). \tag{18}$$

我们对上一节中的级数表示 (13) 作如下调整:

$$K(\xi,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} d_{j,k} f_{j,k}(\xi)\overline{f_{j,k}(\zeta)}, \quad d_{j,k} \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

其中，$f_{j,\,k}$、$j = 1$，……，m_k 是 H_k 的一个标准正交基。

我们总结了此类核严格正定性的刻画，类似于针对球面所得的情形。对于形式如 (19) 的正定核，我们定义

$$\mathcal{F} := \{(j,k) : \, d_{j,k} > 0\}, \quad A_k := \{j : (j,k) \in \mathcal{F}\}, \quad \mathcal{N} = \{k : k \in \mathbb{Z}_+ \wedge \exists d_{j,k} \neq 0\}.$$

定理 7. 对于如 (19) 所示的连续正定核，以下条件等价：

1. K 在 $\mathbb{M}$上是严格正定的。
2. 对任意由互异点组成的有限集 Ξ, $\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_{j,k}(\xi) = 0$，对于所有$(j,k) \in \mathcal{F}$，有 $c_\xi = 0$ 对所有 $\xi \in \Xi$ 成立。
3. 对任意由互异点组成的有限集 $\Xi \subset \mathbb{M}$,

$$\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi \sum_{j\in A_k} f_{j,k}(\xi)\overline{f_{j,k}(\zeta)} = 0,\ \forall k \in N, \zeta \in \mathbb{M},\ implies\ c_\xi = 0,\ \forall \xi \in \Xi.$$

证明。 定理 6 已经证明了条件一和条件二等价，只需将其推广到双指标情形。利用特征函数 (18) 的加法公式，并注意到特征函数线性无关，我们发现，最后一项为零当且仅当

$$\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_{j,k}(\xi) = 0$$

对所有 $j = 1, \ldots, m_k$ 以及所有 $k \in \mathcal{N}$ 均成立。 □

我们进一步定义一类 G 不变核。这些核已在 [20] 和 [22] 中研究过，但其推导采用了嵌入的方法，因此得到的表示略有不同。所有形如以下形式的核

$$K(\xi,\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k f_\xi^k(\zeta), \quad d_k \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

在 G 下保持不变。对于这些核，我们定义集合

$$\mathcal{G} : \{k : d_k > 0\}$$

并由上一个定理得到这一结论。

推论 2。 形式为(20) 的连续 G-不变正定核，当且仅当对于任意有限个不同点 $\Xi \subset \mathbb{M}$时，是严格正定的，

$$\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_\xi^k(\zeta) = 0,\ \forall k \in \mathcal{G}, \zeta \in \mathbb{M},\ implies\ c_\xi = 0,\ \forall \xi \in \Xi.$$

我们称这样的集合使 G-不变核具有严格正定性。

根据 G 不变核的严格正定性，可以推导出形式为 (19) 的核所满足的条件。这在应用中很有用，因为对 G 不变核的研究更为深入，而且在许多情形下，存在对诱导严格正定性的集合 $\mathcal{K}$ 的简单刻画。对于卷积形式的核，我们定义 $\mathbb{N}$ 的两个子集：

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= \{k \in \mathbb{N} :\ \exists j \in \{1, \ldots, m_k\} \text{ with } d_{j,k} \neq 0\}, \\ \mathcal{L} &:= \{k \in \mathbb{N} :\ d_{j,k} > 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, m_k\}\}. \end{aligned} \tag{21}$$

根据定义，显然对于任意核 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{U}$，等式均成立（但成立的不仅限于） G 不变核。

引理 7。 *1.* 对于由(19) 给出的连续正定核，要使其严格正定，必要条件是 $\mathcal{U}$ 对 $\mathbb{M}$ 上的 G-不变核诱导严格正定性。

2. 对于由(19) 给出的连续正定核，要使其严格正定，充分条件是 $\mathcal{L}$ 对 $\mathbb{M}$ 上的 G-不变核诱导严格正定性。

证明。 我们用反证法证明 (1)。假设 $\mathcal{U}$ 不会对齐性核诱导严格正定性。那么存在一组数据点 $\xi \in \Xi$及不全为零的系数，满足：

$$\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi \sum_{j=1}^{m_k} f_{j,k}(\xi)\overline{f}_{j,k}(\zeta) \equiv 0, \quad \forall k \in \mathcal{U}, \zeta \in \mathbb{M}.$$

交换两个有限求和的次序，并利用函数 $f_{k,\ j}(\zeta)$ 的线性无关性，可得

$$\sum_{\xi\in\Xi} c_\xi f_{j,k}(\xi) = 0, \quad \forall k \in \mathcal{U},\ j = 1, \ldots, m_k.$$

最后一个结论与 (6) 中对 K 严格正定性的刻画相矛盾。第二个结论直接由定理 7 中 (1) 与 (2) 的等价性得出。

□

对于 d–球面情形，引理所蕴含的性质已在 [4]中阐述；对于双点齐性流形情形，相关结果见 [15]。后者还介绍了一种构造非各向同性核的方法，这种核所需的正系数明显少于各向同性核。作为另一个例子，我们研究双点齐性流形的乘积。

3.1 示例：二点齐性流形的乘积

下一节将研究具有乘积结构 $\mathbb{M} \times \mathbb{H}$ 的流形上的严格正定性，其中 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{H}$ 均为二点齐性流形。因此，正如在 [25], 中所证明的，它们同构于以下五种情形之一

$$\mathbb{S}^{d-1}, \quad P^{d-1}(\mathbb{R}), \quad P^{d-1}(\mathbb{C}), \quad P^{d-1}(H), \quad P^{16}(Cay).$$

沿用上一节的记号， $d(\cdot,\cdot)$ 表示其两个自变量之间的距离，则 [13] 中的加法公式为

$$\sum_{j=1}^{m_k} f_{k,j}(\xi)\overline{f_{k,j}(\zeta)} = c_k P_{\epsilon k}^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\left(\epsilon^{-1}d(\xi,\zeta)\right)\right), \quad \xi,\zeta \in \mathbb{M}, \tag{22}$$

其中

$$c_k = \frac{\Gamma(\beta+1)(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)\Gamma(k+\beta+1)}$$

并且在全文中， $P_k^{(\alpha,\beta)}$ 表示按以下方式归一化的雅可比多项式

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}. \tag{23}$$

系数满足$\alpha = \frac{d-3}{2}$， β 取值为$(d-3)/2$， $-1/2$，0，1，3，具体取值取决于所研究的流形属于五种情形中的哪一种；并且 $\epsilon = 1$ ，除非$\mathbb{M} = P^{d-1}(\mathbb{R})$ ，此时 $\epsilon = 2$。

具体而言，在这种情形下，一个形如（16）的核可以表示为

$$K((\xi,\zeta),(\xi',\zeta')) = \sum_{k,k'=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\sum_{j'=1}^{m_{k'}} a_{j,j',k,k'} f_{j,k}(\xi) g_{j',k'}(\zeta)\overline{f_{j,k}(\zeta') g_{j',k'}(\xi')}, \tag{24}$$

对于正定核，$a_{j,\ j',\ k,\ k'} \geq 0$。接下来，我们将利用引理 6 以及关于各向同性核的已有结果，推导该核严格正定的充分条件。

对于形如（24）的核，定义 $\mathbb{N}^2$的以下两个子集：

$$\mathcal{J} := \left\{(k,k') \in \mathbb{N}^2 :\ \exists (j,j') \text{ with } a_{j,j',k,k'} > 0\right\},$$
$$\mathcal{F} := \left\{(k,k') \in \mathbb{N}^2 :\ a_{k,k',j,j'} > 0\ \forall (j,j')\right\}.$$

对于球面乘积的情形，我们还分别定义 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{F}$ 的以下子集：

$$\mathcal{J}^{0,0} := \mathcal{J} \cap \{2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}\}$$
$$\mathcal{J}^{0,1} := \mathcal{J} \cap \{2\mathbb{N} \times (2\mathbb{N}+1)\}$$
$$\mathcal{J}^{1,0} := \mathcal{J} \cap \{(2\mathbb{N}+1) \times 2\mathbb{N}\}$$
$$\mathcal{J}^{1,1} := \mathcal{J} \cap \{(2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)\}.$$

而对于圆： $\mathcal{J}_k := \{k' : (k,k') \in \mathcal{J}\}$。

推论 3。 对于形式为(24) 的连续正定核，在$\mathbb{M} \times \mathbb{H}$上，我们总结了取决于 $\mathbb{M}$ 和$\mathbb{H}$选择的明确条件：

1. 设 $\mathbb{M} = \mathbb{S}^{d'-1}$ 满足 $d' > 2$， $\mathbb{H} \neq \mathbb{S}^{d-1}$ 是双点齐性流形。要使 K 严格正定，必要（充分）条件是$\mathcal{J}$（$\mathcal{F}$）包含序列$(k_r, k_r')_{r=1}^{\infty}$和$(j_r, j_r')_{r=1}^{\infty}$，其中 $\{k_r\} \in 2\mathbb{N}$ 和$\{j_r\} \in 2\mathbb{N}+1$，且$\lim_{r\to\infty} k_r = \lim_{r\to\infty} j_r = \lim_{r\to\infty} k_r' = \lim_{r\to\infty} j_r' = \infty$。

2. 设 $\mathbb{M}$、 $\mathbb{H} \neq \mathbb{S}^{d-1}$ 为二点齐性流形。要使 K 严格正定，必要（充分）条件是 $\mathcal{J}(\mathcal{F})$包含一个序列$(k_r, k_r')_{r=1}^{\infty}$，满足$\lim_{r\to\infty} k_r = \lim_{r\to\infty} k_r' = \infty$。

3. 设 $\mathbb{M}=\mathbb{S}^{d-1}$、 $\mathbb{H}=\mathbb{S}^{d'-1}$ 满足 d、 $d'>2$。要使 K 严格正定，必要（充分）条件是 $\mathcal{J}^{i,j}(\mathcal{F}^{i,j})$包含一个序列$(k_r{}^{i,j},k_r'{}^{i,j})_{r=1}^{\infty}$，满足$\lim_{r\to\infty}k^{i,}{}_r{}^{j}=\lim_{r\to\infty}k_r'{}^{i,}{}^{j}=\infty$，对每一对$(i,j)\in\{0,1\}^2$均成立。

4. 令 $\mathbb{M}=\mathbb{S}^{d-1}$、 $\mathbb{H}=\mathbb{S}^1$。要使 K 严格正定，必要（充分）条件是对每个 $\gamma\geq 0$, 集合

$$\{k\in\mathbb{Z}:\mathcal{J}_{|k|}\cap\mathbb{N}_{\geq\gamma}\cap(2\mathbb{Z}+1)\neq\emptyset\},$$
$$\{k\in\mathbb{Z}:\mathcal{J}_{|k|}\cap\mathbb{N}_{\geq\gamma}\cap(2\mathbb{Z})\neq\emptyset\}$$

（充分条件的情形则为

$$\{k\in\mathbb{Z}:\mathcal{F}_{|k|}\cap\mathbb{N}_{\geq\gamma}\cap(2\mathbb{Z}+1)\neq\emptyset\},$$
$$\{k\in\mathbb{Z}:\mathcal{F}_{|k|}\cap\mathbb{N}_{\geq\gamma}\cap(2\mathbb{Z})\neq\emptyset\})$$

与每个完整等差数列相交。

5. 设 $\mathbb{M}\neq\mathbb{S}^{d-1}$ 是一个二点齐性流形， $\mathbb{H}=\mathbb{S}^1$。要使 K 严格正定，必要（充分）条件是对每个 $\gamma>0$，集合

$$\{k\in\mathbb{Z}:\ \mathcal{J}_{|k|}\cap\mathbb{N}_{\geq\gamma}\neq\emptyset\},$$

（充分条件的情形则为

$$\{k\in\mathbb{Z}:\ \mathcal{F}_{|k|}\cap\mathbb{N}_{\geq\gamma}\neq\emptyset\},)$$

与每个完整等差数列相交。

6. 设 $\mathbb{H}=\mathbb{M}=\mathbb{S}^1$。要使 K 严格正定，必要（充分）条件是集合

$$\{(k,l):(|k|,|l|)\in\mathcal{J}\}$$

（充分情形下则是

$$\{(k,l):(|k|,|l|)\in\mathcal{F}\})$$

与 $\mathbb{Z}^2$ 的每个具有（a,b）$\mathbb{Z}+$（$0,d$）$\mathbb{Z},a,d>0$.形式的子群的所有平移均相交

证明。 由引理 7 对乘积记法的改写可得:

a）要使具有（24）形式的连续核严格正定，必要条件是 $\mathcal{J}$ 对 $\mathbb{M}\times\mathbb{H}$ 上的各向同性核具有严格正定性。b）要使由方程（24）给出的连续核严格正定，充分条件是 $\mathcal{F}$ 对 $\mathbb{M}\times\mathbb{H}$ 和 $a_{j,\ j',\ k,\ k'}\geq 0$上的各向同性核具有严格正定性。

这些结果现可由各向同性情形推出，而这些情形已分别在定理 4.5 [2] 中的 1. 、定理 4.3 [2] 中的 2. 、定理 1.2 [16] 中的 3. 、定理 3.11 [18] 中的 4. 、定理 4.2 [18] 中的 5. 以及定理 1.2 [17] 中的 6. 中得到证明。 □

致谢

Jean Carlo Guella 获得了圣保罗研究基金会（FAPESP）拨款 2021/04226-0 的资助。J. J¨ager 的工作得到了德国研究联合会（DFG）的支持，该支持属于研究项目 JA 3033/2-1，项目编号为 461449252。

参考文献

[1] V. S. Barbosa 和 V. A. Menegatto，双点紧致齐性空间上的严格正定核，Mathematical Inequalities and Ap- plications **19** (2016)，743–756。[2] V. S. Barbosa 和 V. A. Menegatto，紧致双点齐性空间乘积上的严格正定性，积分变换与特殊函数**28** (2017)，第 1 期，56–73。[3] C. Berg 和 E. Porcu，从 *Schoenberg* 系数到 *Schoenberg* 函数，Constructive Approximation **45** (2017)，217–241。[4] M. Buhmann 和 J. J¨ager，二维球面上的严格正定核：从径向对称性到特征值块结构，IMA Journal of Nu- merical Analysis (2021)。[5] ,*d* 维球面上卷积核与轴对称核的严格正定性，J Fourier Anal Appl**28** (2022)，40。[6] E. De Vito、N. M¨ucke 和 L. Rosasco，流形上的再生核希尔伯特空间：*Sobolev* 空间与扩散空间，Analysis and Applications (2020)，1–34。[7]H. Donnelly，紧黎曼流形上拉普拉斯算子的特征函数，Asian Journal of Mathematics **10** (2006)，第 1 期，115–126。[8] N. Dyn、F. J. Narcowich 和 J. D. Ward，黎曼流形上插值与逼近的框架，《逼近理论与优化：献给 M.J.D. Powell 的文集》（M. Buhmann 和 A. Iserles 编），剑桥大学出版社，1997 年，第 133–144 页。[9]N. Dyn、F. J. Narcowich 和 J. D. Ward，黎曼流形上广义插值的变分原理与 *Sobolev* 型估计，Constructive Approximation **15** (1999)，175–208。

[10] X. Emery、E. Porcu 和 P. G. Bissiri，球面上的轴对称随机场半参数类，《StochasticEnvironmental Research and Risk Assessment》**33** (2019)，1863–1874。[11] FO Farid，对角占优矩阵可逆性的判据，《Linear algebra and its Applications》**215** (1995)，63–93。[12] B. Fornberg 和 N. Flyer，径向基函数入门及其在地球科学中的应用，工业与应用数学学会，2015。

[13] E. M. Gin´e，拉普拉斯算子特征函数的加法公式，《Advances in Mathematics》**18** (1975)，第 1 期，102–107。[14] T. Gneiting，球面上的严格与非严格正定函数，《Bernoulli》**19** (2013)，1327–1349。[15] J. C. Guella 和 J. J¨ager，双点齐性流形上的严格正定非各向同性核：渐近方法，arXiv 电子预印本（2022），arXiv:2205.07396。[16] J. C. Guella 和 V. A. Menegatto，球面直积上的严格正定核，《数学分析与应用杂志》**435**(2016)，286–301。[17] ，环面上的严格正定核，《Constructive Approximation》**46** (2017)，271–284。[18] J. C. Guella、V. A Menegatto 和 A. P. Peron，球面直积上的严格正定核 *II*，《SIGMA. 对称性、可积性与几何：方法与应用》**12** (2016)，103。[19] S. Hubbert、Q. T. L^e Gia 和 T. M. Morton，《球面径向基函数：理论与应用》，Springer，2015。[20] J. Levesley 和 D. L. Ragozin，齐性流形上的径向基插值：收敛速度，《Advances in Computational Mathematics》**27**(2007)，237–246。[21] F. J. Narcowich，黎曼流形上的广义 *Hermite* 插值与正定核，《数学分析与应用杂志》**190** (1995)，165–193。[22] C. R. Odell，紧齐性空间上的核逼近，博士论文，莱斯特大学，2012。[23] E. Porcu、S Castruccio、A Alegria 和 P Crippa，全球数据的轴对称模型：地统计学与随机生成器之间的探索，《Environmetrics》**30** (2019)，第 1 期，e2555。[24] PN Shivakumar、JJ Williams 和 N Rudraiah，无限矩阵的特征值，《Linear Algebra and its Applications》**96** (1987)，35–63。[25] Hsien-Chung Wang，双点齐性空间，《Annals of Mathematics》（1952），177–191。