利用鬼成像光谱学高效估计线形

Ilaria Gianani,[1] *Luis L. S´anchez-Soto,*[2,3] *Aaron Z. Goldberg,*[4,5] 和 *Marco Barbieri*[1,6] *Dipartimento di Scienze, Università degli Studi Roma Tre Via della Vasca Navale 84 00146 Rome Italy*[*] , „ , , , , ,
[2] *Departamento de Óptica Facultad de Física Universidad Complutense 28040 Madrid Spain*
[3] *Max-Planck-Institut für die Physik des Lichts, 91058 Erlangen, Germany*[4] *National Research Council of Canada, Ottawa, Ontario K1N 5A2, Canada*[5] *Department of Physics, University of Ottawa, Ottawa, Ontario K1N 6N5, Canada*[6] *Istituto Nazionale di Ottica - CNR, Largo Enrico Fermi 6, 50125 Florence, Italy*

从具有宽透射轮廓的仪器所获取的数据中恢复原始光谱线形，是光谱学的一项基本原则。通过将测得谱线的矩作为基本变量，我们可以将问题转化为线性反演。然而，当只有有限个矩与问题相关时，其余矩便构成干扰参数。半参数模型能够将这些干扰参数纳入考量，从而确定估计目标矩时可达到的精度极限。我们通过一项简单的鬼成像光谱学演示，在实验中验证了这些极限。

arXiv:2301.08123v1 [quant-ph] 19 Jan 2023

光谱学是探索物质结构最重要的方法之一，在科学技术的诸多领域发挥着重要作用。一般而言，获取光谱信息包含两个不同的步骤：数据导入（预处理）和信息提取（后处理）。在第一阶段，原始数据会被转换为清理后的数据，以去除测量过程中产生的伪影，从而提高预测性能 [1]。后处理用于识别和量化光谱线，这需要分辨彼此重叠的光谱成分。

光谱组分的重叠是由其展宽造成的，而展宽可能是由仪器失真引起的。因此，将光谱分解为单条谱线需要使用光谱去卷积，这是一种在信号处理中经常遇到的逆问题。该主题已成为众多研究的对象。导数光谱学通常局限于一阶和二阶，是最早的去卷积方法之一，至今仍被广泛使用 [2]。傅里叶自去卷积是另一种常用选项 [3]。基于复杂数学工具的有效去卷积算法，例如数字滤波器 [4, 5], 、样条逼近 [6], 和蒂霍诺夫正则化 [7], ，可以在文献中以各种名称找到。近年来，机器学习技术（如神经网络 [8, 9] 和随机森林 [10], ）已被成功应用于这一问题，并取得了显著成效。因此，领域从业者可以使用许多实用的软件工具进行光谱去卷积。

尽管这些方法能够高效地重建光谱特征，但它们无法对任何实验所能达到的最终精度极限提供任何线索。因此，从现代量子视角重新审视这一问题似乎十分必要。这不仅能让我们确定这些严格界限，还能识别出最优的测量策略，最近已在一些相关问题中得到证明 [11, 12]。在此，我们介绍半参数估计在鬼成像光谱学背景下光谱去卷积问题中的应用。鬼成像光谱学已成为一种颇具吸引力的远程传感可能性 [13–15]。受成像启发 [16, 17]„ 我们可以利用半参数估计，在不依赖大规模矩阵求逆的情况下推导出适当的精度界限，并量化光谱仪仪器函数的不确定度如何影响我们的估计。

在我们的研究中，我们采用了图1所示的装置。我们通过参量下转换（PDC）产生光子对；这会在时频域中产生一对具有相关性的光子，为远程光谱轮廓重建奠定基础。其工作原理是利用这种频率关联，获取样品吸收的光谱信息 [13], 即使不使用频率敏感探测器监测样品所在的臂也可以做到这一点。闲置光子到达光谱对象后，由频率不敏感的“桶式”探测器测量。信号光子也通过单模光纤进行空间滤波，随后送入自制光谱仪。由于存在频率关联，符合计数的水平将与该光子能量下的透射率成正比。

要从测量光谱 $f(x)$ 推断真实光谱 $F(x)$ 的属性，需要求解第一类 Fredholm 积分方程

$$f(x) = \int H(x - x')F(x')\,dx'\,, \tag{1}$$

其中， $H(x)$ 是仪器函数（根据语境也称为脉冲响应或点扩散函数，参见补充材料）。核函数 $H(x)$ 的平滑特性导致了卷积过程 [18] 中的信息损失。此外，已有不少仪器函数的数学模型 [19]。在我们的实验中，可通过在光谱仪的

* ilaria.gianani@uniroma3.it

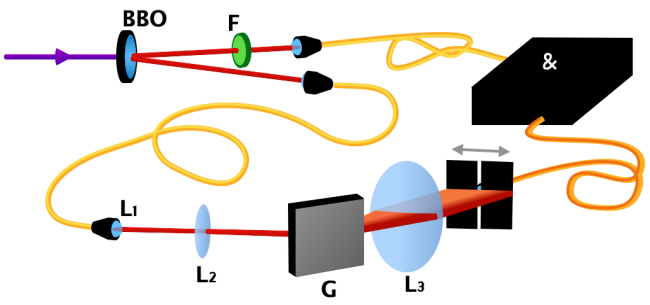

图1. 实验装置。一个功率为30 mW、波长为405 nm的连续波二极管激光器泵浦一块3 mm厚的硼酸钡（BBO）晶体，该晶体切割后用于非共线I型相位匹配。一个光子穿过光谱吸收物体，并由桶式探测器探测。对第二个光子进行频率探测：一台由准直器 L_1 和一片$f = 150$ mm透镜 L_2组成的望远镜，将光束准直后照射到一块1200线/mm的光栅上；随后，透镜 L_3 将光束聚焦到一条狭缝上，该透镜的焦距为$f = 50$ mm，狭缝宽度为100-μm。最后，多模光纤收集信号，通过栅格扫描完整测量所研究的光谱范围。

闲置臂中放置一个窄带滤波器来获取该函数，其宽度小于光谱仪的分辨率，由此得到图2a 所示的结果。这类似于天文观测中的标准做法：利用遥远的恒星作为参考，获得成像系统的点扩散函数 [20]。

我们将干涉滤波器用作光谱对象：重建轮廓的一个示例见图2b。需要注意的是，这两个滤波器覆盖不同的光谱区域：参量下转换中存在时空耦合，因此，尽管使用单模光纤有利于提高信噪比，却可能限制给定相位匹配配置下可用的频率范围。我们通过针对每次测量优化空间耦合解决了这一问题，从而确保测量仪器函数与光谱轮廓时的相位匹配条件相同。

在计量学框架中，测量光谱被视为一组随机变量，通常假定这些变量由一个参数化统计模型描述；也就是说，线型轮廓对有限个参数的依赖关系是已知的。随后，估计器仅根据测量结果预测未知参数。历史悠久的 Cram´er-Rao 界通过求费 Fisher 信息矩阵的逆，给出最优精度 [21]。然而，当数据无法先验地拟合到某个概率分布时，模型便成为无限维的。人们需要评估并求出模型中所有参数对应的费 Fisher 信息矩阵的逆，即使其中某些参数永远不会被估计。毋庸置疑，这种做法代价高昂；而借助近期为量子计量学理论发展出的工具，或可规避这一问题。为此，我们将真实线型轮廓的矩视为感兴趣的参数

真正线型轮廓的矩很重要

$$M_i = \int x^i F(x)\, dx. \tag{2}$$

这些矩（我们假定其取有限值）已在多个领域中得到有效应用。它们已用于评估原子和分子对光的吸收 [22]；也曾用于研究碰撞诱导吸收中涉及的势能 [23]，、谱线形理论 [24]，以及推断分子间作用力的信息 [25]。

然而，这些参数无法直接从测量轮廓 $f(x)$ 中获取。因此，我们必须考虑其矩

$$m_i = \int x^i f(x)\, dx\,. \tag{3}$$

以下推导的关键观察是，这些矩之间的关系由仪器函数的矩构成的下三角矩阵给出，我们将其记为$\mathbf{C}$，其元素为

$$C_{ij} = \binom{i}{j} \int H(x) x^{i-j} dx. \tag{4}$$

因此，反演（1）可化为无限层级 [16]

$$M_i = \sum_j (\mathbf{C}^{-1})_{ij}\, m_j\,, \tag{5}$$

其中 $i = 0$，1，2，.....。这有助于从估计 m_i 开始构造 M_i 的估计量。这不可避免地需要考虑一组取自位置 x_k 的离散数据点，以近似 $f(x)$ 的实际形状，从而得到一个估计量：

$$\check{m}_i = \frac{1}{N} \sum_k (x_k)^i N(x_k), \tag{6}$$

其中，$N(x_k)$ 是探测器平面上位置 x_k 处的计数率，且 $N = \sum_k N(x_k)$。

在我们的半参数方法中，我们处理具有无限多个自由度的模型。简而言之，我们希望估计由有限个参数（在本例中为矩）组成的一个小子集，并将其他参数视为干扰参数 [26]。令感兴趣参数为矩的任意线性组合：

$$\beta = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{M} = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{m}\,, \tag{7}$$

其中，上标 $\top$ 表示转置，向量 $\boldsymbol{\mu}$ 可以任意选取，但我们假设其分量与 M_is 相互独立。其值可通过直接数据处理进行估计，从而得到估计量 $\check{\beta} = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}^{-1}\, \check{\mathbf{m}}$。

为了评估该估计量的性能，我们需要将其与预期的 Cram´er-Rao

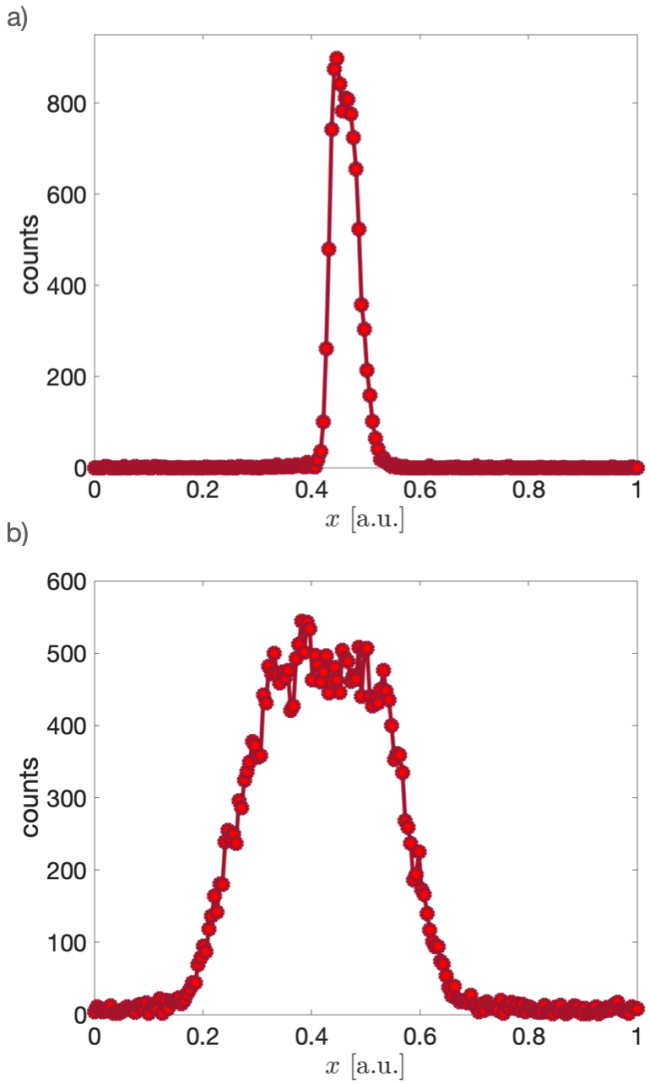

图 2. a）实验测得的仪器函数轮廓 $H(x)$：在我们的实验中，采用了中心波长为 853 纳米、半峰全宽为 0.85 纳米的滤波器。b）光谱对象的实验轮廓：这是一个中心波长为 810 纳米、半峰全宽为 7.3 纳米的超高斯滤波器。 x 轴以任意单位表示，并按有效扫描范围归一化。

界进行比较，该界由费 Fisher 信息矩阵给出。每个矩 M_i 仅取决于有限个矩 m_j，因此 $j \leq i$ [16]可以利用测得矩的样本均值M_i 以及构成 m_j前几行和列的有限个仪器响应函数矩 i ，为每个$\mathbf{C}$构造一个估计量。从形式上看，这个问题似乎可以直接通过线性反演来解决，而线性反演有多种方法可供选择，其中最著名的或许是最小二乘法 [27]。然而，这可能掩盖一些容易被忽视的陷阱：为该估计量赋予误差十分危险，因为与此类估计量相关联的费 Fisher 信息矩阵取决于线形。对这个无限维矩阵求逆，并将除 M_i 以外的无限多个参数视为干扰参数，以求得 M_i 估计精度下界，几乎是不可能的。这正是半参数估计 [28, 29]及其近期提出的量子版本 [30], 所研究的领域，也因此促使我们采用这种方法。

在半参数情形下，可以通过一个影响函数 [28, 29] 建立克拉美-罗界；对于我们的参数 β，该函数为$I_\beta(x) = \sum_{ij} \mu_i(\mathbf{C}^{-1})_{ij} x^j / N$。我们将光谱归一化至测量总强度 $\int f(x)dx = N$，并将仪器函数归一化为 1 $\int H(x) dx = 1$：这相当于考虑每个探测到的光子所携带的信息（见补充信息）。影响函数使我们能够确定克拉美-罗界：

$$Var(\check{\beta}) \geq \int I_\beta^2(x) f(x) dx, \tag{8}$$

其中 $Var(\cdot)$ 表示方差。这里， $f(x)$ 随后被解释为泊松分布随机变量 $n(x)$ 的统计均值所对应的密度：$d\bar{n}(x) = f(x)dx$。这个下界等价于随机泛函 $\int I_\beta(x) dn(x)$ 的方差（详情见补充信息）。这确保了当对 $f(x)$ 的采样足够密集时，估计量（6）确实能达到极限。

在光谱学中，感兴趣的参数通常是相对于归一化对象谱线的各阶矩。这等同于施加 $M_0 = 1$。因此，所有矩的估计量都定义为 ˇ β_0 = ˇβ/ˇM_0。这个新参数的方差会降低，并且可以用与（8）相同的半参数方法给出界限

$$Var(\check{\beta}_0) \geq \int I_{\text{eff},\beta}^2(x) f(x) dx\,, \tag{9}$$

采用经过修改的影响函数 $I_{\text{eff},\beta}(x) = I_\beta(x)$。这会使最小值降低，表明当所使用的资源较少、可获得的信息也较少时，约束信息最为重要。

在我们的实验中，我们采集了不同计数时间下的轮廓，因此符合计数 $N(x_k)$各不相同，导致符合总数 N也随之变化。我们使用估计量(6)处理这些数据，再通过(7)进行运算。作为示例，我们考虑矩 M_1、 M_2、 M_3 和 M_4的估计，其中M_0 归一化为 1。图3 总结了所达到精度的定量特征。不确定度通过蒙特卡洛程序评估：该程序生成泊松分布结果，并以测得的数值进行自助法处理。图3a仅考察归一化 $M_0 = 1$ 对不确定度的影响。红点表示预期的无约束方差，绿点表示有约束方差。这些

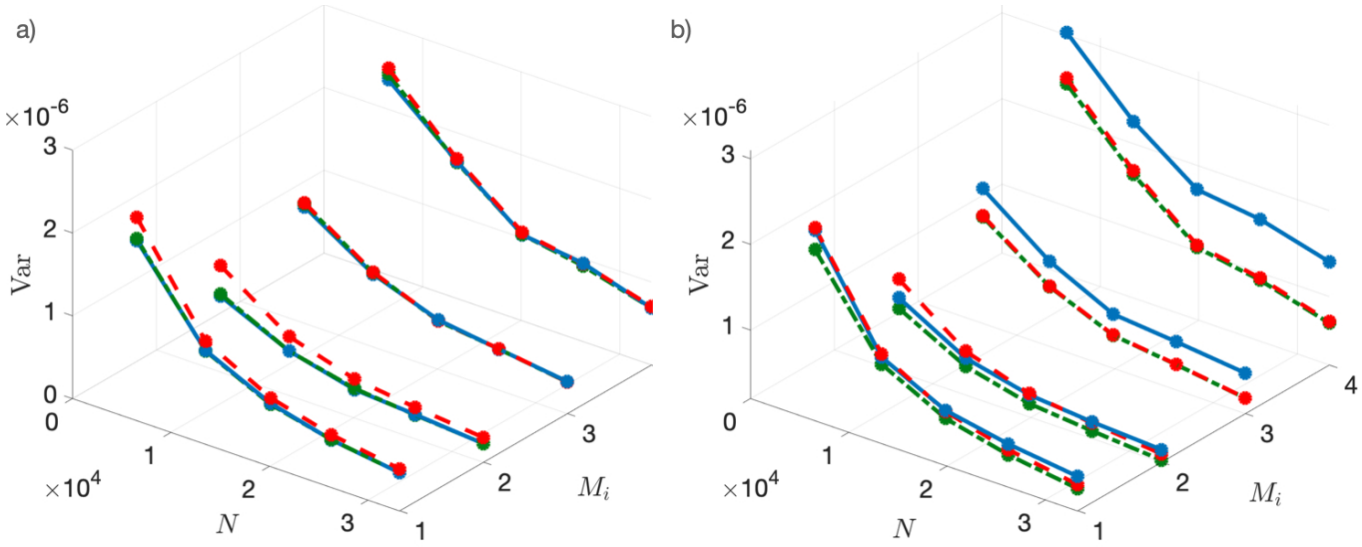

图3. a）通过蒙特卡洛程序（4000 个事件）估算的矩 M_i 的方差，其中 $f(x)$ 上存在泊松噪声（蓝色圆点，实线）；无约束的克拉美-罗界（红色圆点，虚线）和有约束的克拉美-罗界（绿色圆点，实线）。b）通过蒙特卡洛程序（4000 个事件）估算的矩 M_i 的方差，其中 $f(x)$ 和 $H(x)$ 上存在泊松噪声。

通过对(8)和(9)中的积分进行离散化来计算。蓝点表示蒙特卡洛误差；正如泊松变量所预期的那样，它们恰好落在绿点上。约束对精度的影响在 M_1 和 M_2上更为明显，而对高阶矩的影响则较小。

关键在于，只有在重建仪器函数 $H(x)$之后，才能从（1）进行估算。然而，上述分析假设 $H(x)$ 已知且精度任意高。事实上，这是从实验数据中提取的，而实验数据本身带有不确定性：量化这些不确定性对最终估算的影响，是本研究的主要目标之一。因此，我们重新运行了蒙特卡洛程序，以计入评估 $H(x)$ 时的实验不确定性，并由此计入 $\mathbf{C}$。与前文一样，我们采用泊松变量。我们注意到，这类数据通常是在亮度低得多的条件下采集的，因为准点源需要更窄的特征。图3b报告了与之前相同的四个矩的结果：影响的大小很大程度上取决于阶数；对于 M_1 和 M_2，影响虽较小，但对于 M_3 和 M_4 则变得更加显著。线条的位置和宽度都能可靠地测定，但要获取更详细的结构信息，代价更高。半参数方法的主要优点在于，它能确保这些精度估计考虑到干扰元素，因此是可靠的。

总之，本文提出的半参数理论解决了一个重要问题：在关于光谱的先验信息很少时，如何评估线形解卷积所能达到的精度上限，并高效估计光谱参数。我们预计，这些先进的统计方法将为许多光谱学应用带来进一步的见解。

资助 地平线2020 FET-OPEN-RIA STORMY-TUNE（资助协议编号：899587）；科学与创新部（资助编号 PID2021-127781NB-I00）；加拿大自然科学与工程研究委员会 PDF项目；加拿大国家研究委员会量子传感器挑战计划。

致谢 我们感谢 Andrea Chiuri、Fabio La Franca、Francesco Albarelli 和 Vincenzo Berardi 提供的宝贵讨论。AZG 谨此说明，加拿大国家研究委员会总部位于阿尔冈昆阿尼希纳贝人和莫霍克人的传统未割让领土上。

披露 作者声明不存在利益冲突。

数据可用性 本文所述结果的基础数据目前尚未公开，但可应合理请求向作者索取。

附录

A. 半参数估计

我们总结了最初发表于 [16]中的半参数估计方法。探测器的响应通过一组连续的输出 x来描述，这组输出抽象地称为探测器空间，也可能对应于物理坐标空间。一个分布

$dn(x)$的定义方式是：对于探测器空间的任意子集A，都可以测量计数率$n(A) = \int_A dn(x)$。将 $dn(x)$视为随机变量，其均值为 $d\bar{n}(x)$，且服从泊松分布——这也意味着有限计数率遵循相同的统计规律。对于探测器空间上的任意向量量$\mathbf{h}(x)$，期望值可表示为对平均计数的平均：

$$\mathrm{E}(\mathbf{h}) = \int \mathbf{h}(x) d\bar{n}(x), \tag{10}$$

而相应的协方差矩阵为

$$Var(\mathbf{h}) = \int \mathbf{h}(x)\mathbf{h}(x)^\top d\bar{n}(x). \tag{11}$$

我们可以在探测器空间上引入测度 $d\mu(x)$，从而得到平均计数的密度$f(x|\boldsymbol{\theta}) = d\bar{n}(x)/d\mu(x)$，即所谓的拉东-尼科迪姆导数。它可以依赖于一个参数向量 $\boldsymbol{\theta}$。进而，这确定了一个标量参数 $\beta(\boldsymbol{\theta})$，作为我们的目标。原则上，可以利用克拉美–罗下界（CRB）建立任意无偏估计量 $\check{}\beta$ 的方差下限 CRB_β。然而在实践中，直接求解需要对与 $\boldsymbol{\theta}$ 的各个元素相关联的高维 Fisher 信息矩阵求逆，而这些元素可能有无穷多个。半参数方法的优势在于无需求逆即可建立 CRB：事实上，这可以通过与 β 相关联的所谓影响函数 $I_\beta(x)$ 来实现，具体为

$$\mathrm{CRB}_\beta = \int I_\beta(x)^2 d\bar{n}(x). \tag{12}$$

如果能够写成以下形式，就很容易得到影响函数：

$$\beta = \int I_\beta(x) f(x) d\mu(x), \tag{13}$$

我们的实验正是这种情况。半参数处理还规定了如何修改影响函数，以考虑参数的约束。这些约束确实可能有助于降低相关的不确定性，而这一点必须反映在克拉美–罗下界中。

B. 栅格扫描成像和光谱测量的仪器函数

考虑一个一维强度分布为 $F(y)$ 的光源，它通过响应函数为 $S(x-y)$ 的光学系统到达探测平面。如果各贡献˜彼此非相干，则得到分布 $f(x) = \int S(x-y)F(y)dy$。这就是采用无限分辨率的直接成像探测器所测得的量。

相反，在探测平面上进行栅格扫描可获得一段范围内采集的信号 2ϵ：

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \tilde{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \int S(\xi - y) F(y) d\xi dy \end{aligned} \tag{14}$$

由于存在函数 $\Sigma(\xi)$，使得 $\int_{\xi_1}^{\xi_0} S(\xi) d\xi = \Sigma(\xi_1) - \Sigma(\xi_0)$，因此得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(\Sigma(x-y+\epsilon) - \Sigma(x-y-\epsilon)\right) F(y) dy \\ &= \int H(x-y) F(y) dy. \end{aligned} \tag{15}$$

因此，我们得到了栅格扫描的仪器函数 $H(x)$，与简单直接成像的情况相同。

C. 矩的估计

源的轮廓 $F(y)$ 可归一化为 $\int F(y)dy = 1$，从而将零阶矩固定为 $M_0 = 1$。仪器函数归一化至因子 τ，表示系统的总透射率：$\int H(x)dx = \tau$。因此，探测函数 $f(x)$ 可方便地归一化为 $\int f(x)dx = \tau N$，其中 N 是记录事件的总数。在本研究中令 $\tau = 1$，于是我们考虑每个探测事件所含的信息。

真实物体 $F(x$ 与测量图像 $f(x$ 之间的关系（15）表明，可通过反演来计算矩

$$M_i = \sum_j (C^{-1})_{ij} m_j \tag{16}$$

如正文所述。这些关系有助于为估计量引入恰当的影响函数

$$I_i(x) = \frac{1}{N} \sum_j (C^{-1})_{ij} x^j, \tag{17}$$

每个影响函数都与 M_i 相关。然而，直接按照（12）得到的克拉美–罗下界会忽略约束 $M_0 = 1$ 所带来的影响。因此，需要采用修正后的影响函数 $I_{\mathrm{eff},\,i}(x)$，半参数估计理论给出的形式如下：

$$I_{\mathrm{eff},i}(x) = I_i(x) - \frac{M_i}{\tau N}. \tag{18}$$

D. 有限分辨率对克拉默斯–克罗尼希关系的影响

样品所引入的光谱相位 $\varphi(\omega)$，可通过测量其光谱透射率$\eta(\omega)$，并利用克拉默斯–克罗尼希关系进行反演。

$$\varphi(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\log(\eta(\omega))}{\omega' - \omega} d\omega. \tag{19}$$

透射率理想情况下应由测量强度 $F_\eta(\omega)$ 与参考强度$F_{\mathrm{ref}}(\omega)$ 之比得到：

$$\eta(\omega) = \frac{F_\eta(\omega)}{F_{\mathrm{ref}}(\omega)}. \tag{20}$$

这实际上受到仪器函数$H(\omega)$的影响，因为

$$\eta_H(\omega) = \frac{\int H(\omega-\omega')F_\eta(\omega')}{\int H(\omega-\omega')F_{\mathrm{ref}}(\omega')}. \tag{21}$$

相位精确表达式（19）与使用 η_H 得到的结果之间的偏差为

$$\Delta\varphi(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{\omega'-\omega}\log\left(\frac{\int H(\omega'-\omega")F_\eta(\omega")}{F_\eta(\omega')}\right)d\omega', \tag{22}$$

即它可表示为某个适当函数的希尔伯特变换。在此表达式（22）中，我们假设参考强度 F_{ref} 在远宽于 $H(\omega)$ 宽度的区间内缓慢变化，因此可以忽略其误差。根据希尔伯特变换的性质，我们由此可以得到二次误差

$$\begin{aligned}\epsilon^2 &= \int \Delta\varphi(\omega)^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4}\int \log^2\left(\frac{\int H(\omega-\omega')F_\eta(\omega')}{F_\eta(\omega)}\right)d\omega\,.\end{aligned} \tag{23}$$

[1] ˚A. Rinnan、F. v. d. Berg 和 S. B. Engelsen，《近红外光谱最常见预处理技术综述》，TaAC Trend. Anal. Chem. 28, 1201 (2009)。[2] J. Dubrovkin, *Derivative Spectroscopy*（Cambridge Scholars Publishing, 2021）。[3] J. K. Kauppinen、D. J. Moffatt、H. H. Mantsch 和 D. G. Cameron，《傅里叶自去卷积：一种解析本征重叠谱带的方法》，Appl. Spectrosc. 35, 271 (1981)。[4] A. Gelb, *Applied optimal estimation*（MIT Press，1974）。[5] P. Sprzeczak 和 R. Z. Morawski，《基于柯西滤波器的吸收光谱重建算法》，IEEE Trans. Instrum. Meas. 50, 1123 (2001)。[6] A. Averbuch 和 V. Zheludev，《基于样条的反卷积》，Signal Process. 89, 1782 (2009)。[7] H. Liu、L. Yan、Y. Chang、H. Fang 和 T. Zhang，《采用稳健自适应蒂霍诺夫正则化的光谱反卷积与特征提取》，IEEE Trans. Instrum. Meas. 62, 315 (2013)。[8] N. Navab、J. Hornegger、W. M. Wells 和 A. F. Frangi，编，*Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention –MICCAI 2015* 2015（Springer，Cham，）。[9] K. Yanny、K. Monakhova、R. W. Shuai 和 L. Waller，《用于快速空间变化反卷积的深度学习》，Optica 9, 96 (2022)。[10] S. B. Torrisi、M. R. Carbone、B. A. Rohr、J. H. Montoya、Y. Ha、J. Yano、S. K. Suram 和 L. Hung，《用于可解释 X 射线吸收近边结构光谱—性质关系的随机森林机器学习模型》，npj Comput. Mater. 6, 109 (2020)。[11] F. Albarelli、M. Barbieri、M. G. Genoni 和 I. Gianani，《多参数量子计量学展望：从理论工具到量子成像应用》，Phys. Lett. A 384, 126311 (2020)。[12] E. Polino、M. Valeri、N. Spagnolo 和 F. Sciarrino，《光子量子计量学》，AVS Quantum Sci. 2, 024703 (2020)。[13] C. Amiot、P. Ryczkowski、A. T. Friberg、J. M. Dudley 和 G. Genty，《超连续谱光谱域鬼成像》，《光学快报》43，5025（2018）。[14] P. Janassek、A. Herdt、S. Blumenstein 和 W. Els¨asser，《利用铒掺杂光纤放大器发射的经典关联放大的自发辐射光子进行鬼成像光谱学》，《应用科学》8，10.3390/app8101896（2018）。[15] A. Chiuri、I. Gianani、V. Cimini、L. De Dominicis、M. G. Genoni 和 M. Barbieri，《作为损耗估计的鬼成像：量子与经典方案》，《物理评论A》105，013506（2022）。[16] M. Tsang，《非相干光学成像的半参数估计》，《物理评论研究》1，033006（2019）。[17] V. Cimini、F. Albarelli、I. Gianani 和 M. Barbieri，《Hong-Ou-Mandel轮廓的半参数估计》，《物理评论A》104，L061701（2021）。[18] E. Pike、J. McWhirter、M. Bertero 和 C. de Mol，《信号处理逆问题的广义信息论》，载于 *IEE Proceedings*，第131卷（1984），第660–667页。[19] S. G. Rautian，《真实光谱仪器》，《物理科学进展》46，475（1958）。[20] G. C.-F. Chen、T. Treu、C. D. Fassnacht、S. Ragland、T. Schmidt 和 S. H. Suyu，《自适应光学成像的点扩散函数重建：满足时延宇宙学的天体测量要求》，*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*，《皇家天文学会月刊》508，755（2021）。[21] S. M. Kay, *Fundamentals of Statistical Processing: Estimation Theory* 1993（普伦蒂斯·霍尔，）。[22] R. G. Gordon，《红外与拉曼光谱中的分子运动》，《化学物理学杂志》43，1307（1965）。[23] H. B. Leine，《色散在碰撞诱导吸收中的作用》，《物理评论快报》21，1512（1968）。[24] H. C. Jacobson，《原子谱线的矩分析》，《物理评论A》4，1363（1971）。

[25] H. C. Jacobson，原子线形实验中的分子间作用力《物理评论A》**4**，1368（1971）。[26] J. Suzuki、Y. Yang 和 M. Hayashi，含干扰参数的量子态估计物理学杂志A：数学与理论**53**，453001（2020）。[27] C. Lawson 和 R. Hanson，*Solving Least Squares Problems* （Prentice-Hall，1974，恩格尔伍德克利夫斯。）

[28] P. J. Bickel、C. A. J. Klaassen、Y. Ritov 和 J. A. Wellner，*Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models* （Springer，1993）。

[29] A. Tsiatis，*Semiparametric Theory and Missing Data*（Springer，2006）。[30] M. Tsang、F. Albarelli 和 A. Datta，《量子半参数估计》，物理评论X **10**，031023（2020）。