arXiv:2301.08131v1 [math.HO] 18 Jan 2023

一种数学还是多种数学？当今数学实践中的数学基础

安德烈·罗丁

Abstract. 希尔伯特及其追随者所构建的公认的希尔伯特式公理化基础，是作为元理论研究的工具而设计的。这类数学基础未能令人满意地履行理论基础更为基本且更具实践导向的功能，例如验证数学构造和证明。使用诸如单值基础这样的替代性数学基础，只要这两种基础能够相互解释，就可以与出于元数学目的而使用公认的集合论基础相兼容。数学基础的改变通常不会使建立在旧基础之上的数学理论失效，而是允许在新的基础上重构这些理论。数学是一种，但其基础却有多种。

1. "Practical" Foundations of Mathematics and Foundations of Mathematics 本身

理论学科的基础传统上被视为该学科与其哲学的结合；因此，数学哲学通常关注数学基础（FOM），而非数学研究的其他领域。数学实践哲学试图通过更多关注数学基础之外、尤其是基础危机 之外的数学过去与当前发展，从而扩大数学哲学分析的范围。其中，数学基础之外的这些发展还包括19世纪和20世纪之交数学领域发生的基础危机及其后续相关发展[42]。我并非试图淡化其重要性

Date：2023年1月20日。

以及数学基础之外的数学实践与内容在哲学上的相关性；我想强调的是，数学中理论与实践之间的不匹配——它为将数学实践哲学区分为一个独立研究领域提供了理由——首先涉及数学基础。

简而言之，数学基础领域的现状如下：主流数学基础是当今数学研究中一个相对孤立且高度专业化的领域。大多数在职数学家和数学教育工作者对数学基础知之甚少，也看不出它与自身工作的关联。当然，这并非传统观念所认为的数学基础应有的作用。这种不同寻常的状况，在数学界引发了各种不同的反应。

一些数学家，包括许多数学基础研究者，将数学基础与数学其他领域之间的鸿沟解释并辩护为一种自然的劳动分工。他们认为：（i）普通的在职数学家无须掌握其学科基础的细节；（ii）数学基础领域的研究¨u与数学其他任何专门领域的研究一样，需要长期的专业培训，而这种培训不可能惠及所有在职数学家。这种观点可能伴随着一种信念，即数学基础对其他数学学科几乎无关紧要，甚至毫无意义。不过，这种观点也可以与另一种信念相容：无论在职数学家是否意识到这一点，所有数学学科都深深依赖数学基础。

一些在主流数学基础研究之外工作的数学家认为，数学需要一种更传统意义上的基础；按照这种理解，数学基础应当体现某些核心数学内容，并为所有数学家所知晓和使用。基于此，Lawvere 和 Rosebrugh 大胆地否定了公认的数学基础作为有效基础的资格：

> 基础阐明了一门科学的基本普遍特征、组成要素和运作方式，以及其起源和发展的一般规律。阐明这些内容的目的是为以下方面提供指导：

> 科学的学习、运用和进一步发展。忘记这一目的，转而为了自身而追求思辨性“基础”的“纯粹”基础，显然不是真正的基础。（[40], 第235页)

其他数学家试图在数学基础的两种概念之间达成和平协议。他们将传统概念称为实践基础，但并不试图明确挑战公认的数学基础 [64]。与此同时，尽管在时间上稍晚一些，哲学阵营中也出现了类似的发展：一群哲学家将数学实践哲学确立为数学哲学的一个分支，使其独立于主流的、以数学基础为导向的数学哲学 [42]。纯数学毕竟是典型的理论学科，因此，数学理论与数学实践之间相关区别的依据远非明晰；更何况，数学实践哲学家在研究中系统地探讨数学理论及其他数学内容，而不只是与数学研究和教育有关的实践问题。那句广为流传的箴言——“理论上，理论与实践没有区别；但在实践中，却有区别”——完全适用于此处。从实践层面来说，确实如此：认同主流数学基础研究的哲学家与数学实践哲学家从事不同的研究，并形成不同的社群。但从理论角度来看，我不明白为何这些关于数学的哲学探究方向会如此不同。

为了厘清情况，我不会深入探讨有关理论与实践的哲学泛论。相反，我将分析上述数学基础与数学其他领域之间这一鸿沟的性质及其成因。我将采用 Lawvere 和罗森伯格提出的上述简明、非正统的数学基础描述，作为这一概念的工作定义。

2. The Received FOM and Meta-Mathematics

当今通行的数学基础概念源自希尔伯特关于公理几何的开创性著作[31]，以及他后来关于如今所谓希尔伯特纲领的著作，其中包括现代形式的证明论[30, 卷 2]。这一数学基础观念有别于较传统观念的一个显著特点，是其元数学性质。希尔伯特和贝尔奈斯在 [30, 第2章第5], 节中解释，元数学的理念是为某些一般性的数学相关问题提供数学答案；这些问题此前被视为纯粹的逻辑和哲学问题[18] [1]。

元数学的思想可以追溯到笛卡尔和莱布尼茨，但它并非传统基础数学的构成性要素。特别是，欧几里得的《几何原本》（按我们的定义，它符合数学基础的标准）并不具备元数学能力。让我用这个经典例子来说明，赋予数学基础以元数学能力的思想源自何处。

欧几里得的《几何原本》包含若干不可能性结果，例如证明任意一对线段不存在公度[2]。这类证明表明，某些几何作图可以用欧几里得的理论语言来描述，但若不想导致矛盾，就无法在欧几里得理论中完成。这些不可能性证明通过表明某些期望的构造不可能实现，以否定的方式解决了某些数学问题。

然而，也有一些著名的数学作图题，在欧几里得的数学中定义明确，却无法仅凭欧几里得的原理求解，无论是正面求解（完成所要求的构造），还是反面求解（证明所要求的构造不可能实现）。三等分角问题就是一例。将一个角三等分并非不可能的几何构造。通过将给定角倍增（通常使用尺规），很容易就能完成这类构造的一个实例。然而，正如我们如今借助伽罗瓦理论所知，无法用尺规将任意给定的角三等分

[1] 例如希尔伯特的 *Entscheidungsproblem*。

[2] 见 *Elements*，第 10 卷，作图题 10。

。这一结果相对于欧几里得的数学而言属于元数学，因为它归属于另一种理论，即建立在不同原理之上的伽罗瓦理论。下文中，我将数学理论 M_E 称为相对于数学理论 E 的元数学理论，当且仅当 M_E 的定理描述了 E 的相关一般特征，例如其一致性、其方法的局限等。 [3]。

我们将一种理论称为认识论完备的，如果它允许人们解决该理论内部任何定义恰当的问题——无论是给出肯定还是否定的答案（形式化处理见[50] ）。认识论完备这一概念引出了一系列问题，例如：认识论上不完备的理论在认识论上是否可以接受？认识论完备性在认识论上是否有价值？认识论完备性与语义完备性及其他形式的理论完备性有何关系？最后但同样重要的是，认识论完备的理论是否可能存在？在长期从事数学基础研究的整个过程中，David Hilbert始终关注认识论完备性问题。他对这一问题的看法是在所谓的 *Ignoramibusstreit* (ignoramus 之争，即关于不可知之事的争论）的背景下形成的。这场争论始于1872年，埃米尔·杜·波瓦-雷蒙当时声称，某些科学问题和作图题原则上无法解决。为回应杜·波瓦-雷蒙，希尔伯特提出了相反的观点：每一种确立良好的理论（首先是每一种数学理论）都必须是认识论完备的。在漫长的学术生涯中，希尔伯特始终坚定地持有这一信念。他曾在许多场合公开表达这一观点，最著名的是1900年他在索邦大学国际数学家大会上发表演讲，宣称了那句著名的“（在数学中）没有不可知之事”；此外，他在1930年于K¨onigsberg发表的最后一次重要公开演讲，也以“我们必须知道。我们必将知道”作结[45]。

[3]这种对元数学概念的非正式描述，比标准教科书中的形式化概念范围更广、界定也不那么精确[32]，但它比更技术性的定义更能阐明元数学的认识论作用。

希尔伯特相信，数学（经过适当改造后）的认识论完备性能够、也应当通过严格的数学方法得到无可辩驳的证明，而不应仅仅依靠一般性的哲学论证来支持。因此，他提出将数学基础确立为涵盖全部数学的元理论，从而能够严格证明每一种名副其实的数学理论在认识论上的有效性。希尔伯特的数学基础元数学构想基于这样一种假设：所需的基础理论可以保持精简，并构成当代数学中可靠、可信的核心，同时不对其概念内容施加限制。1927年，希尔伯特推测，既然“形式化证明如同数词一样，是具体且可审查的对象”，那么证明给定形式化理论的形式一致性，“从根本上说属于直觉的范畴，正如在内容数论中证明$\sqrt{2}$的无理性 [29, 这类任务 471]一样。回过头看，显然希尔伯特在这一阶段严重低估了与其基础目标相关的元数学任务的复杂性。

鉴于后来与数学基础相关的元数学和逻辑研究，自20世纪30年代以来，人们一直广泛讨论希尔伯特的抱负如今还有多少（如果尚有的话）是站得住脚的 [67],[14],[4]。暂且不谈这一点以及有关希尔伯特式数学基础的其他特殊问题，我想再次强调，希尔伯特提出的赋予数学基础以元数学能力这一构想极具原创性，不应被视为理所当然。从上文概述的数学基础传统视角来看，数学基础的元数学能力似乎是一项有益的附加特性。不言而喻，除非给定的数学基础也能履行更基本的职能，否则这一新特性无法实现其预期的认识论目的。Lawvere 和罗森伯格将这些基本职能描述为“明确揭示数学的基本一般特征、构成要素和运算”。如果给定的数学基础无法令人满意地履行这些基本职能，其元数学力量就仍然毫无用处、无关紧要。

3. Is the received FOM adequate?

任何数学基础都有两个方面。一个方面是规范性的、逻辑的和认识论的，涉及诸如“什么是正确的数学证明？”之类的问题，并提供构建可靠数学理论的工具，以及排除错误理论的方法。另一方面则是“实践性”和描述性的，涉及给定数学基础在数学实践中的应用，包括数学教育和研究，尤其涉及如何在实践中落实与该数学基础相关的认识论规范。

对数学基础进行认识论分析，需要兼顾这两个方面。一方面，剥离规范维度，会使认识论分析沦为历史学、社会学和心理学的论述，从而丧失其特有的性质和目的。另一方面，忽视过去和现在的数学实践，则会使对数学的认识论分析失去其研究对象。这一点对数学基础和数学的其他任何部分同样适用。仅以一般哲学原则为依据、未能准确考量其所涉及的对象（在此即实际运用中的数学基础）的规范性认识论判断，几乎无法得到辩护。

从这两个方面来看，现行的希尔伯特式数学基础是否充分值得怀疑。最明显的问题在于其可行性：事实证明，试图用这种数学基础为此目的所规定的符号语言来表示标准数学内容，需要对符号链进行操作，而这些符号链既无法以印刷形式呈现，也无法供人类审阅。一个臭名昭著的例子是布尔巴基对基数 1 的定义，该定义包含约 10^{15} 个符号[24]。乍看之下，可行性问题似乎只是“实践上的”问题，使用“1”这类符号简写便可顺利解决。从认识论的角度来看，问题在于：以日常语言手段“非正式”或“半正式”表示的数学理论，与以希尔伯特式公理化数学基础所包含的形式语言表示的形式对应物之间，究竟是什么关系。当

数学理论 T 被形式化地表示为 $\lfloor T \rceil$，与数学理论 T 以不同方式表示、但原则上可以转换为形式 $\lfloor T \rceil$，这两种情形从认识论角度来看截然不同。在后一种情形中，给定的数学基础对 T只有微弱且间接的控制，而这种控制会产生反作用。如果证明 T 无法表示为形式 $\lfloor T \rceil$，那么便可得出结论：给定的数学基础不能为 T提供依据。但仅凭 T 能够表示为形式 $\lfloor T \rceil$ 这一事实，本身并不足以判断 T 是否符合给定数学基础的标准。只有在有效地构建出形式表示 $\lfloor T \rceil$ 时，才可能作出这种判断。由于 $\lfloor T \rceil$ 通常不可行，这种判断通常也无从作出。现行希尔伯特式公理化数学基础的这一特征，与传统预期相悖：人们通常认为，数学理论只要“建立在”恰当的数学基础之上，就能得到论证。论证给定数学理论，是一项基本的数学基础相关任务；一般而言，这项任务并不是通过对给定理论的认知（不）完备性进行元数学考量来完成的。因此，可行性问题具有认识论层面，不能称之为“纯粹实践上的”问题。

另一个问题涉及关于数学的基本认识论假设，这些假设支撑着人们普遍接受的数学基础公理化观念。希尔伯特假设，（现成的）数学知识可以用公理化理论的形式表示，而这类理论是由语句构成的系统，其中每个语句都可以从一组称为公理的特定语句中推导出来。这一观念假设，所有已确立的数学知识都具有命题性质。关于数学知识的这一强有力的认识论假设通常也适用于所有科学知识，并非希尔伯特数学基础公理化方法所特有。正如伯特兰·罗素在1900年所说：“一切健全的哲学都应从分析命题开始，这一真理或许显而易见，无须证明。”他在自己的开创性著作《数学原理》中遵循了这一思路。该书于1903年出版（有关参考文献和进一步讨论，见[21, 第 v 页]）。

然而，认为一切名副其实的数学知识都具有命题性质的假设，与现有的数学

实践并不十分相符。从欧几里得在其《几何原本》第1至4卷中阐述的初等几何理论这一历史实例，可以清楚地看出这一点。欧几里得理论的基本原理分为两类：几何公设和公理（即“公理”），后者适用于《几何原本》的几何卷和算术卷。欧几里得公设1至3并非命题[4]，而是初等几何运算的方案：输入某些几何对象，再输出其他对象。例如，公设1是一种运算方案，输入两个不同的点 A，B 并输出一条线段AB。与公设不同，公理1至3确实以命题为对象，具体而言，是形如 $A = B$ （等式）的命题。然而，正如 Lewis Carrol 早在1895年所正确指出的那样，为避免无穷倒退，这些公理不应被理解为命题，而应被视为图式化的推理规则，也就是说，它们是运算方案，能让人从给定的等式推出新的等式。按这种理解，公理1输入两个形如 $A = C$ 和 $B = C$ 的等式，并输出形如 $A = B$的等式。

因此，欧几里得的几何理论主体由称为作图题的条目和定理构成。欧几里得的作图题是关于如何进行几何作图的步骤说明，并附有证明，说明这些作图具有所需的性质；这些步骤说明并非以命题形式表述。例如，《几何原本》第 1 卷开篇的作图题 1 告诉我们如何给定一条边作等边三角形；它提供了一个运用公设 1、3 的构造，并证明（运用公理 1）这一构造的结果符合等边三角形的定义。欧几里得的大多数几何定理也涉及构造，在这种情况下，这些构造通常被称为“辅助构造”。因此，《几何原本》中的作图题和定理相互交织，形成一个单一的演绎顺序：较早解决的作图题和较早确立的定理，都会用于解决后续作图题并确立后续定理。乍看之下，没有理由认为《几何原本》中以

[4]这里我假定，命题通常具有真值。欧几里得公设1至3不是命题，因为它们不具有真值。

作图题所表达的程序性知识在认识论上的重要性低于欧几里得几何定理所表达的命题性知识[5]。

希尔伯特在欧几里得几何公理化基础方面的工作 [31] 证明，对欧几里得式传统几何作严格的命题化表述是可行的。然而，这也表明，这种表述从逻辑视角来看并非毫无代价，并且需要对欧几里得的推理方式作根本性修订。在他们于1934年出版的《数学基础》导论部分，希尔伯特和伯奈斯强调了他们在理论构建中采用的命题公理化方法与欧几里得的“生成式”（亦即“构造式”）方法之间的差异；后者涉及非命题性运算，例如从已知对象构造新的几何对象。作者并未将生成式方法斥为其公理化方法的过时版本，而是承认它具有独特性质，并设想这两种方法可以结合[30, 第1卷，导论]。

上文所述的欧几里得式几何推理模式，在当今数学中依然十分活跃；当今数学中的各种“生成式”推理模式与公理化推理并存[57, 第35页及后续页]。正如我们将很快看到的（见下文第4.3节），2000年代中期提出的数学单值基础提供了一个形式框架，使两种数学推理模式能够协同运作。因此，认为所有现成的数学知识本质上都是命题性的这一假设，与当前的数学实践相悖；在当前实践中，各种形式的实践性知识仍发挥着重要作用。

现在让我们考察这一假设的规范维度。对这一假设的理论认识论反对意见可以表述如下：模型至少

[5]欧几里得式几何推理的逻辑重构仍存在问题，无法在此作更系统的探讨。关于欧几里得几何推理的详细分析，参见[57, 第1章。2]早在1974年，Ian M¨uller就声称，没有任何当代现代逻辑体系能够充分解释欧几里得的几何推理形式 [48], 另见 [47]。在我看来，接下来的几十年里，这一状况并未发生重大变化。

与使这些模型为真的语句一样，是数学理论的重要组成部分，而且可以说甚至更加重要（稍后将对此作出解释）。当今的数学几乎无一例外地以模型为基础。数学模型（而不仅仅是被视为句子系统的数学理论）在当今科学中发挥着关键作用。认为数学知识可以归结为命题知识的论点，未能恰当地反映数学在科学与技术中的认识论作用。

早在20世纪50年代，Patrick Suppes就提出了一项颇具影响力的认识论论点：科学理论应被视为模型类，而非某些句法结构（如 $\lfloor T \rfloor$），后者被解释为句子系统。由于同一个模型类通常可以由不同的、以句法方式界定的理论确定，因此，按照 Suppes 的观点，理论具有不变性，或者说具有“稳健性”：无论采用何种句法选择来对这些理论作公理化表述[62]，都不影响这一点。Suppes 的理论观在文献中被称为语义的，又称非陈述式观点[27]。Suppes 及其追随者试图将布尔巴基式公理化技术用于物理学及其他科学理论的形式化表述，从而发展了这一理论观。尽管他们明确提及布尔巴基的计划 [62, 第 33], [60] 页，但不知何故，关于理论概念的讨论仍局限于科学哲学，从未延伸至哲学逻辑和数学哲学。然而，数学哲学中的类似观点虽措辞不同，却由数学结构主义的倡导者表达出来；他们同样受到布尔巴基计划的启发，但更愿意使用布尔巴基的术语“结构”，而非“模型”，以避免与模型论学者在术语上混淆[28]。

数学基础中的标准语义学方法并未充分体现数学推理的模型特征，因为它只是为现有形式技术提供了一种新的思考方式（也就是说，为融入塔斯基式形式语义学的希尔伯特式公理化方法提供了一种新思路），却没有发展出适用于这一目的的新技术。诚然，构建模型（结构）并对其进行试验，是当今数学的重要组成部分。但希尔伯特式公理化数学基础并未提供任何形式手段来

编码这类操作，并赋予其稳定的理论形式。这是因为这类数学基础仅由形式规则构成，其中包括逻辑规则和保真逻辑推理规则。这类数学基础不包含类似欧几里得公设的规则，无法规范对非命题对象的操作。希尔伯特式数学基础可以证明具有某些性质的给定数学结构的存在，但对于如何获得或“发现”这一结构却漠不关心。通过约定，无须追问如何用一些熟悉的元素构建对象或结构，便可规定一个具有所需性质的对象或结构；这一思想使数学中的公理化方法极为实用且强大。但在数学中，兼顾这些问题的构造性 [6] 亦即生成性推理至少同样重要。数学的这一构造性方面在应用数学中尤为重要，因为数学方法（用于纯数学以外的领域时）发挥着重要的认识论作用。正如我们将在下文第 4.3 节看到的，单值化形式化数学基础提供了一种编码数学操作性知识并以计算方式实现这种知识的技术。

4. Foundations at Work

本节将简要概述20世纪及21世纪初出现的三种不同的“实用型”数学基础：Nicolas Bourbaki 的《数学原理》、William Lawvere 首先提出的范畴论基础，以及 Vladimir Voevodsky 近年提出的单值基础。这个列表并不完整：20世纪的数学实践中还有许多其他有趣的数学基础相关进展，本文不予讨论 [7]。必须牢记，我们在这里谈的并非已经完成的基础理论本身，而是

[6]“构造性”一词在逻辑和数学基础中有着多种含义。仿照希尔伯特和伯奈斯的用法，本文将涉及非命题性运算的数学推理称为构造性的，例如从一些给定的简单组成部分构造复杂的数学对象（即构造），详见[58]进一步讨论。[7]这尤其涉及早期尝试在学校教育中采用初等几何的希尔伯特式公理化表述，[26] 以及当前将计算机辅助证明引入数学实践的尝试；这些尝试独立于单值基础。 [5]。

旨在以特定方式组织数学的某些大块内容，并以某些开放式基础理论为依托的持续努力：布尔巴基的做法以集合论为基础，范畴论基础以范畴论为基础，而单值基础则以同伦类型论（HoTT）为基础。这三个项目启动的时间各不相同：布尔巴基的项目始于20世纪30年代中期，范畴论基础始于20世纪60年代初，单值基础则始于2000年代中期 [8]。

由于后续各个项目的发展都包含对早期基础项目的批评，并声称要弥补其不足，因此将这三个项目视为同一整体进程中的连续阶段，并非不合理。然而，这些项目的真实历史并不符合这种线性的黑格尔式图式。布尔巴基式集合论基础数学、范畴论基础数学和单值基础（UF）都在当今数学实践中发挥着作用——通常并非以其“纯粹”形式出现，而是与一些较早的基础方案和模式相结合。这三者所发挥的作用大不相同。集合论基础数学仍维持着其“官方”地位（至少在大多数逻辑学家看来如此）；尽管多数在职数学家普遍对布尔巴基的基础项目持怀疑态度，布尔巴基式数学论证呈现方式中的一些要素仍在实践中（包括数学教育中）得到广泛运用。范畴论目前被广泛用作一种便捷的抽象理论语言，在数学的许多领域扩展了布尔巴基式集合论语言，有时甚至完全取而代之。范畴论发挥基础作用的情形则较为少见，也更为具体；下文将提及其中一些例子。最后，单值基础是一个相对较新的项目（仍在进行中），其目标是用 Voevodsky 的话说，打造“布尔巴基的计算机化版本”。

[8]当然，更精确的日期只是约定俗成。布尔巴基学派创建于 1934 [7]。范畴论基础数学的想法最早由 Lawvere 于 1963年 在博士论文中提出 [36]。单值基础（当时尚未以此命名）的想法最早由 Voevodsky 于 3月在高等研究院（普林斯顿）的一次演讲中公开提出 22, 2006 [66]。

4.1. 布尔巴基。 持续出版、卷帙浩繁的《数学原理》 [9] 由几代数学家（主要是法国数学家）组成的团体编写，他们使用*Nicolas Bourbaki*这一笔名。这是一次独特且历时长久的尝试，旨在建立希尔伯特式的数学公理化基础，并将其落实到广泛的数学研究与教育实践中。书名“《数学原理》”意指欧几里得的《几何原本》；仿效欧几里得，布尔巴基旨在为当代数学提供一套自成体系的入门读物，系统地介绍数学的基本原理及其基础内容。其法文原名为*El´éments de math´ématiques*，其中使用了不寻常的单数形式“math´ématique”，以表达布尔巴基统一数学的目标。1950年，一篇题为《数学的建筑》的独立纲领性文章发表，对这一项目作了简明的总体说明，并明确阐述了其背后的一些基础思想[10] [10]。

布尔巴基认识到希尔伯特式公理化方法具有统一力量后，采取了一个有趣的做法：将公理化方法的逻辑方面与另一个可称为结构方面的方面区分开来；在布尔巴基看来，正是后者而非前者，使公理化方法成为一种强大的统一工具：

> [每个数学理论都是一串命题，每个命题都依照某个逻辑系统的规则，从前面的命题推导而来。 [. . .] 因此，说这种“演绎推理”是数学的统一原则，纯属毫无意义的老生常谈。 [. . .] [它是数学家赋予自己思想的外在形式，是让他人得以理解这些思想的载体；简言之，它是适合数学家的语言；这

[9]布尔巴基的第一卷 *Elements* 首次出版于1939 [9]。最近出版的原版卷册于 2016 [11]问世；2019年，一部早先出版的卷册推出了新版。关于布尔巴基研讨班的工作以及该群体近期出版物的更多参考资料和最新信息，可在该群体的网站 https://www.bourbaki.fr 上查阅。[10]本文由让·迪厄多内撰写´，并以 Nicolas Bourbaki 之名署名，见 [13,第7]章。

> 就是全部了，不应赋予它更多意义。公理化方法所设定的根本目标，恰恰是逻辑形式主义本身无法提供的东西，也就是对数学深刻的理解。[10,第223]

要理解布尔巴基对“逻辑形式主义”的疑虑，必须考虑布尔巴基的公理化方法与希尔伯特的方法有何不同。我借用了科学哲学中的术语，在上一节将布尔巴基的方法称为语义的。布尔巴基的“公理化”理论并非附带某些默认解释的希尔伯特式理论，而是这类希尔伯特式理论的集合论模型理论。例如，每个具体的群（无论是按集合论意义上的相等还是按同构来认定）都可视为布尔巴基群论公理（如今已成为标准）的一个模型。但群~~论~~并不等同于证明那些仅由这些公理推出、因而一概适用于所有群的一般定理。例如，初等的拉格朗日定理就不属于这类定理，因为它涉及两个不同的群，即公理的两个模型。由于所有此类模型都是集合论的，拉格朗日定理以及布尔巴基证明的其他任何群论定理，都可以从集合论公理中推导出来。这正是布尔巴基的语义方法如何使集合论成为其数学基础核心的。

有趣的是，布尔巴基除了表达前面提到的对“逻辑形式主义”的疑虑外，也对集合论有所保留：

> [十]九世纪和二十世纪的公理化研究逐渐取代了最初对心理 [数学] 表征的多元主义：先是自然数的概念，随后在第二阶段则是集合的概念。长期以来，后一个概念被视为“原始的”和“不可定义的”，并引发了无休止的论争[...]；直到近期关于逻辑形式主义的研究使集合这一概念本身消失，这些困难才得以消除。从 [...]

> 新的观点来看，数学结构 [着重号为我所加——A.R.] 严格来说，数学结构成为数学唯一的“对象”。[10, 第225页—226]

现有参考文献无法让我们确定布尔巴基在此处谈及“集合的消失”时所指的确切含义。但上述引文清楚表明，在项目早期，布尔巴基就已受到这样一种想法的驱动：不使用集合论来表述数学结构。然而，按照正式说法，布尔巴基的所有结构都是以集合论方式构造的，也就是说，它们是某些希尔伯特式公理系统的集合论模型。布尔巴基《数学原本》中从未严格定义过“独立结构”（没有底层集合）这一预期概念。但在实际落实这一概念时，布尔巴基会系统地忽略自身集合论及其相关形式逻辑工具中的细节。

布尔巴基之所以对以集合论方式表述数学结构感到如此不安，一个原因在于这样一种观念（其历史渊源至少可以追溯到希尔伯特）：同构结构应当被视为相同的[41]。问题在于，没有任何一种附带内在恒等关系的（希尔伯特式）公理化集合论，能够严谨地说明同构结构在何种意义上可以被称为相同。我们很快就会看到，这一问题如何推动数学基础中的范畴论方法，以及它如何在单值数学基础中得到解决 [1]。在布尔巴基《数学原本》中，独立于任何集合论背景的独立数学结构这一概念仍不过是一厢情愿，或者，作较为宽容的解释，它是康德意义上的调节性理念。

除了如今仍在继续推进布尔巴基计划的一小群热衷者之外，愿意在教学中使用布尔巴基的著作、并以此为基础开展研究的数学研究者和数学教育工作者寥寥无几。尽管如此，显而易见的是，布尔巴基《数学原本》确实“明确展现了”某种数学思维风格与模式的“基本普遍特征、要素和运作方式”，而这种风格与模式在20世纪数学中发挥了重要作用。即使20世纪数学的许多重要成就与布尔巴基的体系毫无关联，布尔巴基仍然提出了一种将数学视为整体的特定愿景，并为数学的统一性和连贯性作出了贡献，

其方式是发展出一种半形式化的“集合论语言”。这种语言至今仍广泛用于数学研究的各个领域和分支，并有助于它们之间的交叉融合。尽管如今有充分理由认为布尔巴基的集合论数学基础已经过时，但它仍在许多日常用途上为数学家和数学专业学生所用。

20世纪，布尔巴基式方法在初等数学教育中的兴起与衰落遍及全球，这段历程值得特别关注。故事始于一场改革学校数学教育的尝试：在国家层面按照新标准进行改革。这些标准被称为新数学运动，它于20世纪50年代末在美国兴起，是美国回应苏联发射第一颗斯普特尼克卫星的关键举措之一1957 [52]。这场教育改革旨在增强国家的科技实力和智力水平，并在小学阶段推行布尔巴基式方法。改革由包括马歇尔·斯通在内的多位杰出美国数学家主导，可预见的是，它遭到了大多数学校教师和学生家长的反对。更值得注意的是，这场改革也受到了一些顶尖数学家和科学家的严厉批评，其中包括当时一位杰出人物——理查德·费曼[19]。早在20世纪70年代初，认为新数学运动犯了教学法错误的观点便已占据上风[33], ，这场颇具争议的改革很快便基本被放弃了。

颇具讽刺意味的是，苏联几乎与美国的新数学运动同时启动了一场类似的数学教育激进改革。1959年，博尔坚斯基、维伦金和亚格洛姆发表了一篇纲领性论文[65] ，呼吁更新标准的学校数学课程。20世纪60年代末，苏联当局支持这场数学教育改革，它很快发展成一项全国性计划；为在学校教材中实施，改革选用了布尔巴基式的学校数学课程版本，该版本由一群顶尖数学家和数学教育工作者在安德烈·N·柯尔莫哥洛夫的总指导下编写。这场苏联改革的命运与美国新数学运动相似：20世纪70年代末，在抱怨不已的学校教师、学生家长以及一些数学家的严厉批评所带来的压力下，

这场改革被放弃，新编的数学教科书也再次被更传统的教材取代。

法国和其他一些国家也进行了类似的改革，其命运也大致相同。这些学校数学改革并非孤立进行，而是国际数学教育潮流的一部分；在这一潮流中，法国数学家发挥了主导作用，其中包括安德烈·利希内罗维茨和布尔巴基学派的其他一些成员。

布尔巴基式方法在初等数学教育中的失败，无法在此充分分析。我只想指出，数学和数学教育中布尔巴基式方法的支持者与批评者都认为，这种方法无助于指出、阐明和支持数学在科学与技术中的应用 [61], [19], [3]。不过，他们对此的评价各不相同：反对者认为，将数学与科学和技术联系起来至关重要，而布尔巴基式方法的支持者则认为并非如此。

4.2. 范畴论作为基础。尤里·马宁在阐释集合论对20世纪数学的影响时指出，在本世纪下半叶，“集合让位于范畴”[43, 第7]页。范畴这一数学概念出现于20世纪40年代，其正式诞生通常以 S. Eilenberg 和 S. MacLane 于1945年发表的论文为标志[16]。范畴论（CT）很快证明是一种有用的数学语言，帮助人们将许多新兴概念和新成果整合为稳定的理论形式。早期有不少例子令许多数学家认识到范畴论的用处，其中包括 [17], [15], [55]。同期发展起来的一些新数学概念和数学理论甚至离不开范畴论：尤其是 A. Grothendieck 于20世纪50年代创立的托扑斯概念。如今，许多数学学科，包括代数几何、同调代数和泛函分析，都将范畴论作为基础语言[35], [44]。

范畴论作为一种替代性语言取得了成功，它能够通过映射来有效地从理论上处理数学结构，同时绕开冗余的集合论细节。许多数学家，包括一些布尔巴基成员（如 H. Cartan、S. Eilenberg 和 A. Grothendieck），认为这为实现布尔巴基的梦想——让集合不再充当普遍的基础背景——提供了途径。值得注意的是，Samuel Eilenberg 和 Norman Steenrod 在序言中[17]以及 Daniel Quillen 在[55] 中都大胆声称，他们运用范畴论的语言建立了“公理化”理论。他们的方法确实在精神上具有公理化特征：这些作者规定了具有某些特殊性质的范畴存在，并以此为基础发展出抽象理论，对许多早已为人所知的例子加以推广。然而，这些理论并未达到数学基础领域的数学家所采用的形式和逻辑严谨标准，事实上也并未以此为目标。

将范畴论发展为真正的数学基础，这一构想归功于 William Lawvere。在他1963年的博士论文中，[36] 他为范畴论提出了希尔伯特式公理；在当前文献中，这些公理有时被称为 Eilenberg-MacLane公理，相应的理论则称为 EM。在同一篇论文中，Lawvere 建立了集合范畴初等理论（ETCS）；这里的“初等”指该理论具有一阶特征。关于这项工作的更详细论述，另见[39] 。与前述同样使用范畴语言、且其作者称之为“公理化”的同调代数和同伦理论 [17], [55] 不同，ETCS 是标准意义上的一阶公理化理论；这一用法为逻辑学家和哲学家所熟悉。后来，Lawvere 进一步提出了一个更一般的范畴论基础数学计划，即范畴的范畴公理化理论（简称“作为基础的范畴之范畴”或 CCAF）[37]。在这些早期著作中，Lawvere 挑战了这样一种观念：集合论以某种形式应当是现代数学基础的核心组成部分。他尤其表明，可以在公理化范畴论的基础上建立公理化集合论，而不必反其道而行之。然而，至少在其学术生涯的这一阶段，他并未挑战这样一种观念：现代数学基础应当以某种形式采用希尔伯特式公理化方法。

Lawvere 在范畴论数学公理化方面最卓越的成就，当属他在托扑斯理论领域的工作。托扑斯的概念 于20世纪60年代初在亚历山大·格罗滕迪克的学术圈中兴起，是对拓扑空间概念的一种影响深远的推广。格罗滕迪克的托扑斯概念与逻辑并无特殊关联；托扑斯的逻辑结构完全是由 Lawvere 及其基础研究方法揭示的。在他1970年的论文开篇[38] ，Lawvere 给出了他对托扑斯的定义，这一定义如今通常称为初等托扑斯的定义；“初等”这一名称反映出，与格罗滕迪克最初的构造不同，Lawvere 的定义几乎可以直接转化为标准的一阶形式语言[46]。1972年，格罗滕迪克的学生让·吉罗找到了判定给定初等托扑斯为格罗滕迪克托扑斯的充要条件 [22]。

即使 Lawvere 的初等托扑斯理论可以算作一种希尔伯特式公理理论，它仍具有一个使其与 ZFC 及其他类似理论大不相同的特征。希尔伯特所采用、后来又由塔斯基从方法论角度加以阐述和论证的标准方法，假定公理理论建立在某种具有固定逻辑语义的符号演算之上；借助这种演算，可以表述某些特定公理，并随后在某些预期模型中解释这一句法结构的非逻辑项。这类理论的逻辑部分，即其“底层逻辑”，被认为应当预先严格固定 [63]。Lawvere 在这方面采取了不同的方法。他在公理化托扑斯理论背后的洞见是：每个托扑斯都具有一种内部逻辑结构，这种结构类似于集合范畴中的内部逻辑结构。正如 Lawvere 所说：“逻辑是几何的特例。” [38, 页。 329]。这种对逻辑与几何之间关系的理解，与希尔伯特和塔斯基的理解大不相同。

范畴论基础数学方面的研究不仅为范畴论提供了一种独立于集合论的新基础，还帮助简化了许多范畴论概念，并将其应用于数学的各个领域以及纯数学之外的领域，尤其是计算机科学。Lawvere 关于初等托扑斯的公理使托扑斯理论更加

易于理解，也帮助许多代数几何专家群体之外的人进入这一领域，并在其中开展富有成果的研究。尽管迄今为止，范畴论基础数学对数学的总体影响还无法与布尔巴基的影响相提并论，但它也对数学教育（大学阶段）和研究产生了显著影响。

4.3. 单值基础。 单值基础（UF）是一种新颖的数学基础，由 Vladimir Voevodsky 首次提出于 2006 [66]；UF 使用同伦类型论（HoTT）作为语言，并试图用这种语言表达各种数学内容。HoTT 最初是对马丁-洛¨夫类型论（MLTT）的一种基于同伦论的解释：类型被解释为同伦空间，而这些类型的项则被解释为这些空间中的点。这种解释由 Vladimir Voevodsky 发现，史蒂文·奥沃迪和迈克尔·沃伦也在2000年代中期独立发现了它 [25]。

对 Voevodsky 来说，开发单值基础的一个主要动机是实用性的：他关注的是借助计算机对冗长的数学证明进行形式化验证的可能性。正如我们已经强调的，传统的数学基础无法对超出简单情形的数学证明进行形式检查和验证。然而，对此类可靠验证的实际需求正变得日益迫切。尽管如今在主流数学研究中，计算机辅助证明仍不常见，但由计算机证明的数学结果正不断增加；在许多此类情形中，人们尚未找到未经计算机辅助的“纯人工”证明，而且有迹象表明，这样的证明可能并不存在。关于现有证明助手的最新综述，以及对交互式计算机辅助定理证明领域最新进展的介绍——不过其中并未涵盖 UniMath 和其他受单值基础启发的项目——见 [5] 及其中的参考文献。

令人惊讶的是，现有的证明助手没有一个直接实现数学理论的希尔伯特式形式表示，而是在其理论背景中采用某种形式的类型论。Per Martin-L¨of 早在20世纪80年代就设计并发展了他的带有依赖类型的构造性类型论（MLTT），当时已经考虑到其可能

在计算机上的实现；其片段后来在 Coq 及其他一些证明助手中得到了有效实现。他为这一形式系统提供了一种 证明论的 逻辑语义，这与传统希尔伯特式数学基础中所使用的塔斯基式模型论逻辑语义有本质区别 [53]；在句法上，MLTT 是根岑式（基于规则的）而非希尔伯特式（基于公理的）形式系统。2000年代中期对 MLTT 的同伦解释的发现催生了 HoTT，这使 Voevodsky 确信该理论可以作为一种新的数学基础，支持自动化证明检查。Voevodsky 将这种数学基础称为单值的，因为其中包含单值公理（UA），下文将对此加以解释。“单值性”一词的来源有些偶然：它源自“忠实函子”这一表达式，后者曾在某种场合被译成俄语，而 Voevodsky 的回译将其译为“单值函子”[23, 脚注 4]。参见 [23]，以简要了解 UF；参见[25]，以获得更系统的论述。

马丁-洛夫类型论的同伦语义使我们能够区分不同同伦层级的类型，并对不同层级的类型作不同解释：将层级为 (-1) 的类型解释为命题，将零层级的类型解释为集合，将层级为 1 的类型解释为群胚（即同伦空间的基本群胚），依此类推，直至更高的同伦群胚。在命题层面，底层类型论的形式规则被解释为规范逻辑推理的规则；在更高的同伦层级，同样的形式规则则规范几何（也就是同伦）构造，而这些构造使某些命题成立。因此，同伦类型论为 Lawvere 先前提出的“逻辑是几何的一个特例”这一观点提供了依据。同伦类型论的这一特点，使基于单值基础的数学推理在某些方面类似于传统的欧几里得式几何推理：几何构造有助于证明定理。由于同伦论概念在低维情形下具有空间性且直观，单值基础有助于形象地理解许多抽象的数学概念和证明。具体而言，它有助于直观把握以计算机代码表示、可供自动验证的形式证明。单值基础的这一特点回应了文献中广泛讨论的计算机辅助证明“晦涩难懂”（即缺乏可审查性）问题 [6]。

与传统几何推理的情形一样，基于单值基础的构造所发挥的认识论作用通常并不局限于见证某些数学语句成立，还具有其他重要的认识论作用。请注意，我在此所说的构造，指的是基于规则的数学过程，而不仅仅是这些过程的结果。这类构造以明确的形式呈现数学实践知识。举一个历史例子：欧几里得在第 13 卷的第 13.13–17 题中构造五种正多面体（又称柏拉图立体）。《几何原本》第 13 卷中的这一部分，是欧几里得宏伟体系的巅峰之作；追溯这些构造至其第一原理，即第 1 卷的《公设与公理》，便可看出，这五道作图题所需的理论背景涵盖了《几何原本》中相当大一部分数学知识。《几何原本》。大量数学知识被浓缩在上述五道作图题中，以操作性而非命题性的形式呈现。另一个重要的历史例子是代数的早期形式：花拉子密在其著作中阐述了这种形式，而这本书也赋予了这一学科如今的名称 [56]。花拉子密的代数是一套系统化的解题方法（以欧几里得式几何背景为支撑），用于解决某一类作图题。当今的数学实践并未表明，操作性知识在数学中的作用如今比过去更不重要。与标准的希尔伯特式公理化数学基础不同，单值基础能够以基于单值基础的同伦构造形式，对操作性知识进行正式而细致的表述，这也是支持“单值基础更为适切”这一主张的又一理由。

实践性知识的重要性在应用数学中尤为明显，在应用数学中，数学被视为一种认知工具，而非独立学科。自然现象和技术制品的数学模型总是验证某些数学语句；通俗地说，这类模型具有某些数学性质。然而，这类模型的主要认知作用并非实例化并见证这些数学性质，而是解释经验数据。在这样的语境中，知道如何构建恰当的数学模型是一个关键问题。

让我用两个例子简要说明这一点：一个历史例子——托勒密天文学，以及一个当代例子——拓扑数据分析（TDA）。托勒密天文学以传统的欧几里得式几何作为其数学基础（但其内容超出了欧几里得的几何范畴，因为它运用了球面几何）。《几何原本》中可见的天体运动被重构为圆周运动的叠加。对于行星而言，这需要使用若干补充的圆周运动，而这些运动是不可观测的。托勒密将这类运动的轨迹称为本轮[49]。用托勒密的名言来说，由此得到的几何模型"拯救了现象"，也就是说，它在经验上是适切的（达到一定程度的近似）。重要的是，托勒密对天文现象的几何模型是逐步构建的，因此会根据观测数据进行调整；这类生成程序以构造性几何原理为基础，与欧几里得公设密切相关（可想想本轮）。正如上文第3节所述，欧几里得式几何的构造性（生成性）特征使这种系统化的模型构建方式成为可能。

在拓扑数据分析（TDA）这一当今应用数学研究中迅速发展的领域， [51],人们通过拓扑空间及其不变量来处理各种性质的大型数据集。这使人们能够从给定数据中提取一些关键信息，而这些信息在许多情况下都具有相关性和实用价值。所有与这些拓扑空间相关的特征——从某种意义上说，也包括空间本身——都是基于给定数据计算出来的。原则上，即使可以在适当的外部理论框架中，通过真值条件完整地规定这类过程，单值基础（UF）仍提供了一种可能性，让我们能够在内部（同时以形式化且严谨的方式）将这类计算解释为生成性拓扑构造。这种直接的内部解释，更符合该领域数学家和计算机科学家的日常语言与直觉。单值基础（UF）的这一独特特点有望缩小当今抽象纯数学与应用数学之间的鸿沟[59]。

现在让我们转向单值公理（UA），它正是单值基础得名的由来。设 A, B为类型，符号表示为 $A, B\ TYPE$。考虑恒等类型 $A =_{TYPE}$

B以及等价的类型 $A \simeq_{TYPE} B$，其中等价是指函数 $f : A \to B$，它在适当意义上可逆；在同伦诠释下，这类等价就是同伦等价。马丁-洛夫类型论/同伦类型论的规则允许我们构造一个如下形式的典范映射

$$e\,(A = B) \to (A \simeq B)$$

它见证了这样一个事实：恒等是等价的一种特殊情形。单值公理指出，这个映射 e有一个逆映射，因此它本身就是一个等价。换言之，UA 表示类型

$$(A = B) \simeq (A \simeq B)$$

是有元素的。基于立方类型论（CTT）的较新版本 UF 不再将 UA 作为公理，而是将其证明为定理。上述逆映射无法用 MLTT 的规则构造，却可以用 CTT 的规则构造。因此，基于 CTT 的 UF 无需通过一条专门的公理来假定单值性。这一事实支持了这样的主张：与 MLTT 相比，CTT 是 UF 更好的形式化载体 [12]。

单值性之所以重要，原因有很多。其中一个在哲学上尤其具有吸引力的原因是，单值性似乎为结构主义所倡导的“在同构意义下”（或在另一种等价意义下）进行数学推理这一理念提供了正当依据。这种做法体现于布尔巴基风格的基于集合的数学以及较新的范畴论数学中，但在这些基础框架中却缺乏坚实的逻辑基础。[1]中对这一主张进行了详细分析，并作了进一步限定，也提出了若干保留意见。

应当牢记，马丁-洛夫类型论的同伦语义是对其预期逻辑语义的扩展（但并非完全保守的扩展），但它并不是同伦论中这一理论的模型。同伦类型论的模型是对其句法结构的进一步解释，

这种解释以恰当的方式遵循同伦语义。当把同伦类型论的形式规则解释为外部结构时，可以将其理解为利用这些结构的元素来构建结构的规则。单值基础的这一特点，在布尔巴基式的理论构建语义方法中并无对应之处；该方法认为所有结构都是“静态的”。从历史角度看，单值基础的这一面向可被描述为公理化方法与生成式方法的综合；希尔伯特和伯奈斯早在1934年就将其视为一种理论可能性[58]。

由于单值基础仍在发展之中，现在评估它的成功与实际影响，并将其与早期数学基础的影响相比较，还为时尚早。不过，如今已经可以看出，单值基础旨在成为学习和从事数学实践的实用工具；与人们所熟知的希尔伯特式公理化数学基础不同，它并不受“元数学偏见”的困扰（见上文第2节）。因此，单值基础目前似乎是弥合数学基础与数学其他领域之间、数学基础理论与数学实践之间现有巨大鸿沟的有力候选方案。

5. Renewing Foundations and Progress in Mathematics

在本文余下部分，我想借用米凯莱·弗兰德 [20] 提出的术语，阐述我对数学及其基础的总体看法。首先，我的立场是基础主义者，因为我认为数学基础在实践和理论上都是数学的重要组成部分；我也认为，数学基础是数学与其哲学之间一个重要（尽管并非唯一）的接触点。其次，我是数学基础方面的多元主义者。这一点从前文各节应该已经很清楚：我描述了几种不同的数学基础，却没有说哪一种是正确的，哪几种是错误的。

由于我从 Lawvere 和罗森伯格那里借鉴的、作为工作定义的一般性数学基础概念，比 Friend 所采用的概念更宽泛，因此，与 Friend 的立场相比，我的立场在较弱意义上属于基础主义者。Friend 将数学基础定义为“一个以公理化方式表述的数学理论，成功建立起来的现有数学全部或大部分都可以归约到该理论”[20, p. 8]。我认为，Friend 在此使用“公理化”一词时，采用的是通常的希尔伯特式

意义；我将以这种意义对数学作公理化表述视为现行希尔伯特式数学基础的一项特殊特征，而非数学基础普遍具有的本质特征。单值基础就是一个不具备通常意义上公理化特征的数学基础实例，因为单值基础采用的是根岑式（即基于规则的）形式架构，而非希尔伯特式形式架构 [11]。

此外，我并不认同 Friend 的看法，认为数学可以在该词任何具有认识论意义的含义上“还原”为其基础。若以强认识论意义理解这种还原，可还原性条件便是：

In 要学习所有现有的数学知识，只需学习数学基础 .

这一条件显然过于严格，甚至荒谬。若将还原理解为形式可证性，或理解为其他不具有明确认识论内涵的含义，那么同一条件就过于宽泛或无关紧要。所有用英语写成的文本都可以编码为0-1序列，这一事实并不意味着0和1是所有英语文学的构成要素。类似地，大量数学内容都可以编码为ZFC的片段，这一事实本身并不意味着ZFC是数学的基础。 [12] 我不再进一步寻找恰当的还原概念，而是从相反的角度考察数学与其基础之间的关系。依我之见，以下关于数学基础的认识论条件是恰当的：

要获得现有数学知识的任何一部分，就必须学习数学基础（或其中相关的一部分）。

[11]拓宽通常所理解的公理化概念，使其也包括根岑式形式系统，是合理的。然而，这种术语上的约定会造成很大的混淆风险（因为像马丁-洛夫类型论这样的系统不包含通常意义上的公理，也会因此被视为公理化系统）。因此，本文仍采用“公理化”一词的通常含义。关于更广义的公理化概念，参见我的 [58][12]我并非要一举否定集合论基础数学，也认识到集合论数学基础所涉及的不仅仅是形式可证性。不过，我想强调的是，定理 T在 ZFC 中形式可证，通常意味着存在一条从 ZFC 的公理出发、保真地推导出 T；但仅凭这一点，并不能说明 T 是否 *known*，参见 [54] 相关讨论。

后一个条件意味着，数学基础或其中相关的部分是论证每一项数学结果所必需的，但这并不意味着数学基础足以达到这一目的。

尽管我对数学基础的工作性概念与 Friend 的概念有所不同，但两者仍有许多重要的共同特征，尤其是规范性、统一数学的能力，以及论证功能。归根结底，我对基础主义者身份的理解与 Friend 的看法并非全然相左。

现在让我解释一下我如何看待多种数学基础。我的第一个观点是历史性的。我认为，数学基础的发展是数学整体历史发展中的重要组成部分。我假定，这一整体发展是进步的，并将这种进步理解为数学知识的不断积累 [8]。这种进步观与这样一种数学图景相容：数学在某些固定的基础（比如欧几里得的基础）上发展，因此数学知识的增长意味着通过尺规证明越来越多的几何定理、解决越来越多的几何问题。只要暂且不考虑可行性问题，这一过程在理论上可以无限延续。然而，我们所熟知的数学更加丰富，它并非以这种过于简单的方式发展，至少从长远来看并非如此。现实中的数学始终在修订其基础，而这种修订对数学整体进步的贡献如下。

回想一下，角三等分和其他一些几何问题无法在欧几里得的基础上解决。19世纪，人们运用当时新兴的几何代数基础，以否定的方式成功解决了这些古老的几何问题；这些基础是笛卡尔等人在17至18世纪期间奠定的。这些新的基础[2] 并非在欧几里得的基础上添加某些原则而形成的保守扩张，而是对这些旧基础进行了深刻的概念性修订。然而，这种修订也并不意味着欧几里得的基础全然错误。欧几里得的思想至今仍然影响着我们，我们也认为他的尺规几何作图在根本上并无问题（只是存在一些可以弥补的逻辑缺口）。这种情况

可以与物理学基础的变革相比较：量子力学的发展带来了这场变革。量子力学这一基础理论并未取代先前公认的基础理论（经典力学），而是在揭示后者适用范围局限的同时，解释了它为何能够取得成功。物理学中关于新的基础理论应当以这种方式与旧的基础理论相联系的原则，称为玻尔对应原理。同一原则也适用于数学基础的变革。

为了运用新的基础，在不同的基础框架下解决几何问题，必须以新的方式重新表述这些问题。我们今天所说的勾股定理，与通常在欧几里得《几何原本》（第二卷，命题四十七）中被视为同一定理的表述并不完全相同；而这两种表述各自对应的证明也大不相同。数学内容如何、又在何种确切意义上能够在基础发生变化时保持其身份，是个棘手且鲜少探讨的问题，我在此不予讨论。不过，数学知识竟能在基础变革中得以延续，这一事实本身就十分引人注目。

上述几何基础变革的例子是典型情况，而非例外。有时，新的基础有助于发现旧有错误[13]，但我不知道有什么基础修订的例子会使此前在不同基础上建立的大量数学知识失效。因此，我观察到，数学基础的修订通常有三种作用：（i）保留先前获得的数学知识，但以新的形式表达；（ii）有助于解决未解决问题；（iii）引发仅凭旧基础资源无法实现的新发展。因此，数学基础的持续修订推动了数学的整体进步。

[13]希尔伯特几何基础便是一个例子，它提供了一种新的通用证明，证明此前所有声称证明了欧几里得第五公设的论证都是错误的。然而事实上，甚至在这一基础变革发生之前，人们就已发现这些所谓的证明要么错误，要么至少可疑且不可靠。

上述历史观点并不意味着我赞同历史相对主义，即不同时期采用的不同数学基础所提供的认识论规范各不相同。依据较新的数学基础所采用的认识论标准来评判较早的数学基础，是完全合理的。然而，应当牢记，不同的数学基础往往有着截然不同的设计，因此这类评判有时很容易失之偏颇。重申一下，新的数学基础通常不会使其取代的旧数学基础失去资格，而是让我们以新的视角看待它们。我看不出有什么理由认为，这种数学基础的更新最终应当收敛于某种"真正的"数学基础。数学基础的持续修订体现的是扩展（在深度和范围上），而非收敛。我认为，这种特定形式的进步值得鼓励，而不应因选定当前的数学基础作为终极基础而遭到遏止。

6. Tolerance and Pluralism

我的最后一点关乎 Friend 所说的宽容原则，即对与不同数学基础相关的相互冲突的数学哲学观点持宽容态度[20]。上文谈到，数学在历史发展过程中，其数学基础不断修订；这并不意味着在历史上的任何特定时刻，数学都依赖或应当依赖某一种唯一的数学基础。在实践中，同一代数学家往往采用不同的基础，其中既有较传统的，也有较"进步"的。新数学运动以及20世纪60至70年代数学教育领域类似改革的失败表明，至少在教育中，这种多样性是合理的。上文我已说明，新基础会取代并"吸收"旧基础，但不会彻底否定旧基础。当代数学基础也适用类似的模式。大量数学知识可以在不同的替代性数学基础上重构，例如集合论数学基础和范畴论数学基础。我们来考察一个更棘手的情形：某个数学证明（构造）P得到一种数学基础（F）的认可，却不被另一种数学基础（G）认可。看来，这类情形会使人无法对相互冲突的数学基础持宽容态度，否则便会陷入矛盾 [14]：

[14]采用次协调逻辑来容纳矛盾是一种选择，但我将在此提出另一种不同的解决方案。

为了判断 P 是否有效，必须采取立场，拒绝 F 或 G。然而，这一矛盾是可以避免的。有一种强有力的机制，能够让人无需在 F 和 G 之间作出选择，同时又不会成为认识论相对主义者或怀疑论者。

对上述 F 与 G 之间冲突的更精确描述，涉及 P的两个不同版本，即 P_F，它按照 F的标准来阐释并证明 P是正当的；以及P_G，它按照 G 的标准来阐释 P，并判定其无效。现在假设 G接受一种对 F 的解释 g，该解释扩展到 P_F，并以 G 的方式解释证明 P_F 为何以及如何符合 F的标准。反过来，F 也接受一种对 G 的解释 f，该解释扩展到 P_G，并以 F 的方式解释 P_G 为何不符合 G的标准。当这样的解释 f、g 存在时，F、G 就称为双可解释的。这些相互解释可以用以下图示表示:

$$F/P_F \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} G/P_G$$

因此，G 的使用者会得到另一种以 G为基础对 P进行的重构，即 $P'_G = g（P_F）$；与 P_G 不同，它符合 G的标准。换言之，解释 $f（F）$使得修正 P_G成为可能，而 P_G提供了对 P 的重构，并且该重构符合 G的标准。反过来，F的使用者会得到另一种对 P的重构，即 $P'_F = f（P_G）$；与 P_F 不同，它不符合 F的标准。F 和 G 的使用者如今对证明或否定 P所需的原则有了相互理解。F 的使用者和 G 的使用者会以不同方式思考 P，并对 P 的认知地位意见不一。但此时，他们的分歧属于数学哲学，而非数学本身。

设 P是命题（定理）T的证明，T_F和T_G分别是用 F和 G 的语言对 T所作的重构。由于按照 F的标准，P_F 是有效的，因此 F的使用者有理由相信 T_F为真。为便于论证，我们进一步假设 T_G 可以被证明为假，因此 G 的使用者有理由相信它为假。只要 T_F 和 T_G 被视为两种不同的

对同一命题 T 的表述，就可以认为 F 的使用者和 G 的使用者持有相互矛盾的信念，因此，想要同时使用这两种数学基础的人就会持有矛盾的信念。然而，这种推理是错误的。命题 T_F 和 T_G 并不相同；脱离理论与基础语境而独立存在的数学命题 T含义模糊，没有确定的真值。（试想“空间”“点”“圆”“集合”等数学术语，它们脱离理论语境便没有确定的含义。）将 T 表述为 T_F，或者表述为 T_G，便能通过将 T 拆分为两个不同的命题来消除歧义。上述框架使我们能够在 F 和 G 内部处理这种消歧：F 的使用者将其理解为 T_F 与 f（T_G）之间的区别，而 G 的使用者则将其理解为 T_G 与 g（T_F）之间的区别。这有助于我们避免围绕 T_F和 T_G中哪一种才是 T的“正确”表述而进行无谓争论。除去等价关系 $T_F \simeq g$（T_F）和 $T_G \simeq f$（T_G）——当解释 f和 g忠实时，这些等价关系成立—— F和 G的使用者都认为 T_F 为真，而 T_G 为假。

上述方案并不普遍适用，但适用于双向可解释的形式化数学基础，其中包括许多值得关注的情形。举一个简单的例子，考虑 F、G 是两种不同的希尔伯特式公理理论，且共享某些公理的情形。可以将 ZF 用作基础，并在某些证明中将选择公理（AC）作为一项独立假设。或者，也可以将 ZFC 用作基础，这时则把 AC 视为一条公理。从认识论与基础观点来看，这两种做法有所不同。然而，有大量数学知识完全不受是否接受 AC 为公理、还是将其作为假设这一选择的影响。在这种情况下，解释 $ZF \to ZFC$ 和 $ZF \leftarrow ZFC$ 是平凡的，只是将 AC 的认知地位从假设改为公理，再改回假设。在不同数学基础采用不同形式架构（如 ZF 和 UF 的情形）且在概念上存在差异时，这种相互解释可能非常复杂，并非平凡。长期以来，人们不断尝试在不同基础上重建欧几里得几何，这段历史提供了许多颇具启发性的此类例子。

也可以考虑一些强于单纯双重可解释性的条件。设 f、g 在复合运算下满足结合性。如果 $g \circ f = 1_F$ 和 $g \circ f = 1_G$，也就是说，F 在 G 中的像的像就是 F 本身；反过来，G 在 F 中的像的像也就是 G 本身，那么这两种数学基础便是等价的 —— 具体而言，等价的方式取决于这些解释的性质。初等范畴论此时作为一种元理论工具，表明不同数学基础之间还存在许多其他可能的构型，留待另文探讨。

不同数学基础在数学实践中共存的可能性，并不会削弱支持某些数学基础、反对另一些数学基础的哲学论证的重要性。这些哲学讨论会对数学产生多方面的影响，包括塑造其新趋势。我在此捍卫对多种数学基础及其哲学根基持宽容态度，但这并不意味着对数学基础相关的哲学问题持中立态度或缺乏兴趣。我将宽容理解为一种方法论原则：数学中的基础争论需要一个既有竞争又有合作的环境。只要承认彼此冲突的数学哲学观念值得拥有一个共同的舞台，以便得到系统呈现、批评和进一步发展，就也应当承认，这个舞台的一部分属于数学，并容纳多种数学基础。如上所述，数学基础的多样性不会把数学割裂成互不相连的部分。不同的数学基础可以服务于不同的特殊目的，并以不同方式发挥作用。我们已经指出，现行的集合论公理化数学基础是为元理论目的而设计的，而且无法有效用于形式证明的核验。将单值基础用于这一目的，并不排除将现行的集合论数学基础用于元数学目的的可能性。我不认为，这些不同的认识论任务——核验证明，以及对给定理论提供元理论视角——能够被恰当地划分为实践性任务和理论性任务。

这两项任务都具有理论层面，可从规范逻辑和认识论角度加以分析；也都具有实践层面，可通过过往经验和对新手的建议来描述。

正如许多作者早已指出的那样，传统的建筑隐喻虽然有用且富有启发性，却也可能极具误导性。与传统建筑不同，数学理论不会随着其理论基础的兴衰而兴衰，而是能够在基础发生变化后继续存在。Martin Krieger 将19世纪数学比作一座工业城市 [34, 第 6]章。沿着 Krieger 的隐喻思路，我们应将数学基础视为城市基础设施，它运用了从早期历史时期继承下来的要素。我们可以进一步拓展 Krieger 的隐喻，将当今的数学基础想象成规模更大、更灵活、更稳健的基础设施，更适合多样化的后工业经济。Friend 意义上的多元主义，是如此构想的数学基础所必不可少的条件 。对于本文标题所提出的问题，我的简短回答是：一种数学，多重基础。

References

[1] B. Ahrens 和 P. North。单值基础与等价原理。 *S. Centrone, D. Kant and D. Sarikaya (eds.) Reflections on the Foundations of Mathematics: Univalent Foundations, Set Theory and General Thoughts, Springer, Synthese Library vol.407*，第 137–150 页，2019年。预印本 arXiv:2202.01892。[2] A. Arnauld。《 *Nouveaux Eléments de Géométrie*》。Guillaume Desprez，巴黎，1683年。[3] V.I. Arnold。《论数学教学》（俄文）。 *Russian Math. Surveys*，53(1):229–236，1998年。[4] S.N. Artemov。《 *The Provability of Consistency*》。arXiv，2020年。预印本 arXiv:1902.07404。[5] J. Avigad 等。《〈交互式定理证明的里程碑〉导言》。 *Journal of AutomatedReasoning*，61(1):1–8，2018年。[6] O. Bradley Bassler。数学证明的可综览性：历史视角。 *Synthese*，148(1):99–133，2006年。[7] L. Baulieu。破除一种迷思：关于布尔巴基早期工作的问答，1934年—1944年。 *S.Chikara, S. Mitsuo, J.W. Dauben (Eds.) The intersection of history and mathematics, Birkhäuser,Basel*，第 241–252 页，1994年。[8] A. Bird。什么是科学进步？ *Noûs*，41(1):64–89，2007年。[9] N. Bourbaki。《 *Eléments de Mathématique. Théorie des Ensembles*》。巴黎：Hermann，1939年。

[10] N. Bourbaki。《数学的建筑》。 *The American Mathematical Monthly*，57(4):221–232，1950年。[11] N. Bourbaki。《 *Eléments de Mathématique: Topologie Algébrique*》， *ch. 1-4*。施普林格，2016年。[12] S. Huber、C. Cohen、Th. Coquand 和 Mortberg。《 *Cubical Type Theory: a constructive interpretationof the univalence axiom*》。arXiv，2016年。arXiv:1611.02108。[13] L. Corry。《 *Modern algebra and the rise of mathematical structures*》。Birkh¨ausert，2004年。[14] M. Detlefsen。关于利用哥德尔第一不完备性定理对希尔伯特纲领提出的所谓反驳。 *Journal of Philosophical Logic*，19(4):343–377，1990年。[15] S. Eilenberg 和 H. Cartan。《 *Homological Algebra*》。普林斯顿大学出版社，1956年。[16] S. Eilenberg 和 S. MacLane。自然等价的一般理论。 *Transactions of the AmericanMathematical Society*，58(2):231–294，1945年。[17] S. Eilenberg 和 N. Steenrod。《 *Foundations of Algebraic Topology*》。普林斯顿大学出版社，1952年。[18] J. Ferreiros。教条与不断变化的基础图景。 *Philosophia Scientia*，CS(5):27–42，2005年。[19] R. Feynman。“新”数学的新教科书。 *Engineering and Science*，28(6):9–15，1965年。[20] M. Friend。《 *Pluralism in Mathematics: A New Position in Philosophy of Mathematics*》。施普林格，2014年。[21] R. Gaskin。《 *The Unity of Proposition*》。牛津大学出版社，2009年。[22] J. Giraud。分类托扑斯。 *F.W. Lawvere (ed.) Toposes, Algebraic Geometry and Logic, (volume 274 of Lecture Notes in Mathematics), Springer*，2:43–56，1972年。[23] D. Grayson。面向数学家的单值基础导论。 *Bulletin of American Math-ematical Society (New Series)*，55(4):427–450，2018年。预印本 arXiv:1711.01477。[24] J. Grimm。在 Coq 中实现布尔巴基《数学原本》：第一部分，集合论。 *Journal of Formalized Reasoning*，3(1):79–126，2010年。[25] 单值性基础小组。《 *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*》。高等研究院（普林斯顿），2013年。可访问 http://homotopytypetheory.org/book/。[26] G.B. Halsted。《 *Rational geometry: a text-book for the science of space; based on Hilbert's foundations*》。约翰·威立父子出版公司，纽约，1904年。[27] H. Halvorson。《科学理论》。 *P. Humphreys (ed.) The Oxford Handbook of Philosophy of Science*，2016年。[28] G. Hellman。结构主义，数学的。 *Encyclopedia of Philosophy (Macmillan), Ed. Donald M.Borchert, 2nd ed.*，9:270–273，2006年。[29] D. Hilbert。数学基础。 *J. van Heijenoort (ed.), From Frege to Gödel: A Source Book in the Mathematical Logic*，2:464–480，1967年。[30] D. Hilbert 和 P. Bernays。《 *Grundlagen der Mathematik*》。施普林格，1934年—1939年。[31] David Hilbert。《 *Grundlagen der Geometrie*》。莱比锡，1899年。[32] S.C. Kleene。《 *Introduction to Metamathematics*》。Ishi Press International，2009年。

[33] M. Kline。《数学革命》。St James Press（纽约、伦敦），1973年。[34] M.H. Krieger。《数学中的结构》， *Subject*， *Calculation*， *Analogy*。World Scientific Publishing Company，2015年。[35] R. Kromer。《作为基础的范畴之范畴》。Birkhauser，2007年。[36] F.W. Lawvere。《作为数学基础的范畴之范畴》。哥伦比亚大学，1963年。[37] F.W. Lawvere。《作为数学基础的范畴之范畴》。载于 *Proceedings of the LaJolla Conference on Categorical Algebra*，第1–21页，1966年。[38] F.W. Lawvere。《量词与层》。 *M. Berger*， *J. Dieudonne and al. (eds.)*， *Actes du congres international des mathematiciens*，第329–334页，1970年。[39] F.W. Lawvere。《集合范畴的初等理论》（长篇版本），附作者评论。 *Reprints in Theory and Applications of Categories*，11:1–35，2005年。[40] F.W. Lawvere和R. Rosebrugh。《范畴的范畴》。剑桥大学出版社，2003年。[41] S. MacLane。《数学中的结构》。 *Philosophia Mathematica*，4(2):174–183，1996年。[42] P. Mancosu等。《数学革命》。牛津大学出版社，2008年。[43] Yu. Manin。格奥尔格·康托尔及其遗产（在德国数学学会会议暨康托尔奖章颁奖典礼上的演讲），2002年。arXiv：0209244。[44] J.-P. Marquis。 *From a Geometrical Point of View: A Study of the History and Philosophy of CategoryTheory*。施普林格，2009年。[45] D.C. McCarty。《问题与谜题：希尔伯特与杜布瓦-雷蒙》。 *Synthese*，147:63–79，2005年。[46] C. McLarty。 *Elementary Categories*， *Elementary Toposes*。牛津：克拉伦登出版社，1992年。[47] I. Mueller。欧几里得《几何原本》与公理化方法。 *British Journal of Philosophy of Science*，20:289–309，1969年。[48] I. M¨uller。希腊数学与希腊逻辑。 *Ancient Logic and Its Modern Interpretations (SyntheseHistorical Library vol.9)*，第35–70页，1974年。[49] O. Neugebauer。 *A History of Ancient Mathematical Astronomy*。施普林格，2012年。[50] M. Pastin。《认识论的必要性：为问题实在论辩护》。 *G.S. Pappas (Ed.) Justification and Knowledge. New Studies in Epistemology*， *D. Reidel Publishing Company*，第151–168页，1979年。[51] A. Patania、F. Vaccarino和G. Petri。数据拓扑分析。 *EPJ Data Science*，6(7)，2017年。[52] C.J. Phillips。《数学基础》。芝加哥大学出版社，2015年。[53] Th. Piecha和P. (eds.) Shroeder-Heister。《证明论的哲学方面》*vol. 43)*。施普林格，2015年。[54]D. Prawitz。《证明论的哲学方面》。 *G. Fløistad*， *La philosophie contemporaine.Chroniques nouvelles*， *Philosophie du langage*，1:235–278，1986年。

[55] D. Quillen。《同伦论》， *Lecture Notes in Mathematics*， *No. 43*。施普林格，1967年。[56] R. Rashed。《数学革命》。施普林格，1994年。[57] A. Rodin。《构造性公理化方法》。施普林格，2014年。预印本 arXiv:1210.1478。[58] A. Rodin。论构造性公理化方法。 *Logique et Analyse*，61(242):201–231，2018年。预印本 arXiv:1408.3591。[59] A. Rodin。Voevodsky未完成的项目：弥合纯数学与应用数学之间的鸿沟。*Biosystems*，204:104391，2021年。预印本 arXiv: 2012.01150。[60] W. Stegm¨uller。《数学基础》。施普林格，1979年。[61] M. Stone。《数学革命》。 *American Mathematical Monthly*，68(8):715–734，1961年。[62] P. Suppes。《数学基础》。斯坦福（加利福尼亚州）：CSLI出版社，2002年。[63] A. Tarski。《数学基础》。牛津大学出版社，1941年。[64] P. Taylor。《范畴的范畴》。剑桥大学出版社，1999年。[65] N.Ya. Vilenkin、V.G. Boltyansky和I.M. Yaglom。学校数学课程的内容（俄文）。 *Matematicheskoe Prosveschenie (Mathematical Enlightement)*，4:131–143，1959年。[66]V.A. Voevodsky。数学基础与同伦论（2006年3月22日在普林斯顿高等研究院所作的讲座），2006年。见 https://www.math.ias.edu/vladimir/Lectures。[67]R. Zach。《希尔伯特纲领》。 *Stanford Encyclopedia of Philosophy*，2003年。见 https://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/。