利用 WKB近似对含二阶导数的奇异拉格朗日系统进行分数阶量子化

Eyad Hasan Hasan

塔菲拉技术大学，理学院，应用物理系，邮政信箱：179，塔菲拉 66110，约旦

摘要

本文研究了含二阶导数的分数阶奇异拉格朗日系统理论，并利用 WKB近似考察了这些系统的分数阶量子化。这些系统可以采用哈密顿–雅可比处理。本文推导了运动方程，并求解哈密顿–雅可比偏微分方程以确定作用量函数。通过求得作用量函数，构造了这些系统的波函数。研究结果表明，量子结果与经典结果一致。此外，为了阐明该理论，本文还考察了两个数学例子。

关键词：WKB量子化、二阶奇异拉格朗日量、分数阶微积分、分数阶哈密顿-雅可比函数。

PACS 编号：11. 10. Ef, 45. 20. –j, 45. 10. Hj

目录

1. 引言 2

2. 二阶导数的分数阶奇异拉格朗日量与哈密顿-雅可比形式体系 7 3. 分数阶哈密顿-雅可比函数与 WKB 量子化 9 4. 示例 18 5. 结论

参考文献

电子邮件： iyad973@yahoo.com，博士_eyad2004@ttu.edu.jo

1. 引言

狄拉克关于引力场量子化的工作 [1, 2] 使奇异拉格朗日系统的量子化受到越来越多的关注。继狄拉克的工作之后，研究人员提出了一种研究奇异拉格朗日系统的新形式体系，即 Guler 提出的正则方法 [3], 。随后，这一形式体系被用于通过 WKB近似和路径积分方法对这些系统进行量子化 [4-8]。Hasan 等人利用 WKB近似研究了高阶奇异拉格朗日系统量子化的一般理论 [6-8]。在该理论中，研究人员发现量子结果与经典结果完全一致。

本文旨在将这一理论拓展至采用分数阶导数的这类系统。为量子化物理系统，人们对分数阶奇异拉格朗日系统的量子化进行了越来越多的研究 [9, 10]。近年来，具有二阶导数的分数阶拉格朗日系统也受到越来越多的关注和重视 [11, 12]。研究人员考察了采用分数阶导数的这类系统的哈密顿-雅可比形式体系，并分析了欧拉-拉格朗日方程和哈密顿方程 [11, 12]。最近，研究人员利用正则方法构建了一种形式体系，通过 WKB近似和路径积分方法对含一阶导数的奇异系统进行量子化 [3] [9, 10]。在这一形式体系中，运动方程被写成全微分方程的分数阶形式，同时构建了分数阶哈密顿-雅可比偏微分方程组。此外，还得到了这一方程组的分数阶形式解以及分数阶哈密顿-雅可比函数。

本文旨在拓展关于含二阶导数的分数阶奇异拉格朗日系统的研究，并使用 WKB近似对这些系统进行量子化。我们构建了研究分数阶奇异拉格朗日系统的形式体系，以及针对二阶导数的哈密顿-雅可比形式体系。此外，我们还为这些系统构建了分数阶哈密顿-雅可比函数。求得该函数后，便可构建相应的波函数，进而使用 WKB近似对这些系统进行量子化。

现在，分数阶导数中最重要的定义分别是左黎曼–刘维尔导数和右黎曼–刘维尔导数，即[13]。

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \ . \tag{1} $$

$$ {}_tD_b^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \ . \tag{2} $$

其中 $n \in N$ 且 $n-1 < \alpha < n$ 是欧拉伽马函数。这里 α 是一个整数，这些导数具有如下性质：

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{\alpha} f(t) , \tag{3} $$

$$ {}_tD_b^{\alpha} f(t) = \left(-\frac{d}{dt} \right)^{\alpha} f(t) , \tag{4} $$

本文旨在分数阶导数框架下，构建含二阶导数的奇异拉格朗日系统的量子化形式体系。本文结构如下：第2节构建了含二阶导数的分数阶奇异拉格朗日量和哈密顿-雅可比形式体系。第3节讨论了分数阶哈密顿-雅可比函数以及使用WKB近似进行量子化。第4节考察了两个示例。最后，第5节给出一些总结性评述。

2. 含二阶导数的分数阶奇异拉格朗日量与哈密顿-雅可比形式体系

本节将在分数阶微积分框架下构建二阶奇异拉格朗日量。起点是一个依赖分数阶导数的拉格朗日量，其表达式为

$$ L = L(D^{\alpha-1} q_i, D^{\alpha} q_i, D^{2\alpha} q_i, t) \ . \tag{5} $$

因此，海森矩阵的分数阶定义为

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial D^{2\alpha} q_i \partial D^{2\alpha} q_j} \qquad i,j = 1,2,\ldots,N \tag{6}$$

如果秩为，则 分数阶拉格朗日量称为正则；否则，拉格朗日量是奇异的 。现在，我们可以定义与广义坐标 相对应的广义动量 如下：

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial D^{2\alpha} q_a}, \tag{7}$$

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial D^{2\alpha} q_\mu} \ . \tag{8}$$

由于海森矩阵的秩为 N-R，因此可以求解方程 (7)，得到 N-R 个加速度 用 和 a如下：

$$D^{2\alpha} q_a = w_a(D^{\alpha-1} q_i, D^{\alpha} q_i, \pi_a, D^{2\alpha} q_\mu). \tag{9}$$

将（9）代入（8），可得

$$\pi_\mu = -H_\mu^{\pi}(D^{\alpha-1} q_i, D^{\alpha} q_i, p_a, \pi_a) \ . \tag{10}$$

动量的类似表达式 可表示为：

$$p_\mu = -H_\mu^{p}(D^{\alpha-1} q_i, D^{\alpha} q_i, p_a, \pi_a) \tag{11}$$

以及广义动量对应于广义坐标可写为：

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial D^{\alpha} q_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial D^{2\alpha} q_a}\right); \tag{12a}$$

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial D^{\alpha} q_\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial D^{2\alpha} q_\mu}\right). \tag{12b}$$

方程（10）和（11）可以写成

$$H'^{p}_{\mu}(D^{\alpha-1}q_i, D^{\alpha}q_i, p_i, \pi_i) = p_{\mu} + H^{p}_{\mu} = 0 \quad ; \tag{13a}$$

$$H'^{\pi}_{\mu}(D^{\alpha-1}q_i, D^{\alpha}q_i, p_i, \pi_i) = \pi_{\mu} + H^{\pi}_{\mu} = 0 \tag{13b}$$

因此，方程（13）表示一级约束 [1, 2]。

现在，我们将定义泊松括号

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial D^{\alpha-1}q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial D^{\alpha-1}q_i} + \frac{\partial A}{\partial D^{\alpha}q_i}\frac{\partial B}{\partial \pi_i} - \frac{\partial A}{\partial \pi_i}\frac{\partial B}{\partial D^{\alpha}q_i}.$$

其中，A 和 B 是相空间中的函数，以正则变量 , ,和 . H表示。这里，广义动量和分别与广义坐标和共轭。因此，基本泊松括号为

$$\{D^{\alpha-1}q_i, p_j\} \equiv \delta_{ij} \text{ and } \{D^{\alpha}q_i, \pi_j\} \equiv \delta_{ij}, \qquad \text{where } i, j = 1, ..., N$$

分数阶哈密顿量 可定义为$H_{。}$

$$H_{。} = -L(D^{\alpha-1}q_i, D^{2\alpha}q_v, D^{\alpha}q_v, W_a) + p_a D^{\alpha}q_a + \pi_a D^{2\alpha}q_a - D^{\alpha}q_{\mu}H^{p}_{\mu} - D^{2\alpha}q_{\mu}H^{\pi}_{\mu}. \quad (14)$$

$$\mu = 1, ..., R; \qquad a = R+1, ..., N.;$$

由于奇异拉格朗日量的自然属性，广义动量 和 并非 独立于 和 。因此，我们可以将哈密顿-雅可比偏微分方程组写为 [14]

$$H'_{\circ}(D^{\alpha-1}q_i, D^{\alpha}q_i, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_a}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_v}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_a}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_v}) = p_{\circ} + H_{\circ} = 0; \quad (15a)$$

$$H'^{p}_{\mu}(D^{\alpha-1}q_i, D^{\alpha}q_i, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_a}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_v}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_a}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_v}) = p_{\mu} + H^{p}_{\mu} = 0; \quad (15b)$$

$$H'^{p}_{\mu}(D^{\alpha-1}q_i, D^{\alpha}q_i, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_a}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_v}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_a}, \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_v}) = \pi_{\mu} + H^{\pi}_{\mu} = 0. \quad (15c)$$

这里，分数阶哈密顿原理函数 写作

$$S = S(D^{\alpha-1}q_a, D^{\alpha-1}q_{\mu}, D^{\alpha}q_a, D^{\alpha}q_{\mu}, t), \quad (16)$$

并且我们可以定义

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_a}, \quad p_{\mu} = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_{\mu}}, \pi_a = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_a}, \pi_{\mu} = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_{\mu}} \text{ and } p_{\circ} = \frac{\partial S}{\partial t}.$$

因此，分数阶形式的运动方程可写成如下全微分方程 [14]:

$$dD^{\alpha-1}q_a = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial p_a}dt + \frac{\partial H'^{p}_{\mu}}{\partial p_a}dD^{\alpha-1}q_{\mu} + \frac{\partial H'^{\pi}_{\mu}}{\partial p_a}dD^{\alpha}q_{\mu}, \quad (17a)$$

$$dD^{\alpha}q_a = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial \pi_a}dt + \frac{\partial H'^{p}_{\mu}}{\partial \pi_a}dD^{\alpha-1}q_{\mu} + \frac{\partial H'^{\pi}_{\mu}}{\partial \pi_a}dD^{\alpha}q_{\mu}, \quad (17b)$$

$$-dp_i = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial D^{\alpha-1}q_i}dt + \frac{\partial H'^{p}_{\mu}}{\partial D^{\alpha-1}q_i}dD^{\alpha-1}q_{\mu} + \frac{\partial H'^{\pi}_{\mu}}{\partial D^{\alpha-1}q_i}dD^{\alpha}q_{\mu}, \quad (17c)$$

$$-d\pi_i = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial D^{\alpha}q_i}dt + \frac{\partial H'^{p}_{\mu}}{\partial D^{\alpha}q_i}dD^{\alpha-1}q_{\mu} + \frac{\partial H'^{\pi}_{\mu}}{\partial D^{\alpha}q_i}dD^{\alpha}q_{\mu}, \quad (17d)$$

若方程（15）的全导数为零 [3]

$$dH'_{\circ} = 0; \quad dH'^{p}_{\mu} = 0; \quad dH'^{\pi}_{\mu} = 0. \quad (18)$$

这意味着方程（17）是可积的，且海森矩阵的秩为 。由于存在约束，自由度从 降至，因此，约束使正则相空间坐标从降至。 N $N-R$ N $N-R$

方程（15）可写为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H_{\circ}(D^{\alpha-1}q_i,D^{\alpha}q_i,p_a,\pi_a)=0; \tag{19a}$$

$$\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_{\mu}}+H_{\mu}^{p}(D^{\alpha-1}q_i,D^{\alpha}q_i,p_a,\pi_a)=0; \tag{19b}$$

$$\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q_{\mu}}+H_{\mu}^{\pi}(D^{\alpha-1}q_i,D^{\alpha}q_i,p_a,\pi_a)=0. \tag{19c}$$

3. 哈密尔 n-Jacobi 函数与基于 WKB近似的量子化

遵循文献 [6-8] 对高阶奇异拉格朗日系统的哈密顿-雅可比函数及其 WKB近似量子化的研究，分数阶哈密顿-雅可比函数可写为

$$S(D^{\alpha-1}q_a,D^{\alpha-1}q_{\mu},D^{\alpha}q_a,D^{\alpha}q_{\mu},t)=f(t)+W_a(D^{\alpha-1}q_a,E_a)+W_a'(D^{\alpha}q_a,E_a,E_a')+ f_{\mu}(D^{\alpha-1}q_{\mu})+f_{\mu}'(D^{\alpha}q_{\mu})+A \tag{20}$$

在这种情况下，我们希望找到一个可写成可分离形式的解，因此可以猜测方程 (19) 的一个通解具有方程 (20) 的形式。

这里，关于 的结果方程有如下解 是 (N-R) 个积分常数，而 是另一个常数； 和 被视为独立变量，就像时间 以及其余函数，，和 是与时间无关的哈密顿-雅可比函数。

一旦求得哈密顿-雅可比函数，运动方程即可通过以下正则变换[15], 得到:

$$\eta_a=\frac{\partial S}{\partial E_a'}; \tag{21a}$$

$$\lambda_a=\frac{\partial S}{\partial E_a}; \tag{21b}$$

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q_i}; \tag{21c}$$

$$\pi_i = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha} q_i}, \tag{21d}$$

和 的数量等于海森矩阵的秩、N-R；而 和 是常数，可由初始条件确定。 η_a λ_a

由于受到约束，奇异拉格朗日系统的海森矩阵秩为 N-R。因此，这些系统的分数波函数可写为 [6- 8]。 Ψ

$$\Psi(D^{\alpha-1}q_a, D^{\alpha-1}q_\mu, D^{\alpha}q_a, D^{\alpha}q_\mu, t) = \left[\prod_{a=1}^{N-R} \psi_{0a}(D^{\alpha-1}q_a)\phi_{0a}(D^{\alpha}q_a)\right] \times \exp\frac{iS(D^{\alpha-1}q_a, D^{\alpha-1}q_\mu, D^{\alpha}q_a, D^{\alpha}q_\mu, t)}{\hbar}, \tag{22a}$$

$$\psi_{0a} = \frac{1}{\sqrt{p(D^{\alpha-1}q_a)}}; \tag{22b}$$

$$\phi_{0a} = \frac{1}{\sqrt{\pi(D^{\alpha}q_a)}}. \tag{22c}$$

并且该波函数满足以下条件:

$$\hat{H}_0'\Psi = 0; \tag{23a}$$

$$H_\mu'^{p}\Psi = 0; \tag{23b}$$

$$H_\mu'^{\pi}\Psi = 0. \tag{23c}$$

当广义坐标和动量写成算符时，可得到这些条件:

$$D^{\alpha-1}q_i \to D^{\alpha-1}q_i; \tag{24a}$$

$$D^{\alpha}q_i \to D^{\alpha}q_i; \tag{24b}$$

$$p_i \to \hat{p}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_i}; \tag{24c}$$

$$\pi_i \to \hat{\pi}_i = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha}q_i}; \tag{24d}$$

$$p_0 \longrightarrow \hat{p}_0 = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{24e}$$

.

4. 示例

示例1：我们将讨论一种具有如下形式的分数阶二阶正则拉格朗日量

$$L = \frac{1}{2}\left((D^{2\alpha}q)^2 - (D^{\alpha}q)^2\right) \tag{25}$$

相应的广义动量为

$$p = -D^{\alpha}q - D^{3\alpha}q\,; \tag{26a}$$

$$\pi = D^{2\alpha}q\,; \tag{26b}$$

哈密顿量 计算如下

$$H_{\circ} = pD^{\alpha}q + \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^2\,. \tag{27}$$

相应的哈密顿-雅可比偏微分方程组为

$$H'_{\circ} = p_{\circ} + H_{\circ} = p_{\circ} + pD^{\alpha}q + \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^2\,. \tag{28}$$

我们注意到，在此例中不存在一级约束 [1, 2]。

因此，运动方程可计算如下

$$dD^{\alpha-1}q = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial p}dt = D^{\alpha}q dt, \tag{29a}$$

$$dD^{\alpha}q = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial \pi}dt = \pi dt, \tag{29b}$$

$$-dp = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial D^{\alpha-1}q}dt = 0, \tag{29c}$$

$$-d\pi = \frac{\partial H'_{\circ}}{\partial D^{\alpha}q}dt = (p + D^{\alpha}q)dt, \tag{29d}$$

哈密顿-雅可比偏微分方程（方程 (19a)）为

$$H'_{\circ} = p_{\circ} + H_{\circ} = \frac{\partial S}{\partial t} + D^{\alpha}q\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q}\right)^2 + \frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^2 = 0\,. \tag{30}$$

将方程 (20) 代入 (30)，可得

$$\frac{\partial f}{\partial t}+D^{\alpha}q\frac{\partial W}{\partial D^{\alpha-1}q}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W'}{\partial D^{\alpha}q}\right)^{2}+\frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^{2}=0\quad . \tag{31}$$

由于与时间无关，因此可以写成。方程（31）可写为

$$-E'+D^{\alpha}q\frac{\partial W}{\partial D^{\alpha-1}q}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W'}{\partial D^{\alpha}q}\right)^{2}+\frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^{2}=0\,. \tag{32}$$

由方程（32）可知，仅取决于且仅取决于。这意味着

$$\frac{\partial W}{\partial D^{\alpha-1}q}=E\,; \tag{33a}$$

因此

$$W=D^{\alpha-1}qE\,. \tag{33b}$$

将方程（33b）代入（32），可得

$$-E'+D^{\alpha}qE+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W'}{\partial D^{\alpha}q}\right)^{2}+\frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^{2}=0\,. \tag{34}$$

该方程导出

$$W'(D^{\alpha}q,E,E')=\int\sqrt{2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2}}\,dD^{\alpha}q\,. \tag{35}$$

因此，可得哈密顿-雅可比函数

$$S(D^{\alpha-1}q,D^{\alpha}q,E,E')=-E't+D^{\alpha-1}qE+\int\sqrt{2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2}}\,dD^{\alpha}q+A \tag{36}$$

利用式（21a、21b），我们可以得到广义坐标的解

$$\eta=\frac{\partial S}{\partial E'}=-t+\int\frac{dD^{\alpha}q}{\sqrt{2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2}}}\,; \tag{37a}$$

$$\lambda=\frac{\partial S}{\partial E}=D^{\alpha-1}q+\int\frac{[E-(D^{\alpha}q+E)}{\sqrt{2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2}}}dD^{\alpha}q\,; \tag{37b}$$

分别求解式 (37) 可得

$$D^{\alpha}q=\sqrt{2E'+E^{2}}\sin(\eta+t)-E\,; \tag{38a}$$

$$D^{\alpha-1}q=\lambda-E(\eta+t)-\sqrt{2E'+E^{2}}\cos(\eta+t)\,. \tag{38b}$$

将所得结果代入式 (21c,21d) 后，即可确定广义动量：

$D^{\alpha}q$

$$p=\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1}q}=E\,; \tag{39a}$$

$$\pi=\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha}q}=\sqrt{2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2}}=\sqrt{2E'+E^{2}}\cos(\eta+t)\,. \tag{39b}$$

此例的波函数可确定为

$$\Psi(D^{\alpha-1}q,D^{\alpha}q,t)=\left[\psi_{01}(D^{\alpha-1}q)\phi_{01}(D^{\alpha}q)\right]\exp\frac{iS(D^{\alpha-1}q,D^{\alpha}q,t)}{\hbar}, \tag{40}$$

其中

$$\psi_{01}=\frac{1}{\sqrt{p(D^{\alpha-1}q)}}=\left[E\right]^{\frac{-1}{2}}; \tag{41a}$$

$$\phi_{01}=\frac{1}{\sqrt{\pi(D^{\alpha}q)}}=\left[2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2}\right]^{\frac{-1}{4}}. \tag{41b}$$

且哈密顿-雅可比 由方程S(36) 给出。

现在，将广义坐标和动量表示为算符后，我们将哈密顿-雅可比Ψ偏微分方程 HJPDE（方程 (28)）应用于波函数：

$$\hat{H}'_{\circ}\Psi=\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+D^{\alpha}q\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q}-\frac{\hbar^{2}}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial(D^{\alpha}q)^{2}}+\frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^{2}\right]\Psi\,. \tag{42}$$

经过一些代数运算，我们得到

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi=-E'\Psi\,; \tag{43a}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q}\Psi=E\Psi\,; \tag{43b}$$

$$-\frac{\hbar^{2}}{2}\frac{\partial}{\partial(D^{\alpha}q)^{2}}\Psi=\left[\begin{array}{l}-\frac{5\hbar^{2}}{8}(D^{\alpha}q+E)^{2}(2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2)})^{-2}-\\-\frac{\hbar^{2}}{4}(2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2})^{-1}+\frac{1}{2}(2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2})\end{array}\right]\Psi\,; \tag{43c}$$

.

因此，方程（42）变为

$$\hat{H}'_{\circ}\Psi=\left[\begin{array}{l}-E'+D^{\alpha}qE-\frac{5\hbar^{2}}{8}(D^{\alpha}q+E)^{2}(2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2)})^{-2}-\\ \frac{\hbar^{2}}{4}(2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2})^{-1}+\frac{1}{2}(2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2})+\frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^{2}\end{array}\right]\Psi. \qquad (44)$$

取半经典极限 在方程 (44) 中 $\hbar\to 0$，我们得到

$$\hat{H}'_{\circ}\Psi=\left[-E'+D^{\alpha}qE+\frac{1}{2}(2E'+E^{2}-(D^{\alpha}q+E)^{2})+\frac{1}{2}(D^{\alpha}q)^{2}\right]\Psi=0. \qquad (45)$$

例2：考虑如下具有两个一级一类约束的数学奇异拉格朗日量，其形式为

$$L=\frac{1}{2}\left((D^{2\alpha}q)^{2}+(D^{2\alpha}q_{2})^{2}\right)+D^{\alpha}q_{3}D^{2\alpha}q_{3}+D^{\alpha}q_{3}D^{\alpha-1}q_{3}+D^{\alpha-1}q_{2}D^{\alpha}q_{2}. \qquad (46)$$

相应的广义动量，由方程（7、8）和（12）给出，为

$$p_{1}=-D^{3\alpha}q_{1}; \qquad (47a)$$

$$p_{2}=D^{\alpha-1}q_{2}-D^{3\alpha}q_{2}; \qquad (47b)$$

$$p_{3}=D^{\alpha-1}q_{3}=-H_{3}^{p}; \qquad (47c)$$

$$\pi_{1}=D^{2\alpha}q_{1}; \qquad (47d)$$

$$\pi_{2}=D^{2\alpha}q_{2}; \qquad (47e)$$

$$\pi_{3}=D^{\alpha}q_{3}=-H_{3}^{\pi}. \qquad (47f)$$

这里，方程（47c）和（47f）可写为

$$H_{3}'^{p}=p_{3}-D^{\alpha-1}q_{3}=0; \qquad (48a)$$

$$H_{3}'^{\pi}=\pi_{3}-D^{\alpha}q_{3}=0. \qquad (48b)$$

并表示为一级约束 [1, 2]。

哈密顿量计算如下 H_{0}

$$H_{\circ}=p_{1}D^{\alpha}q_{1}+(p_{2}-D^{\alpha-1}q_{2})D^{\alpha}q_{2}+\frac{1}{2}(\pi_{1}^{2}+\pi_{2}^{2}). \qquad (49)$$

相应的哈密顿-雅可比偏微分方程组，即式（15），写作

$$H'_{\circ} = p_{\circ} + H_{\circ} = p_1 D^{\alpha} q_1 + (p_2 - D^{\alpha-1} q_2) D^{\alpha} q_2 + \frac{1}{2}(\pi_1^2 + \pi_2^2). \tag{50a}$$

$$H_3'^{p} = p_3 - D^{\alpha-1} q_3 = 0; \tag{50b}$$

$$H_3'^{\pi} = \pi_3 - D^{\alpha} q_3 = 0. \tag{50c}$$

这里，泊松括号 ， 和 。 因此， 不存在次级约束， 这些都是一级约束 [1, 2]。

相应的哈密顿-雅可比偏微分方程组，即方程 (19)，为

$$H'_{\circ} = p_{\circ} + H_{\circ} = \frac{\partial S}{\partial t} + D^{\alpha} q_1 \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1} q_1} + D^{\alpha} q_2 \left(\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1} q_2} - D^{\alpha-1} q_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha} q_1} \right)^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial D^{\alpha} q_2} \right)^2 = 0$$

; (51a)

$$H_3'^{p} = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1} q_3} - D^{\alpha-1} q_3 = 0; \tag{51b}$$

$$H_3'^{\pi} = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha} q_3} - D^{\alpha} q_3 = 0. \tag{51c}$$

哈密顿-雅可比函数方程 (20)S可写为

$$S(D^{\alpha-1} q_1, D^{\alpha-1} q_2, D^{\alpha-1} q_3, D^{\alpha} q_1 D^{\alpha} q_2, D^{\alpha} q_3, t) = f(t) + W_1(D^{\alpha-1} q_1, E_1) + W_2(D^{\alpha-1} q_2, E_2) + W_1'(D^{\alpha} q_1, E_1, E_1') + W_2'(D^{\alpha} q_2, E_2, E_2') + f_3(D^{\alpha-1} q_3) + f_3'(D^{\alpha} q_3) + A \tag{52}$$

由于哈密顿量与时间无关，且坐标 和 被视为独立变量，因此可以写成 H_0 $D^{\alpha-1} q_3$ $D^{\alpha} q_3$

$$f(t) = -(E_1' + E_2')t.$$

代入方程（51a），得

$$-E_1' + D^{\alpha} q_1 \frac{\partial W_1}{\partial D^{\alpha-1} q_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_1'}{\partial D^{\alpha} q_1} \right)^2 - E_2' + D^{\alpha} q_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial D^{\alpha-1} q_2} - D^{\alpha} q_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_2'}{\partial D^{\alpha} q_2} \right)^2 = 0. \tag{52}$$

注意到 仅依赖于 ，而 仅依赖于 于是可以 W_1 $D^{\alpha-1} q_1$ W_2 $D^{\alpha-1} q_2$

写成

$$\frac{\partial W_1}{\partial D^{\alpha-1} q_1} = E_1;$$

因此

$$W_1 = D^{\alpha-1} q_1 E_1 . \tag{53a}$$

and

$$\frac{\partial W_2}{\partial D^{\alpha-1} q_2} - D^{\alpha-1} q_2 = E_2 ;$$

因此

$$W_2 = D^{\alpha-1} q_2 E_2 + \frac{1}{2} (D^{\alpha-1} q_2)^2 \quad . \tag{53b}$$

将方程 (53) 代入方程 (52)，得到

$$-E_1' + D^{\alpha} q_1 E_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1'}{\partial D^{\alpha} q_1}\right)^2 - E_2' + D^{\alpha} q_2 E_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_2'}{\partial D^{\alpha} q_2}\right)^2 = 0 . \tag{54}$$

对该方程进行变量分离，得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_1'}{\partial D^{\alpha} q_1}\right)^2 + D^{\alpha} q_1 E_1 - E_1' = 0 ; \tag{55a}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_2'}{\partial D^{\alpha} q_2}\right)^2 + D^{\alpha} q_2 E_2 - E_2' = 0 . \tag{55b}$$

这两个方程的解可确定为

$$W_1'(D^{\alpha} q_1, E_1, E_1') = \int \sqrt{2E_1' - 2D^{\alpha} q_1 E_1}\, dD^{\alpha} q_1 ; \tag{56a}$$

$$W_2'(D^{\alpha} q_2, E_2, E_2') = \int \sqrt{2E_2' - 2D^{\alpha} q_2 E_2}\, dD^{\alpha} q_2 . \tag{56b}$$

利用方程 (51b)，我们得到；利用方程 (51c)，我们得到

(21)(qDqDf

$$f_3(D^{\alpha} q_3) = \frac{1}{2}(D^{\alpha} q_3)^2 .$$

由此可得，哈密顿-雅可比函数变为

$$S(D^{\alpha-1} q_1, D^{\alpha-1} q_2, D^{\alpha-1} q_3, D^{\alpha} q_1 D^{\alpha} q_2, D^{\alpha} q_3, t) = (-E_1' - E_2')t + D^{\alpha-1} q_1 E_1 + \frac{1}{2}(D^{\alpha-1} q_2)^2 +$$

$$\int \sqrt{2E_1' - 2D^{\alpha} q_1 E_1}\, dD^{\alpha} q_1 + \int \sqrt{2E_2' - 2D^{\alpha} q_2 E_2}\, dD^{\alpha} q_2 + \frac{1}{2}(D^{\alpha-1} q_3)^2 + \frac{1}{2}(D^{\alpha} q_3)^2 + A$$

. (57)

广义坐标的解可通过变换式 (21a, 21b) 得到

$$\eta_1 = \frac{\partial S}{\partial E_1'} = -t + \int \frac{dD^\alpha q_1}{\sqrt{2E_1' - 2D^\alpha q_1 E_1}}; \tag{58a}$$

$$\eta_2 = \frac{\partial S}{\partial E_2'} = -t + \int \frac{dD^\alpha q_2}{\sqrt{2E_2' - 2D^\alpha q_2 E_2}}; \tag{58b}$$

$$\lambda_1 = \frac{\partial S}{\partial E_1} = D^{\alpha-1} q_1 + \int \frac{D^\alpha q_1}{\sqrt{2E_1' - 2D^\alpha q_1 E_1}} dD^\alpha q_1 \ ; \tag{58c}$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial S}{\partial E_2} = D^{\alpha-1} q_2 + \int \frac{D^\alpha q_2}{\sqrt{2E_2' - 2D^\alpha q_2 E_2}} dD^\alpha q_2 . \tag{58d}$$

求解这四个方程，可得

$$D^\alpha q_1 = \frac{E_1'}{E_1} - \frac{E_1}{2}(\eta_1 + t)^2; \tag{59a}$$

$$D^\alpha q_2 = \frac{E_2'}{E_2} - \frac{E_2}{2}(\eta_2 + t)^2 \quad ; \tag{59b}$$

$$D^{\alpha-1} q_1 = \lambda_1 + \frac{E_1'}{E_1}(\eta_1 + t) - \frac{E_1}{6}(\eta_1 + t)^3; \tag{59c}$$

$$D^{\alpha-1} q_2 = \lambda_2 + \frac{E_2'}{E_2}(\eta_2 + t) - \frac{E_2}{6}(\eta_2 + t)^3 . \tag{59d}$$

利用方程（21c、21d）求出运动方程的另一部分，并在代入 和的结果后即可确定:

$$D^\alpha q_1 \qquad D^\alpha q_2$$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial \text{qD}^{\alpha-1}} = E_1; \tag{60a}$$

$$p_2 = \frac{\partial S}{\partial D^{\alpha-1} q_2} = E_2 + D^{\alpha-1} q_2 = E_2 + \lambda_2 + \frac{E_2'}{E_2}(\eta_2 + t) - \frac{E_2}{6}(\eta_2 + t)^3 \quad ; \tag{60b}$$

$$p_3 = \frac{\partial S}{\partial \ ^{\alpha}\!\!\text{qD}} = \quad ^{\alpha}\!\!\text{qD} \quad ; \tag{60c}$$

$$\pi_1 = \frac{\partial S}{\partial D^\alpha q_1} = \sqrt{2E_1' - 2D^\alpha q_1 E_1} = -E_1(\eta_1 + t); \tag{60d}$$

$$\pi_2 = \frac{\partial S}{\partial D^\alpha q_2} = \sqrt{2E_2' - 2D^\alpha q_2 E_2} = -E_2(\eta_2 + t); \tag{60e}$$

$$\pi_3 = \frac{\partial S}{\partial D^\alpha q_3} = D^\alpha q_3, \tag{60f}$$

其中 和 是任意参数。$\alpha D^{\alpha-1}$ $D^\alpha q_3$

此外，我们可以利用方程（17）确定运动方程:

$$dD^{\alpha-1}q_1 = D^\alpha q_1 dt, \tag{61a}$$

$$dD^{\alpha-1}q_2 = D^\alpha q_2 dt, \tag{61b}$$

$$dD^\alpha q_1 = \pi_1 dt, \tag{61c}$$

$$dD^\alpha q_2 = \pi_2 dt, \tag{61d}$$

$$-dp_1 = 0, \tag{61e}$$

$$-dp_2 = -D^\alpha q_2 dt, \tag{61f}$$

$$-dp_3 = -dD^{\alpha-1}q_3, \tag{61g}$$

$$-d\pi_1 = p_1 dt, \tag{61h}$$

$$-d\pi_2 = (p_2 - D^{\alpha-1}q_2)dt, \tag{61i}$$

$$-d\pi_3 = -dD^\alpha q_3, \tag{61j}$$

求解方程（61），可得到与方程（59，60）相同的结果。

下一步是对我们的奇异系统进行量子化。首先，可得本例的波函数（22a）：

$$\Psi(D^{\alpha-1}q_1, D^{\alpha-1}q_2, D^{\alpha-1}q_3, D^\alpha q_1, D^\alpha q_2, D^\alpha q_3, t) = \left[\psi_{01}(D^{\alpha-1}q_1)\psi_{02}(D^{\alpha-1}q_2)\phi_{01}(D^\alpha q_1)\phi_{02}(D^\alpha q_2)\right]\exp\frac{iS}{\hbar}; \tag{62}$$

其中

$$\psi_{01}(D^{\alpha-1}q_1) = \frac{1}{\sqrt{p_1(D^{\alpha-1}q_1)}} = \left[E_1\right]^{-\frac{1}{2}}; \tag{63a}$$

$$\psi_{02}(D^{\alpha-1}q_2) = \frac{1}{\sqrt{p_2(D^{\alpha-1}q_2)}} = \left[E_2 + D^{\alpha-1}q_2\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{63b}$$

$$\phi_{01}(D^{\alpha}q_1)=\frac{1}{\sqrt{\pi_1(D^{\alpha}q_1)}}=\left[2E_1'-2D^{\alpha}q_1E_1\right]^{-\frac{1}{4}};\tag{63c}$$

$$\phi_{02}(D^{\alpha}q_2)=\frac{1}{\sqrt{\pi_2(D^{\alpha}q_2)}}=\left[2E_2'-2D^{\alpha}q_2E_2\right]^{-\frac{1}{4}}.\tag{63d}$$

哈密顿-雅可比方程由方程（57）给出。

现在，在将广义坐标和动量表示为算符后，让我们把哈密顿-雅可比偏微分方程（式（50））应用于波函数:

$$\hat{H}_{\circ}'\Psi=\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+D^{\alpha}q_1\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_1}+D^{\alpha}q_2\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_2}-D^{\alpha-1}q_2\right)-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial(D^{\alpha}q_1)^2}-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial(D^{\alpha}q_2)^2}\right]\Psi;\tag{64a}$$

$$\hat{H}_3'^{p}\Psi=\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_3}-D^{\alpha-1}q_3\right]\Psi;\tag{64b}$$

$$\hat{H}_3'^{\pi}\Psi=\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha}q_3}-D^{\alpha}q_3\right]\Psi.\tag{64c}$$

经过一些代数运算，我们得到

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi=(-E_1'-E_2')\Psi;\tag{65a}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_1}\Psi=E_1\Psi;\tag{65b}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_2}\Psi=\left[(D^{\alpha-1}q_2+E_2)-\frac{\hbar}{2i}(D^{\alpha-1}q_2+E_2)^{-1}\right]\Psi;\tag{65c}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial}{\partial(D^{\alpha}q_1)^2}\Psi=\left[-\frac{5\hbar^2}{8}E_1^2(2E_1'-2D^{\alpha}q_1E_1)^{-2}+\frac{1}{2}(2E_1'-2D^{\alpha}q_1E_1)\right]\Psi;\tag{65d}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial}{\partial(D^{\alpha}q_2)^2}\Psi=\left[-\frac{5\hbar^2}{8}E_2^2(2E_2'-2D^{\alpha}q_2E_2)^{-2}+\frac{1}{2}(2E_2'-2D^{\alpha}q_2E_2)\right]\Psi;\tag{65e}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_3}\Psi=D^{\alpha-1}q_3\Psi;\tag{65f}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha}q_3}\Psi = D^{\alpha}q_3\Psi\,. \tag{65g}$$

将式（65）的结果代入式（64），我们得到

$$\hat{H}'_{\circ}\Psi = \begin{bmatrix} -E_1' - E_2' + D^{\alpha}q_1E_1 + D^{\alpha}q_2[(E_2 + D^{\alpha-1}q_2) - \frac{\hbar}{2i}(E_2 + D^{\alpha-1}q_2)^{-1} - D^{\alpha-1}q_2] - \\ \frac{5\hbar^2}{8}E_1{}^2(2E_1' - 2D^{\alpha}q_1E_1)^{-2} + \frac{1}{2}(2E_1' - 2D^{\alpha}q_1E_1) - \frac{5\hbar^2}{8}E_2^2(2E_2' - 2D^{\alpha}q_2E_2)^{-2}) + \\ \frac{1}{2}(2E_2' - 2D^{\alpha}q_2E_2) \end{bmatrix}\Psi$$

; (66a)

$$H_3'^{p}\Psi = \left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha-1}q_3} - D^{\alpha-1}q_3\right]\Psi = \left[D^{\alpha-1}q_3 - D^{\alpha-1}q_3\right]\Psi = 0\ ; \tag{66b}$$

$$H_3'^{\pi}\Psi = \left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial D^{\alpha}q_3} - D^{\alpha}q_3\right]\Psi = \left[D^{\alpha}q_3 - D^{\alpha}q_3\right]\Psi = 0\ \ . \tag{66c}$$

取极限，由方程 (66a) 可得

$$\hat{H}'_{\circ}\Psi = \begin{bmatrix} -E_1' - E_2' + D^{\alpha}q_1E_1 + D^{\alpha}q_2[E_2 + D^{\alpha-1}q_2 - D^{\alpha-1}q_2] + \\ \frac{1}{2}(2E_1' - 2D^{\alpha}q_1E_1) + \frac{1}{2}(2E_2' - 2D^{\alpha}q_2E_2) \end{bmatrix}\Psi = 0\,. \tag{67}$$

结论

在我们的工作中，我们将针对一阶分数阶奇异拉格朗日系统提出的理论推广到了二阶拉格朗日量。在这些系统满足可分离且符合可积性条件的情况下，我们求解了这组分数阶哈密顿-雅可比偏微分方程。

我们采用正则方法得到了分数阶哈密顿-雅可比偏微分方程。在这项工作中，我们在这些系统的构形空间中确定了分数阶哈密顿-雅可比函数 S。求出函数 S 使我们能够得到运动方程的解。

随后，我们确定了这些系统适用的分数波函数。在奇异系统中，除了薛定谔方程之外，约束还会转化为对波函数的条件，并且必须在半经典极限下满足。换言之，我们得出的量子结果与经典结果完全一致。最后，我们考察了两个数学例子。

参考文献

[1] 狄拉克，P. A. M. 1950.《广义哈密顿动力学》。《加拿大数学物理杂志》，2，129-148。

[2] 狄拉克，P. A. M. 1964。《量子力学讲义》，贝尔弗科学研究生院，叶史瓦大学，纽约。

[3] Guler, Y. 1992b. 奇异系统的正则表述。《新物理学杂志 B》，107 (10), 1143-1149。

[4] Rabei, E. M., Nawafleh, K. I. 和 Ghassib, H. B. 2002. 使用 WKB近似对约束系统进行量子化。《物理评论 A》，66, 024101-024106。

[5] Muslih, S. I. 2001. 奇异高阶拉格朗日量约束系统的路径积分表述。《强子杂志》，24, 713-721。

[6] Rabei, E. M., Hasan, E. H. 和 Ghassib, H. B (2004). 采用哈密顿–雅可比处理约束系统的二阶拉格朗日量，国际期刊 理论物理，第 43 卷第 (4), 1073-1096。

[7] Rabei, E. M.、Hasan, E. H. 和 Ghassib, H. B. 使用 WKB近似对二阶约束拉格朗日系统进行量子化，《现代物理学几何方法国际期刊》2005 年，第 2 卷，第 485–504 页。
[8] Hasan, E. H.、Rabei, E. M. 和 Ghassib, H. B. 使用 WKB近似对高阶约束拉格朗日系统进行量子化。《国际理论物理学杂志》2004 年，第 43 卷，第 11 期，第 2285–2298 页。[9] E. M. Rabei 和 M. Alhorani，使用 WKB近似对分数阶奇异拉格朗日系统进行量子化，《现代物理学国际期刊 A》，第 33 卷（2018 年），第 36 期

，

1850222-1-1850222-9。[10] E. H. Hasan，奇异拉格朗日量的路径积分量子化，使用分数 l

导数，《国际理论物理学杂志》2020年，第59卷，第**s 1157–1164**页[11] E. H. Hasan 和 J. H. Asad，《关于分数阶哈密顿–雅可比形式体系与二阶离散拉格朗日系统的评述》，《先进物理学杂志》，第6卷，第3期，第430–433页，2017年

[12] E. H. Hasan, 《二阶线性拉格朗日量的欧拉-拉格朗日方程的分数阶解》。《先进物理学杂志》，第7卷，第1期，第110–113页，2018年[13] S.G. Samko、A.A. Kilbas 和 O.I. Marichev, 《分数阶积分与导数：理论与应用》，Gordon and Breach，1993年。[14] Pimentel, R.G. 和 Teixeira，1996年。《含二阶拉格朗日量的奇异系统的哈密顿-雅可比表述》。《IL Nuovo Ciemento B》，111，841–854。[15] Goldstein, H.，1980年。《经典力学》， 2nd 版，Addison-Wesley，Reading- Massachusetts。