arXiv:2301.08156v1 [quant-ph] 19 Jan 2023

量子领域中的声子激光器

T. Behrle, [1]、*T.L. Nguyen*, [1]、†*F. Reiter*, [1,2] *D. Baur*, [1] *B. de Neeve*, [1] *M. Stadler*, [1] *M. Marinelli*, [1]、‡*F. Lancellotti*, [1] *S. F. Yelin*, [2] 和 *J. P. Home*[1,3],§ [1] *Institute for Quantum Electronics, ETH Zürich, Otto-Stern-Weg 1, 8093 Zürich, Switzerland* [2] *Harvard University, 17 Oxford Street, Cambridge, MA 02138, USA* [3] *Quantum Center, ETH Zürich, 8093 Zürich, Switzerland*

我们展示了一种囚禁离子系统，其中存在两种相互竞争的耗散通道，它们分别作用于共同囚禁在保罗阱中的两种离子种类。通过控制相干自旋-振子耦合和光抽运速率，我们探索了该系统的相图。该系统呈现出类似于（声子）激光器的工作区间，但运行时接近量子基态，平均声子数为 $\bar{n} < 10$。我们展示了振荡器与额外共振驱动之间的相位锁定，并通过测量特征函数重构量子态，观察到所得状态在耗散作用下的相位扩散。

耗散是量子系统固有的特性。虽然通常被视为实现量子控制的障碍，但研究也表明，耗散可为量子态制备乃至量子纠错提供资源 [1–21]。在多体物理领域，研究发现耗散会导致相变，其中许多相变不会出现在完全相干的系统中 [5, 22–34]。这些特点使得进一步研究各类物理系统中的耗散动力学具有广泛意义。然而，开放系统在理论上颇具挑战：数值方法需要模拟超算符的演化，而超算符作用于比同一底层系统上的幺正算符更高维的空间。因此，探索能够精确调控耗散、以研究物理学各个方面的量子模拟装置颇具意义 [35–42]。实现此类耗散模拟器，需要精确控制量子自由度与耗散通道之间的耦合。使用多个耗散通道时，弛豫过程的宽带特性也对串扰提出了严格要求 [43]。

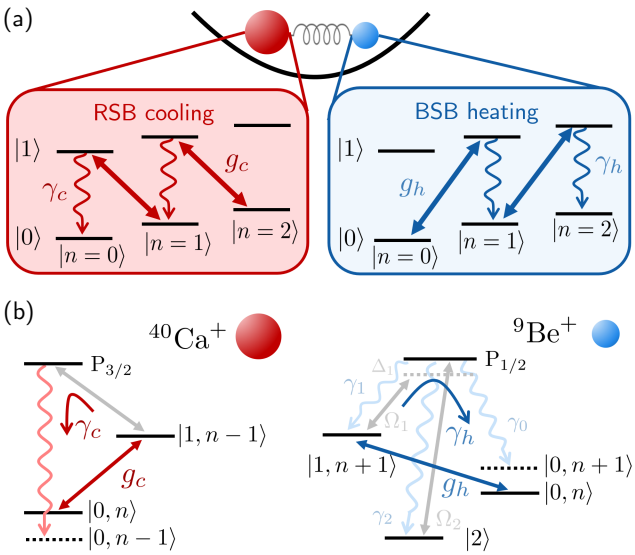

图1。（a）两种耗散通道示意图。对钙（铍）施加红（蓝）边带和人工衰减，从而实现共享运动模的冷却（加热）。（b）加热与冷却过程示意图，其中包括钙和铍中的人工衰减。

耗散发挥关键作用的系统中，一个典型例子是激光器。它会经历耗散相变，从暗相转变为亮相，其特征是出现具有随机初始相位的相干
态，该相位会随时间扩散。这一跃迁由光子损失率（来自腔镜）和与增益介质相互作用产生的增益所决定，而增益介质会发生饱和。一般而言，激光器使用含有大量受泵浦系统的增益介质[44, 45], ；不过，也有单量子比特水平的激光器，例如使用单个天然 [46] 或人工原子 [47]。类似的物理现象也已通过以下方式观测到从原子到纳米力学尺度的物体的机械运动中的非线性效应，例如实现“声子激光器” [48–54] ，其激射相表现为幅度达数十微米的大尺度经典振荡，对应于 10^4 声子的平均值。

在本信中，我们利用双物种离子链实现了串扰较低的竞争性耗散通道。我们以此研究声子激光器的实现方式；与早期实现不同，该声子激光器工作在分辨边带区，声子占据数为 $\bar{n} < 10$。该系统呈现出三个截然不同的相，其中一个对应于声子激射。我们通过提取数态分布 [55]对这些相进行了表征。在激射相中，我们展示了相位锁定和相位扩散，并通过测量运动声子模的特征函数 [56]对这些效应进行了诊断。

*电子邮箱：tbehrle@phys.ethz.ch
† 现地址：QuantX Labs Pty Ltd，阿德莱德，澳大利亚
‡ 现地址：JILA，博尔德，科罗拉多州，美国§电子邮箱：jhome@phys.ethz.ch

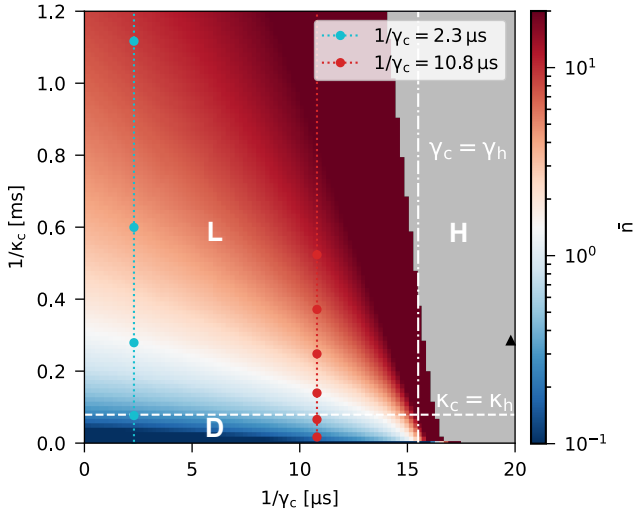

图2。以控制参数为函数绘制的模拟相图，并使用平均声子数表征稳态。数值通过数值模拟生成，最多包含100个运动态，并求解稳态。 γ_c 是冷却离子中的内部态阻尼率，而 $1/\kappa_c = \gamma_c/g_c^2$，边带耦合强度为

$$\frac{g_c}{1/\kappa_h = 0.08} \qquad 1/\gamma_h = 15.5 。$$

有效铍衰减μs和ms固定不变。红色和浅蓝色圆点对应于在图3中获取并展示的数据。白线表示预期的相变，分别位于 $\gamma_c = \gamma_h$ 和 $\kappa_c = \kappa_h$。 $\bar{n} > 80$ 的值以灰色显示，它们对应于加热或较高 $\bar{n}$ 激光振荡值。

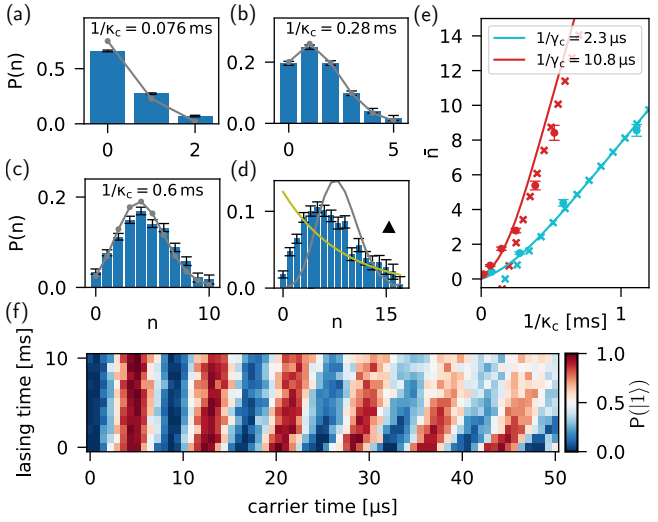

图3。不同 $1/\kappa_c$下的声子分布。(a)–(c)在 $1/\gamma_c = 2.3$μs时获取，显示平均声子数随 $1/\kappa_c$增加而增加。测得的声子分布（蓝色柱）与具有相同 $\bar{n}$ 的泊松分布（灰色）吻合良好。(d)在黑色三角形所示的加热区域中，于$1/\kappa_c = 0.28$ms和 $1/\gamma_c = 19.9$ μs时获取。在此观察到相干分布（灰色）与热分布（绿色）的混合。(e)平均声子数随 $1/\kappa_c$的变化关系，数据由声子分布获得；其中平均场理论（叉号）、模拟（曲线）和实验（带误差棒的圆点）分别给出结果。(f)在与(d)对应的加热区域中获取的钙离子载波振荡。随着激光振荡时间增加，钙离子载波频率降低，表明其具有加热特性。

我们的实验装置 [43] 利用了相对于钙离子而言铍共振跃迁之间的光谱分离，从而能够对相干与耗散光泵浦控制场进行出色的单独寻址。通过作用于钙离子光学量子比特的Jaynes-Cummings（JC）哈密顿量$\hat{}$ $H_c = \hbar g_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{}\sigma_-^c + \hat{a}\hat{}\sigma_+^c\right)$，以及作用于铍超精细量子比特的反Jaynes-Cummings（AJC）哈密顿量$\hat{}$ $H_h = \hbar g_h \left(\hat{a}^\dagger \hat{}\sigma_+^h + \hat{a}\hat{}\sigma_-^h\right)$，实现内部态与共享运动模之间的耦合；其中，$\hat{a}$ 是运动模的湮灭算符，$\hat{}\sigma_-^{h/c}$ 是加热/冷却离子内部态的降算符。由林德布拉德跃迁算符$\hat{}L_{h/c} = \sqrt{\gamma_{h/c}}\hat{}\sigma_-^{h/c}$ 描述的耗散通道通过经由辅助短寿命态进行光泵浦来实现。相干与耗散驱动的结合导致了竞争性的运动冷却（索引c，来自钙离子）和运动加热（索引h，来自铍），如图1(a)所示。我们注意到，尽管本系统中的增益来自对铍采用AJC哈密顿量并结合从较高能级到较低能级的内部态泵浦，但通过对内部态能级重新标记，可以得到JC哈密顿量加内部态粒子数反转，这正是激光器中通常采用的形式。

为了理解该系统，我们将其与一个平均场模型进行比较，该模型假设存在时间尺度分离：

内部态的快速动力学与振荡器的较慢演化彼此分离。由此得到的关于 $A = \langle\hat{a}\rangle$ 的方程（推导见补充材料第 V 节）为

$$\frac{d}{dt}A(t) = A(t)\left(\frac{2\kappa_h}{1+s_h|A(t)|^2} - \frac{2\kappa_c}{1+s_c|A(t)|^2}\right), \quad (1)$$

增益/损耗系数为 $\kappa_{h/c} = g_{h/c}^2/\gamma_{h/c}$，饱和系数为 $s_{h/c} = 8\kappa_{h/c}/\gamma_{h/c}$，它们决定原子布居反转 $\propto 1/(1+s_{h/c}|A(t)|^2)$的饱和行为。该方程使我们能够识别出不同的行为，这些行为与更完整的数值建模结果一致；数值建模得到了图2所示的稳态相图。对于 $G = \kappa_h/\kappa_c < 1$，钙的冷却速率超过任何加热，基态为稳态。对于 $s_h/s_c > G$（等价于 $\gamma_h/\gamma_c < 1$），它是唯一的稳态（图2中的“暗”区（D））；而对于$s_h/s_c < G$（等价于 $\gamma_h/\gamma_c > 1$），另一组参数会产生 $A = 0$，但这一状态对涨落不稳定。当增益超过损耗（$G > 1$）时，系统超过阈值，基态不稳定。此时存在两种截然不同的状态。第一种出现在 $s_h/s_c > G$，类似于激光振荡（L），

此时，加热过程的饱和会在有限激发 $|A|^2$下形成稳定稳态。第二种状态出现在冷却离子比加热离子更早达到饱和时 $s_{\mathrm{h}}/s_{\mathrm{c}} < G$，这会导致失控加热效应（H）。在标准连续波激光系统中并未观察到后一种行为，因为其中的损耗源于激光腔的泄漏，不会达到饱和；不过，对于由自旋衰减主导的驱动耗散系统，已有研究提出可能存在这种行为 [33]。

我们通过施加适当的哈密顿量并引入耗散，直至系统达到稳态，随后重建声子数分布，以此表征所得状态，从而在实验中考察这些状态区间。在钙离子中，我们使用一台窄线宽激光器，使其接近与运动公共模红边带共振的四极跃迁 $\omega_m = 2\pi\times 1.8$MHz边带 $|0\rangle \equiv \left|S_{1/2},\ M_J=+1/2\right\rangle \leftrightarrow |1\rangle \equiv \left|D_{5/2},\ M_J=+3/2\right\rangle$，波长为729 nm，以实现相干控制。在Lamb-Dicke近似下，耦合系数为$g_{\mathrm{c}} = \eta_{\mathrm{c}}\Omega_{\mathrm{c}}$，其中拉比频率$\Omega_{\mathrm{c}}$与激光光的电场梯度和Lamb-Dicke参数 $\eta_{\mathrm{c}} = 0.05$成正比。对于铍离子，耦合由拉曼跃迁产生，该跃迁接近与量子比特跃迁 $|0\rangle \equiv \left|S_{1/2},\ F=2,\ M_F=+2\right\rangle \leftrightarrow |1\rangle \equiv \left|S_{1/2},\ F=1,\ M_F=+1\right\rangle$的运动蓝边带共振。此处，$g_{\mathrm{h}} = \eta_{\mathrm{h}}\Omega_{\mathrm{h}}$，其中$\Omega_{\mathrm{h}}$与两束拉曼激光器的电场乘积以及Lamb-Dicke参数$\eta_{\mathrm{h}} = 0.15$成正比。

两个离子中的耗散通道 $\hat{L}_{\mathrm{h/c}} = \sqrt{\gamma_{\mathrm{h/c}}}\hat{\sigma}_{-}^{\mathrm{h/c}}$ 由激光驱动的偶极跃迁光抽运提供，见图1 (b)。对于钙，这通过使用波长为 854 纳米的共振激光场实现，该激光场主要耦合 $|1\rangle$ 至 $\left|P_{3/2},\ M_J=3/2\right\rangle$，随后通过自发辐射衰减至 $|0\rangle$。通过额外使用 397 纳米和 866 纳米的再抽运激光场（图中未示出），可抑制少量泄漏到其他能级的情况。对于铍，从 $|1\rangle$ 到$|0\rangle$ 的光抽运使用圆偏振光，该光耦合 $|1\rangle$ 至短寿命的 $P_{1/2}$ 激发态。从激发态 P 衰减至 $|0\rangle$ 的分支比仅为三分之一，此外还会衰减回

$|1\rangle$ $|2\rangle$ = 和,,。
$\left|S_{1/2}\ F=2\ M_F=+1\right\rangle$

我们使用另一束与$|2\rangle \to \left|P_{1/2},\ F=2,\ M_F=2\right\rangle$共振的强313 nm光束来再泵浦这一布居，并将 $|1\rangle \to P_{1/2}$激光器失谐 10 MHz，以避免形成相干暗

态。铍中再泵浦的四能级特性会导致 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 态额外退相干，而两能级描述中的 L 并未涵盖这一点。我们发现，四能级的影响可通过一个额外的耗散算符
$L_1 = \sqrt{\gamma_{\mathrm{e}}}\,|1\rangle\langle 1|$ 来体现，其速率为$\gamma_{\mathrm{e}} = f\gamma_{\mathrm{h}}$（其中 $f = 50/40$ 表示从 P 态衰减到 $|1\rangle$ 而非 $|0\rangle$的强度比）。在上述方程中，这会使 κ_{h} 变为$\kappa_{\mathrm{h}} = g_{\mathrm{h}}^2/(\gamma_{\mathrm{e}}+\gamma_{\mathrm{h}})$。所展示的所有数值模拟均采用完整的铍四能级动力学。

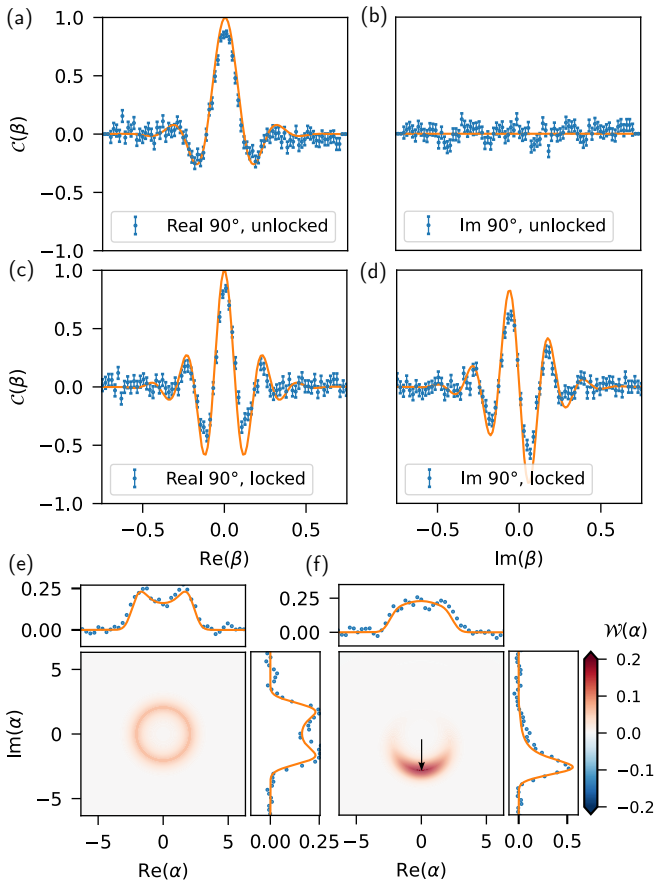

图4。（a）–（d）解锁（a、b）和锁定（c、d）情况下，沿90度轴的特征函数实部和虚部的模拟结果（橙色曲线）与实验数据（蓝色圆点）。观察到虚部中的对称性破缺（b）–（d）。（e）–（f）分别为未锁相（e）和锁相（f）声子激光器的模拟维格纳函数（二维）及沿两条轴的边缘概率（侧图，橙色曲线），并包含实验数据（蓝色圆点）。

在实验中，我们固定铍（加热）离子的参数，并通过控制钙离子来改变 κ_{c}，s_{c}。我们采用标准方法进行态重构，利用钙离子运动边带上拉比振荡对数态的依赖关系 [16, 55]。我们选取相图中的两个截面，所用设置对应 $1/\gamma_{\mathrm{c}}$的两个不同取值。对于每个取值，我们提取了若干个 $1/\kappa_{\mathrm{c}}$ 取值（相图的 y 轴）下的声子分布。观测到的声子分布如图3 (a)-(d)所示，得到的平均声子数如图3 (e)所示。值得注意的是，当 $\kappa_{\mathrm{h}}/\kappa_{\mathrm{c}}$ 从小于 1 变为大于 1 时，后者会增大，这表明系统从暗态转变为激光稳态。实验结果与使用校准参数进行的数值模拟（实线）以及平均场计算的预测（叉号）相符——这些参数及校准方法详见补充

材料第一节和第 II 节。(a)中得到的声子分布在原点处的 $P(n)$有一个峰，而(b)和(c)中的分布则接近具有相同平均声子数的泊松分布（灰色所示）；这正是激光振荡产生的相干态所预期的分布。我们还观察到，随着系统转变为激光振荡，加热离子（铍）的饱和程度增加。例如，在 $1/\gamma_c = 2.3\mu s$数据集中，随着 κ_c 减小，测得的稳态自旋布居从 $\langle\hat{\sigma}_z^h\rangle = -0.60$ 增至 $\langle\hat{\sigma}_z^h\rangle = -0.26$ 。

当 γ_c 相对于 γ_h 减小时，我们进入加热相，此时声子分布无法达到稳态。在这一状态下获取并于有限时间采样的声子分布数据如图3(d)所示，呈现出相干分布（灰色）与热分布（绿色）的混合。由于系统无法达到稳态，我们不仅在有限时间后重构声子分布，还会探测 $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ 载波跃迁上的拉比振荡（其拉比频率取决于声子占据数 [57]），并测量其随耗散时间的变化；这类数据如图3(f)所示。这里可以观察到拉比振荡持续减慢、相干性随时间降低，这表明声子分布的均值和方差不断增大。

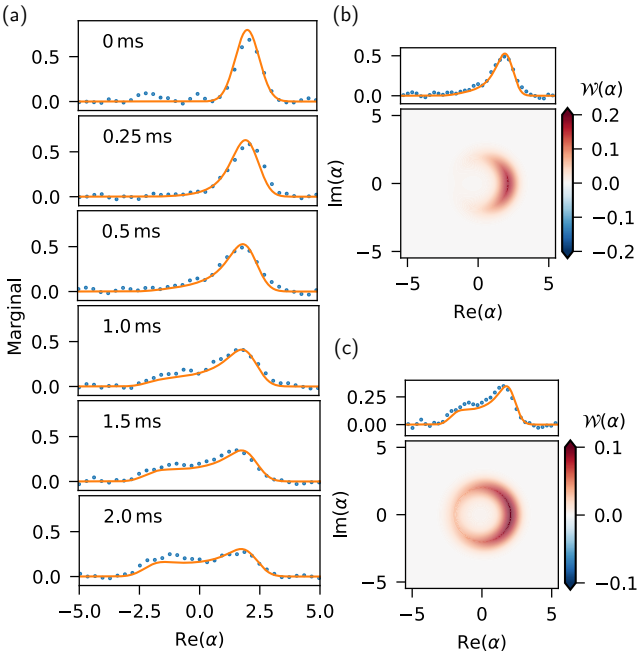

图 5. 相位扩散。(a) 不同激射长度下，沿 90 度方向的边缘概率。从具有确定相位的相干态出发，激射过程会随时间引入相位扩散（橙色为模拟结果，蓝色为实验结果）。(b) 和 (c) 耗散时长为 0.5ms 和 1.5ms 时的模拟维格纳函数（二维）及其边缘概率。

妨碍我们在最初尝试理解耗散动力学的一个实验问题，是旁观者运动模态的加热；我们推测这是内部态再泵浦过程中反冲引起的光子散射所致。这反过来会改变激光作用所用运动模态上的激光-离子相互作用。为缓解这一问题，我们在激光振荡脉冲之间穿插短暂的边带冷却时段，利用铍离子对旁观者反相轴向模进行冷却。重复频率设得足够低，使离子的内部态能够在双耗散驱动期间重新达到稳态。

除了探测数态分布外，我们还测量了特征函数 $\mathcal{C}(\beta)$，它可以完整表征振子态。我们通过态依赖力将振子与离子的内部态耦合，随后进行投影式自旋读出 [56] 来完成测量。关闭激射动力学并将钙离子的内部态再泵浦至 $|0\rangle$。激射态的实测特征函数如图4 (a) 和 (b) 所示。图4 (e) 展示了具有 $\bar{n} \approx 4.4$ 的状态的维格纳函数 $\mathcal{W}(\alpha)$ 的边缘分布，这些分布由特征函数经离散傅里叶变换得到。同时还给出了林德布拉德主方程稳态数值解的结果。特征函数和维格纳函数均关于零对称，这表明激光器的相位是随机的。向振荡器施加一个相位确定的外部驱动，可打破相位对称性，并使振荡器锁定到该驱动。我们通过向囚禁电极施加电压，对振荡器施加共振振荡力，从而引入这种驱动，其哈密顿量为 $\hat{H}_t = \hbar g(\hat{a}e^{i\Phi_t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\Phi_t})$。力强度 $g = 2\pi \times 0.4$kHz 的选择足够弱，不会压过激射动力学。图4 (c) 和 (d) 展示了开启该力后测得的特征函数数据。图4 (f) 展示了相应的维格纳函数边缘分布。实验数据与使用实验观测参数进行的数值模拟结果吻合良好，模拟结果也一并绘出。从图4 (b) 到 (d)，可以观察到特征函数虚部明显的对称性破缺。与模拟得到的维格纳函数比较后，我们发现该状态仍不能被相干态完美描述，并可见一定程度的相位扩散。

为了研究耗散过程中的相位扩散，我们考察了初始相干态受到的影响。该相干态与稳态具有相同的 $\bar{n} = 4.4$ ，但相位确定。我们先进行基态冷却，再施加振荡力，持续预先校准的时长，以制备这一状态。施加耗散驱动一段固定时间后，我们重建特征函数。图5(a) 展示了维格纳分布沿实轴的边缘分布，体现了扩散的影响。采用四能级铍系统和钙的两能级系统进行数值模拟（橙色线），

其参数由独立校准实验获得；模拟结果与数据（蓝点）吻合，并使我们能够提取相位不确定性随时间线性增加的规律$\langle\dot{\theta}^2\rangle$其速率为 $0.022 \quad {}^2/s$

弧度秒$^{-1}$。这种扩散类似于导致激光线宽达到肖洛-汤斯极限的扩散 [45, 58]。

为获得简洁的物理模型，将问题简化为一对与单模相互作用的二能级系统会很有帮助。我们最初在数值模型中使用 Lindblad 算符 L_{h}，L_{c} 探索了这一近似。然而，若不加入额外的退相干算符 $L_1 = \sqrt{\gamma_{\mathrm{e}}}\,|1\rangle\langle 1|$（用于描述四能级铍离子中的额外耗散过程），我们发现平均模占据数和扩散都被显著高估（对于图 5 中数据所对应的实验参数，该模型给出的结果为 $\bar{n} = 5.3$ 和 $\langle\dot{\theta^2}\rangle = 0.054$ rads$^2/s$）。加入退相干算符 L_1 后，平均声子数的预测与数据更加吻合，对铍的饱和以及激射相中的相位扩散也能作出合理预测。基于方程（1）的解析结果能够再现平均声子数和饱和值。对于相位扩散，我们将海森堡-朗之万理论 [45] 应用于本问题，并纳入了 L_1（计算细节见补充材料第六节和第七节），但与数值模拟相比，发现该理论似乎仍将扩散系数高估了一个显著的幅度（在上述情况下，得到的数值为 0.041 rads$^2/s$）。我们无法直观解释这种差异为何存在。所有模型和数值模拟均采用铍的有限 Lamb-Dicke 参数，而对于钙，我们使用了一阶展开近似——我们已验证，在所研究的参数范围内，这一近似对理论预测的影响很小。

本文的工作与此前关于囚禁离子声子激射的研究 [48] 在两个重要方面有所不同。首先，声子占据数较低，这是由于采用了分辨边带区。因此，我们的结果处于这样一个临界点：量子效应已可观测，也已有方法可用于提取这类信息，例如特征函数和福克态重构。其次，两者的物理机制存在根本差异。此前的研究采用单个离子上的跃迁，并同时以两个频率驱动；加热与冷却之间的平衡是由离子-光相互作用的非线性造成的，而这种非线性源于多普勒频移较大时线型发生变化，且内部态并未饱和。相比之下，在本研究中，正是“增益”离子的饱和引入了非线性。

上述实验采用了一对相对简单的耗散通道，其控制中的哈密顿量部分涉及施加单频激光音调。通过采用多频驱动，类似的实验可以探索一些储库；对于这些储库，其底层态空间更容易用压缩福克基或位移福克基来描述。这一扩展将实现一种压缩声子激光器，据预测，它在传感方面具有优势 [59–61]。将相互竞争的储库系统扩展到多个离子，则可实现更广义的自旋-玻色子模型，例如开放狄克模型。

TB 和 TLN 完成了实验，BN、MS、MM 和 FL 提供了实验支持。TLN 和 FR 在 JH 的支持下开展了理论准备工作。TB 和 TLN 进行了数据分析。DB、TB、FR、SFY 和 JH 对结果作出了理论阐释。TB 和 JH 在所有作者的意见基础上撰写了论文。

我们感谢瑞士国家科学基金会（SNF）通过资助项目 200020 179147/1 提供支持，感谢 SNF 通过量子科学与技术国家研究能力中心（QSIT）项目 51NF40–185902 提供支持，并感谢 SNF Ambizione资助 PZ00P2-186040 和欧盟量子旗舰计划 H2020-FETFLAG-2018-03 项目 820495 AQ- TION 提供支持。SFY 希望感谢美国国家科学基金会通过 CUA PFC 提供的资助。

[1] J. I. Cirac、A. S. Parkins、R. Blatt 和 P. Zoller，《物理评论快报》**70**，556（1993年）。[2] J. F. Poyatos、J. I. Cirac 和 P. Zoller，《物理评论快报》**77**，4728（1996年）。[3] A. R. R. Carvalho、P. Milman、R. L. de Matos Filho 和 L. Davidovich，《物理评论快报》**86**，4988（2001年）。[4] F. Verstraete、M. M. Wolf 和 J. I. Cirac，《自然·物理》**5**，633（2009年）。[5] S. Diehl、A. Micheli、A. Kantian、B. Kraus、H. P. B¨uchler 和 P. Zoller，《自然·物理》**4**，878（2008年）。[6] B. Kraus、H. P. B¨uchler、S. Diehl、A. Kantian、A. Micheli 和 P. Zoller，《物理评论A辑》**78**，042307（2008年）。[7] F. Pastawski、L. Clemente 和 J. I. Cirac，《物理评论A辑》**83**，012304（2011年）。[8] H. Krauter、C. A. Muschik、K. Jensen、W. Wasilewski、J. M. Petersen、J. I. Cirac 和 E. S. Polzik，《物理评论快报》**107**，080503（2011年）。[9] J. T. Barreiro、M. M¨uller、P. Schindler、D. Nigg、T. Monz、M. Chwalla、M. Hennrich、C. F. Roos、P. Zoller 和 R. Blatt，《自然》**470**，486（2011年）。[10] Y. Lin、J. P. Gaebler、F. Reiter、T. R. Tan、R. Bowler、A. S. Sørensen、D. Leibfried 和 D. J. Wineland，《自然》**504**，415（2013年）。[11] S. Shankar、M. Hatridge、Z. Leghtas、K. M. Sliwa、A. Narla、U. Vool、S. M. Girvin、L. Frunzio、M. Mirrahimi 和 M. H. Devoret，《自然》**504**，419（2013年）。[12] A. Sarlette、J. M. Raimond、M. Brune 和 P. Rouchon，《物理评论快报》**107**，010402（2011年）。[13] C. Navarrete-Benlloch、J. J. Garc´ıa-Ripoll 和

D. Porras, 《物理评论快报》113，193601（2014年）。[14] A. Kronwald、F. Marquardt 和 A. A. Clerk, 《物理评论A辑》88，063833（2013年）。[15] V. Jarlaud、P. Hrmo、M. K. Joshi 和 R. C. Thompson, 《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》54，015501（2020年）。[16] D. Kienzler、H.-Y. Lo、B. Keitch、L. de Clercq、F. Le- upold、F. Lindenfelser、M. Marinelli、V. Negnevitsky 和 J. P. Home, 《科学》347，53（2015年）。[17] M. Malinowski、C. Zhang、V. Negnevitsky、I. Rojkov、F. Reiter、T.-L. Nguyen、M. Stadler、D. Kienzler、K. K. Mehta 和 J. P. Home, 《物理评论快报》128，080503（2022年）。[18] B. de Neeve、T.-L. Nguyen、T. Behrle 和 J. P. Home, 《自然·物理》（2022年），10.1038/s41567-021-01487-7。[19] M. E. Kimchi-Schwartz、L. Martin、E. Flurin、C. Aron、M. Kulkarni、H. E. Tureci 和 I. Siddiqi, 《物理评论快报》116，240503（2016年）。[20] Y. Lu、S. Chakram、N. Leung、N. Earnest、R. K. Naik、Z. Huang、P. Groszkowski、E. Kapit、J. Koch 和 D. I. Schuster, 《物理评论快报》119，150502（2017年）。[21] E. Zapusek、A. Javadi 和 F. Reiter, 《量子科学与技术》8，015001（2022年）。[22] E. M. Kessler、G. Giedke、A. Imamoglu、S. F. Yelin、M. D. Lukin 和 J. I. Cirac, 《物理评论A辑》86（2012年），10.1103/physreva.86.012116。[23] S. Morrison 和 A. S. Parkins, 《物理评论快报》100，040403（2008年）。[24] N. Lang 和 H. P. B¨uchler, 《物理评论A辑》92，012128（2015年）。[25] T. E. Lee、F. Reiter 和 N. Moiseyev, 《物理评论快报》113，250401（2014年）。[26] S. Genway、W. Li、C. Ates、B. P. Lanyon 和 I. Lesanovsky, 《物理评论快报》112，023603（2014年）。[27] H. J. Carmichael, 《物理评论X》5，031028（2015年）。[28] J. Hannukainen 和 J. Larson, 《物理评论A辑》98，042113（2018年）。[29] M.-J. Hwang、P. Rabl 和 M. B. Plenio, 《物理评论A辑》97，013825（2018年）。[30] F. Brennecke、R. Mottl、K. Baumann、R. Landig、T. Donner 和 T. Esslinger, 《美国国家科学院院刊》110，11763（2013年）。[31] M. Buchhold、P. Strack、S. Sachdev 和 S. Diehl, 《物理评论A辑》87，063622（2013年）。[32] P. Werner、K. V¨olker、M. Troyer 和 S. Chakravarty, 《物理评论快报》94，047201（2005年）。[33] F. Reiter、T. L. Nguyen、J. P. Home 和 S. F. Yelin, 《物理评论快报》125，233602（2020年）。[34] F. E. ¨Ozt¨urk、T. Lappe、G. Hellmann、J. Schmitt、J. Klaers、F. Vewinger、J. Kroha 和 M. Weitz, 《科学》372，88（2021年）。[35] T. Fink、A. Schade、S. H¨ofling、C. Schneider 和 A. Imamoglu, 《自然·物理》14，365（2018年）。[36] J. M. Fink、A. Dombi、A. Vukics、A. Wallraff 和 P. Domokos, 《物理评论X》7，011012（2017年）。[37] F. Cou¨edo、O. Crauste、A. A. Drillien、V. Humbert、L. Berg´e、C. A. Marrache-Kikuchi 和 L. Dumoulin, 《科学报告》 6，35834 （ 2016 年）。[38] R. Ma、B. Saxberg、C. Owens、N. Leung、Y. Lu、J. Simon 和 D. I. Schuster, 《自然》566，51（2019年）。[39] M. Fitzpatrick、N. M. Sundaresan、A. C. Y. Li、J. Koch 和 A. A. Houck, 《物理评论X》7，011016（2017年）。[40] S. R. K. Rodriguez、W. Casteels、F. Storme、N. Carlon Zambon、I. Sagnes、L. Le Gratiet、E. Galopin、A. Lemaˆıtre、A. Amo、C. Ciuti 和 J. Bloch, 《物理评论快报》118，247402（2017年）。[41] F. Bibak、U. Deli´c、M. Aspelmeyer 和 B. Daki´c, （2022年），10.48550/ARXIV.2208.11964。[42] F. Reiter、F. Lange、S. Jain、M. Grau、J. P. Home 和 Z. Lenarˇciˇc, 《物理评论研究》3，033142（2021年）。[43] V. Negnevitsky、M. Marinelli、K. K. Mehta、H.-Y. Lo、C. Fl¨uhmann 和 J. P. Home, 《自然》563，527（2018年）。[44] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*（牛津科学出版社，2000年）。[45] M. O. Scully 和 M. S. Zubairy, *Quantum Optics*（剑桥大学出版社，1997年）。[46] J. McKeever、A. Boca、A. D. Boozer、J. R. Buck 和 H. J. Kimble, 《自然》425，268（2003年）。[47] O. Astafiev、K. Inomata、A. O. Niskanen、T. Yamamoto、Y. A. Pashkin、Y. Nakamura 和 J. S. Tsai, 《自然》449，588（2007年）。[48] K. Vahala、M. Herrmann、S. Kn¨unz、V. Batteiger、G. Saathoff、T. W. H¨ansch 和 T. Udem, 《自然·物理》5，682（2009年）。[49] I. S. Grudinin、H. Lee、O. Painter 和 K. J. Vahala, 《物理评论快报》104，083901（2010年）。[50] U. Kemiktarak、M. Durand、M. Metcalfe 和 J. Lawall, 《物理评论快报》113，030802（2014年）。[51] J. D. Cohen、S. M. Meenehan、G. S. MacCabe、S. Gr¨oblacher、A. H. Safavi-Naeini、F. Marsili、M. D. Shaw 和 O. Painter, 《自然》520，522（2015年）。[52] R. M. Pettit、W. Ge、P. Kumar、D. R. Luntz-Martin、J. T. Schultz、L. P. Neukirch、M. Bhattacharya 和 A. N. Vamivakas, 《自然·光子学》13，402（2019年）。[53] Y. Wen、N. Ares、F. J. Schupp、T. Pei、G. A. D. Briggs 和 E. A. Laird, 《自然·物理》16，75（2020年）。[54] Q. Zhang、C. Yang、J. Sheng 和 H. Wu, 《美国国家科学院院刊》119，e2207543119（2022年）。[55] D. M. Meekhof、C. Monroe、B. E. King、W. M. Itano 和 D. J. Wineland, 《物理评论快报》76，1796（1996年）。[56] C. Fl ¨ **125**, 043602 2020 uhmann 和 J. P. Home, 《物理评论快报》（ ）。[57] D. Wineland、C. Monroe、W. Itano、D. Leibfried、B. King 和 D. Meekhof, 《美国国家标准与技术研究院研究杂志》103（1997年），10.6028/jres.103.019。[58] A. L. Schawlow 和 C. H. Townes, 《物理评论》112，1940（1958年）。[59] S. Fern´andez-Lorenzo 和 D. Porras, 《物理评论A辑》96，013817 2017（ ）。[60] P. A. Ivanov, 《物理学文稿》95，025103（2020年）。[61] Y.-Q. Wei、Y.-Z. Wang、Z.-C. Liu、T.-H. Cui、L. Chen、J. Li、S.-Q. Dai、F. Zhou 和 M. Feng, 《中国科学：物理学力学天文学》65，110313（2022年）。[62] F. Reiter 和 A. S. Sørensen, 《物理评论A辑》85，032111（2012年）。[63] J. J. Bollinger、J. S. Wells、D. J. Wineland 和 W. M. Itano, 《物理评论A辑》31，2711（1985年）。

《量子领域中的声子激光器》的补充材料

T. Behrle，[1]，[*] *T.L. Nguyen*，[1]，[†] *F. Reiter*，[1,2] *D. Baur*，[1] *B. de Neeve*，[1] *M. Stadler*，[1] *M. Marinelli*，[1]，[‡] *F. Lancellotti*，[1] *S. F. Yelin*，[2] 和 *J. P. Home*[1]，*3*，[§]

[1] *Institute for Quantum Electronics，ETH Zürich，Otto-Stern-Weg 1，8093 Zürich，Switzerland*[2] *Harvard University，17 Oxford Street，Cambridge，MA 02138，USA*

[3] *Quantum Center，ETH Zürich，8093 Zürich，Switzerland*

I. 实验参数

正文所呈现的数据和理论分析使用了各种实验参数，列于表 S.1。对于模拟的输入参数，我们选择了与实验所涉及参数接近的数值。对于通过实验获得的数值，我们列出校准实验中测得的数值，并附上统计误差棒。这些实验包括利用拉比振荡提取拉比振荡速率，以及利用具有指数衰减特征的光学抽运实验提取阻尼参数。

激光实验的校准包括红、蓝边带频率校准、三个衰减参数的校准，以及实验期间同时施加的激光脉冲所对应的斯塔克频移校准。校准过程最长需要 30 分钟。采集具有较高平均声子数的声子分布数据（需要对更宽的频率范围进行采样）时，需要对相对较多的数据点取平均，因此实验最长可持续 25 分钟。因此，一次扫描的校准和数据采集总共最长需要一小时。间隔一小时进行的连续校准（即在校准程序开始时以及扫描结束后进行的校准）显示，漂移最高约为统计误差棒的 1.5 倍。使用态依赖力读出的相位锁定实验速度更快，但需要更长的校准程序，包括精确的陷阱频率校准和微扰相位校准，因此校准和数据采集所需时间相近，漂移也与其他实验相似。

	$g_\mathrm{h}/2\pi$ [千赫]	$g_\mathrm{c}/2\pi$ [千赫]	γ_{h1} [毫秒$^{-1}$]	γ_{h2} [毫秒$^{-1}$]	γ_c [毫秒$^{-1}$]
图2	4.55	-	91	435	-
图3a	4.65 ± 0.02	12.0 ± 0.1	96 ± 6	435 ± 38	426 ± 11
图3b	4.62 ± 0.03	6.28 ± 0.05	91 ± 7	385 ± 44	429 ± 13
图3c	4.65 ± 0.02	4.29 ± 0.04	96 ± 6	435 ± 38	426 ± 11
图3d	4.57 ± 0.02	2.11 ± 0.01	93 ± 6	385 ± 30	50 ± 2
图3e	4.63	-	93	435	-
图4	4.59	4.24	91	344	435
图 5	4.59	4.24	91	344	435

表 S.1。所呈现实验数据和模拟中的主要实验参数。参数 $\gamma_{h1/h2}$ 对应于 $1/\tau_{1/2}$，如第 II 节所定义。

II. 人工衰减

如正文所述并如图1所示，钙中的光抽运从 $|1\rangle$ 到 $|0\rangle$进行，使用 854 纳米的共振激光场，主要激发至$\left|P_{3/2},\right.$ $\left.M_J = 3/2\right\rangle$，随后通过自发辐射衰减至 $|0\rangle$。通过增加 397 纳米和 866 纳米的再抽运激光场，可抑制向其他能级的泄漏。通过调节 854 纳米光的功率，我们将有效再抽运强度从 $|1\rangle$ 调至 $|0\rangle$。为进行校准，

[*]电子邮箱：tbehrle@phys.ethz.ch

[†] 现工作地址：QuantX Labs Pty Ltd，阿德莱德，澳大利亚

[‡] 现工作地址：JILA，博尔德，科罗拉多州，美国

[§]电子邮箱：jhome@phys.ethz.ch

我们制备处于 $|1\rangle$ 态的离子，并在开启 854 纳米光和其他光场的情况下，测量 $|0\rangle$ 的布居数随时间的变化。随后可通过指数拟合确定有效衰减率。绝热消去 P态后，我们用该衰减率将钙建模为有效的二能级系统。

对于铍，由 $|0\rangle$、$|1\rangle$、$|2\rangle = \left|S_{1/2}, F=2, M_F=+1\right\rangle$ 以及 P态 $|e\rangle = \left|P_{1/2}, F=2, M_F=2\right\rangle$ 组成的四能级系统需要更复杂的处理。这涉及两台再泵浦激光器：再泵浦光 1 从$|1\rangle$ 到 $|e\rangle$，拉比频率为 $\Omega_{1,}$；再泵浦器 2 从 $|2\rangle$ 到 $|e\rangle$，拉比频率为 $\Omega_{2,}$；随后从 $|e\rangle$ 向全部三个能级 $|0\rangle$、$|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 发生自发辐射，其速率分别为 γ_0、γ_1、γ_2。这种配置实现了从 $|1\rangle$ 到 $|0\rangle$ 的有效衰减，速率为 γ_{h}。再泵浦光 1 红失谐 $\Delta_1 = 2\pi \times 10\,\mathrm{MHz}$，以避免形成相干暗态。虽然可以像钙的情况那样测量两台再泵浦激光器均开启时从 $|1\rangle$ 到 $|0\rangle$的有效衰减率，但我们希望分别确定两个再泵浦强度 $\Omega_{1,}$ 和 $\Omega_{2,}$，以便用全部四个能级对系统建模。接下来，我们将说明如何获得 Ω_1 和 Ω_2。

从解析上看，仅开启再泵浦光 1 时，我们可以用以下速率方程描述铍四能级系统：

$$\dot{P}_0 = \gamma_0 P_{\mathrm{e}} \tag{S.2}$$
$$\dot{P}_1 = -bP_1 + \gamma_1 P_{\mathrm{e}} \tag{S.3}$$
$$\dot{P}_2 = \gamma_2 P_{\mathrm{e}} \tag{S.4}$$
$$\dot{P}_{\mathrm{e}} = bP_1 - \gamma P_{\mathrm{e}} \stackrel{!}{=} 0. \tag{S.5}$$

其中，P_j 表示能级 $|j\rangle$的布居，b 是再泵浦光 1 激光器将粒子从 $|1\rangle$ 激发到 $|e\rangle$的速率，而 $\gamma \equiv \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$。假设可以绝热消去激发态，由式 (S.5) 可得

$$P_{\mathrm{e}} = bP_1/\gamma. \tag{S.6}$$

将其代入其他方程并求解，可得

$$P_1(t) = e^{-b\frac{\gamma-\gamma_1}{\gamma}t} = e^{\frac{-b(\gamma_0+\gamma_2)}{\gamma}t} \tag{S.7}$$
$$P_0(t) = \frac{-\gamma_0}{\gamma_0+\gamma_2} e^{\frac{-b(\gamma_0+\gamma_2)}{\gamma}t} = \frac{-\gamma_0}{\gamma_0+\gamma_2} e^{-\frac{1}{\tau_1}t} \tag{S.8}$$

其中 $1/\tau_1 = b(\frac{\gamma_0+\gamma_2}{\gamma})$ is 即描述有效再泵浦至 $|0\rangle$ 态过程的时间常数的倒数 e.

为了求出 b的表达式，我们将这些速率方程与对四能级系统的主方程应用有效算符形式 [62] 后得到的结果进行比较。消去寿命较短的 P 能级态 $|e\rangle$后，我们得到一组有效林德布拉德算符 L_{eff}，并找出能够产生从$|1\rangle$ 返回 $|1\rangle$的相应泵浦过程的矩阵元。该矩阵元的平方即描述了泵浦过程的速率。令该矩阵元等于 $b\gamma_1/\gamma$，即可得到 b。

考虑仅开启再泵浦光 1 的情况，可得

$$b = \gamma\left(\frac{\Omega_1^2}{\gamma^2 + 4\Delta^2}\right). \tag{S.9}$$

我们可以将其代入 τ_1 的表达式并求解 $\Omega_{1,}$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\tau_1}\frac{\gamma^2+4\Delta^2}{\gamma_0+\gamma_2}}. \tag{S.10}$$

我们通过校准实验获得 τ_1：实验从 $|1\rangle$ 态开始，开启再泵浦光 1，并测量 $|0\rangle$ 态的布居速率。检测前，对 $|2\rangle$ 施加一个额外的搁置脉冲，以防止该态的布居因非共振散射而导致对 $|0\rangle$ 布居的误判。该实验还使我们观察到亮态布居饱和在 57%，这与预期的分支比一致。

类似地，从仅假设再泵浦器 2 已开启的速率方程出发，我们得到再泵浦器 2 强度的表达式：

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\tau_2}\frac{\gamma^2}{\gamma_0+\gamma_1}}. \tag{S.11}$$

我们通过测量在初始化为 $|2\rangle$ 且开启再泵浦器 2 后 $|0\rangle$ 态的布居速率，得到 τ_2。在这种情况下，亮态在 43% 处达到饱和。态 $|2\rangle$ 的制备通过光学泵浦至 $|0\rangle$，随后通过重复 10 次包含向 $|1\rangle$ 进行相干转移脉冲并施加再泵浦激光器 1 的循环，将其泵浦至 $|2\rangle$。

在包含四能级的模型中，我们还计算得出，从 $|1\rangle$ 到 $|0\rangle$ 的再泵浦可近似为速率为 $\gamma_{\mathrm{h}} = 1/15.5\ \mu\mathrm{s}^{-1}$的有效指数过程。对于P态，我们利用克莱布什–戈登系数和测得的上态 [63], 衰减率，计算了不同跃迁路径上的衰减率，得到它们分别为$\gamma_0 = 40.0\ \mu\mathrm{s}^{-1}$、 $\gamma_1 = 50.4\ \mu\mathrm{s}^{-1}$ 和 $\gamma_2 = 29.6\ \mu\mathrm{s}^{-1}$。

III. 实验方　　法：阱频率、态依赖力和抖动强度

阱频率、态依赖力和抖动强度的实验方法及校准与 [18]中所述相同。

IV. 实验方　法：特征函数和边缘分布

为了探测声子激光器的相位，我们使用态依赖力（SDF），沿相空间的两个轴读取特征函数 [56] 的实部和虚部。然后对特征函数进行复数傅里叶变换，得到边缘分布，即沿位置轴或动量轴的概率密度函数。对于图4和图5所示的数据，特征函数的测量范围为 -0.7至 0.7。在进行复数傅里叶变换之前，我们将数据用零填充，范围从 -1.0 至 -0.7，以及从 0.7 至 1.0。

V. 平均场方法

接下来，我们将推导平均场近似下声子数的表达式，以及声子模的演化方程。

离子内部跃迁 $|0\rangle_j \leftrightarrow |1\rangle_j$ （$j \in \{\mathrm{c}, \mathrm{h}\}$）通过蓝边带（加热）和红边带（冷却）驱动与离子运动 a 耦合：

$$H_{\mathrm{h}} = g_{\mathrm{h}}(a^\dagger \sigma_+^{\mathrm{h}} + a\sigma_-^{\mathrm{h}}), \tag{S.12}$$
$$H_{\mathrm{c}} = g_{\mathrm{c}}(a^\dagger \sigma_-^{\mathrm{c}} + a\sigma_+^{\mathrm{c}}). \tag{S.13}$$

此处， $\sigma_{+/-}^{\mathrm{c/h}}$ 表示冷却/加热离子内部态的激发/退激发， $a^\dagger$ （a）表示运动模态中激发的产生（湮灭）。由于谱隔离，可以对这两种离子进行单独寻址，从而独立设置耦合常数， g_{c} 和 g_{h}。

除了哈密顿耦合外，系统还会因加热离子和冷却离子的自发辐射而发生耗散，这一过程由以下跳跃算符描述：

$$L_{\mathrm{h}} = \sqrt{\gamma_{\mathrm{h}}}\sigma_-^{\mathrm{h}}, \tag{S.14}$$
$$L_{\mathrm{c}} = \sqrt{\gamma_{\mathrm{c}}}\sigma_-^{\mathrm{c}}. \tag{S.15}$$

系统的时间演化由密度算符 ρ描述，并由林德布拉德形式的主方程支配

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_k \mathcal{D}[L_k](\rho). \tag{S.16}$$

刘维尔算符 $\mathcal{L}$（ρ）包含一个含有 $H = H_{\mathrm{c}} + H_{\mathrm{h}}$的哈密顿量部分，以及一个耗散子

$$\mathcal{D}[L_k](\rho) = L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2}(L_k^\dagger L_k \rho + \rho L_k^\dagger L_k), \tag{S.17}$$

对应每个跳跃算符 $L_k \in \{L_{\mathrm{h}}, L_{\mathrm{c}}\}$。I
n the Heisenbergp i结构, t he 与时间无关的算符 O 的期望值的时间演化可描述为

by

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(\rho O) = \mathrm{Tr}\left(\frac{d\rho}{dt}O\right). \tag{S.18}$$

利用公式（S.16），可将其写为

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle = i\langle[H,O]\rangle + \sum_k \left\langle \tilde{\mathcal{D}}[L_k](O)\right\rangle, \tag{S.19}$$

其中耗散部分为

$$\left\langle \tilde{\mathcal{D}}[L_k](O)\right\rangle = \left\langle L_k^\dagger O L_k - \frac{1}{2}(L_k^\dagger L_k O + O L_k^\dagger L_k)\right\rangle. \tag{S.20}$$

为了简要描述动力学，我们采用一阶累积量近似推导动力学方程。我们选取变量 $A=\langle a\rangle$ 描述离子运动，选取变量 $S_{c/h}=\left\langle\sigma_+^{\mathrm{c/h}}\right\rangle$、 $D_{\mathrm{c/h}}=\left\langle\sigma_{\mathrm{z}}^{\mathrm{c/h}}\right\rangle$ 描述离子自旋:

$$\frac{d}{dt}A(t) = -ig_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{c}}^*(t) - ig_{\mathrm{h}}S_{\mathrm{h}}(t), \tag{S.21}$$

$$\frac{d}{dt}S_{\mathrm{c}}(t) = -\frac{\gamma_{\mathrm{c}}}{2}S_{\mathrm{c}}(t) - ig_{\mathrm{c}}A^*(t)D_{\mathrm{c}}(t), \tag{S.22}$$

$$\frac{d}{dt}D_{\mathrm{c}}(t) = 2ig_{\mathrm{c}}\left(A^*(t)S_{\mathrm{c}}^*(t) - A(t)S_{\mathrm{c}}(t)\right) - \gamma_{\mathrm{c}}\left(D_{\mathrm{c}}(t)+1\right), \tag{S.23}$$

$$\frac{d}{dt}S_{\mathrm{h}}(t) = -\frac{\gamma_{\mathrm{h}}}{2}S_{\mathrm{h}}(t) - ig_{\mathrm{h}}A(t)D_{\mathrm{h}}(t), \tag{S.24}$$

$$\frac{d}{dt}D_{\mathrm{h}}(t) = 2ig_{\mathrm{h}}\left(A(t)S_{\mathrm{h}}^*(t) - A^*(t)S_{\mathrm{h}}(t)\right) - \gamma_{\mathrm{h}}\left(D_{\mathrm{h}}(t)+1\right). \tag{S.25}$$

为了得到声子期望值的解析表达式，我们还作出两个假设： $\gamma_{\mathrm{c}} \gg g_{\mathrm{c}}$ 和$\gamma_{\mathrm{h}} \gg g_{\mathrm{h}}$。从物理上讲，这意味着离子的内部动力学达到稳态所需的时间尺度短于离子运动的演化时间尺度。因此，我们可以假设自旋变量处于稳态（$\frac{d}{dt}S_{\mathrm{c/h}}(t) = 0$和 $\frac{d}{dt}D_{\mathrm{c/h}}(t) = 0$），并利用由此得到的四个方程，推导出一个描述离子运动的单一演化方程，

$$\frac{d}{dt}A(t) = A(t)\left(\frac{\frac{2g_{\mathrm{h}}^2}{\gamma_{\mathrm{h}}}}{1+\frac{8g_{\mathrm{h}}^2}{\gamma_{\mathrm{h}}^2}|A(t)|^2} - \frac{\frac{2g_{\mathrm{c}}^2}{\gamma_{\mathrm{c}}}}{1+\frac{8g_{\mathrm{c}}^2}{\gamma_{\mathrm{c}}^2}|A(t)|^2}\right) = A(t)\left(\frac{2\kappa_{\mathrm{h}}}{1+s_{\mathrm{h}}|A(t)|^2} - \frac{2\kappa_{\mathrm{c}}}{1+s_{\mathrm{c}}|A(t)|^2}\right), \tag{S.26}$$

其中，我们在第二个方程中引入了以下记号来表示增益与损耗系数： $\kappa_{\mathrm{h/c}} = {g^2}_{\mathrm{hc}}\,\gamma_{\mathrm{h/c}}$；饱和系数则表示为： $s_{\mathrm{h/c}} = {8g^2}_{\mathrm{hc}}\,\gamma^2{}_{\mathrm{h/c}}$。至此，正文中式（1）的推导完成。

现在我们讨论相变和平均声子期望值；通过分析 $A(t)$对应的稳态，可以从上述方程中求得它们。

$A(t)=0$ 显然是系统的一个稳态，因为在这种情况下， A 的时间导数为零。只有当括号中的项为负时，这个稳态才稳定，对应的条件是 $\kappa_{\mathrm{h}} = {g^2}_{\mathrm{h}}\,\gamma_{\mathrm{h}} < {g^2}_{\mathrm{c}}\gamma_{\mathrm{c}} = \kappa_{\mathrm{c}}$。因此，条件$\kappa_{\mathrm{h}} = \kappa_{\mathrm{c}}$ 给出了激光相变：越过这一相变后，零稳态变得不稳定，而 A 达到有限值。将上述方程中括号内的项置零并求解$|A|^2$，即可计算出这一数值。由于声子数为 $\langle n\rangle = \left\langle a^\dagger a\right\rangle = A^*A = |A|^2$ 因此我们得到了激光阈值以上的声子期望值，其表达式为

$$\langle n\rangle = \frac{\gamma_{\mathrm{c}}\gamma_{\mathrm{h}}\left(\gamma_{\mathrm{c}}g_{\mathrm{h}}^2 - \gamma_{\mathrm{h}}g_{\mathrm{c}}^2\right)}{8g_{\mathrm{c}}^2g_{\mathrm{h}}^2(\gamma_{\mathrm{c}}-\gamma_{\mathrm{h}})}. \tag{S.27}$$

第二个相变更为微妙。通过分析公式 (S.26)，我们注意到每一项分别对应一种离子种类，并呈现饱和行为： $|A|$越大，每一项的贡献就越小。由于两项符号相反，因此 возникает 哪一项饱和得更快的问题。这由饱和

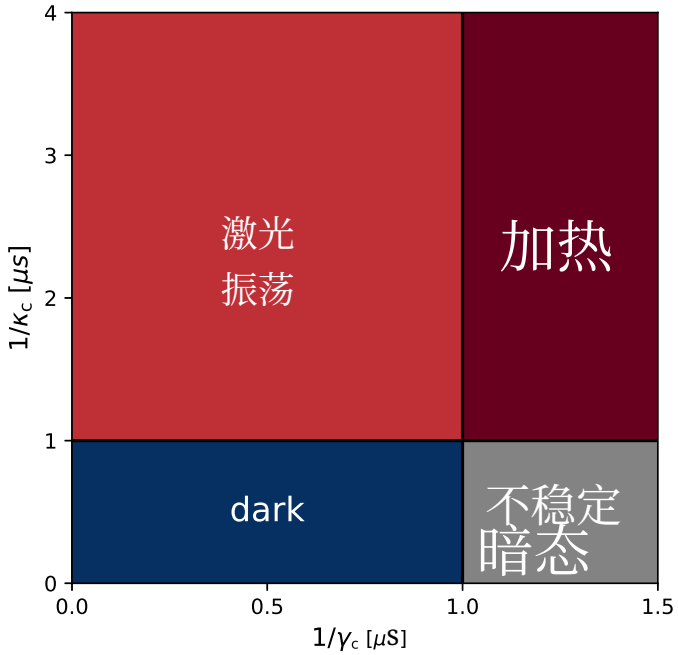

图 S.6. 固定 $g_{\mathrm{h}} = 1.0\,\mu\mathrm{s}^{-1}$ 和 $\gamma_{\mathrm{h}} = 1.0\,\mu\mathrm{s}^{-1}$时声子激光器的相图：根据平均场理论的结果，相空间分为四个相。在左下角，$\gamma_{\mathrm{h}} < \gamma_{\mathrm{c}}$ 和 $\kappa_{\mathrm{h}} < \kappa_{\mathrm{c}}$ 满足条件时，系统处于暗态。随着 κ_{c} 相对于 κ_{h} 减小（κ_{h} 固定为 $1.0\ \mu\mathrm{s}^{-1}$），我们跨过激光阈值，系统呈现出有限的相干声子占据数（如实验所示），对应于激射态。跨过对应于 $\gamma_{\mathrm{h}} = \gamma_{\mathrm{c}}$ 的垂直线后，我们进入失控相，此时有限的稳态消失，系统开始升温。在右下角，我们预期系统处于暗态。然而，由于不稳定稳态接近该暗态，且该暗态周围存在涨落，系统会经历与加热相相同的失控行为。

系数 $s_{\mathrm{h/c}}$ 决定，它们位于 $|A(t)|^2$前。对于较大的 A值，该因子可化简为 $1/\gamma_{\mathrm{c/h}}$，因为我们可以忽略分母中的 1。在 $\gamma_{\mathrm{c}} > \gamma_{\mathrm{h}}$ 的情况下，加热离子先于冷却离子达到饱和，因此 A 可以达到有限的稳态。在另一种情况下，加热离子较晚达到饱和，并且由于该项为正，会出现描述加热相的失控状态。我们得出结论，向加热相转变的第二个相变由条件 $\gamma_{\mathrm{c}} = \gamma_{\mathrm{h}}$ 给出，或等价地表示为 $s_{\mathrm{h}}/s_{\mathrm{c}} = \kappa_{\mathrm{h}}/\kappa_{\mathrm{c}}$。由此分析得到的相图如图 S.6 所示。

如果将正文中解释并给出动机的退相干算符纳入对加热离子的描述，就必须修改加热自旋的运动方程。

实现系统四能级特性所导致的额外退相干的附加林德布拉德跃迁算符为：

$$L_1 = \sqrt{\gamma_{\mathrm{e}}}\sigma_{\mathrm{e}} = \sqrt{\gamma_{\mathrm{e}}}\,|1\rangle\langle 1|\,. \tag{S.28}$$

这一项修改了式 (S.24)，现在该式为：

$$\frac{d}{dt}S_{\mathrm{h}}(t) = -\frac{\gamma_{\mathrm{h}}}{2}S_{\mathrm{h}}(t) - \frac{\gamma_{\mathrm{e}}}{2}S_{\mathrm{h}}(t) - ig_{\mathrm{h}}A(t)D_{\mathrm{h}}(t). \tag{S.29}$$

其他变量的运动方程保持不变，因此我们可以按照上述相同的步骤进行。假设自旋变量处于稳态，我们便可得到与式（S.26）类似的离子运动演化方程，

$$\frac{d}{dt}A(t) = A(t)\left(\frac{\frac{2g_{\mathrm{h}}^2}{(\gamma_{\mathrm{h}}+\gamma_{\mathrm{e}})}}{\frac{8g_{\mathrm{h}}^2}{\gamma_{\mathrm{h}}(\gamma_{\mathrm{h}}+\gamma_{\mathrm{e}})}|A(t)|^2+1} - \frac{\frac{2g_{\mathrm{c}}^2}{\gamma_{\mathrm{c}}}}{\frac{8g_{\mathrm{c}}^2}{\gamma_{\mathrm{c}}^2}|A(t)|^2+1}\right). \tag{S.30}$$

令上述方程中的括号项为零，可得到修正后的声子占据数表达式，

$$\langle n\rangle = \frac{\gamma_{\mathrm{c}}\gamma_{\mathrm{h}}\left(\gamma_{\mathrm{c}}g_{\mathrm{h}}^2-(\gamma_{\mathrm{h}}+\gamma_{\mathrm{e}})g_{\mathrm{c}}^2\right)}{8g_{\mathrm{c}}^2g_{\mathrm{h}}^2(\gamma_{\mathrm{c}}-\gamma_{\mathrm{h}})}. \tag{S.31}$$

此表达式用于正文中的图3（e），以将测得的声子期望值与理论模拟结果进行比较。

VI. 相位扩散：海森堡-朗之万方法

为了模拟加热离子的衰减以及振荡器的衰减（利用已消去的冷却离子），我们必须引入两个储库，分别与加热离子和谐振器耦合，如所述在 [45]中。离子与腔之间的相互作用由通常的反雅各布斯-卡明斯哈密顿量描述。在旋波近似下，总哈密顿量由以下三项组成：

$$H_{\mathrm{Ion;Motion}} = g\left(a^\dagger\sigma_+ + \sigma_- a\right), \tag{S.32}$$

$$H_{\mathrm{Motion;Reservoir1}} = \sum_{\mathrm{q}} g_{\mathrm{q}}\left[c_{\mathrm{q}}^\dagger a e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{q}})t} + a^\dagger c_{\mathrm{q}} e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{q}})t}\right], \tag{S.33}$$

$$H_{\mathrm{Ion;Reservoir2}} = \sum_{\mathrm{k}} g_{\mathrm{k}}\left[\sigma_+ b_{\mathrm{k}} e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t} + b_{\mathrm{k}}^\dagger\sigma_- e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}\right]. \tag{S.34}$$

储库由一系列频率间隔很小的谐振子组成。 c_{q} 和 b_{k} 是这些储库振子的玻色湮灭算符，它们满足对易关系 $[c_{\mathrm{q}}, c_p^\dagger] = \delta_{\mathrm{q,\ p}}$ 和 $[b_{\mathrm{k}}, b_l^\dagger] = \delta_{\mathrm{k,\ l}}$。

我们使用冯·诺依曼方程求出以下算符的时间演化 s:

$$\dot{a} = -ig\sigma_+ - i\sum_{\mathrm{q}} g_{\mathrm{q}}c_{\mathrm{q}}e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{q}})t}, \tag{S.35}$$

$$\dot{\sigma}_+ = -ig\sigma_{\mathrm{z}}a - i\sum_{\mathrm{k}} g_{\mathrm{k}}b_{\mathrm{k}}^\dagger\sigma_{\mathrm{z}}e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}, \tag{S.36}$$

$$\dot{\sigma}_{\mathrm{z}} = -2ig(a^\dagger\sigma_+ - \sigma_- a) + 2i\sum_{\mathrm{k}} g_{\mathrm{k}}\left[-\sigma_+ b_{\mathrm{k}}e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t} + b_{\mathrm{k}}^\dagger\sigma_- e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}\right], \tag{S.37}$$

$$\dot{c}_{\mathrm{q}} = -ig_{\mathrm{q}}ae^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{q}})^t}, \tag{S.38}$$

$$\dot{b}_{\mathrm{k}} = -ig_{\mathrm{k}}\sigma_- e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}. \tag{S.39}$$

方程（S.38）a 并对（S.39）进行形式积分，然后将解代入式（S.35）–（S.37）).

由所得方程可以识别出噪声算符和衰减参数 γ 和 C，并用以下定义替代：

$$\gamma = 2\sum_{\mathrm{k}} g_{\mathrm{k}}^2\int_0^t dt' e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})(t-t')}, \tag{S.40}$$

$$C = 2\sum_{\mathrm{q}} g_{\mathrm{q}}^2\int_0^t dt' e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{q}})(t'-t)}, \tag{S.41}$$

$$\mathcal{F}_a(t) = -i\sum_{\mathrm{q}} g_{\mathrm{q}}c_{\mathrm{q}}(0)e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}, \tag{S.42}$$

$$\mathcal{F}_+(t) = -i\sum_{\mathrm{k}} g_{\mathrm{k}}b_{\mathrm{k}}^\dagger(0)\sigma_{\mathrm{z}}(t)e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}, \tag{S.43}$$

$$\mathcal{F}_{\mathrm{z}}(t) = 2i\sum_{\mathrm{k}} g_{\mathrm{k}}\left[-\sigma_+(t)b_{\mathrm{k}}(0)e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t} + b_{\mathrm{k}}^\dagger(0)\sigma_-(t)e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}\right]. \tag{S.44}$$

根据这些定义，方程 (S.35)–(S.37) 可写为：

$$\dot{a} = -ig\sigma_+ - \frac{C}{2}a + \mathcal{F}_a, \tag{S.45}$$

$$\dot{\sigma}_+ = -ig\sigma_z a - \frac{\gamma}{2}\sigma_+ + \mathcal{F}_+, \tag{S.46}$$

$$\dot{\sigma}_z = -2ig(a^\dagger\sigma_+ - \sigma_- a) - \gamma(\sigma_z + 1) + \mathcal{F}_z. \tag{S.47}$$

现在我们可以计算式 (S.42)–(S.44) 中定义的噪声算符的关联函数。我们假设两个储库都处于热平衡状态，且温度为零。这会导致 $\bar{n}_{\rm th} = 0$，使得大多数关联函数为零。非零项列于下方：

$$\left\langle \mathcal{F}_a(t)\mathcal{F}_a^\dagger(t')\right\rangle_{\rm R} = C\delta(t-t'), \tag{S.48}$$

$$\left\langle \mathcal{F}_+^\dagger(t)\mathcal{F}_+(t')\right\rangle_{\rm R} = \gamma\delta(t-t'), \tag{S.49}$$

$$\left\langle \mathcal{F}_z(t)\mathcal{F}_z^\dagger(t')\right\rangle_{\rm R} = 2\gamma\left[1 + \langle\sigma_z(t)\rangle\right]\delta(t-t'), \tag{S.50}$$

$$\left\langle \mathcal{F}_+^\dagger(t)\mathcal{F}_z(t')\right\rangle_{\rm R} = 2\gamma\left\langle\sigma_-(t)\right\rangle\delta(t-t'), \tag{S.51}$$

$$\left\langle \mathcal{F}_z(t)\mathcal{F}_+(t')\right\rangle_{\rm R} = 2\gamma\left\langle\sigma_+(t)\right\rangle\delta(t-t'). \tag{S.52}$$

注意，$\mathcal{F}_z$ 是一个厄米算符，因此，将 $\mathcal{F}_z$ 替换为其伴随算符后，上述所有关联函数仍会得到相同的函数。

为了解算符方程 (S.45)–(S.47)，我们需要找到相应的复数方程。为此，我们规定算符的正规序为：$a^\dagger$，σ_-，σ_z，σ_+，a。任何按此规定的顺序书写的算符方程，都可以转换为复数方程。由于方程 (S.45)–(S.47) 已经符合这一顺序，因此可以将所有算符替换为复变量 A，S，D，从而得到以下方程

$$\dot{A} = -igS - \frac{C}{2}A + F_a, \tag{S.53}$$

$$\dot{S} = -igDA - \frac{\gamma}{2}S + F_+, \tag{S.54}$$

$$\dot{D} = -2ig(A^*S - S^*A) - \gamma(D+1) + F_z. \tag{S.55}$$

噪声算符 F_a, F_+, F_z 是复值函数，可通过要求复变量二阶矩的时间演化与算符变量的时间演化相同来确定。请注意，这一要求保证算符的对易关系保持时间不变。

我们使用以下定义 扩散系数，以简化噪声关联函数的记法 ：

$$\langle F_\mu(t)F_\nu(t')\rangle = \langle 2D_{\mu\nu}\rangle\,\delta(t-t'). \tag{S.56}$$

非零扩散系数给出：

$$\langle 2D_{++}\rangle = 2ig\,\langle\sigma_+ a\rangle \tag{S.57}$$

$$\langle 2D_{\rm zz}\rangle = +4ig\left\langle a^\dagger\sigma_+\right\rangle - 4ig\,\langle\sigma_- a\rangle + 2\gamma(1 + \langle\sigma_z\rangle) \tag{S.58}$$

$$\langle 2D_{--}\rangle = -2ig\left\langle a^\dagger\sigma_-\right\rangle \tag{S.59}$$

$$\langle 2D_{-\rm z}\rangle = 2\gamma\,\langle\sigma_-\rangle \tag{S.60}$$

$$\langle 2D_{\rm z+}\rangle = 2\gamma\,\langle\sigma_+\rangle \tag{S.61}$$

$$\langle 2D_{-+}\rangle = \gamma \tag{S.62}$$

为了解出方程 (S.53)–(S.55)，我们采用绝热近似，从而可以假设自旋变量 S 和 D 处于稳态。由此得到一个关于 A 演化的方程，其噪声算符为 $F_{\rm a}$：

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -\frac{2g^2}{\gamma}\frac{1}{\gamma(1+\frac{8g^2}{\gamma^2}I)}\left[-\frac{4ig}{\gamma}(A^*F_+ - F_+^*A) - \gamma + F_z\right]A + -\frac{2ig}{\gamma}F_+ - \frac{C}{2}A + F_a \\ &= \frac{\frac{2g^2}{\gamma}A}{(1+\frac{8g^2}{\gamma^2}I)} - \frac{C}{2}A + F_{\rm A},\end{aligned} \tag{S.63}$$

with

$$F_{\mathrm{A}} = \frac{1}{(1+\frac{8g^2}{\gamma^2}I)}\left[\frac{8ig^3}{\gamma^3}(A^*F_+ - F_+^*A) - \frac{2g^2}{\gamma^2}F_{\mathrm{z}}\right]A + \frac{2g}{\gamma}F_+ + F_{\mathrm{a}}. \tag{S.64}$$

这个新的总噪声算符 F_A 现在包含了关于施加于 A 的噪声的所有信息。为了进一步利用这一结果，我们必须计算其扩散系数（即 F_A 和 F_{A}^* 各种组合之间的相关函数）

$$\langle 2D_{\mathrm{AA}}\rangle = \langle F_A(t)F_A(t)\rangle = \frac{-16A^2}{(1+\frac{8g^2}{\gamma^2}I)^3}\left[32\frac{g^8}{\gamma^7}I^2 + 16\frac{g^6}{\gamma^5}I + 3\frac{g^4}{\gamma^3}\right], \tag{S.65}$$

$$\langle 2D_{\mathrm{A^*A}}\rangle = \langle F_A^*(t)F_A(t)\rangle = \frac{4}{1+(\frac{8g_{\mathrm{h}}^2}{\gamma_{\mathrm{h}}^2}I)^3}\left[128\frac{g_{\mathrm{h}}^8}{\gamma_{\mathrm{h}}^7}I^3 + 64\frac{g_{\mathrm{h}}^6}{\gamma_{\mathrm{h}}^5}I^2 + 8\frac{g_{\mathrm{h}}^4}{\gamma_{\mathrm{h}}^3}I + \frac{g^2}{\gamma}\right]. \tag{S.66}$$

现在，为了得到相位扩散系数，我们进行如下坐标变换： $A = \sqrt{I}e^{i\theta}$。根据恒等式

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{I}}{2I} + i\dot{\Theta}, \tag{S.67}$$

我们可以看出， $\frac{\dot{A}}{A}$ 的纯虚部描述了沿切向的演化，而实部则相应地描述了状态的径向演化。

同样，噪声算符可以分解为实部和虚部，其中虚部对应相位噪声。为了求出相位噪声的扩散系数，其表达式为 $\langle 2D_{\Theta\Theta}\rangle = \left\langle \mathrm{Im}(\frac{F_{A(t)}}{A})\,\mathrm{Im}(\frac{F_{A(t)}}{A})\right\rangle$，我们可以使用以下关于任意复数 $x = a + ib$的恒等式。

$$4\,\mathrm{Im}(x)^2 = xx^* + x^*x - x^*x^* - xx \tag{S.68}$$

令 $x = \frac{F_{A(t)}}{A}$，可得

$$4\langle 2D_{\Theta\Theta}\rangle = \frac{\langle 2D_{\mathrm{AA^*}}\rangle}{I} + \frac{\langle 2D_{\mathrm{A^*A}}\rangle}{I} - \frac{\langle 2D_{\mathrm{AA}}\rangle}{A^2} - \frac{\langle 2D_{\mathrm{A^*A^*}}\rangle}{(A^*)^2}. \tag{S.69}$$

利用式 (S.57)-(S.62) 中给出的复噪声算符的扩散系数 F_+, F_- 和 F_{z}，我们可以得到相位扩散系数关于系统参数的以下显式表达式:

$$\langle 2D_{\Theta\Theta}\rangle = \frac{\frac{2g^2}{\gamma} + \frac{8g^4I}{\gamma^3}}{I(1+\frac{8g^2}{\gamma^2}I)}. \tag{S.70}$$

VII. 相位扩散：包含退相干算符 σ_{e} 的海森堡-朗之万方法

我们观察到，在将铍视为二能级系统时，实验与模拟在平均声子数和相位扩散方面存在差异。采用完整的四能级铍系统进行模拟后，这种差异有所减小。我们发现，为了将铍系统近似为二能级系统，同时纳入从 P态衰减回 $|1\rangle$ 的影响，需要以 $\gamma_{\mathrm{e}} = f\gamma_{\mathrm{h}}$ 速率考虑一个投影算符 $\sigma_{\mathrm{e}} = |1\rangle\langle 1|$（其中$f = 50/40$ 代表分支比）。这样，我们在平均声子数方面得到了与实验相符的模拟结果。因此，我们决定将这一项加入用于描述相位扩散的海森堡-朗之万方法中。现在，这组新的哈密顿量包含一个额外的储库，可表示为

$$H_{\mathrm{Ion;Motion}} = g\left(a^\dagger\sigma_+ + \sigma_- a\right), \tag{S.71}$$

$$H_{\mathrm{Motion;Reservoir1}} = \sum_{\mathrm{q}} g_{\mathrm{q}}\left[c_{\mathrm{q}}^\dagger a e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{q}})t} + a^\dagger c_{\mathrm{q}} e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{q}})t}\right], \tag{S.72}$$

$$H_{\mathrm{Ion;Reservoir2}} = \sum_{\mathrm{k}} g_{\mathrm{k}}\left[\sigma_+ b_{\mathrm{k}} e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t} + b_{\mathrm{k}}^\dagger\sigma_- e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{k}})t}\right], \tag{S.73}$$

$$H_{|1\rangle\langle 1|;\mathrm{Reservoir3}} = \sum_{\mathrm{l}} g_{\mathrm{l}}\left[\sigma_{\mathrm{e}}^\dagger d_{\mathrm{l}} e^{i(\omega-\omega_{\mathrm{l}})t} + d_{\mathrm{l}}^\dagger\sigma_{\mathrm{e}} e^{-i(\omega-\omega_{\mathrm{l}})t}\right]. \tag{S.74}$$

扩散系数的推导与上一章类似。非零扩散系数为：

$$\langle 2D_{++}\rangle = 2ig\langle\sigma_+ a\rangle\,, \tag{S.75}$$
$$\langle 2D_{\mathrm{zz}}\rangle = +4ig\left\langle a^\dagger\sigma_+\right\rangle - 4ig\langle\sigma_- a\rangle + 2\gamma(1+\langle\sigma_z\rangle), \tag{S.76}$$
$$\langle 2D_{--}\rangle = -2ig\left\langle a^\dagger\sigma_-\right\rangle, \tag{S.77}$$
$$\langle 2D_{-\mathrm{z}}\rangle = 2\gamma\langle\sigma_-\rangle, \tag{S.78}$$
$$\langle 2D_{\mathrm{z}+}\rangle = 2\gamma\langle\sigma_+\rangle, \tag{S.79}$$
$$\langle 2D_{-+}\rangle = \gamma + \frac{\gamma_\mathrm{e}}{2}(\langle\sigma_z\rangle - 1). \tag{S.80}$$

按照第六节中的类似方法，我们利用这些结果求得修正后的相位扩散，并用它来评估铍离子的贡献

$$\langle 2D_{\Theta\Theta}\rangle = \frac{\frac{2g^2}{(\gamma+\gamma_\mathrm{e})} + \frac{8g^4 I}{(\gamma(\gamma+\gamma_\mathrm{e})^2)}}{I\left(1+\frac{8g^2}{(\gamma(\gamma+\gamma_\mathrm{e}))}I\right)}. \tag{S.81}$$

当 $\gamma_\mathrm{e}\to 0$ 时，这将简化为公式（S.70）中的表达式。