arXiv:2301.08185v1 [math.CO] 19 Jan 2023

q-有理数与 q-实数二项式系数

John Machacek 和 Nicholas Ovenhouse

摘要

我们研究由 Morier-Genoud 和 Ovsienko 根据连分数定义的 q-有理数与 q-实数构造的 q-二项式系数。在这一框架下，我们分别建立了 q-帕斯卡恒等式和 q-二项式定理的相应形式。随后，我们利用这些结果发现 Morier-Genoud 和 Ovsienko 的 q-类比还满足更多恒等式，其中包括楚–范德蒙德恒等式和 q-伽马函数恒等式。

目录

1 引言 1
2 q-有理数与 q-实数 2
3 q^α 5
4 q-有理数与 q-实二项式系数 7
5 组合解释 10
6 q-二项式定理 11
7 q-微积分 13
8 更多恒等式 15
9 一种新的 q-伽马函数类比 18
10 进一步的问题 21
致谢 22

1 引言

经典的“q-整数”是多项式 $[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$。由于它也等于 $\frac{1-q^n}{1-q}$，因此通常也用表达式 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 来定义非整数 α 的 q-类比。最近，Morier- Genoud 和 Ovsienko 通过对连分数表达式进行q-变形，定义了另一种有理 [MGO20] 和实数 [MGO22] 的 q-类比。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们将用 $[\alpha]_q$ 表示文献[MGO20, MGO22]中的 q-类比。对于 $\alpha \in \mathbb{Q}$，这个定义会产生一个关于 q的有理函数，这与更常见的 q-数 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 不同。更一般地，对于 $\alpha \in \mathbb{R}$， q-类比是一个关于 q 的洛朗级数，且其系数为整数。

本文的主要目标是证明，许多涉及 q-数 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 的定义都有使用 Morier-Genoud–Ovsienko q-类比 $[\alpha]_q$ 的替代版本，而且许多涉及 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 的结果和恒等式，对于采用 $[\alpha]_q$ 的版本仍然成立。我们的主要示例是将 q-二项式系数 $\binom{n}{k}_q$ 推广到 n 不是整数的情形，并考察许多预期的性质和恒等式在这一新情形下是否仍成立。

二项式系数可以写成 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$，显然，即使 n 不是整数，这样写也有意义。同样，我们可以定义 q-类比

$$\binom{\alpha}{k}_q := \frac{[\alpha]_q[\alpha-1]_q\cdots[\alpha-k+1]_q}{[k]_q!}$$

它们将是关于 q 的洛朗级数（事实上，如果 $\alpha \in \mathbb{Q}$，则是有理函数）。我们再次强调，这种定义方式以前已经有人使用过（例如参见 [KC02]），其表达式为 $\frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha-1})\cdots(1-q^{\alpha-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$，但后一种表达式既不是有理函数，甚至也不是关于 q 的洛朗级数。后一种 q-二项式系数具有许多优良性质。它们满足 q-帕斯卡恒等式，以及二项式定理的 q-类比。我们将证明，我们的 $\binom{\alpha}{k}_q$ 利用 q-数 $[\alpha]_q$，也满足所有同样优良的恒等式。

能够实现上述推广的主要思路，是将表达式 q^α 替换为某个关于 q 的洛朗级数（或当 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 时替换为有理函数），同时保留许多优良性质，使 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 成为数 α 的良好 q-类比。注意，当 n 是整数时，$[n+1]_q - [n]_q = q^n$。我们认为，对于实数 α，函数 $\{\alpha\}_q := [\alpha+1]_q - [\alpha]_q$ 是 q^α 的恰当替代。表明这一思路可行的第一个观察是恒等式 $[\alpha]_q = \frac{1-\{\alpha\}_q}{1-q}$。这个观察虽然非常简单，却似乎会带来许多有趣的推论，使人们能够在许多已有的 q-类比中用 $\{\alpha\}_q$ 替代 q^α。如上所述，本文将聚焦于 q-二项式系数 $\binom{\alpha}{k}_q$，并说明将 q^α 替换为 $\{\alpha\}_q$ 后，许多涉及它们的恒等式在这一新框架下仍然成立。

2 q有理数与 q实数

我们将回顾 q变形有理数的定义，该定义出自[MGO20]。

定义 2.1。若 $\alpha > 1$ 的连分数展开为

$$\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m}] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{2m}}}}$$

然后，我们将 α 的 q 类比定义为有理函数 $[\alpha]_q$，它由以下 q 变形连分数给出：

$$[\alpha]_q := [a_1]_q + \cfrac{q^{a_1}}{[a_2]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-a_2}}{[a_3]_q + \cfrac{q^{a_3}}{[a_4]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-a_4}}{\ddots + \cfrac{q^{a_{2m-1}}}{[a_{2m}]_{q^{-1}}}}}}}$$

例 2.2. $\alpha = \frac{52}{23}$ 的连分数为 $[2,3,1,5],$，因此它的 q 类比为

$$\left[\frac{52}{23}\right]_q = [2]_q + \cfrac{q^2}{[3]_{q^{-1}} + \cfrac{q^{-3}}{1 + \cfrac{q}{[5]_{q^{-1}}}}} = \frac{1+3q+5q^2+7q^3+8q^4+8q^5+7q^6+6q^7+4q^8+2q^9+q^{10}}{1+2q+3q^2+4q^3+4q^4+3q^5+3q^6+2q^7+q^8}$$

在 [MGO22] 中，作者通过首先取一个收敛到 q的 $[\alpha]_q$ 有理数列$(\alpha_j)_{j\geq 0}$，为任意正实数 α定义形式幂级数 $[\alpha]_q$ 为$([\alpha_j]_q)_{j\geq 0}$ 的极限（并证明该极限定义良好），从而得到形式级数 α α。

定理 2.3 ([MGO22], 定理 1)。设 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$，并设 α_1， α_2， α_3，.....是满足$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha$的有理数列。那么极限$\lim_{n\to\infty}[\alpha_n]_q$ 作为具有整数系数的形式洛朗级数存在（即每个系数最终都会稳定下来）。

定义 2.4。对于无理数 $\alpha \in \mathbb{R}$， q的 $[\alpha]_q \in \mathbb{Z}((q))$ 类比定义为定理2.3所保证存在的洛朗级数。也就是说，对于任意有理数列 $\alpha_n \to \alpha$，若 $[\alpha_n]_q = \sum_k \varkappa_k^{(n)} q^k$，则定义

$$[\alpha]_q := \sum_k \varkappa_k q^k, \qquad \text{where } \varkappa_k := \lim_{n\to\infty} \varkappa_k^{(n)}$$

例 2.5. $\pi/2$的连分数展开以 $[1,1,1,3,31,1,145,\ldots]$开始。因此，我们可以用以下有理数列来近似它

$$\frac{3}{2},\ \frac{11}{7},\ \frac{344}{219},\ \frac{355}{226},\ \cdots$$

这些 q-有理数的级数展开为

$$\left[\frac{3}{2}\right]_q = 1+q^2-q^3+q^4-q^5+q^6-q^7+q^8-q^9+\cdots$$
$$\left[\frac{11}{7}\right]_q = 1+q^2-q^3+q^4-2q^6+4q^7-5q^8+4q^9-7q^{11}+\cdots$$
$$\left[\frac{344}{219}\right]_q = 1+q^2-q^3+q^4-q^5+2q^6-3q^7+3q^8-4q^9+6q^{10}-7q^{11}+\cdots$$

级数$\left[\frac{344}{219}\right]_q$已经与 $\left[\frac{\pi}{2}\right]_q$一致到远高于上文所示的阶。

命题 2.6 ([MGO20， MGO22])。 对于实数 $\alpha > 1$，有

$$[\alpha+1]_q = 1 + q\,[\alpha]_q$$

命题 2.6可由定义 2.1轻易推出，并可用于定义 q-模拟 $\alpha \leq 1$。也就是说，我们只需定义 $[\alpha-1]_q := \frac{1}{q}($ $[\alpha]_q - 1)$。然后通过迭代即可得到以下推论，它表明 q-有理数不一定总是 q 的幂级数，实际上也可以是洛朗级数。

推论 2.7. 对于实数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和正整数 n，有

$$[\alpha + n]_q = [n]_q + q^n [\alpha]_q$$

$$[\alpha - n]_q = \frac{1}{q^n}\Big([\alpha]_q - [n]_q\Big)$$

对于整数， q类比式 $[n]_q = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$ 等于$\frac{1-q^n}{1-q}$，因此通常将任意实数 q的 α 类比式定义为表达式 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$。 q定义 2.1 中的 -有理数与此表达式截然不同，但它们具有许多有趣的性质，也与数学的其他领域有诸多联系。下面我们将简要介绍其中一些。

q-有理数的分子和分母具有有趣的组合解释，可表示为某些生成函数。设 $[a_1, \ldots, a_{2m}] = \frac{r}{s}$，其 q 版本由有理函数 $\left[\frac{r}{s}\right]_q = \frac{\mathcal{R}_{(q)}}{\mathcal{S}_{(q)}}$ 给出。存在一个偏序集 F（称为栅栏），其中的数 $a_1, \ldots, a_{2m}$决定了哈斯图中上行步和下行步的数量。于是，多项式 $\mathcal{R}(q)$ 是格 $J(F)$ 的秩生成函数，该格由 F 的序理想构成。也就是说，

$$\mathcal{R}(q) = \sum_{I \in J(F)} q^{|I|}$$

这一结论的一个版本见于[MGO20] （定理 4）。从栅栏偏序集的角度研究这些多项式的文献还包括 [MSS21]。另一种不同但等价的视角如下。存在一个边条斜杨图 λ/μ，其形状由这些数 a_1、……、 a_{2m}决定。将栅栏偏序集 F的哈斯图逆时针旋转 $45°$，再将每个顶点替换为一个方格，即可得到该图。序理想 F 与 λ/μ上的东北格路径之间存在一个简单的双射，其中序理想就是格路径下方的方格集合。设 $L(\lambda/\mu)$ 为形状 λ/μ上的东北格路径集合，对于路径 p，令 $|p|$ 表示路径下方的方格数，则上述结论可改写为

$$\mathcal{R}(q) = \sum_{p \in L(\lambda/\mu)} q^{|p|}$$

在 [Ove21] 中，作者利用这种以格路径和斜杨图为基础的解释，为多项式 $\mathcal{R}(q)$ 赋予了另一种组合意义：它们表示有限域上某些簇的大小，其中该有限域含有 q个元素。特别地， $q^{|\mu|}\mathcal{R}(q)$ 等于某个格拉斯曼流形中舒伯特胞腔并集内的 $\mathbb{F}_q$-点数，该并集取遍由满足 ν 的分拆 $\mu \leq \nu \leq \lambda$所标记的舒伯特胞腔。

这些 q-有理数还与簇代数有重要联系。“A 型”簇代数可以实现为格拉斯曼流形的齐次坐标环 $\mathrm{Gr}_2(n)$，也可以实现为双曲平面中理想多边形的 Penner装饰特希米勒空间 上的函数环。在这两种情形下，簇组合学都由多边形的三角剖分决定。多边形的任意一个三角剖分，以及一条不属于该三角剖分的对角线，共同确定一个连分数 $[a_1, \ldots, a_{2m}]$。文献 [MGO20] (附录 B.2)中解释了 $\mathcal{R}(q)$是相应簇变量的 F-多项式的一种特化。

上述一些组合公式及其与簇代数的联系，在文献 [Cla20] 中有很好的阐述。 q-有理数还与某些纽结的琼斯多项式有关。文献 [MGO20] (附录 A)对此作了解释。这与 Lee 和 Schiffler 的工作有关 [LS19], , 他们证明某些纽结的琼斯多项式具有簇代数解释。

一些使用 q-实数的例子包括[LMG21] 中对模群的变形，以及 [MGO21]中对康威–考克斯特弗里兹的变形。 q-实数是（洛朗）级数，其收敛性质已在 [LMGOV21]中得到研究。此外， [LMG21], 中还证明了二次无理数的 q-变形具有特别简洁的闭式代数表达式。

3 q^α 的替代形式

我们希望能够让读者相信，q-有理数和 q-实数不仅因上一节提到的原因而值得关注，而且还满足许多优美恒等式，类似于更常用的表达式 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 所满足的恒等式。涉及这些 q-类比形式的许多恒等式不可避免地会用到表达式 q^α，而它显然不是有理函数。本节中，我们定义一个记作$\{\alpha\}_q$ 的洛朗级数（当 $\alpha \in \mathbb{Q}$时它是一个有理函数），并认为它可以很好地替代 q^α。在本文余下部分，我们将展示许多 q-有理数和 q-实数所满足的恒等式示例；这些恒等式与众所周知的恒等式相似，但其中的 q^α 被 $\{\alpha\}_q$取代。

请注意一个简单的事实：当 n 是整数时，$q^n = [n+1]_q - [n]_q$。我们认为，当 α 不是整数时，这个向前差分是 q^α 的“正确”替代形式。

定义 3.1. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，定义 $\{\alpha\}_q := [\alpha+1]_q - [\alpha]_q$。

例 3.2. 以下是 α 取有理数时 $\{\alpha\}_q$ 的一些例子：

$$\left\{\frac{1}{2}\right\}_q = \frac{1+q^2}{1+q}, \quad \left\{\frac{5}{3}\right\}_q = q\frac{1+q^2+q^3}{1+q+q^2}, \quad \left\{\frac{25}{7}\right\}_q = q^3\frac{1+q+2q^2+q^3+q^4+q^5}{1+2q+2q^2+q^3+q^4}$$

请注意，在所有这些例子中，都有一个因子 $q^{\lfloor\alpha\rfloor}$。这一点始终成立，可由定理 4.6和命题 3.5（c）得出。

例 3.3. 对于任意正整数 n，我们有

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_q = \frac{1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^n}{1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}} = 1+(q-1)\frac{q^{n-1}}{[n]_q}$$

展开为洛朗级数后，我们得到 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_q = 1 - q^{n-1} + 2q^n + \cdots$。特别地，我们有 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}_q = 1$。这个极限应从形式幂级数的意义上理解，也就是说，每个系数最终都会稳定下来。我们始终在形式幂级数环 $\mathbb{Q}[[q]]$ 或洛朗级数环 $\mathbb{Q}((q))$ 中进行运算，极限也始终按此意义理解。

例 3.4。 作为一个无理数的例子，我们考虑 $\alpha = \sqrt{2}+1 \approx 2.41421$。$q$-类比 $[\sqrt{2}+1]_q$ 在 [MGO22] 中计算为

$$\left[\sqrt{2}+1\right]_q = 1+q+q^4-2q^6+q^7+4q^8-5q^9-7q^{10}+18q^{11}+7q^{12}-55q^{13}+\cdots$$

利用下面的命题 3.5(a)，我们可以用这个表达式计算 $\{\sqrt{2}+1\}_q$：

$$\left\{\sqrt{2}+1\right\}_q = q^2-q^4+q^5+2q^6-3q^7-3q^8+9q^9+2q^{10}-25q^{11}+11q^{12}+62q^{13}+\cdots$$

请注意，正如例 3.2 中一样，这可以写成 $q^{\lfloor\alpha\rfloor}$ 乘以一个常数项为 1 的幂级数。

下面总结了 $\{\alpha\}_q$ 的一些性质。请读者牢记 $\{\alpha\}_q$ 与 q^α 之间的类比，并注意 (c) 和 (d) 部分对应于指数的基本运算法则 $q^{\alpha+n} = q^\alpha q^n$ 和 $q^{-\alpha} = (q^{-1})^\alpha$。此外，(b) 部分表明，$q$ 有理数 $[\alpha]_q$ 也具有一种类似于 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 的形式。

命题 3.5。 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和正整数 n，

(a) $\{\alpha\}_q = 1 + (q-1)[\alpha]_q$

(b) $\dfrac{1-\{\alpha\}_q}{1-q} = [\alpha]_q$

(c) $\{\alpha+n\}_q = q^n\{\alpha\}_q$

(d) *If* $\alpha \in \mathbb{Q}$, *then* $\{-\alpha\}_q = \{\alpha\}_{q^{-1}}$

(e) $\{\alpha\}_q = \dfrac{[\alpha+n]_q - [\alpha]_q}{[n]_q}$

证明。 部分 (a) 可由命题 2.6直接推出。部分 (b) 可由 (a) 通过代数运算得到。对于部分 (c) , 注意，结合第(a) 部分和命题 2 .6, 我们得到

$$\begin{aligned}
\{\alpha+1\}_q &= 1 + (q-1)[\alpha+1]_q && \text{(part (a))}\\
&= 1 + (q-1)(1+q[\alpha]_q) && \text{(Prop 2.6)}\\
&= q\,(1 + (q-1)[\alpha]_q)\\
&= q\{\alpha\}_q && \text{(part (a))}
\end{aligned}$$

$\{\alpha+n\}_q$ 的一般情形随后可通过归纳法得出。

对于第(d)部分，我们利用以下事实：$[-\alpha]_q = -q^{-1}[\alpha]_{q^{-1}}$ （命题 2.8，出自[LMG21]）。于是我们得到

$$\begin{aligned}
\{-\alpha\}_q &= [-(\alpha-1)]_q - [-\alpha]_q\\
&= q^{-1}\Big([\alpha]_{q^{-1}} - [\alpha-1]_{q^{-1}}\Big) && \text{([LMG21], Prop 2.8)}\\
&= q^{-1}\Big([\alpha]_{q^{-1}} - q([\alpha]_{q^{-1}} - 1)\Big) && \text{(Corollary 2.7)}\\
&= 1 + (q^{-1}-1)[\alpha]_{q^{-1}}\\
&= \{\alpha\}_{q^{-1}} && \text{(part (a))}
\end{aligned}$$

第(e) 部分只需利用推论 2.7 以及以下事实进行简单计算： $[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}$。 □

注 3.6. 由推论 2.7，我们有 $[\alpha+k]_q = [k]_q + q^k[\alpha]_q$，而命题 (e) 的第3.5 部分表明我们还有$[\alpha+k]_q = [\alpha]_q + \{\alpha\}_q[k]_q$，因此 α 和 k的作用存在某种对称性。然而，一般而言， $[\alpha+\beta]_q \neq [\alpha]_q + \{\alpha\}_q[\beta]_q$。只有当 α 或 β 是整数时，这才成立。例如，当 $\alpha = \beta = 1/2$时，我们有 $[1]_q = 1$，但另一方面， $\left[\frac{1}{2}\right]_q + \left\{\frac{1}{2}\right\}_q \left[\frac{1}{2}\right]_q = q\frac{2+q+q^2}{1+2q+q^2}$。

注 3.7. 命题 (c) 的第 n 部分中，必须满足其为整数。该说法更一般的版本并非成立。也就是说，$\{\alpha+\beta\}_q \neq \{\alpha\}_q\{\beta\}_q$ 一般而言。例如，当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 且 $\beta = \frac{3}{2}$ 时，我们有$\{2\}_q = q^2$，但 $\left\{\frac{1}{2}\right\}_q \left\{\frac{3}{2}\right\}_q = q\frac{1+2q^2+q^4}{1+2q+q^2}$。

Re标记 3.8.。如 [LMG21], 命题3.5 的 (d) 部分所述，仅在 $\alpha \in \mathbb{Q}$.

4 q有理与 q实数二项式系数

q-整数 $[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ 是许多其他 q-类比对象的构成基石。其中最著名的或许是 q-阶乘 $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [2]_q[1]_q$和 q-二项式系数 $\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$。在 q-类比理论中，另一种非常有用的~~记号是 q-~~波赫哈默符号

$$(x;q)_n := (1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^{n-1}x)$$

$$(x;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(x;q)_n = \prod_{k=0}^{\infty}(1-q^kx)$$

定义 q阶乘 数与 q二项式系数都可以用 q波赫哈默符号 b 表示 y

$$[n]_q! = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \quad \text{and} \quad \binom{n}{k}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}$$

我们通过以下公式将 q二项式系数推广到 $n = \alpha \in \mathbb{R}$ 不是整数的情况。

定义 4.1。 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，定义 q二项式系数$\binom{\alpha}{k}_q$ 如下

$$\binom{\alpha}{k}_q := \frac{[\alpha]_q[\alpha-1]_q\cdots[\alpha-k+1]_q}{[k]_q!}$$

其中分子中的因子是 q有理数或 q实数。注意， $\binom{\alpha}{k}_q$ 是一个洛朗级数（具有整数系数），当 $\alpha \in \mathbb{Q}$时恰好是一个有理函数。

例 4.2。 $\binom{5/3}{3}_q = \frac{[5/3]_q[2/3]_q[-1/3]_q}{[3]_q[2]_q[1]_q} = \qquad\qquad {}^{-}(1+q+2q^2+q^3)$

$$\overline{1+4q+10q^2+16q^3+19q^4+16q^5+10q^6+4q^7+q^8}$$

这些广义的 q-二项式系数满足通常的 q-帕斯卡恒等式，在适当的地方用 $\{\alpha\}_q$ 代替 q^α。

命题 4.3。 对于实数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和整数 $k \geq 0$，有

(a) $\binom{\alpha}{k}_q = q^k\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1}$

(b) $\binom{\alpha}{k}_q = \binom{\alpha-1}{k} + \{\alpha-k\}_q\binom{\alpha-1}{k-1}$

证明。 由推论 2.7、命题 3.5(e) 和注 3.6可知，证明与经典的q-二项式系数的情形基本相同（即 α 为整数的情形）。

(a) 看等式右边:

$$q^k\binom{\alpha-1}{k} + \binom{\alpha-1}{k-1} = \frac{q^k[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k]_q}{[k]_q!} + \frac{[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k+1]_q}{[k-1]_q!}$$

$$= \frac{[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k+1]_q}{[k]_q!}\Big(q^k[\alpha-k]_q + [k]_q\Big)$$

根据推论 2.7，括号中的表达式等于 $[\alpha]_q$，由此即可得到结果。

(*b*) 再看右边并合并：

$$\begin{aligned}\binom{\alpha-1}{k}+\{\alpha-k\}_q\binom{\alpha-1}{k-1} &= \frac{[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k]_q}{[k]_q!}+\frac{[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k+1]_q\{\alpha-k\}_q}{[k-1]_q!}\\ &= \frac{[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k+1]_q}{[k]_q!}\Big([\alpha-k]_q+\{\alpha-k\}_q[k]_q\Big)\end{aligned}$$

根据注记 3.6，括号中的表达式等于 $[\alpha]_q$。 □

现在我们给出 $\binom{\alpha}{k}_q$ 的其他几个公式，其中一些稍后会用到。

Pro命题 4.4。 q-二项式系数还有以下等价形式：对于 $\alpha\in\mathbb{R}$ ，

(*a*) $\displaystyle\binom{\alpha}{k}_q=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{[\alpha]_q-[i]_q}{[k]_q-[i]_q}$

(*b*) $\displaystyle\binom{\alpha}{k}_q=\frac{1}{q^{\binom{k}{2}}[k]_q!}\prod_{i=0}^{k-1}([\alpha]_q-[i]_q)$

(*c*) $\displaystyle\binom{\alpha}{k}_q=\frac{(-\{\alpha\}_q)^k}{q^{\binom{k}{2}}}\cdot\frac{(\{\alpha\}_q^{-1};\ q)_k}{(q;\ q)_k}$

(*d*) $\displaystyle\binom{\alpha}{k}_q=\frac{(\{\alpha\}_q;q^{-1})_k}{(q;q)_k}$

(*e*) $\displaystyle\binom{\alpha+k-1}{k}_q=\frac{(\{\alpha\}_q;q)_k}{(q;q)_k}$

证明。 部分 (*a*) 和 (*b*) 直接由推论 2.7得出。

为验证 (*d*)，利用命题 3.5 的 (b) 和 (c) 部分，可得

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k}_q &= \frac{(1-\{\alpha\}_q)(1-\{\alpha-1\}_q)\cdots(1-\{\alpha-k+1\}_q)}{(q;q)_k} && \text{(3.5(b))}\\ &= \frac{(1-\{\alpha\}_q)(1-q^{-1}\{\alpha\}_q)\cdots(1-q^{-(k-1)}\{\alpha\}_q)}{(q;q)_k} && \text{(3.5(c))}\end{aligned}$$

分子等于 $(\{\alpha\}_q;q^{-1})_k$，于是得到 (*d*) 。部分 (*c*) 可通过一些代数运算从 (*d*) 容易得到。部分 (*e*) 可通过与部分 (*d*) 类似的计算得到，使用命题 3.5(c)。 □

注 4.5。 命题 (*c*)、 (*d*)和 (*e*) 4.4 的部分内容 支持这样的说法： $\{\alpha\}_q$ 是 q^α的良好替代，因为它们类似于 $\alpha=n$ 为整数时的相应公式：

$$\binom{n}{k}_q=(-1)^kq^{kn-\binom{k}{2}}\frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k}=\frac{(q^n;q^{-1})_k}{(q;q)_k}=\frac{(q^{n-k};q)_k}{(q;q)_k}$$

对于一个（形式）洛朗级数 $f(q)=\sum_k c_kq^k$，我们令 $\operatorname{ord}(f)$ 表示 阶，即 f使得k 的最小值，其中 $c_k\neq 0$。阶是洛朗级数环上的赋值。现在我们重新表述 [MGO22]中的一个定理。

定理 4.6 ([MGO22], 定理 2)。 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，若 $0 < \alpha < 1$ 我们有 $\operatorname{ord}([\alpha]_q) \geq 1$ 否则

$$\operatorname{ord}([\alpha]_q) = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \geq 1 \\ \infty & \text{if } \alpha = 0 \\ N & \text{if } N \leq \alpha < N+1 \text{ and } N \in \mathbb{Z}_{<0} \end{cases}$$

恰好给出了 $[\alpha]_q$ 的阶。

注意，当 $\alpha < 0$ 时，我们只需有 $\operatorname{ord}([\alpha]_q) = \lfloor \alpha \rfloor$。当 $\alpha \geq 0$ 时，阶只可能有三种情况之一。当 $0 < \alpha < 1$ 时，我们只能得到阶的一个上界，但这个上界足以满足我们的目的。了解由 q-二项式系数给出的洛朗级数的阶，有助于确保某些组合和求值定义良好。为减少情况数，以下引理不考虑普通整数 q-二项式系数 $\binom{n}{k}$（其中 n 为非负整数），因为它们总是常数项非零的多项式，或恒等于零（后一种情况发生在 $k > n$ 时）。

引理 4.7。 考虑 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。令 $\beta = \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$，并设 $b = \operatorname{ord}([\beta]_q)$。假设 $N \in \mathbb{Z}$，其中 $N \leq \alpha < N+1$，使得 $\lfloor \alpha \rfloor = N$，则

$$\operatorname{ord}\left(\binom{\alpha}{k}_q\right) = \begin{cases} 0 & k \leq N \\ b - \binom{k-N}{2} & k > N \text{ and } N \geq 0 \\ Nk - \binom{k}{2} & N < 0. \end{cases}$$

证明。 由于 $[k]_q!$ 是常数项为 1 的多项式，因此 $\dfrac{1}{[k]_q!}$ 是常数项为 1 的幂级数。因此，$\binom{\alpha}{k}_q$ 的阶完全由分子中下降阶乘 $[\alpha]_q[\alpha - 1]_q \cdots [\alpha - k + 1]_q$ 的阶决定。首先考虑 $N < 0$ 的情形，此时 $\operatorname{ord}([\alpha - j]_q) = N - j$ 且

$$\operatorname{ord}([\alpha]_q[\alpha-1]_q \ldots [\alpha-k+1]_q) = \sum_{j=0}^{k-1} (N-j) = Nk - \binom{k}{2}.$$

若 $k \leq N$，则 $N \geq 0$，其阶为 0，因为下降阶乘中的每一项的阶都等于 0，根据定理 4.6。最后考虑 $N \geq 0$ 且 $k > N$ 的情形，此时

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}([\alpha]_q[\alpha-1]_q \ldots [\alpha-k+1]_q) &= \operatorname{ord}([\alpha-N]_q) + \operatorname{ord}([\alpha-N-1]_q \ldots [\alpha-k+1]_q) \\ &= \operatorname{ord}([\beta]_q) + \operatorname{ord}([\alpha-N-1]_q \ldots [\alpha-k+1]_q) \\ &= b - \sum_{j=1}^{k-N-1} j \\ &= b - \binom{k-N}{2} \end{aligned}$$

引理得证。 □

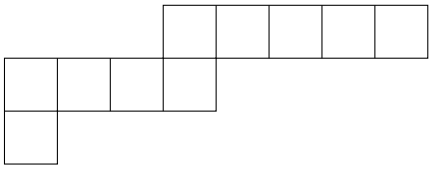

图1： G_α 的蛇形图。

5 组合解释

在第2节中，我们提到了文献中出现的若干 q-有理数的组合解释。利用这些解释，很容易给出 q-有理二项式系数的一些组合解释。本节将介绍这一组合模型，并给出一些例子。

设 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 的连分数为 $\alpha = [a_1, a_2, \ldots, a_{2m}]$。定义一个由正方形构成的平面图 G_α，每个正方形都在右侧或上方与前一个正方形相连。按顺序读取“向右”和“向上”的步数，应得到 $U^{a_1-1}R^{a_2}U^{a_3}R^{a_4}\cdots U^{a_{2m-1}}R^{a_{2m}-1}$。换句话说，连续“向上”和“向右”的步数由连分数系数给出（首项和末项相差1）。文献中常将这类图 G_α 称为“蛇形图”（例如 [Pro05] 和 [ÇS18]）。

例5.1。 回顾例 2.2，其中我们考虑了 $\frac{52}{23} = [2,3,1,5]$。对应的图中，“向上”和“向右”的步数依次为 UR^3UR^4。图 $G_{52/23}$ 见图 1。

如第 2 节所述，如果 $[\alpha]_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}(q)$ (其中 $\alpha > 1$)，那么分子 $\mathcal{R}(q)$ 是关于格路径上某个面积统计量的生成函数。这里的格路径是 G_α 中的东北格路。更具体地说，如果 $\mathcal{L}(G_\alpha)$ 是 G_α 中从左下角到右上角的东北格路集合，其中 $|p|$ 表示路径 p 下方的面积（即方格数），那么 $\mathcal{R}(q) = \sum_{p\in\mathcal{L}(G_\alpha)} q^{|p|}$。这等价于对 [MGO20]，中定理 4 的重新表述；该定理以当前形式（即用蛇形图语言表述）见于 [Cla20] 和 [Ove21]。此外，分母 $\mathcal{S}(q)$ 也有相同的解释，不过对应的是从 G_α 中移除最初一列竖直方格后得到的较小蛇形图。

定义5.2。 对于蛇形图 G_α，令 $\mathcal{L}^{(k)}(G_\alpha)$ 表示 G_α 中东北格路的 k 元组 $(p_1, \ldots, p_k)$ 的集合，其中每条 p_i 都必须以连续 $i-1$ 步“向上”开始。对于 $p = (p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{L}^{(k)}(G_\alpha)$，令 $|p| = \sum_{i=1}^{k} |p_i|$ 表示这些路径下方面积之和。

Th **定理 5.3**。 假设 $\alpha \in \mathbb{Q}$ 满足 $\alpha > 1$，并设 $0 \le k < \alpha$。$\binom{\alpha}{k}_q$ 的分子为

$$q^{-\binom{k}{2}} \sum_{p\in\mathcal{L}^{(k)}(G_\alpha)} q^{|p|}$$

证明。令 $[\alpha]_q = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{S}}(q)$ 如上。注意，对于 $i < \alpha$，$\alpha - i$ 的连分数为 $[a_1 - i, a_2, \ldots, a_{2m}]$。因此，移除第一列方格后得到的截断蛇形图对所有 $\alpha - i$(对于 $0 \le i < k$) 都相同，因此它们的分母 $\mathcal{S}(q)$ 也都相同。令 $\mathcal{R}_i(q)$ 表示它们的分子，于是 $[\alpha - i]_q = \frac{\mathcal{R}_i}{\mathcal{S}}(q)$。那么， q- 二项式系数可表示为

$$\binom{\alpha}{k}_q = \frac{\mathcal{R}(q)\mathcal{R}_1(q)\mathcal{R}_2(q)\cdots\mathcal{R}_{k-1}(q)}{\mathcal{S}(q)^k [k]_q!}$$

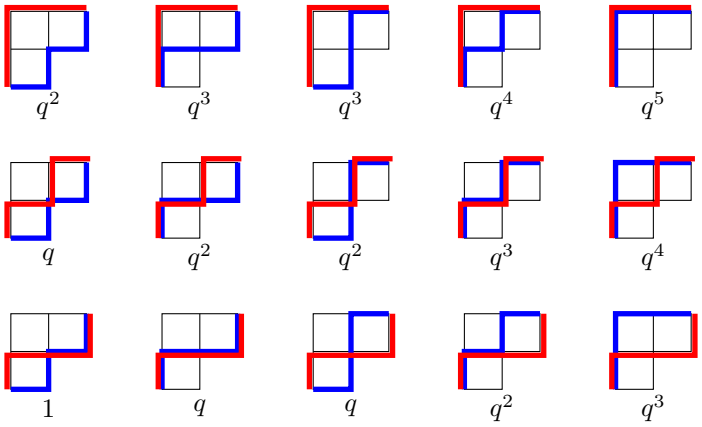

图2：图示 $\mathcal{L}^{(k)}(G_\alpha)$ 当 $\alpha = \frac{5}{2}$ 和 $k = 2$。每幅图下方是单项式 $q^{|p|}$，如定义5.2所示。

当 $i < \alpha$ 时，图 $G_{\alpha-i}$ 可由 G 直接移除第一批 i 个正方形得到。$\mathcal{L}(G_{\alpha-i})$ 与 G_α 中以 $i-1$ 个向上步开始的格路径集合之间存在一个双射（将 $G_{\alpha-i}$ 视为 G_α 的子图）。此双射并非保权的，权重相差一个因子 q^{i-1}，因为与之对应的 G_α 中的路径比 $G_{\alpha-i}$ 中对应的路径多经过了 $i-1$ 个方格。将所有 $i = 1$、2、...、k 对应的贡献相加，得到额外因子 $q^{\binom{k}{2}}$。 □

例5.4。5/2 的连分数为 $[2, 2]$。因此，图 G_α 有 3 个正方形，其向右上序列为 UR。令 $\mathcal{L}^{(2)}(G_{5/2})$ 表示 $G_{5/2}$ 中有序路径对 (p_1, p_2) 的集合，其中 p_2 以向上步开始。q-二项式系数 $\binom{5/2}{2}_q$ 由 $\frac{1+3q+4q^2+4q^3+2q^4+q^5}{(1+q)^3}$ 给出。分子是对 $\mathcal{L}^{(2)}(G_{5/2})$ 的求和，求和项为$q^{|p_1|+|p_2|-1}$。图2展示了 $\mathcal{L}^{(2)}(G_{5/2})$ 的元素及其对应的单项式。在图中，p_1 为蓝色，p_2 为红色。

6 q-二项式定理

回顾牛顿广义二项式定理：对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{and} \quad \frac{1}{(1-x)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} x^k$$

当 n 是正整数时，有一些众所周知的 q-版本：

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1+q^k x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k \quad \text{and} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-q^k x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}_q x^k$$

它们都可以作为一般“q-二项式定理”的特例导出（例如参见 [GRG04，(1.3.2)]）：

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

特别地，代入 $a = q^n$ 得到一种形式，代入 $x \mapsto -q^n x$ 和 $a = q^{-n}$ 则得到另一种形式。秉持我们的基本理念，我们将看到，用 $\{\alpha\}_q$ 替换 q^n，即可得到相应的 q 类比式，其中使用 $\binom{\alpha}{k}_{q}$。

定理 6.1。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们有

$$(a)\quad \frac{(-x;q)_\infty}{(-\{\alpha\}_q x;q)_\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1+q^k x}{1+\{\alpha+k\}_q x} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha}{k}_q x^k$$

$$(b)\quad \frac{(\{\alpha\}_q x;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1-\{\alpha+k\}_q x}{1-q^k x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k}_q x^k$$

证明。 将 $a = \{\alpha\}_q$ 代入一般的 q-二项式定理，得到

$$\frac{(\{\alpha\}_q x;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\{\alpha\}_q;q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

由命题 4.4(e)，我们有 $\frac{(\{\alpha\}_q;q)_k}{(q;q)_k} = \binom{\alpha+k-1}{k}_q$。这就得到了部分 (b)。

类似地，对于部分 (a)，我们可以用 $-\{\alpha\}_q x$ 替换 x，并代入 $a = \{\alpha\}_q^{-1}$，得到

$$\frac{(-x;q)_\infty}{(-\{\alpha\}_q x;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{\alpha\}_q^k \frac{(\{\alpha\}_q^{-1};q)_k}{(q;q)_k} x^k$$

由命题 4.4(c)，我们有 $(-1)^k \{\alpha\}_q^k \frac{(\{\alpha\}_q^{-1};q)_k}{(q;q)_k} = q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha}{k}_q$。 □

为这些级数命名会很方便，因此我们将它们称为 B_α 和 b_α：

定义 6.2. 令 $\alpha \in \mathbb{R}$，并将 $B_\alpha(q,x)$ 和 $b_\alpha(q,x)$ 定义为 $\mathbb{Q}((q))[[x]]$ 中的以下元素：

$$B_\alpha(q,x) := \sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha}{k}_q x^k = \frac{(-x;q)_\infty}{(-\{\alpha\}_q x;q)_\infty}$$

$$b_\alpha(q,x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k}_q x^k = \frac{(\{\alpha\}_q x;q)_\infty}{(x;q)_\infty}$$

以下结果是一个 q-类比，类似于简单的陈述：$(1+x)^\alpha = (1+x)(1+x)^{\alpha-1}$。

命题 6.3. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$,

$$(a)\quad B_{\alpha+1}(q,x) = (1+x)\cdot B_\alpha(q,qx) = (1+\{\alpha\}_q x)\cdot B_\alpha(q,x)$$
$$(b)\quad b_{\alpha+1}(q,x) = \frac{1}{1-x}\cdot b_\alpha(q,qx) = \frac{1}{1-\{\alpha\}_q x}\cdot b_\alpha(q,x)$$

(c) $B_{\alpha+n}(q,x) = B_n(q,x)\cdot B_\alpha(q,q^n x) = B_n(q,\{\alpha\}_q x)\cdot B_\alpha(q,x)$

(d) $b_{\alpha+n}(q,x) = b_n(q,x)\cdot b_\alpha(q,q^n x) = b_n(q,\{\alpha\}_q x)\cdot b_\alpha(q,x)$

证明。 由归纳法可知，部分 (c) 和 (d) 显然可由 (a) 和 (b) 得到。部分 (a) 和 (b) 由定理 6.1中的乘积公式推出。部分 (a) 和 (b) 也可以通过利用 q-帕斯卡恒等式（命题4.3）对幂级数进行运算推导出来。

$$\begin{aligned}
B_\alpha(q,x) &= \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha}{k}_q x^k \\
&= \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} q^k \binom{\alpha-1}{k}_q x^k + \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha-1}{k-1}_q x^k \\
&= \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} q^k \binom{\alpha-1}{k}_q x^k + \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} q^k \binom{\alpha-1}{k}_q x^{k+1} \\
&= (1+x)\sum_{k\geq 0} q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha-1}{k}_q (qx)^k \\
&= (1+x)B_{\alpha-1}(q,qx)
\end{aligned}$$

对于 (a) 部分中的第二个等式，使用命题 4.3 (b)。关于 b_α 的计算类似 . □

例 6.4。 幂级数 $b_{1/2}(q,x)$ 是函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 的 q-类比。根据定义，我们有

$$b_{1/2}(q,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2+k-1}{k}_q x^k$$

利用 这一事实 $\left\{\frac{1}{2}\right\}_q = \frac{1+q^2}{1+q}$，由命题 4.4(e) 以及一些代数运算，可得 t

$$\binom{1/2+k-1}{k}_q = \frac{\left(\frac{1+q^2}{1+q};q\right)_k}{(q;q)_k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1+q-q^i-q^{i+2}}{1+q-q^{i+1}-q^{i+2}}$$

前几项为

$$\begin{aligned}
b_{1/2}(q,x) = 1 &+ \frac{q}{1+q}x + \frac{q(1+q+q^2)}{(1+q)^3}x^2 + \frac{q(1+2q+q^3+q^4)}{(1+q)^4}x^3 \\
&+ \frac{q(1+4q+7q^2+8q^3+7q^4+5q^5+2q^6+q^7)}{1+6q+16q^2+26q^3+30q^4+26q^5+16q^6+6q^7+q^8}x^4 + \cdots
\end{aligned}$$

7 q微积分

定义 7.1. 对于函数 $f(x)$，其“q-导数”为

$$D_q f(x) := \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x} = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$$

函数 $B_\alpha\ q\ x \qquad q \qquad 1+x\ ^{\alpha} \qquad \frac{d}{dx}B_\alpha\ 1\ x\ =\ \alpha\ 1+x\ ^{\alpha-1} =($, $\alpha B_{\alpha-1}\ 1\ x \qquad b_\alpha\ 1\ x\ = \frac{1}{\ _{\alpha}} \qquad \frac{\alpha}{\ _{\alpha+1}} = b_{\alpha+1}\ 1\ x \qquad q$) 是 ( ) 的 - 类比，其导数为 (,) ( ) (,)。类似地，(,) $_{(1-x)}$ 的导数为 $_{(1-x)}$(,)。以下是这些陈述的 - 类比:

命题 7.2。 q导数 $B_\alpha(q,x)$ 和 $b_\alpha(q,x)$ 如下所示。

(a) $D_qB_\alpha(q,x) = [\alpha]_qB_{\alpha-1}(q,qx)$

(b) $D_qb_\alpha(q,x) = [\alpha]_qb_{\alpha+1}(q,x)$

证明。 我们只需要恒等式 $D_qx^n = [n]_qx^{n-1}$，并可逐项对幂级数求导:

$$\begin{aligned} D_qB_\alpha(q,x) &= D_q\sum_{n\geq 0} q^{\binom{n}{2}}\binom{\alpha}{n}_q x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} q^{\binom{n}{2}}\binom{\alpha}{n}_q [n]_q x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} q^{\binom{n+1}{2}}\binom{\alpha}{n+1}_q [n+1]_q x^n \end{aligned}$$

此时，注意到 $\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$，因此可写成 $q^{\binom{n+1}{2}} = q^{\binom{n}{2}} \cdot q^n$，不难验证

$$\binom{\alpha}{n+1}_q [n+1]_q = [\alpha]_q \cdot \binom{\alpha-1}{n}_q$$

利用这两个观察结果，可得

$$D_qB_\alpha(q,x) = [\alpha]_q \sum_{n\geq 0} q^{\binom{n}{2}}\binom{\alpha-1}{n}_q q^n x^n = [\alpha]_qB_{\alpha-1}(q,qx)$$

对 b_α 的计算类似，但不会产生额外因子 q^n:

$$\begin{aligned} D_qb_\alpha(q,x) &= D_q\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha+n-1}{n}_q x^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha+n-1}{n}_q [n]_q x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha+n}{n+1}_q [n+1]_q x^n \\ &= [\alpha]_q \sum_{n\geq 0} \binom{\alpha+n}{n}_q x^n \\ &= [\alpha]_qb_{\alpha+1}(q,x) \end{aligned}$$

□

注 7.3。 将这些公式与定理中的恒等式6.3结合起来，我们得到 q-微分方程

$$D_q B_\alpha(q,x) = \frac{[\alpha]_q}{1+x} B_\alpha(q,x) \quad \text{and} \quad D_q b_\alpha(q,x) = \frac{[\alpha]_q}{1-x} b_\alpha(q,qx)$$

注 7.4。 定理 6.1 也可以利用这些 q-导数表达式来证明。从上面的微分方程出发，我们可以得到一个由 $B_\alpha(q,x)$ 满足的函数方程:

$$\begin{aligned}
\frac{[\alpha]_q}{1+x} B_\alpha(q,x) &= \frac{B_\alpha(q,qx) - B_\alpha(q,x)}{(q-1)x} \\
[\alpha]_q (q-1) x B_\alpha(q,x) &= (1+x)\Big(B_\alpha(q,qx) - B_\alpha(q,x)\Big) \\
\big(1 + (1+[\alpha]_q(q-1))\, x\big)\, B_\alpha(q,x) &= (1+x) B_\alpha(q,qx) \\
B_\alpha(q,x) &= \frac{1+x}{1+\{\alpha\}_q x} B_\alpha(q,qx)
\end{aligned}$$

在最后一步中，我们用到了 $\{\alpha\}_q = 1 + (q-1)[\alpha]_q$(命题 3.5(a))。现在我们有了这个函数方程，可以再次将它用于右边，用 $B_\alpha(q,qx)$ 替换为 $\frac{1+qx}{1+\{\alpha+1\}_q x} B_\alpha(q,q^2x)$。反复应用该函数方程，即可得到定理 6.1中的无穷乘积公式。

$b_\alpha(q,x)$ 的计算类似。

8 更多恒等式

现在我们来展示一些在本研究框架下成立的其他恒等式。首先，我们给出另一个 q-类 Pascal 恒等式，适用于 q-变形的有理数和实数。下述命题中关于 q-整数的恒等式曾发表于 [Sha20，定理 1]。

命题 8.1。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{\alpha-1}{k}_q + \binom{\alpha-1}{k-1}_q = \left(\frac{2 - q^k - \{\alpha-k\}_q}{1-\{\alpha\}_q}\right)\binom{\alpha}{k}_q$$

证明。 我们先计算

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha-1}{k}_q + \binom{\alpha-1}{k-1}_q &= \frac{[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k]_q}{[k]_q!} + \frac{[\alpha-1]_q[\alpha-2]_q\cdots[\alpha-k+1]_q}{[k-1]_q!} \\
&= \left(\frac{[\alpha-k]_q}{[\alpha]_q} + \frac{[k]_q}{[\alpha]_q}\right)\frac{[\alpha]_q[\alpha-1]_q\cdots[\alpha-k+1]_q}{[k]_q!} \\
&= \left(\frac{(1-\{\alpha-k\}_q) + (1-q^k)}{1-\{\alpha\}_q}\right)\binom{\alpha}{k}_q
\end{aligned}$$

，注意到我们用到了命题 3.5 （b）部分，便可得到所需结果。 □

我们还 有一个关于 q-变形有理数和实数的楚–范德蒙德恒等式 s.

推论 8.2 (q-楚–范德蒙)。 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $k, n \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{\alpha+n}{k}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{j(n-k+j)} \binom{n}{k-j}_q \binom{\alpha}{j}_q$$

证明。 我们从定理 6.3 的 (c) 部分开始，其中指出 $B_{\alpha+n}(q,x) = B_n(q,x)\cdot B_\alpha(q,q^n x)$。将其写成求和形式即为

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha+n}{k}_q x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k}{2}+nk} \binom{\alpha}{k}_q x^k\right)$$

由此，我们将两边 x^k 的系数相等。因此得到

$$\begin{aligned} q^{\binom{k}{2}} \binom{\alpha+n}{k}_q &= \sum_{j=0}^{k} \left(q^{\binom{k-j}{2}} \binom{n}{k-j}_q\right)\left(q^{\binom{j}{2}+nj} \binom{\alpha}{j}_q\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} q^{\binom{k}{2}+j(n-k+j)} \binom{n}{k-j}_q \binom{\alpha}{j}_q \end{aligned}$$

推论立即得证。 □

现在给出一个由 q-楚–范德蒙德恒等式推得的引理。

引理 8.3. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 ℓ， m， $n \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j\geq 0} q^{\ell(j-n+\ell)+j(m-n+j)} \binom{\ell}{n-j}_q \binom{\alpha}{m+j}_q = q^{(m-\ell)(n-\ell)} \binom{\alpha+\ell}{m+n}$$

证明。 我们先将推论 8.2 应用于 $\binom{\alpha+\ell}{m+n}_q$ 并化简，得到

$$\begin{aligned} \binom{\alpha+\ell}{m+n} &= \sum_{k} q^{k(\ell-(m+n)+k)} \binom{\alpha}{k}_q \binom{\ell}{m+n-k}_q \\ &= \sum_{j} q^{(m+j)(\ell-n+j)} \binom{\alpha}{m+j}_q \binom{\ell}{n-j}_q \end{aligned}$$

比较指数后即可完成证明。事实上，有

$$(m-\ell)(n-\ell) + (m+j)(\ell-n+j) = \ell(j-n+\ell) + j(m-n+j)$$

至此，证明完成。 □

整数情形下的下一个命题见 Riordan 的著作 [Rio79，第 1.4 节，公式 (10)]，而q-整数版本则见 [Azo07，第 3 节。9]。

命题 8.4. 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 m， $n \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{\alpha}{m}_q \binom{\alpha}{n}_q = \sum_{\ell\geq 0} q^{(m-\ell)(n-\ell)} \binom{n}{\ell}_q \binom{m}{\ell}_q \binom{\alpha+\ell}{m+n}_q$$

证明。 我们首先利用 q-楚–范德蒙德恒等式（推论 8.2 ），并进行其他一些简化来进行计算。

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha}{m}_q \binom{\alpha}{n}_q &= \binom{\alpha}{m}_q \binom{(\alpha-m)+m}{n}_q \\
&= \sum_{j\geq 0} q^{j(m-n+j)} \binom{\alpha}{m}_q \binom{m}{n-j}_q \binom{\alpha-m}{j}_q && \text{(Corollary 8.2)} \\
&= \sum_{j\geq 0} q^{j(m-n+j)} \binom{m+j}{n}_q \binom{n}{j}_q \binom{\alpha}{m+j}_q \\
&= \sum_{j\geq 0} q^{j(m-n+j)} \binom{n}{j}_q \binom{\alpha}{m+j}_q \sum_{\ell\geq 0} q^{\ell(j-n+\ell)} \binom{j}{n-\ell}_q \binom{m}{\ell}_q && \text{(Corollary 8.2)} \\
&= \sum_{\ell\geq 0}\sum_{j\geq 0} q^{j(m-n+j)+\ell(j-n+\ell)} \binom{m}{\ell}_q \binom{n}{j}_q \binom{j}{n-\ell}_q \binom{\alpha}{m+j}_q \\
&= \sum_{\ell\geq 0}\sum_{j\geq 0} q^{j(m-n+j)+\ell(j-n+\ell)} \binom{m}{\ell}_q \binom{n}{\ell}_q \binom{\ell}{n-j}_q \binom{\alpha}{m+j}_q \\
&= \sum_{\ell\geq 0} \binom{m}{\ell}_q \binom{n}{\ell}_q \sum_{j\geq 0} q^{j(m-n+j)+\ell(j-n+\ell)} \binom{\ell}{n-j}_q \binom{\alpha}{m+j}_q
\end{aligned}$$

然后利用引理 8.3即可完成证明。上文未标注的步骤都是常规的代数运算，其中许多步骤只是重新排列 q-二项式中的下降阶乘因子。 □

众所周知，对于经典的 q-二项式系数，$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}_q = \frac{1}{q\,q(;)_k}$。我们对这一事实作如下推广：

命题 8.5. 设 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots$ 是任意一个满足 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$的实数序列。那么

$$\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha_n}{k}_q = \frac{1}{(q;q)_k}$$

证明。 如果 $k = 0$, 那么 我们立即得到两边都等于 1。因此，不妨假设 $k \geq 1$。根据命题 4.4(e)，我们有

$$\binom{\alpha}{k}_q = \frac{(\{\alpha-k+1\}_q;q)_k}{(q;q)_k} = \frac{(q^{1-k}\{\alpha\}_q;q)_k}{(q;q)_k}$$

分子是乘积

$$(1-q^{1-k}\{\alpha\}_q)(1-q^{2-k}\{\alpha\}_q)\cdots(1-\{\alpha\}_q)$$

若 $N = \lfloor\alpha\rfloor$ 是 α的整数部分，则命题 3.5 表明 $\{\alpha\}_q = q^N\{\alpha-N\}_q$。由于我们考虑的是$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$，且 k 是常数，我们可以假设 $N \gg k$。因此， $\{\alpha\}_q$ 的幂级数没有次数低于 N的项。因此，上述乘积的形式为

$$1 + \Big(\text{terms of degree at least } N-k+1\Big)$$

由于数列 α_n 无界递增，我们最终可以找到足够大的 n，使得 $\alpha_n > N$，因此 $\lim_{n\to\infty}(q^{1-k}\{\alpha_n\}_q;q)_k = 1$。由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\binom{\alpha_n}{k}_q = \lim_{n\to\infty}\frac{(q^{1-k}\{\alpha_n\}_q;q)_k}{(q;q)_k} = \frac{1}{(q;q)_k}$$

□

9 新的 q-伽马函数类比

注意到，q-波赫哈默符号等于 $(x;q)_k = {}_{(x;q)_\infty}{}_{(q^k x;q)_\infty}$。因~~此，自~~然可以（例如参见 [GRG04] 的附录）通过公式 ${}_{(x;q)_\infty}{}_{(q^\alpha x;q)_\infty}$ 定义一个适用于 $k=\alpha$ 不是整数时的版本。我们的基本~~思路是~~用函数 $\{\alpha\}_q$ 替代 q^α，由此得到以下定义。

定义 9.1。对于 $\alpha\in\mathbb{R}$，定义广义 q-波赫哈默符号如下：

$$(x;q)_\alpha := \frac{(x;q)_\infty}{(\{\alpha\}_q x;q)_\infty} = \frac{1}{b_\alpha(q,x)} = B_\alpha(q,-x)$$

注 9.2。采用这一新记号，定理 6.1 可重新表述如下：

$$(x;q)_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\binom{\alpha}{k}_q x^k$$

$$\frac{1}{(x;q)_\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}_q x^k$$

对于正整数 n，q-阶乘与波赫哈默符号的关系为 $[n]_q! = {}_{(q;q)_n}{}_{(1-q)^n}$。因此，通常~~将~~$q$-伽马函数定义为 ${}_{(q;q)_\infty}{}_{(q^x;q)_\infty}{}_{(1-q)^{x-1}}$。由此，在以下引理~~之后，我们将~~定义一个新的 q-伽马函数。

引理 9.3. 当且仅当 $\alpha\geq$ 时，取值 $B_{\alpha-1}(q,-q)$ 给出一个定义良好的幂级数 1.

证明。展开式 $B_{\alpha-1}(q,-q)$ 中的一项形如 $(-1)^k q^{\binom{k}{2}+k}\binom{\alpha-1}{k}_q$。若 $N\leq\alpha-1<N+1$ 对于 $N\in\mathbb{Z}$以及 $k>\alpha-1$，则由引理 4.7 当 $N\geq 0$ 时可得

$$\operatorname{ord}\left((-1)^k q^{\binom{k}{2}+k}\binom{\alpha-1}{k}_q\right) = \binom{k}{2}+k+b-\binom{k-N}{2}$$

其中 $b\geq 1$ 与引理中的相同。在这种情况下，阶是关于 k 的严格递增函数，这意味着每个次数只有有限项作出贡献。因此，当 $\alpha\geq 1$ 时，$B_{\alpha-1}(q,-q)$ 是定义良好的形式幂级数。

然而，在 $N<0$的情况下

$$\operatorname{ord}\left((-1)^k q^{\binom{k}{2}+k}\binom{\alpha-1}{k}_q\right) = \binom{k}{2}+k+Nk-\binom{k}{2} = (N+1)k$$

当 $N=-1$ 时，它恒等于 0。对于 $N<-1$，我们发现随着 k 增大，阶趋近于 $-\infty$。因此，对于 $\alpha<1$，$B_{\alpha-1}(q,-q)$ 甚至不能定义为形式洛朗级数。 □

定义 9.4。 定义函数 $\Gamma_q\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_{<0}\to\mathbb{R}((q))$ 如下：对于 $\alpha\geq 1$，我们设

$$\Gamma_q(\alpha) := \frac{(q;q)_{\alpha-1}}{(1-q)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(1-q)^{\alpha-1}b_{\alpha-1}(q,q)} = \frac{B_{\alpha-1}(q,-q)}{(1-q)^{\alpha-1}}$$

由引理 9.3可知，这一定义良好。在这个表达式中，分子 $(q;q)_{\alpha-1}$ 取自定义 9.1，分母 $\frac{1}{(1-q)^{\alpha-1}}$ 定义为形式幂级数 $\sum_n \binom{\alpha+n-2}{n}q^n$，其中二项式系数 $\binom{\alpha+n-2}{n}\in\mathbb{R}$ 采用通常的二项式系数（而非 q-类比）。对于 $\alpha<1$，我们定义

$$\Gamma_q(\alpha) := \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{[\alpha]_q}$$

由于这是通过除以一个洛朗级数得到的，因此定义良好。

对于整数，通常的 Γ 函数满足 $\Gamma(n+1)=n!$ 为避免与我们在定义 9.4 中给出的 q-伽马函数混淆，我们将经典的 q-伽马函数记为 $G_q(x)$。对于经典的 q-伽马函数，我们有 $G_q(n+1)=[n]_q!$，并且更一般地，它具有众所周知的性质 $G_q(x+1)=\frac{1-q^x}{1-q}G_q(x)$。我们要求 $\alpha<1$ 满足类似的平移性质，但实际上，对于所有输入值，我们的新 q-伽马函数都满足相应的性质。

命题 9.5. 对于 $\alpha\in\mathbb{R}$ 且 $\alpha\geq 1$，有

$$\Gamma_q(\alpha+1) = [\alpha]_q\,\Gamma_q(\alpha)$$

证明。利用命题 6.3，将 $B_\alpha(q,-q)$ 写成 $(1-\{\alpha\}_q)B_{\alpha-1}(q,-q)$，并将 $\frac{1}{(1-q)^\alpha}$ 分解为 $\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{(1-q)^{\alpha-1}}$。于是有 $\Gamma_q(\alpha+1)=\frac{1-\{\alpha\}_q}{1-q}\Gamma_q(\alpha)$，根据命题 3.5，左边的因子等于 $[\alpha]_q$。 □

对于经典的（整数）q-二项式系数，可以用 q-阶乘和 q-波赫哈默符号表示为

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

使用上文给出的定义，我们可以得到 q-有理二项式系数和 q-实二项式系数的类似表达式。

命题 9.6. 对于 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和正整数 k，有

$$\binom{\alpha}{k}_q = \frac{(q;q)_\alpha}{(q;q)_k(q;q)_{\alpha-k}} = \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{\Gamma_q(k+1)\Gamma_q(\alpha-k+1)}$$

证明。假设 $\alpha\geq 1$。 右边的两个表达式根据 $\Gamma_q(\alpha$ 的定义显然相等）。要看出第一个等式，请注意到

$$\frac{(q;q)_\alpha}{(q;q)_{\alpha-k}} = \frac{(\{\alpha-k+1\}_q;q)_\infty}{(\{\alpha+1\}_q;q)_\infty} = (\{\alpha\}_q,q^{-1})_k$$

除以 $(q;q)_k$，得到 $\binom{\alpha}{k}_q$，根据命题 4.4 (d)。

在 $\alpha < 1$ 的情况下，我们需要使用平移性质。首先注意到

$$\left(\frac{[\alpha-k]_q}{[\alpha]_q}\right)\binom{\alpha}{k}_q = \binom{\alpha-1}{k}_q$$

对于 $\alpha \neq 0$。因此，如果 $\binom{\alpha}{k}_q$ 具有命题所指定的形式，那么利用命题 $\binom{\alpha-1}{k}_q$，我们也可以看出 9.5。

□

注意，$\Gamma_q(\alpha)$ 是一个系数为实数（而非整数）的洛朗级数。例如，

$$\Gamma_q\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}q - \frac{5}{8}q^2 - \frac{3}{16}q^3 + \frac{115}{128}q^4 - \frac{401}{256}q^5 + \frac{2383}{1024}q^6 - \frac{8139}{2048}q^7 + \cdots$$

对于经典的 Γ 函数，我们有欧拉反射公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$。结果表明，对于 q 版本，这个表达式是一个始终具有整数系数的幂级数。

命题 9.7。 设 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$。那么 $\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(1-\alpha) \in \mathbb{Z}((q))$。换言之，它是一个具有整数系数的洛朗级数。

证明。需要考虑两种情况：当 $0 < \alpha < 1$ 时，以及当 $\alpha > 1$ 时。

首先考虑 $\alpha > 1$ 的情况，并令 $N = \lfloor \alpha \rfloor$ 为 α 的整数部分。于是 $-N < 1 - \alpha < -(N-1)$。根据定义，我们有

$$\Gamma_q(\alpha) = B_{\alpha-1}(q,-q)b_{\alpha-1}(1,q) \quad \text{and} \quad \Gamma_q(1-\alpha) = \frac{B_{N+1-\alpha}(q,-q)b_{N+1-\alpha}(1,q)}{[1-\alpha]_q[2-\alpha]_q\cdots[N+1-\alpha]_q}$$

注意，非整数系数唯一可能来自因子 $b_\alpha(1,q) = \frac{1}{(1-q)^\alpha}$，其系数是形如 $\binom{\alpha+k-1}{k}$ 的标量非整数二项式系数。将它们按上述表达式相乘后，我们得到一个因子

$$b_{\alpha-1}(1,q)b_{N+1-\alpha}(1,q) = \frac{1}{(1-q)^{\alpha-1}(1-q)^{N+1-\alpha}} = \frac{1}{(1-q)^N} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{N+k-1}{k}q^k$$

特别是，这 具有整数系数。B_α 和 $\frac{1}{[1-\alpha]_q}$ 等其他因子也都具有整数系 ts.

其次， 还有一种情况是 $0 < \alpha < 1$。此时 α 和 $1-\alpha$ 均小于 1，因此我们有

$$\Gamma_q(\alpha) = \frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{[\alpha]_q} = \frac{B_\alpha(q,-q)b_\alpha(1,q)}{[\alpha]_q} \quad \text{and} \quad \Gamma_q(1-\alpha) = \frac{\Gamma_q(2-\alpha)}{[1-\alpha]_q} = \frac{B_{1-\alpha}(q,-q)b_{1-\alpha}(1,q)}{[1-\alpha]_q}$$

与另一种情况一样，将这些因子相乘后，我们会得到因子 $b_\alpha(1,q)b_{1-\alpha}(1,q) = \frac{1}{1-q}$，其系数为整数。其余因子的系数也都是整数。□

例 9.8. 上文给出了 $\Gamma_q\left(\frac{3}{2}\right)$ 的前几项。我们可以用它来计算

$$\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma_q\left(\frac{3}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\right]_q}=q^{-1}+\frac{3}{2}-\frac{1}{8}q-\frac{13}{16}q^2+\frac{91}{128}q^3-\frac{171}{256}q^4+\frac{779}{1024}q^5-\frac{3373}{2048}q^6+\cdots$$

作为命题 9.7的一个例子，我们可以将这个表达式平方，得到

$$\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)^2=\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma_q\left(1-\frac{1}{2}\right)=q^{-2}+3q^{-1}+2-2q-q^2+q^3-2q^5+\cdots$$

欧拉反射公式表明 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi$，因此这个具有整数系数的洛朗级数在某种意义上是数 π 的q-类比。

在另一种情况下，我们也能得到具有整数系数的洛朗级数，见下面的命题。

命题 9.9。 设 $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$。那么 $\Gamma_q\left(\frac{a}{b}\right)^b$ 是一个具有整数系数的洛朗级数。

证明。 思路与命题 9.7 的证明类似，但要简单得多。非整数系数仅出现在因子 $\frac{1}{(1-q)^{\frac{a-b}{b}}}$ 的幂级数展开中。将其提升到 b 次幂，得到 $\frac{1}{(1-q)^{a-b}}$，其系数均为整数。 □

例 9.10。当 $\alpha=\frac{2}{3}$ 时，我们有

$$\Gamma_q\left(\frac{2}{3}\right)=q^{-1}-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}q-\frac{166}{81}q^2+\frac{803}{243}q^3-\frac{1553}{729}q^4+\cdots$$

将其提升到三次方，得到

$$\Gamma_q\left(\frac{2}{3}\right)^3=q^{-3}-2q^{-2}+q^{-1}-6+18q-21q^2+27q^3-69q^4+\cdots$$

10 后续问题

最后，我们提出一些本文尚未解决的问题，并认为这些问题是值得进一步研究的有趣方向。

问题 10.1. 其他哪些 q-类比有使用 q-有理数或 q-实数的版本?

本文给出了一些例子，其中，由 $\frac{1-q^\alpha}{1-q}$ 给出的数 α 的常见 q-类比，可以替换为 Morier-Genoud 和 Ovsienko 的 q-有理数与 q-实数，而后者保留了前者的许多优良性质。我们的主要观察是，在这些例子中，$\{\alpha\}_q=[\alpha+1]_q-[\alpha]_q$ 是表达式 q^α 的良好替代。本文所举例子中这一基本思路和理念的成功，表明或许可以进一步拓展这一思路。若能找到更多广为人知的 q-类比，并通过将 q^α 替换为 $\{\alpha\}_q$ 得到一种新的 q-类比（且仍然有趣而有意义！），那将十分有意思。

问题 10.2. q-实二项式系数的级数表示中的系数是否具有某种组合解释？

根据定义，$\binom{\alpha}{k}_q$ 是一个具有整数系数的洛朗级数。人们或许会想知道这些整数是否具有某种组合意义。不过，这个问题似乎很难回答，因为q-实数的整数系数本身的意义仍有些神秘。

问题 10.3. 欧拉反射公式中出现的表达式$\pi \sin(\pi\alpha)$ 是否存在更明确的 q-类比形式，其中使用 q-有理数（或 q-实数） $[\alpha]_q$？

经典 Γ 函数的欧拉反射公式为 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi \sin(\pi\alpha)$；在命题 9.7中，我们证明了 $\Gamma_q(\alpha)\Gamma_q(1-\alpha)$是一个具有整数系数的级数（尽管 $\Gamma_q(\alpha)$不一定具有整数系数）。从什么意义上说，这些级数是表达式$\pi \sin(\pi\alpha)$的一个“良好”的 q-类比？是否存在对该表达式中各元素（数 π 和正弦函数）的某种q-变形，使这一点变得明确？

致谢

我们谨向 Vic Reiner 致谢，感谢他提出的有趣问题和进行的讨论，这些启发了本项目的构想。Nicholas Ovenhouse 获得了 Simons 基金会 327929 号资助。John Machacek 获得了美国国家科学基金会 DMS-2039316 号资助。

参考文献

[Azo07] Jonathan Azose. q-二项式系数在计数问题中的应用，2007 年。HMC 高年级论文集 191。[Cla20] Andrew Claussen. 多边形簇代数的扩张偏序集。arXiv 预印本 arXiv:2005.02083，2020 年。[ÇS18] İlke Çanakçı 和 Ralf Schiffler. 簇代数与连分数。《数学汇刊》，154(3):565–593，2018 年。[GRG04] George Gasper、Mizan Rahman 和 Gasper George.《基本超几何级数》，第 96 卷。剑桥大学出版社，2004 年。[KC02] Victor G Kac 和 Pokman Cheung.《量子微积分》，第 113 卷。施普林格，2002 年。[LMG21] Ludivine Leclere 和 Sophie Morier-Genoud. 模群及实二次无理数的 q-变形。《应用数学进展》，130:102223，2021 年。[LMGOV21] Ludivine Leclere、Sophie Morier-Genoud、Valentin Ovsienko 和 Alexander Veselov. 关于 q-变形实数的收敛半径。arXiv 预印本 arXiv:2102.00891，2021 年。[LS19] Kyungyong Lee 和 Ralf Schiffler. 簇代数与琼斯多项式。《数学精选》，25(4):1–41，2019 年。[MGO20] Sophie Morier-Genoud 和 Valentin Ovsienko. q-变形有理数与 q-连分数。载于《数学论坛：西格玛》，第 8 卷。剑桥大学出版社，2020 年。[MGO21] Sophie Morier-Genoud 和 Valentin Ovsienko. 量子数与 q-变形 Conway–Coxeter 算术方阵。《数学智者》，43(2):61–70，2021 年。[MGO22] Sophie Morier-Genoud 和 Valentin Ovsienko. 关于 q-变形实数。《实验数学》，31(2):652–660，2022 年。[MSS21] Thomas McConville、Bruce E Sagan 和 Clifford Smyth. 关于 Morier-Genoud 和 Ovsienko 的秩单峰猜想。《离散数学》，344(8):112483，2021 年。[Ove21] Nicholas Ovenhouse. q-有理数与有限舒伯特簇。arXiv 预印本 arXiv:2111.07912，2021 年。[Pro05] James Propp. 砖墙图与马尔可夫数的组合学。arXiv 预印本 math/0511633，2005 年。[Rio79] John Riordan. 组合恒等式。Robert E. Krieger 出版公司，纽约州亨廷顿，1979 年。1968 年原版重印。[Sha20] A. G. Shannon. 高斯二项式系数。《数论与离散数学札记》，26(1):225–229，2020 年。