关于有限维代数

Claude Cibils

摘要

我们回顾有限维代数的第一 Hochschild 上同调向量空间的相关结果，特别是关于模去一个“预生成的”理想的路径代数的结果。对于箭图不含有向圈的单项式代数，给出了一个维数公式。一般的单项式情形将在一篇与 M. Saorin 合作的论文中讨论 [9]

1991年 AMS 学科分类：16E40 关键词：Hochschild，上同调，代数，箭图，单项式，路径代数。

1 引言

设 k 是一个域， Λ 是一个有限维 k-代数。近来，几位作者对 Λ的第一 Hochschild上同调群产生了兴趣，参见例如 [1, 2, 13, 20, 21]。本文的一个目标是介绍关于 H^1 的已有结果；这些结果在某种程度上被更一般的结论所掩盖。我们还给出一个新的维数公式，用于计算箭图不含有向圈时 H^1 的单项式代数的维数，并旨在介绍这一主题。

请注意，关于有限维代数的 H^1 的重要且最新的结果可见于 [20, 3]。特别是，对于箭图不含有向圈的代数， H^1 的维数不小于基本群阿贝尔化的自由部分的秩，参见[20]。我们还提及 Buchweitz 和 Liu [3]给出的非常有趣的例子：他们证明，存在第一Hochschild上同调群为零且箭图中含有环路的代数。

首先回顾一下， Λ双模 X 是一个左 Λ模和右 Λ模，并满足：对于任意 λ， μ 属于 Λ 且 x 属于 X，均有（λx）$\mu = \lambda$（$x\mu$）；并且 k 的作用是中心的： $ax = xa$ 对于 $a \in k$ 和 $x \in X$成立。注意，如果 $\Lambda^e = \Lambda \otimes_k \Lambda^{op}$ 是包络代数，那么 Λ^e-左模与 Λ-双模是相同的。

霍赫希尔德上同调向量空间是扩张向量空间（例如参见 [10]或 [19]）：

$$H^i(\Lambda, X) = \mathsf{Ext}^i_{\Lambda^e}(\Lambda, X).$$

存在一个标准的 Λ 作为 Λ^e-模的投射分解，它给出了通常用于计算霍赫希尔德上同调 $H^i(\Lambda, X)$ 的上链复形，参见 [10, 18, 19]。

在零次时，我们有

$$H^0(\Lambda, X) = \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda, X) = X^\Lambda$$

其中 $X^\Lambda = \{x \in X | \lambda x = x\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda\}$。事实上，将 Λ, X 上的 $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}$ 映射到属于 X^Λ 的 $\varphi(1)$。特别地，如果 Λ-双模 X 本身就是代数，那么 $H^0(\Lambda, \Lambda)$ 就是 Λ 的中心 $\mathbf{Z}(\Lambda)$。

平凡情形对应于一个代数 Λ，它作为 Λ^e-左模是投射的。只有当 Λ 是半单的（即有限维斜域上的矩阵代数的乘积），且斜域的中心是 k 的可分扩张时，才会出现这种情形。这类代数称为可分代数。可分代数 Λ 的零长度投射分解表明，对于 $i \geq 1$，$H^i(\Lambda, X) = 0$。证明见 [10]。

第一 Hochschild 上同调向量空间 $H^1(\Lambda, X)$ 是导子对内导子的商：导子 $f: \Lambda \to X$ 是一个线性映射，满足 $f(\lambda\mu) = \lambda f(\mu) + f(\lambda)\mu$，其中 λ 和 μ 属于 Λ。若存在一个 $x \in X$ 使得 $f(\lambda) = \lambda x - x\lambda$，则称它为内导子。

我们还指出，$H^2(\Lambda, \Lambda)$与 Λ的变形理论有关，参见 [14]。

在接下来的几节中，我们将研究 H^1 形如 kQ/I 的代数，其中 Q 是一个箭图，kQ 是它的路径代数，而 I 是 kQ的一个理想。实际上，根据 P. Gabriel 的一项观察，[12] 任意代数闭域上的有限维 k-代数都与这种形式的代数 Morita 等价。值得注意的是，理想 I 可以选为容许的，也就是说，它包含于 F^2 之中，其中 F 是由 Q的箭生成的双边理想。我们将在下一节回顾这些众所周知的结果。

我们考虑 I 为“预生成”理想的情形，其定义见第 3 节。这包括以下情形：$I = 0$ 当 Q 没有有向圈时、窄箭图的任意理想，以及其他一些情形。可以给出 $H^1(kQ/I, kQ/I)$的显式维数公式；请注意，这些结果属于 [4]。D. Happel 在 [17] 中研究了单项式 Schur 近交换代数，它们实际上对应于预生成理想的实例。

在第五节中，我们研究单项式代数，即箭图 Q 的路径代数 I 模去一个双边理想 I，该理想具有一个由长度至少为二的路径组成的生成集。当 Q 没有有向圈时，我们证明，计算 $\dim_k H^1(kQ/I, kQ/I)$ 的公式可直接由 [5] 中的相关论述得到；在该处，通过对 H^2 的细致研究，刚性单项式代数得到了分类。在与 Manuel Saorin [9] 合作的一篇论文中，我们给出了任意箭图的单项式代数的第一 Hochschild 上同调向量空间维数的一般计算公式。在第六节中，我们将关于单项式代数的结果专门应用于截断代数。

在最后一节中，我们考察有限偏序集及其关联代数：已知 Hochschild 上同调同构于由这些链构成的单纯复形的通常上同调（见 [6, 15, 16]）。

在第 4 节中，我们考虑可分代数 E上的张量代数 T。事实上，任意有限箭图的路径代数都属于这类代数。我们研究系数 X 构成的 T-双模情形，其中该双模作为 E-双模是有限生成的。可以直接由 [5]得到 $H^1(T, X)$维数的公式。重要的是，T作为 T-双模具有长度为一的投射分解。研究单项式代数时，这些结果很有用。

致谢：感谢 Manuel Saorin 对单项式代数的 H^1 表示兴趣。也感谢 Belkacem Bendiffalah 与我讨论范畴上同调。

2 箭图、理想与范畴

本节概述一些众所周知的结果；这些结果通常隐含在大多数研究论文中，另请参见 [20]。

箭图由两个集合 Q_0、Q_1 以及两个映射 $s, t: Q_1 \to Q_0$给出。相应有向图中的一条箭 $a \in Q_1$ 具有源顶点 $s(a)$和终端顶点 $t(a)$。Q 的一条路径 γ 是由有限条箭首尾相接组成的序列。每条路径都有一个源顶点 $s(\gamma)$和一个终端顶点 $t(\gamma)$。有向圈是起点与终点相同的路径；并且我们约定，顶点是长度为零的有向圈。

箭图代数是由路径的有限线性组合构成的向量空间。两条路径相乘时，若可以进行拼接，乘积就是它们的拼接；否则乘积为 0。每个顶点都是一个幂等元；当 Q_0 有限时，所有顶点之和是单位元。有些作者关注范畴论视角，我们概述这一方面及其与有限维代数的关系。

设 C 是一个小的 k-范畴（态射是 k-向量空间，复合是 k-双线性的）。我们用 ObC 表示对象的集合，用 ${}_yC_x$ 表示从 x 到 y 的态射向量空间。C 的 Gabriel 代数 [11] 是 $\bigoplus_{x,y\in \mathrm{Ob}C} {}_yC_x$。乘积对应于矩阵乘积：设 $f = ({}_yf_x)$ 和 $g = ({}_yg_x)$ 是 Gabriel 代数的元素。它们乘积的 (y, x) 分量是 $\sum_{v\in \mathrm{Ob}C} {}_yg_u\ {}_uf_x$。若 Ob$C$ 是有限集，则 Gabriel 代数有一个由恒等态射给出的单位元。

一个箭图 Q 按如下方式给出一个自由的 k-范畴 C_Q：C_Q 的对象是 Q的顶点，而 ${}_y(C_Q)_x$ 是从 x 到 y的路径的有限线性组合所构成的向量空间。在基上，路径的串接给出了 C_Q 的复合，并将其扩展为 k-线性的。注意，C_Q 之所以是自由的，是因为任意 k-线性函子 $F: C_Q \to D$，只要满足 $F(a) \in {}_{F(t(a))}D_{F(s(a))}$对每个 $a \in Q_1$成立，就完全由其在对象和箭上的取值决定。

当然， C_Q 的 Gabriel 代数正是我们刚刚直接定义的路径代数 kQ 。

P. Gabriel 指出，如果 k 是代数闭域，并且 k-范畴 C 的 Gabriel 代数是有限维的，那么 C 的骨架是自由范畴 C_Q 的一个商代数（骨架由从每个对象同构类中选取一个对象，并考虑相应的全子范畴而得）。

换言之，设 Λ 是任意域 k 上的有限维代数，并令 r 为它的 Jacobson 根。代数 Λ/r 是半单的。如果它是可分的，Wedderburn–Malcev 定理断言，存在 Λ 的一个子代数 E ，使得 $\Lambda = E \oplus r$。注意，如果我们假设 k 是代数闭域，那么 Λ/r 总是可分的。

考虑 E-双模 r/r^2 及其相应的张量代数（定义见第 4 节）

$$T_E(r/r^2) = E \oplus r/r^2 \oplus (r/r^2 \otimes_E r/r^2) \oplus \dots$$

利用张量代数显然的泛性质，我们得到一个代数同态

$$\varphi_\sigma : T_E(r/r^2) \to \Lambda$$

对于每个 E-双模截面 σ ，它是典范满射 $r \to r/r^2$ 的截面。这样的截面总是存在，因为 $E \otimes E^{op}$ 是半单代数（回忆一下， E 是可分的）。代数同态 φ_σ 由零次上的包含映射 $E \subset \Lambda$ 和一次上的 σ 确定。可以证明 φ_σ 是满射，并且 Ker φ_σ 包含于由二次元素生成的 $T_E(r/r^2)$ 的双边理想中。

不同的截面通常会产生不同的态射和不同的核。与往常一样，这种考虑了给定极大半单子代数的代数表示并不唯一。

与范畴论一侧的联系显而易见：注意，若 Q 是有限箭图，则 Gabriel 代数 C_Q 是张量代数 $T_{kQ_0}(kQ_1)$，其中 kQ_0 是由顶点给出的半单代数，而 kQ_1 是由箭的线性组合构成的 kQ_0-双模。

3 预生成理想

本节介绍 [4] 的部分结果，它计算箭图的路径代数的某些商代数 H^1 的维数。我们先给出一个定义，以澄清 [4]中所讨论的情形。

定义 3.1 设 Q 是有限箭图， k 是域， kQ 是路径代数，而F 是由 Q的箭生成的双边理想。

kQ 的双边理想 I 称为预生成的，如果：

1. I是容许的（即 $I \subset F^2$，并且存在一些 n 使得 $F^n \subset I$）。

2. 设 x 和 y 是 Q 的两个顶点。以下两种情况必有其一：要么$yIx = y(kQ)x$，要么 $yIx = y(FI + IF)x$。

我们给出一组预生成理想的例子。

a) 当 Q没有有向圈时，零理想是预生成的。

b) 考虑一个容许双边理想，它在每一对顶点 x 和 y之间要么“全有”，要么“全无”。更确切地说，要么 $yIx = ykQx$，要么$yIx = 0$。那么 I 是预生成的。

c) 如果对于任意一对顶点 x 和 y，从 x 到 y至多存在一条路径，则称箭图为窄箭图。注意，每棵树都是窄箭图。窄箭图的每个容许理想都是“全有”或“全无”，因此总是预生成的。

d) 设 Q是任意有限箭图，$m \geq 2$是一个整数，F^m是由长度至少为 m的路径生成的 m-截断理想。容易看出，F^m是 kQ 的预生成理想，当且仅当与每条长度为m的路径平行的所有路径的长度都大于或等于 m。对于 $m = 2$，kQ/F^2 的整个上同调代数是已知的，参见 [7]。

e) 设 Q 是一个 n-循环，即 Q 有 n 个顶点，这些顶点由阶为 n 的循环群编号，并由 n 条箭连接；每个顶点都有一条箭指向下一个顶点，其对应于群中某个选定生成元所确定的递增。m-截断理想 F^m 是预生成的，当且仅当 $m < n$。注意，F^m 并非“全有或全无”理想。

命题 3。2 *[4, 第 647]* 页。设 Q 是一个有限箭图，I 是一个预生成理想，且 $\Lambda = kQ/I$。那么

$$\dim_k H^1(\Lambda, \Lambda) = \dim_k \mathbf{Z}(\Lambda) - \sum_{x \in Q_0} \dim_k(x\Lambda x) + \sum_{x,y \in Q_0} |yQ_1x| \dim_k(y\Lambda x)$$

其中 yQ_1x 是从 x 到 y 的箭的集合。

证明：设 r 是 Λ 的 Jacobson 根。以下结论直接由定理 [4, 第 645] 页得出。由于 I 是预生成的，对于任意正整数，$H^2(\Lambda, \Lambda)$ $H^2\ \Lambda\ r^i\ = 0$ i =(,)。命题 [4, 第 647] 页给出了该公式。

例 3.3 设 Q 为连通窄箭图，I 为一个容许理想。则 维数$_k H^1(\Lambda, \Lambda)$ $= 1 - |Q_0| + |Q_1|$。

注 3.4 若 $I = 0$ 和 Q 连通且不含有向圈，则上述公式为

$$\dim_k H^1(\Lambda, \Lambda) = 1 - |Q_0| + |Q//Q_1|$$

其中我们仍用 Q 表示箭图 Q的所有路径的集合，并用 $Q//Q_1$表示乘积 $Q \times Q_1$ 中由平行路径构成的子集，即

$$Q//Q_1 = \{(\gamma, a) \mid s(\gamma) = s(a) \text{ and } t(\gamma) = t(a)\}.$$

事实上， Q 没有圈，因此 $\dim_k x(kQ)x = 1$。此外， $\dim_k y(kQ)x$ 是从 x 到 y 的路径数。注意，霍赫希尔德上同调在代数的乘积上具有可加性（见 [10]），因此若 Q 不连通，只需将每个连通分支对应的公式相加即可。

例3.5 设 Q 是一个有两个顶点 x 和 y，以及从 x 到 y的 n 条箭的箭图。

$$\dim_k H^1(kQ, kQ) = 1 - 2 + n^2 = n^2 - 1.$$

例3.6 设 Q 是一个 n-圈。考虑 $I = F^m$ 这个截断预生成理想，其满足 $m < n$ （见上面的例子）。

Then

$$\dim_k H^1(\Lambda, \Lambda) = 1 - m + m = 1.$$

D. Happel 在 [17, 第 113] 页考察了一族“单项式、舒尔代数且半交换”的代数。接下来我们将说明，这些代数对应于预生成理想的例子。实际上，一般的单项式情形将在下一节讨论。

设 Q 是一个无有向圈的连通箭图，且 I 是一个单项式双边理想，这意味着 I 由长度至少为二的路径生成。 I 上的舒尔条件等价于：对于每一对顶点（x， y），要么 $y(kQ)x = yIx$，要么 yIx 在 $y(kQ)x$中是余维一的。半交换假设意味着，如果 yIx 是余维一的，那么在 Q中从 x 到 y 只有一条路径，因此 yIx =0。换言之，这种情形是“全或零”理想的一个例子，它自动是预生成理想。前面的命题适用。注意，$\dim \mathbf{Z}(kQ/I) = 1$，且每条箭除自身外都没有平行路径。因此

$$\dim_k H^1(\Lambda, \Lambda) = 1 - |Q_0| + |Q_1|.$$

4 张量代数

设 E 是一个 k-代数，且 M 是一个 E-双模。张量代数

$$T_E(M) = E \oplus M \oplus (M \otimes_E M) \oplus \dots$$

其乘法由张量的张量积给出。任意代数映射φ： $T_E(M) \to A$ 都完全由一个代数映射 φ_E： $E \to A$（它赋予 A 一个 E-双模结构）和一个 E-双模映射φ_E： $M \to A$决定。这个泛性质刻画了 $T_E(M)$。

例 4.1 设 Q 是一个有限箭图， kQ_0 是由其顶点给出的半单交换代数，而 kQ_1 是由 k上的箭的 kQ_0-线性组合构成的 kQ_0-双模。那么，$T_{kQ_0}(kQ_1)$ 是 Q 的路径代数，因为 Q中长度为 m 的路径构成了 kQ_1 在 kQ_0 上的 m-张量幂的一组基。

引理 4.2 设 E 是任意一个 k-代数，且 M 是一个 E-双模。存在一个正合列

$$0 \to T \otimes_E M \otimes_E T \to T \otimes_E T \to T \to 0.$$

证明见 [5, 第 98], [8] 页或 [18]。

注 4.3 若 E 是可分的 k-代数，则 $T \otimes_E M \otimes_E T$ 是投射的 T-双模。事实上，任意 E-双模都是投射的，因此 M 是投射的。对更大的代数 T 在 E 上取张量，将这一性质传递到 $T \otimes_E M \otimes_E T$，它是一个投射的 T-双模。此外，根据同样的论证， $T \otimes_E T = T \otimes_E E \otimes_E T$ 也是一个投射的T-双模。

定理 4.4 设 E 是一个可分的 k-代数， M 是一个有限生成的 E-双模， T 是张量代数，且 X 是一个作为 E-双模有限生成的 T-双模。则 $H^1(T, X)$ 是一个有限维向量空间，并且

$$\mathsf{dim}_k H^1(T, X) = \mathsf{dim}_k \mathsf{Hom}_{E-E}(M, X) - \mathsf{dim}_k(X^E/X^T).$$

对于 $i \geq 2$，我们有 $H^i(T, X) = 0$ 。

证明：上述短正合列是 T 作为T双模的一个投射分解。因此，上链复形

$$0 \to \mathsf{Hom}_{T-T}(T \otimes_E T, X) \to \mathsf{Hom}_{T-T}(T \otimes_E M \otimes_E T, X) \to 0$$

给出霍赫希尔德上同调 $H^i(T, X)$。

此外，存在典范同构，可将该复形变换为如下形式:

$$0 \to X^E \to \mathsf{Hom}_{E-E}(M, X) \to 0$$

此外，我们知道 $H^0(T, X) = \mathsf{Hom}_{T-T}(T, X) = X^T$。

注 4.5 由于 E 是可分的， $E \otimes E^{op}$ 是半单代数，因此，一个 E双模的同构类由整数确定（这些整数给出每个简单 E双模的重数）。设 E_0 是 E的一组完备中心正交幂等元。简单 E双模的同构类由 $E_0 \times E_0$参数化。

令 $({}_y n_x(M))_{x,\ y \in E_0}$ 和 $({}_y n_x(X))_{x,\ y \in E_0}$ 为刻画 M 和 X的整数。假设每个简单双模的自同态代数就是k。由舒尔引理可得:

$$\mathsf{dim}_k \mathsf{Hom}_{E-E}(M, X) = \sum_{x,y \in Q_0} {}_y n_x(M)\ {}_y n_x(X)$$

推论 4.6 设 Q 为有限箭图， X 为一个 kQ-双模，且作为 kQ_0-双模有限生成（即 X 在 k上是有限维的）。则

$$\mathsf{dim}_k H^1(kQ, X) = \mathsf{dim}_k(X^{kQ}) - \mathsf{dim}_k(X^{kQ_0}) + \sum_{x,y\in E_0} |yQ_1x|\mathsf{dim}_k(yXx)$$

其中， yQ_1x 是从 x 到 y的箭的集合。

证明：代数 $E = kQ_0$ 是半单且交换的，并且$kQ_0 \otimes(kQ_0)^{op}$。此外，简单双模是一维的，且简单双模的重数与相应等型分量的维数一致。考虑 $E_0 = Q_0$。我们有如下结果：

$$ {}_yn_x(kQ_1) = |yQ_1x|$$

$$ {}_yn_x(X) = \mathsf{dim}_k(yXx).$$

注 4.7 kQ 作为 kQ_0-双模有限生成，当且仅当 Q 没有有向圈。

推论 4.8 设 Q 是一个没有有向圈的连通有限箭图。那么

$$\mathsf{dim}_k H^1(kQ, kQ) = \mathsf{dim}\mathbf{Z}(kQ) - \sum_{x\in Q_0} \mathsf{dim}\,|xQx| + \sum_{x,y\in Q_0} |yQ_1x|\ |yQx|$$

其中， yQx是箭图中从 x 到 y 的路径集合。

推论 4.9 设 Q 是任意有限箭图，且 kQ/I 是由 kQ的一个双边理想 I 取商得到的有限维商代数。

那么 维数$_kH^1$（$kQ, kQ/I$） $=$

$$\mathsf{dim}_k\mathbf{Z}(kQ/I) - \sum_{x\in Q_0} \mathsf{dim}_k x(kQ/I)x + \sum_{x,y\in Q_0} |yQ_1x|\mathsf{dim}_k y(kQ/I)x.$$

如果 Q 连通且没有有向圈，并且 I 是容许的，那么上面的公式变为

$$\mathsf{dim}_k H^1(kQ, kQ/I) = 1 - |Q_0| + \sum_{x,y\in Q_0} |yQ_1x|\mathsf{dim}_k y(kQ/I)x.$$

5 单项式代数

本节的结果是 [5]的推论。这里我们给出箭图没有有向圈的情形。正如引言中所述，一般情形在一篇论文中进行了研究，作者为 Manuel Saorin [9]。

设 Q 为一个有限箭图， Z 为一个长度至少为二的极小路径集，也就是说，如果 δ 是 Z 中的一条路径，那么 δ 不存在属于 Z的真子路径。由 Z 生成的双边理想 $\langle Z\rangle$ 有一个基 $\bar{Z}$

它由包含 Z中某条路径的路径组成。其补集 B 是那些不包含 Z中任何路径的路径。集合 B 是单项式代数 $kQ/\langle Z\rangle$的一个基。

下面我们将定义 [5]（$Q_1//B$）$_e$ 为 $Q_1//B$中有效对的一个子集。首先考虑粘合对：若 a 是 ε的第一支箭或最后一支箭，或者 a 是一个环路且 ε 是该环路的顶点，则a，ε这一对 $Q_1//B$ 是粘合的。平凡粘合对是对角线对，即对每支箭 a，都有一对（a，a）。如果 Q 没有有向圈，除平凡粘合对外，不存在其他粘合对。

若一对（a，ε）满足以下条件，则称其为
有效对：

1. 它不是粘合对，

2. 在 Z 中存在一条包含 a的路径 γ，使得在 γ 中用 ε 替换 a 后得到的路径属于 B。

我们用（$Q_1//B$）$_e$ 表示有效元素集，用（$Q_1//B$）$_{ne}$ 表示其补集。从现在起，箭图均不含有向圈。

定理 5.1 设 Q 是一个不含有向圈的有限连通箭图。设Z 是一个由长度至少为2 的路径组成的极小路径集，并设 B 是由不包含 Z中任何路径的路径组成的集合。则

$$\mathsf{dim}_k H^1(kQ/\langle Z\rangle, kQ/\langle Z\rangle) = 1 - |Q_0| + |(Q_1//B)_{ne}|$$

证明：存在一个正合列（见 [5,第 98] 页）

$$0 \to H^1(\Lambda, X) \to H^1(kQ, X) \to \mathsf{Hom}_{kQ-kQ}(I/I^2, X) \to H^2(\Lambda, X) \to 0$$

对于 $\Lambda = kQ/I$ 和 X 一个 Λ-双模。

在定理的假设下，我们得到：

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to H^1(kQ/\langle Z\rangle, kQ/\langle Z\rangle) \to H^1(kQ, kQ/\langle Z\rangle) \\ &\to \mathsf{Hom}_{kQ-kQ}(\langle Z\rangle/\langle Z\rangle^2, kQ/\langle Z\rangle) \to H^2(kQ/\langle Z\rangle), kQ/\langle Z\rangle) \to 0. \end{aligned}$$

这个正合列中除第一项外，其余各项的维数均已知。利用 4.9，对于第二项，我们有：

$$\mathsf{dim}_k H^1(kQ, kQ/\langle Z\rangle) = 1 - |Q_0| + \sum_{x,y\in Q_0} |yQ_1x|\ |yBx|$$

此公式变为：

$$\mathsf{dim}_k H^1(kQ, kQ/\langle Z\rangle) = 1 - |Q_0| + |Q_1//B|.$$

关于第三项，其维数等于奖章的数量，其中奖章是与 Q and Z 相关的特定箭图（平行箭图）的某个连通分支（见 [5]）。最后一项的维数等于奖章数量减去 $|(Q_1//B)_e|$ （见 [5, 3.12]），结论由此得出。注意，

对于本文而言，无需精确定义平行箭图和奖章。

注意， $Q_1//B$ 的一个元素 $(a,\ \varepsilon)$ 是非有效的，当且仅当它是粘合的；或者，¯在它未粘合的情况下，任意一个 $\gamma \in Z$ 若包含箭 a ，则在我们于 γ中用 ε 替换 a 时，会提供一条属于 Z 的路径。 $Q_1//B$ 中平凡粘合对的对角线 $\Delta(Q_1//Q_1) = \{(a,\ a) \mid a \in Q_1\}$ 是 $(Q_1//B)_{ne}$ 的子集。因此，根据定理的精确公式，我们可以得出以下界：

推论 5.2 设 Q 是一个不含有向圈的连通箭图， Z 是由长度至少为二的路径构成的极小集。那么

$$\dim_k H^1(kQ/\langle Z\rangle, kQ/\langle Z\rangle) \leq 1 - |Q_0| + |Q_1|.$$

6 截断代数

截断代数是特殊的单项式代数，我们将把上一节的结果应用于这些代数。

箭图代数 kQ 的 m-截断理想 F^m 是由 Q_m 生成的双边理想，其中 Q_m 是长度为 m 的路径集。我们已经给出了 F^m 为预生成的精确条件，并提到，对于一个由 n 构成的 m-截断路径代数， H^1 的维数为 1，只要 $m < n$ （后者是 F^m 为预生成的精确条件）。

下一个结果给出了无有向圈箭图的截断路径代数 kQ/F^m $(m \geq 2)$ 的维数 H^1 。

定理 6 1 Q $\Lambda =$ 。设 是一个无有向圈的有限连通箭图，其 -截断路径代数为 kQ/F^m m $m \geq 2$ ()。那么

$$\dim_k H^1(\Lambda, \Lambda) = 1 - |Q_0| + |Q_1//B|.$$

注 6.2 注意， B 是长度严格小于 m的路径集。

证明：回忆一下， Λ 是一个单项式代数，其极小路径集为$Z = Q_m$。由定理 5.1 可得：

$$\dim_k H^1(\Lambda, \Lambda) = 1 - |Q_0| + |(Q_1//B)_{ne}|.$$

我们证明在截断情形下 $(Q_1//B)_{ne} = Q_1//B$ 。回忆一下，如果 (a, ε) 要么是粘合的，要么在非粘合的情况下，将a 替换为路径 Z 中的 ε 后得到的任何路径都属于 $\bar{Z}$，那么它就是非有效的。注意， ε 不是一个顶点。由于$Z = Q_m$，我们推知 $Q_1//B$ 中的任意元素都是非有效的。

有向图含有有向圈的截断代数情形，已在与 M. Saorin [9]合著的一篇论文中讨论。

7 有限单纯复形与偏序集

设 S 是一个有限偏序集，也就是说，这是一个配备了满足自反性、反对称性和传递性的序关系 $\leq$ 的有限集合。通常的关联代数是定义在 $S \times S$ 的可比较有序对 $\{(y,\ x) \in S \times S \mid y \leq x\}$这一子集上的函数所构成的向量空间。

设 f 为这样的函数。为简便起见，我们将标量 $f(y,x)$ 记作 ${}_yf_x$，其中 $y \leq x$。乘积定义为

$$ {}_y(fg)_x = \sum_{y \leq z \leq x} {}_yg_z\ {}_zf_x. $$

考察初等函数（定义在满足 $y \leq x$ 的点对 (y,x) 上的狄拉克质量），显然，关联代数同构于某个箭图代数的容许商代数：设 Q 为箭图，其顶点集为 S，并且当 $x \geq y$，且 x 与 y之间没有适当的 z 时，存在一条从 x 到 y 的箭。考虑由所有平行路径之差生成的 kQ 的理想。该理想是容许的，并且 kQ/I 与关联代数自然同构。

回顾一下，单纯复形 Σ 是一个集合，并配备了一个非空的“遗传”子集族，即单形：如果 σ 是该族中的一个单形，那么 σ 的每个子集都是单形。换言之，单纯复形完全由 Σ的一个非空极大子集族确定。当然，单纯复形给出一个偏序集：其元素是单形，序关系是包含映射（称为关联关系）。

反过来，偏序集 S 在集合 S上给出一个单纯复形，其单形是 S中有序元素构成的链。

实际上，与单纯复形 Σ 的偏序集相关联的单纯复形是 Σ的“重心细分”。Gerstenhaber 和 Schack 证明，关联代数的霍赫希尔德上同调与通常的单纯上同调存在规范同构（[15], [16]）。另见 [6]。

例 7.1 考虑偏序集 $S = \{a,b,c,d\}$，其序关系由 $a > c$, $a > d$, $b < c$, $b < d$ 给出。其箭图 Q 有四个顶点和四条箭，关联代数的理想为 0。我们已经知道

$$ \dim_k H^1(kQ, kQ) = 1 - 4 + 4 = 1. $$

注意，与 S 相关联的单纯复形以 S^1 为几何实现；我们还知道 维数$_kH^1(S^1,\ k)\ = 1$。

参考文献

[1] Bendiffalah, B., Guin, D.：态射上同调，Commun. Algebra 26，3939– 3951（1998）。

[2] Bendiffalah, B., Guin, D., 三角代数图表的上同调，见本论文集。

[3] 含环路但没有外导子的Artin代数。1999年预印本。
http://xxx.lanl.gov/abs/math.RA/9907008

[4] Cibils, C ., 有限维代数的霍赫希尔德上同调 . Commun .
Al- gebra 16, 645–649（1988年）。

[5] Cibils, C., 刚性单项式代数。《Math. Ann.》289, 95–109（1991年）。

[6] Cibils, C., 关联代数与单纯复形的上同调。《J. Pure Appl. Alg.》56, 221–232（1989年）。

[7] Cibils, C., 《根基平方为零代数的 Hochschild 上同调代数》。《代数与模 II》：第八届代数表示国际会议，1996年，挪威盖朗厄尔。I. Reiten、S.O. Smalo、O. Solberg 编。CMS 会议论文集，第24卷，93–101页（1998年）。

[8] Cibils, C., 《张量 Hochschild 同调与上同调》。即将发表于欧洲会议《环论与代数表示的交互》，穆尔西亚，1998年。Pr´epublication 1998/15，蒙彼利埃第二大学（1998年）。

[9] Cibils, C.、Saorin, M., 《代数的第一上同调群及其系数》。Prpublicatiom 99–12，蒙彼利埃第二大学（1999年）

[10] Cartan, H., Eilenberg, S.,《同调代数》，普林斯顿大学出版社，1956年。[11] Gabriel, P.《关于阿贝尔范畴》。法国数学会公报，90，323–448（1962）。[12] Gabriel, P.《不可分解表示 II》，数学研讨会，意大利国家高等数学研究所，罗马，1973年。[13] Gastaminza, S., de la Pe˜na, J.-A., Platzeck, M.I., Redondo, M.J., Trepode, S.《具有消失Hochschild上同调的有限维代数》。《代数学杂志》212，1–16（1999）。[14] Gerstenhaber, M.《环与代数的变形》，《数学年刊》79，59–103（1964）。[15] Gerstenhaber, M. Schack, S.D.《相对Hochschild上同调、刚性代数与Bockstein》。《纯粹与应用代数杂志》43，53–74（1986）。[16] Gerstenhaber, M. Schack, S.D.《单纯上同调就是Hochschild上同调》。《纯粹与应用代数杂志》30，143–156（1983）。[17] Happel, D.《有限维代数的Hochschild上同调》。保罗·杜布勒伊与玛丽-波勒·马利亚万代数研讨班。Springer数学讲义1404，108–126（1989）。[18] Loday, J.-L.：循环同调。数学科学基础丛书，第二版，1998年（513页）。[19] MacLane, S.《同调》。第3次校订印刷版，施普林格出版社，1975年。[20] Redondo, M.-J.《Artin代数的Hochschild上同调》，本论文集。[21] Saorin, M., de la Pe˜na, J.-A.《代数的第一Hochschild上同调群》。预印本

蒙彼利埃第二大学数学系，法国蒙彼利埃 Cedex 5，邮编
F-34095。cibils@math.univ-montp2.fr 1999年1月