arXiv:2301.08216v1 [math.LO] 19 Jan 2023



马丁公理

HELENA JORQUERA RIERA

导师：Asger Dag Törnquist 哥
本哈根大学19th 2023年1月

摘要。ZFC 公理为数学奠定了基础，然而，存在一些无法由 ZFC 判定的命题，例如连续统假设（CH）。我们讨论马丁公理，它是连续统假设的一种替代方案，大致指出，如果存在一个严格介于 ω 和 2^ω 之间的基数，那么它的“行为”就像 ω。

引言

20 世纪初，作为对罗素悖论等（朴素）集合论悖论的回应，Ernst Zermelo 和 Adolf Fraenkel 提出了策梅洛–弗兰克尔集合论（ZF），旨在通过在理论中以形式逻辑取代自然语言来形式化集合论，从而避开这些悖论。加入选择公理的 ZF（ZFC）是一组公理，即无需证明即可被视为真的陈述，其中大多数被认为直观且普遍接受，尽管选择公理仍存在一些争议。现今数学中的所有结果都可以从这些公理推导出来。

George Cantor 于 1891 [1] 证明，无穷有不止一种“基数”：他表明，实数 2^ω“比”自然数 ω“更多”。随后，他试图弄清楚 ω 和 2^ω 之间是否存在其他“基数”，但未能成功。连续统假设 断言 ω 和 2^ω之间不存在其他“基数”。这一假设多年来一直未能解决，甚至在1900年被列为希尔伯特问题的第一项。1963年，Paul Cohen因在Kurt Gödel的帮助下证明该假设独立于ZFC [2]而获得菲尔兹奖。

如果连续统假设在某个公理系统中为假，那么关于 ω 和 2^ω 之间基数 κ 的问题便会出现。Donald A. Martin和Robert M. Solovay [5], 提出的马丁公理（MA）不像ZFC的其他公理那样显然直观；相反，它更像是一条特设公理，因为MA具有连续统假设的“好”结果，却没有其“坏”结果。因此，我们或许希望将MA加入ZFC，作为连续统假设的替代，而不是因为它本身具有直观性。这是可行的，因为MA独立于ZFC；又因为连续统假设独立于MA，所以如果我们接受MA，连续统假设仍然无法确定，而连续统假设则显然蕴含MA。粗略地说，马丁公理认为， ω 和 2^ω 之间的 κ“表现得”像 ω；更明确地说，第5节问题1至4的答案对于 $\kappa = \omega$ 都是“是”，而如果我们假设马丁公理(κ)，那么对于 $\omega \leq \kappa < 2^\omega$，答案也都是“是”。

我们将给出马丁公理的几种等价形式。第一种大致指出，如果我们有一个包含“不太多要求”的集族，那么就能找到一个滤子，确保所有要求都得到满足。我们将证明，马丁公理等价于它在布尔代数上的限制，也等价于一个纯粹的拓扑命题。

除非另有说明，所有结果均取自 [4]。

关于记号的说明：下文将使用一阶逻辑的符号 $\wedge, \exists, \forall, (,)$ $\neg, =,$ 以及v_i，还有诸如 $\in, <$ 这样的其他符号。不过，我们经常会使用其他符号，它们可能由上述符号组合而成，例如 $\Rightarrow$。我们不逐一界定每个符号的含义，而是将其视为“标准”含义。

1. ZFC公理

本节将介绍一些集合论背景知识；我们列出 ZFC 公理，并定义关系和序，这些内容是后续章节所必需的。

定义 1.1. 公式 ϕ 的全称闭包是由 ϕ 经过对 ϕ 中出现的所有自由变量进行全称量化后得到的公式。

我们用一阶逻辑的语言列出 ZFC 的公理：

公理。 存在公理。

$$\exists x(x = x).$$

也就是说，存在一个集合。

公理。 外延公理。

$$\forall x \forall y(x = y \iff \forall z(z \in x \iff z \in y)).$$

也就是说，一个集合由其包含的元素确定。

公理。 基础公理。

$$\forall x(\exists y(y \in x) \Rightarrow \exists y(\neg \exists z(z \in x \wedge z \in y))).$$

也就是说，没有集合包含一个无限的集合序列，且其中每个集合都包含下一个集合。这避免了出现诸如 $x = \{x\}$ 这样的自指集合。

公理。 概括公理模式。公式的全称闭包

$$\forall z(\exists y \forall x(x \in y \iff (x \in z \wedge \phi))),$$

其中 y 在 ϕ 中不是自由变元。

也就是说，任何满足某种性质、且该性质不涉及集族本身的元素子集，都是一个集合。

我们将满足该公理的唯一 y 记作 $\{x \in z : \phi\}$。

公理。 配对公理。

$$\forall x \forall y \exists z(x \in z \wedge y \in z).$$

也就是说，我们可以构造一个集合，其中包含已有的其他集合。根据概括公理，我们可以定义一个恰好包含x 和y的集合，记作 $\{x, y\}$。

公理。并集。

$$\forall F \exists A \forall Y \forall x((x \in Y \wedge Y \in F) \Rightarrow x \in A).$$

也就是说，给定任意一个集合族F（由集合Y组成），存在一个集合，其中包含F中各元素的元素；于是，根据概括公理，我们可以定义F的并集 $\bigcup F$为 $\{x \in A : \exists Y \in F(x \in Y)\}$，其中$A$ 满足该公理。

公理。替代公理模式。以下公式的全称闭包

$$\forall x \in A \exists! y \phi(x,y) \Rightarrow \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \phi(x,y).$$

也就是说，如果我们为一个集合族中的每个成员指定一个集合y，就可以由所有y构造出一个集合Y。对每个x，这样的y 都是唯一的，这确保Y 不会“大到”无法成为一个集合。

定义 1.2。根据配对公理，我们可以定义集合 $\{x\}$，其唯一元素是x。

后继 x 是 $S(x) :=x \cup \{x\}$。

定义 1.3. 根据概括公理，我们可以定义 $0 := \{x \in y : x \neq x\}$ 对于任意集合 y。显然，$0 = \varnothing$ 是一个不含任何元素的集合。

公理。无穷公理。

$$\exists x(0 \in x \wedge \forall y \in x(S(y) \in x)).$$

也就是说，存在一个无限集。

公理。幂集公理。

$$\forall x \exists y \forall z(z \subseteq x \to z \in y).$$

也就是说，存在一个包含某集合所有子集的集合。对于任何满足幂集公理的 y，x 的幂集 为 $P(x) = \{z \in y : z \subseteq x\}$。根据概括公理，这一定义是合理的。

公理。选择公理。

$$\forall A \exists R(R \text{ well-orders } A),$$

其中，若 R 良序 A，则 $\langle A,R\rangle$ 是定义 1.9 意义下的良序。

这等价于以下陈述：对于任意非空集合族，都存在一个集合，其中每个集合各有一个元素。

虽然并非所有证明都需要所有公理，特别是我们从未使用基础公理，但除非另有说明，以下均假设 ZFC 公理。

定理 1.4。不存在所有集合的集合。

证明。 如果存在所有集合的集合 S，那么根据概括公理，我们可以定义 $X = \{x \in S : x \notin S\}$。如果 $X \in S$，那么 $X \notin S$；而如果 $X \notin S$，那么 $X \in S$，无论哪种情况都会导致矛盾。这就是罗素悖论[3]。 □

定义 1.5。 族 F 中各集合的交集 $\cap x \in X : \forall Y \in F(x \in Y)\}$，其中 $F \neq 0$ 且存在某个（任意）$X \in F$。

这里我们将 x 限制在某个已存在的集合 $X \in F$ 中，以便应用概括公理。因此需要 $F \neq 0$。事实上，如果 $F = 0$，那么每个集合 x 都满足 $\forall Y \in F(x \in Y)$，但根据定理 1.4，不存在所有集合的集合。

通过两次使用配对公理，我们可以定义如下内容。

定义 1.6。 x 和 y 的有序对 $\langle x, y\rangle = \{x \{x,y\}\}$。

定义 1.7。 A 与 B 的笛卡尔积为 $A \times B = \{\langle a,b\rangle : a \in A \wedge b \in B\}$。

对于每个 $b \in B$，我们可以通过替代公理定义 $X_b := \{\langle a,b\rangle : a \in A\{v22>$。然后我们可以再次通过替代公理定义 $\{X_b : b \in B\}$。现在，根据并集公理，我们可以定义 $\bigcup\{X_b : b \in B\}$，它等于 $A \times B$。

定义 1.8. A 关系 R是一个有序对集族。如果 R 是一个关系，那么R的定义域 是 $Dom(R) := \{x : \exists y(\langle x,y\rangle \in R)\}$，其值域 是 $Ran(R) := \{x : \exists y(\langle y,x\rangle \in R)\}$。

函数f是一个关系，满足：若 $\langle x,y\rangle \in f$且 $\langle x,y'\rangle \in f$，则$y = y'$。

若定义域$(f) = A$，值域$(f) = B$且$C \subseteq A$，则$f|_C = f \cap C \times B$是f在C上的限制，并且$f''C$ $=$ 值域$(f|_C)$。

我们通常认为，函数将其值域中的一个唯一值与定义域中的每个值对应起来；若 $\langle x,y\rangle \in f$，我们就说y 是f 在x处的值。

定义 1.9. 一个偏序 $\langle P \leq\rangle$（或简称 P）是一个集合$P \neq 0$，连同一个传递且自反的关系 $\leq$，即

$$\forall x,y,z \in P(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$$

and

$$\forall x \in P(x \leq x).$$

一个全序 $\langle A,R\rangle$ 是由集合A 和关系R 构成的有序对，满足传递性 :

$$\forall x,y,z \in A(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz),$$

三分律:

$$\forall x,y \in A(x = y \vee xRy \vee yRx)$$

以及非自反性:

$$\forall x \in A(\neg xRx)$$

成立。

良序是一个全序 $\langle A,R\rangle$，使得 A 的每个非空子集都有一个 R-最小元。

例1.10。 全体世界人口的集合，其序定义为：若$x \leq y$，当且仅当x 是y 的后代，则该偏序为 $\langle P \leq\rangle$。

例1.11。 然而，以实数为集合的偏序（$\mathbb{R},\leq$）中，若$x \leq y$，当且仅当$\exists n > 0 \in \mathbb{N}(x + n = y)$，则它不是偏序，因为三分律不成立。

2. 序数

本节将介绍序数，并证明任意良序都同构 于某个序数。然后，我们定义序数上的一些运算。

定义 2.1. 如果集合x 的每个元素都是x 的子集，那么x 就是传递的。

例 2.2. 集合 $\{\{0\},0\}$ 以及在不假设基础公理的情况下的$x = \{0,\{0\},x\}$ 都是传递集。

定义 2.3. 序数x 是一个传递集，使得 $\langle x \in_x\rangle$ 是良序，其中 $\in_x = \{\langle y,z\rangle \in x \times x : y \in z\}$。

全文中，我们用希腊字母表示序数，但 ϕ 和 ψ 除外，它们表示函数或公式（具体是哪一种将由上下文判断）。

例 2.4. 集合 $\{\{0\},0\}$ 是一个序数，但即使不假设基础公理，$x = \{0,\{0\},x\}$也不是。

定理 2.5. 不存在所有序数组成的集合。

证明。 假如所有序数组成的集合ON 存在，那么它就会是一个序数，并且是自身的成员，这与 $\in$的非自反性矛盾。 □

定义 2.6. 对于任意集合 A、B 以及关系 R、S，若 $\subseteq A \times A$，$B \times B$ 分别成立，我们称 $\langle A, R\rangle$和 $\langle B, S\rangle$ 同构，并记作 $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$；如果存在一个双射 $f : A \to B$，使得$\forall a, b \in A(aRb \iff f(a)S f(b))$，则称 f 为同构。

定义 2.7。 设 $\langle A, R\rangle$是一个良序，我们定义 前驱集$(A, x, R) := \{a \in A : aRx\}$。

引理 2.8。 对于任意良序 $\langle A, R\rangle$，我们有 $\langle A,R\rangle \ncong \langle$前驱集$(A, x,R),R\rangle$。

这是我尝试证明前一个引理。

证明。 假设 $f\colon A \to$ 前驱集(A,x,R) 是一个同构。我们证明，若 $\forall x < y(x = f(x) \Rightarrow f(y) = y)$，则 $\forall y \in A(f(y) = y)$（这是一个超限归纳证明，见第 3 节），这就产生矛盾，因为 $A \neq$ 前驱集(A,x,R)。

假设存在 $y \in A$ 使得 $f(y) \neq y$，并令 y 为满足此性质的最小元素。那么，每个 $z \in$ 前驱集(A,x,R) 使得 xRy 的元素，都是 $z \in A$ 的像。因此，由于 f 是单射，且 $f(y) \neq y$，我们有 $yR f(y)$。

此外，f 是满射，因此 $y \in$ 前驱集(A,x,R) 是某个元素 $f^{-1}(y) \neq y$ 的像，其中该元素属于 A。由于 f 是函数，对于任意 xRy，我们有 $f^{-1}(y) \neq x$，因此 $yRf^{-1}(y)$。

总之，$yRf^{-1}(y)$ 且 $yRf(y)$，所以 f 不保持序 R。因此，不存在这样的 y，故 $f(y) = y$。□

引理 2.9. 若 $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$（良序），则它们之间存在唯一的同构。

这是我尝试证明前一个引理的过程。

证明。 假设 $f,g\colon A \to B$ 是两个不同的此类同构。那么存在最小的 y，使得 $w := f(y) \neq g(y) =: z$。不妨设 zSw。那么，由于 f 是满射，z 有一个原像 $f^{-1}(z)$，属于 A。由于 f 是一个函数，对于 xRy 和 $x = y$，有 $f^{-1}(z) \neq x$。因此，$yRf^{-1}(z)$ 且 $zSf(y)$。□

定理 2.10。 对于任意两个良序 $\langle A,R\rangle$ 和 $\langle B, S\rangle$，以下条件有且仅有一个成立：

(1) $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$。*(2)* $\exists x \in B\langle$
$A, R\rangle \cong \langle$前驱集$(B, x, S), S\rangle$。*(3)* $\exists$
$y \in A\langle$前驱集$(A, y, R), R\rangle \cong \langle B, S\rangle$。

定理 2.11。 如果 $\langle A, R\rangle$ 是一个良序，则存在唯一的序数 C，使得 $\langle A, R\rangle \cong \langle C \in\rangle =: C$。

证明。 唯一性源于这样一个事实：如果两个序数 x 和 y 同构，那么 $x = y$。

令 $\mathrm{B} := \{\mathrm{a} \in \mathrm{A} : \exists \mathrm{x}(\mathrm{x}$ 是一个序数 $\wedge \mathrm{pred}(\mathrm{A}, \mathrm{a}, \mathrm{R}) \cong \mathrm{x})\}$，并定义 $\mathrm{f}\colon \mathrm{B} \to \mathrm{ran}(\mathrm{f}) =: \mathrm{C}$，使得 $\mathrm{f}(\mathrm{b}) =$ 为满足 $\mathrm{pred}(\mathrm{A}, \mathrm{b}, \mathrm{R}) \cong \mathrm{x}$ 的唯一序数 x。则 f 是一个同构，也就是说，$\langle \mathrm{B}, \mathrm{R}\rangle \cong \mathrm{C}$，且 C 是一个序数。

若 $B \neq A$，则由定理 2.10，存在某个 $a \in A$，使得 $B =$ 前驱集(A,a,R)；但此时 前驱集$(A,a,R) \cong C$，因此 $b \in B$，这与 R 是非自反的矛盾。因此 $B = A$，所以 $\langle A,R\rangle \cong C$。□

因此，我们或许应该将对良序的研究限制在序数上：

定义 2.12。 对于 $\langle A, R\rangle$，良序型(A, R)是唯一的序数 C，使得 $\langle A, R\rangle \cong C$。

定义 2.13。 对于X这个序数集合，$\sup(X) = \bigcup X$，且如果$X \neq 0$，$inf(X) = \bigcap X$。

定义 2.14。 一个序数 α 是后继，如果 $\exists\beta(S(\beta) = \alpha)$。如果 $\alpha \neq 0$ 且不是后继，它就是一个极限序数。

我们记 $1 := S(0) = \{0\}$，$2 := S(1) = \{0,1\} = \{0,\{0\}\}$，$3 := S(2)$
$= \{0,1,2\} = \{0,\{0\},\{0,\{0\}\}\}$，等等。

定义 2.15. 序数 α 是一个自然数，当且仅当它是 0，或其每个非零 $\beta \leq \alpha$ 都是后继。

所有自然数构成的集合 ω 由无穷公理与概括公理保证存在。

命题 2.16. 集合 ω 是一个极限序数。

证明。 根据定义，每个 $\beta < \omega$ 都是后继或 0。因此，如果 ω 是后继，那么 ω 将是一个自然数，故 $\omega \in \omega$，这与 $\in$ 是严格序相矛盾。□

例 2.17. 后继$S(\omega)$不是自然数，因为 $\omega \leq S(\omega)$，但 ω 不是后继。

更一般地，自然数就是所有小于 ω的序数。

定义 2.18. 我们将序数上的运算 $+$ 定义为 $\alpha + \beta =$ 序型$(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R)$，其中 R
$= \{\langle\langle\xi,0\rangle,\langle\eta,0\rangle\rangle : \xi < \eta < \alpha\} \cup \{\langle\langle\xi,1\rangle,\langle\eta,1\rangle\rangle : \xi < \eta < \beta\} \cup ((\alpha \times \{0\}) \times (\beta \times \{1\}))$.

当某个运算仅对例如序数有定义时，如果该运算中的某个元素不是序数，我们就将其定义为 0。

这个定义是合理的，因为我们可以定义 $\alpha + \beta = \{\gamma :$ 序型$(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R) = \gamma\}$ 这由替代公理和概括公理保证，因为根据定理 2.11，对每一对 α, β，都存在唯一的此类 γ。

例 2.19。 $1 + 2 =$ 序型$(1 \times \{0\} \cup 2 \times \{1\}, R) =$ 序型$(\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle)$ 其中$R = \{\langle\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle\rangle,\langle\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle,\langle\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\rangle\}$。

因此 $\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\} \cong \{0,1,2\} \cong 3$ 所以 $1 + 2 = 3$。

引理2.20。 对于任意 α 和 β，我们有：
(1) $\alpha+0=\alpha$。*(2)* $\alpha+S(\beta)=S(\alpha+\beta)$。
(3) 若 β 是极限序数，则 $\alpha+\beta=sup\{\alpha+\gamma:$
$\gamma<\beta\}$.

（*1*）的证明。 $\alpha+0=$序型$(\alpha\times\{0\}\cup 0\times\{1\})=$序型$(\alpha\times\{0\})=\alpha$。 □

引理 2.21。运算 + 不满足交换律。

这是我尝试证明前一个引理所写的证明。

证明。我们证明 $1+\omega=\omega\neq\omega+1$:

$1+\omega=$序型$(1\times\{0\}\cup\omega\times\{1\},\ R)$，其中按$R$排序 $\{1\times\{0\}\cup\omega\times\{1\}$ 得到 $\{\langle 1,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,...\}$。因此存在一个同构$f$：$\langle 1\times\{0\}\cup\omega\times\{1\},R\rangle\to\omega$，其中$f(1,\ 0)=0$，且对所有$n\in\omega$，$f(n,\ 1)=n$。因此 $1+\omega=\omega$。

$\omega+1=$序型$(\omega\times\{0\}\cup 1\times\{1\},\ R)$，其中按$R$排序 $\{\omega\times\{0\}\cup 1\times\{1\}$ 得到 $\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,...,\langle 1,1\rangle\}$。因此存在一个同构$f$：$\langle\omega\times\{0\}\cup 1\times\{1\},R\rangle\to S(\omega)$，其中对所有$n\in\omega$，$f(n,\ 0)=n$，且$f(1,\ 1)=\omega$。因此 $\omega+1=S(\omega)$。 □

定义 2.22. 我们将序数上的运算 $\cdot$ 定义为 $\alpha\cdot\beta=\text{type}(\beta\times\alpha,R)$，其中 $R=\{\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\alpha',\beta'\rangle:\ \alpha<\alpha'\vee(\alpha=\alpha'\wedge\beta<\beta')\}$。

注意，我们改变了序型运算中 α,β “内部”的顺序。

引理 2.23. 运算 $\cdot$ 是非交换的。

这是我尝试证明前一个引理的过程。

证明。 我们证明 $2\cdot\omega=\omega\neq\omega\cdot 2$:

$\omega\cdot 2=\text{type}(2\times\omega,R)=\text{type}(\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,...,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,...\},R)$。当按照 R 对 $2\times\omega$ 排序时，我们得到 $\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,...,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,...\}\cong\omega+\omega\ncong\omega$。因此 $\omega\cdot 2\neq\omega$。

$2\cdot\omega=$序型$(\omega\times 2,R)=$序型$(\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,...,\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,...\},R)$，其中由$R$确定的序$2\times\omega$给出 $\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,...\}\cong\omega$。因此 $2\cdot\omega=\omega$ □

引理 2.24。 对于任意 α、β、γ，我们有：
(1) $\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)$
$\cdot\gamma$。*(2)* $\alpha\cdot 0=0$。*(3)*
$\alpha\cdot 1=\alpha$。*(4)* $\alpha\cdot S(\beta)$
$=\alpha\cdot\beta+\alpha$。

(5) 若 β是极限序数 $\alpha\cdot\beta=sup\{\alpha\cdot\xi:\ \ \xi<\beta\}$。
(6) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$。

注记 2.25。 右分配律不成立，例如 $(1+1)\cdot\omega=2\cdot\omega=\omega\neq\omega+\omega$。

3. 超限递归

本节中，我们介绍超限递归： 在已知某个函数在较小值上的取值时，据此定义该函数在给定值上的取值，从而定义整个函数。阶乘的定义就是一个例子；$n!=(n-1)!\cdot n$，也就是说，如果知道一个将自然数映射到其阶乘的函数在n 上的取值，就能确定它在$n-1$上的取值。

然而，我们希望函数能以“集族”为取值对象，而这些集族未必构成集合。例如，我们可能希望定义一个取值为任意序数的函数；根据定理 2.5，我们知道不存在包含所有序数的集合。因此，我们引入更一般的概念类。通俗地说，类 是形如 $\{x:\phi\}$ 的集族，其中 ϕ 不受任何限制。并非所有类在 ZFC 中都能形式化地存在，但我们用它们来简化记号。

定义 3.1。 $V=\{x:x=x\}$ 且 $ON=\{x:x$ 是一个序数$\}$。

根据定理 1.4 和 2.5，这些类不是集合，因此，像$x\in ON$ 这样的表述并非字面意义上的表达，而应理解为“x 是一个序数”

下面我们将使用超限归纳法证明，其证明的命题形式为 $\forall x\psi(x)$：证明对于任意 α，都有 $(\forall\beta<\alpha(\psi(\beta)))\Rightarrow\psi(\alpha)$。那么，如果 $\exists\alpha(\neg\psi(\alpha))$，就存在一个最小的此类 α。但对于每个 $\beta<\alpha$，都有 $\psi(\beta)$，因此 $\psi(\alpha)$，矛盾。

例 3.2。 引理 2.8 和 2.9 的证明都是超限归纳法证明。

定义在a 上的函数可以根据以下关于a的信息通过递归来定义：

定理 3.3 (超限递归)**.** 若 $F:V\to V$，则存在唯一的 $G:ON\to V$，使得 $\forall\alpha(G(\alpha)=F(G|_\alpha))$。

证明。 唯一性：假设 $\forall\alpha(G_1(\alpha)=F(G_1|_\alpha))$ 和 $\forall\alpha(G_2(\alpha)=F(G_2|_\alpha))$。进一步假设 $\forall\beta<\alpha(G1(\beta)=G_2(\beta))$，以便通过超限归纳进行证明，
$\Rightarrow\forall\beta<\alpha(F(G_1|_\beta)=F(G_2|_\beta))$
$\Rightarrow\forall\beta<\alpha(\forall\gamma<\beta(F(G_1(\gamma))=F(G_2(\gamma))))$
$\Rightarrow\forall\beta<\alpha(G_1(\beta)=G_2(\beta))$
$\Rightarrow\forall\beta<\alpha(F(G_1(\beta))=F(G_2(\beta)))$

$\Rightarrow F(G_1|_\alpha) = F(G_2|_\alpha) \Rightarrow G_1(\alpha) = G_2(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha$
$(G_1(\alpha) = G_2(\alpha))$，根据超限递归。

存在公理：我们称 g 是一个 δ-逼近，如果 $\forall \alpha < \delta(\mathrm{g}(\alpha) = \mathrm{F}(\mathrm{g}|_\alpha))$. 那么，如果 g 和 g′ 分别是 δ-和 δ'-逼近，则 $\mathrm{g}|_{(\delta \cap \delta)} = \mathrm{g}'|_{(\delta \cap \delta)}$（根据唯一性证明中的相同论证）。假设对于所有 $\delta < \delta'$，都存在一个 δ-逼近 g。于是定义 $\mathrm{g}'|_{\delta'} = \mathrm{g}|_{\delta'} = \mathrm{g}$，并且 $\mathrm{g}'(\delta') = \mathrm{F}(\mathrm{g})$（这是良定义的，因为逼近是唯一的）。那么 g′ 是一个 δ'-逼近。接着，我们可以定义 $\mathrm{G}(\alpha) = \mathrm{g}(\alpha)$，其中 g 是任意 $\delta > \alpha$ 的 δ- 逼近。□

例3.4. 例如，我们可以使用超限递归来定义如下对象：

$n_0 = 0 n_{i+1} = n_i + i$ 对所有
$i \in \omega$。

也就是说，$\{n_0, n1, \ldots\} = \{0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$。

我们也可以将引理2.20作为定义，通过递归来定义 $\alpha + \beta$。

再举一个例子，我们用递归来定义序数幂运算，它不同于定义4.12中给出的基数幂运算：

例3.5.（序数幂运算）
$\alpha^0 = 1 \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$若 β 是极限序数，
则 $\alpha^\beta =$ 上确界$\{\alpha^\xi : \xi < \beta\}$。

4. 基数

本节将介绍基数的概念，它大致用于说明两个集合何时具有相同的“基数”。接着，我们会介绍一些便于计算的结果，并证明康托尔定理4.10：一个集合与其幂集的基数不同基数。

定义4.1. 如果存在从A 到B的单射，我们记作$A \lesssim B$；如果存在从A 到B的双射，我们记作 $A \approx B$。

定理 4.2. $A \lesssim B,\ B \lesssim A \Rightarrow A \approx B.$

根据定理 2.11，任意良序都有唯一一个与之同构的序数；然而一般来说，与良序集存在双射的序数并不唯一。例如，对每个 $n \to n-1$ 都有一个双射 $\omega \to \omega + 1$，且 $\neq 0$ 和 $0 \to \omega$。这个双射不是同构，因此 ω 和 $\omega + 1$ 是不同的序数，但由于它们之间存在双射，我们认为它们的基数相同。

定义 4.3. 良序集 A 的基数 （或基数） $|A|$ 是满足条件 α s.t. $\alpha \approx A$的最小序数。

序数 α 是一个基数，如果 $\alpha = |\alpha|$。今后我们用 κ 表示一个基数。

集合 A 是有限的，当 $|A| < \omega$ （否则它是无限的）；它是可数的，当 $|A| \leq \omega$ （否则它是不可数的）。

例 4.4. 序数 ω 是一个基数，因为它是最小的无限序数，因此它不可能与任何更小的序数存在双射。

例 4.5. 设 S 为 ω的所有有限子集构成的集合，它由幂集公理和概括公理推出存在，则 $|S| = \omega$；我们按如下方式对S进行排序：$S = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\{2\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\},...\}$。然后定义一个双射 $S \to \omega$，令$s \to n$，其中n 是$s \in S$ 在我们所取序中的位置。

定理4.6。 对于任意基数 κ和 λ，我们有 $|\kappa+\lambda| = |\lambda+\kappa| = |\kappa\cdot\lambda| = |\lambda\cdot\kappa| = |\kappa\times\lambda| = max\{\kappa,\lambda\}$。

证明。 我们首先通过超限归纳证明 $|\kappa \times \kappa| = \kappa$。假设对所有 $\alpha < \kappa$，都有 $|\alpha \times \alpha| < \kappa$。定义如下序：当且仅当 $\langle\alpha,\beta\rangle \ll \langle\gamma,\lambda\rangle$

$$\max\{\alpha,\beta\} < \max\{\gamma,\lambda\} \vee (\max\{\alpha,\beta\} = \max\{\gamma,\lambda\} \wedge (\alpha < \gamma \vee (\alpha = \gamma \wedge \beta < \lambda)).$$

那么，对每个 $\langle\alpha,\beta\rangle$，我们都有 $|\{\langle\alpha',\beta'\rangle : \langle\alpha',\beta'\rangle \ll \langle\alpha,\beta\rangle\}| \leq |(\max\{\alpha,\beta\}+1)\times(\max\{\alpha,\beta\}+1)| < \kappa$，因为 κ是一个基数，因此 $\max\{\alpha,\beta\}+1 < \kappa$。也就是说，每个元素的较小元素都少于 κ个，因此序型$(\kappa\times\kappa, \ll) \leq \kappa$，于是 $|\kappa\times\kappa| \leq \kappa$，并且显然 $|\kappa\times\kappa| \geq \kappa$。

令 $\kappa = max\{\kappa,\lambda\}$，则 $|\kappa| = |\kappa\times\kappa| \geq |\kappa\times\lambda|$ 且 $|\kappa| \leq |\kappa\times\lambda|$ 因此 $|\kappa| = |\kappa\times\lambda|$。 □

例 4.7. 我们有 $|\omega+1| = \omega = |\omega|$，尽管 $\omega \neq \omega+1$。

定义 4.8. 我们用 κ^+ 表示大于 κ的最小基数。

现在我们使用超限递归来定义如下对象：

$\omega_0 := \omega$
$\omega_{\alpha+1} := (\omega_\alpha)^+$
若 γ是极限序数 ω_γ：
=上确界$\{\omega_\alpha : \alpha < \gamma\}$。

引理 4.9. 如果 $A \lesssim B$，那么 $|A| \leq |B|$。

定理 4.10。 康托尔定理。对于任意良序集 X，我们有 $|X| < |P(X)|$。

证明。 存在一个单射 $\psi : x \to P(x)$，由 $a \to \{a\}$ 给出，因此根据引理 4.9， $|x| \leq |P(x)|$ 。假设存在一个双射 $\phi : x \to P(x)$。定义 $S = \{a \in x : a \notin \phi(a)\}$。那么 $S \in P(x)$，所以那里

存在一个 s S，使得 $\phi(s) = S$。若 $s \in S$，则 $s \notin S$；若 $s \in S$，则 $s \notin S$。无论哪种情况都会导致矛盾，因此不存在这样的双射，从而 $|x| \neq |P(x)|$。□

根据幂集公理和概括公理，我们可以定义：

定义4.11。 对于任意集合A，B我们定义$^BA := \{f \in P(B \times A) : f$是一个函数 $\wedge dom(f) = B \wedge ran(f) \subseteq A\}$。

定义4.12。 基数幂运算由 $\kappa^\lambda := |^\lambda \kappa|$ 给出。

这里的记号与序数幂运算3.5相同，但它们是不同的运算。下文中我们将始终使用这个记号来表示基数幂运算。

例4.13。 集合 2^ω 是一个基数。

引理 4.14. 对于 $\kappa \geq \omega$，我们有 $2^\kappa = |P(\kappa)|$。

这是我尝试证明前一个引理的过程：

证明。 我们定义一个双射 $\phi\colon P(\kappa) \to^\omega 2$，定义为 $\phi(S) = \{\langle x\ 1\rangle\colon x \in S\} \cup \{\langle y\ 0\rangle\colon y \in \kappa \backslash S\}$。

□

由引理 4.14 和定理 4.10，我们得到如下结论。

推论 4.15. 严格不等式 $\omega < 2^\omega$ 成立。

定义 定义 4.16. 极限序数 κ 若每个无界子集 $C \subseteq \kappa$ 的基数都为正则 κ.

引理 4.17. 极限序数 κ 是正则的，当且仅当 $< \kappa$ 个基数为 $< \kappa$ 的集合的并集 κ 的基数为 $< \kappa$。

推论 4.18. 序数 ω 是正则的。

证明。 有限集的任何有限并都是有限的。 □

5. 马丁公理

我们已经证明了 $\omega \neq 2^{\omega}$，现在我们感兴趣的是 $\omega^{+} = 2^{\omega}$ 是否成立，也就是说，是否存在 κ 使得 $\omega < \kappa < 2^{\omega}$。在本节中，我们介绍马丁公理，然后说明，如果我们接受它，那么无限基数 $\kappa < 2^{\omega}$ “表现得”像 ω，因为对于 $\omega \leq \kappa < 2^{\omega}$，本节中问题 1 至 4 的答案都是“是”。

定义 5.1. 连续统假设（CH）是命题 $\omega_1 = 2^{\omega}$。

CH 独立于 ZFC，因此我们可以将它或它的否定作为 ZFC 的公理。如果我们拒绝 CH，那么在 ω 和 2^{ω} 之间存在无限基数 κ，因此我们关注以下问题：

问题 1： $2^{\omega} = 2^{\kappa}$ 吗?
问题2：每个基数为 κ 的几乎不交族都不是极大的吗？问题 3： $\mathbb{R}$ 的 κ 个子集的并集（每个子集的勒贝格测度均为 0）是否测度为 0？问题 4： $\mathbb{R}$ 的 κ 个第一纲子集的并集是否仍为第一纲?

我们只讨论问题1和问题2。

定义 5.2. 对于一个无限基数，两个元素 x、$y \subseteq \kappa$是几乎不相交的（a.d.），当且仅当 $|x \cap y| < \kappa$。族 $A \subseteq P(\kappa)$ 是几乎不相交族，当且仅当 $\forall x \in A(|x| = \kappa)$，且任意两个 x、$y \in A$ 都是几乎不相交的。几乎不相交族 A 是极大的，当且仅当不存在真包含 A 的几乎不相交族B 。

例 5.3. 所有偶数和奇数自然数构成的集合A、B 作为 ω 的子集，是几乎不相交的，并且$|A| = |B| = \omega$，因此 $\{A、B\} \subset P(\omega)$ 是一个几乎不相交族。

定理 5.4. 对于 κ 正则的情形，问题*2*的答案是“是”；特别地，对于 $\kappa = \omega$也是如此。

证明。设 $\mathrm{A} = \{\mathrm{A}^{\xi}: \xi < \kappa\}$ 是一个几乎不相交族，且 $|\mathrm{A}| = \kappa$。对每个$\xi < \kappa$，令 $\mathrm{B}^{\xi} = \mathrm{A}_{\xi} \setminus \bigcup_{\eta<\xi} \mathrm{A}^{\eta}$。由于这些 A^{ξ}几乎不相交，$\mathrm{A}_{\eta} \cap \mathrm{A}^{\xi} < \kappa$，那么根据 κ的正则性，我们有 $\bigcup_{\eta<\xi}(\mathrm{A}_{\eta} \cap \mathrm{A}^{\xi}) < \kappa$。因此 $|\mathrm{B}_{\xi}| = |\mathrm{A}_{\xi} \setminus \bigcup_{\eta<\xi} \mathrm{A}_{\eta}| = |\mathrm{A}_{\xi} \setminus \bigcup_{\eta<\xi}(\mathrm{A}_{\eta} \cap \mathrm{A}_{\xi})) \neq 0$，因为 $|\mathrm{A}_{\xi}| = \kappa$。于是 $\mathrm{B}_{\xi} \neq 0$，并且对每个 $\xi < \kappa$，我们选取 $\beta_{\xi} \in \mathrm{B}^{\xi}$。由构造可知，$\mathrm{B}^{\xi}$ 两两不相交，因此 β_{ξ} 彼此不同。令 $\mathrm{D} = \{\beta_{\xi}: \xi < \kappa\}$。那么，如果 $\beta_{\xi} \in \mathrm{A}^{\eta}$，就必有 $\eta \geq \xi$。因此 $\mathrm{D} \cap \mathrm{A}_{\eta} \subseteq \{\beta_{\xi}: \xi < \eta\}$，其基数为 $< \kappa$，所以对每个 η，D,A^{η} 都是几乎不相交的，从而 A 真包含于几乎不相交族 $\mathrm{A} \cup \{\mathrm{D}\}$中。□

例5.5. 考虑$n_0, n_1, n2, \ldots$来自例3.4

再次使用超限递归来定义如下内容：

$N^0 := \{n_0, n_1, \ldots\} = \{0, 1, 3, 6, 10, \ldots\}$
$N^i := N^{i-1} + 1$ 其中“+1”表示将每个坐标都加 1。

例如，$N^1 = \{1,2,4,7,11,...\}$ 和 $N^2 = \{2,3,5,8,12,...\}$。

可以验证，每一对N^i，N_j至多共享$i-j$个元素，其中$i > j$。于是$N = \{N^i : i \in \omega\}$是一个由 ω 的子集构成、基数为 ω的几乎不交族。

令$N_i \backslash K_i$ 为集合N_i，其中删去元素集合K_i；对于某个$j < i$，这些元素包含在N_j 中。根据选择公理，我们可以构造一个集族S，从每个$N_i \backslash K_i$ 中取一个元素；由于$N_i \backslash K_i \neq \varnothing$ 对所有 i 都成立（因为<style id='K'>$_i$ 是有限的，而N_i 是无限的），因此该集族的基数为 ω。于是S与每个N^i几乎不交，因为每个N_i与S至多共享$i+1$个元素。因此，几乎不交族N 不是极大的。

注 5.6。 定理中关于子集基数为 κ的条件不能放宽。

这是我尝试证明上一条注释的过程。

证明。 我们给出一个反例。由所有有限子集组成的集合S ω 再加上集合 ω 本身，根据例 4.5，其基数为 ω。它是一个几乎不交族，并且是极大的，因为任何不包含于 S 中的 ω 子集x 都有无限基数，所以 $|x \cap \omega| = \omega$；因此S是极大的。□

备注 5.7。 定理中关于几乎不交族必须具有基数 ω这一条件，同样不能放宽。

这是我对上一条备注的证明尝试。

证明。 显然，$\{\omega\}$ 是一个几乎不交族，并且是极大的，因为任何包含 ω 的几乎不交族都不能包含 ω中任何与 $\omega \in \{\omega\}$几乎不交的其他无限子集。□

备注 5.8。 定理 5.4 的逆命题不成立。

证明。 由佐恩引理，存在一个基数为 $\geq \kappa^+$ 的极大几乎不交族F（因为任何基数为 κ的几乎不交族都真包含于另一个几乎不交族中），因此我们可以从F 中移除一个元素，使其基数仍为 $\geq \kappa^+$，仍是几乎不交族，但不再是极大的。□

为了陈述马丁公理，我们给出以下四个定义。

全文中，P 表示一个偏序。P 的元素称为条件，我们称p扩展q，即$p \leq q$。

定义 5.9。 若存在$d \in P$，使得$d \leq p \wedge d \leq q$，则称$p,q \in P$中的两个元素相容。如果p,q不相容，我们称它们不相容，并记作$p \perp q$。

若$S \subseteq P$ 是P 的一个反链，则其中任意两个不同元素都不相容 .

如果P 中不存在不可数反链，我们就说P 满足可数链条件 （c.c.c.）。

例 5.10. 在布尔代数中， $\mathcal{B}$两个元素$a,b \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$不相容，当且仅当$a \wedge b = 0$。

例5.11。 令 $\mathcal{K} = \{p:\ p$是一个函数 $\wedge p \subset \omega \times 2 \wedge |p| < \omega\}$。令 $p \leq q$当且仅当 $q \subseteq p$。那么$\langle \mathcal{K}, \leq \rangle$是一个偏序。下文中我们用 $\langle \mathcal{K}, \leq \rangle$表示这个偏序。

那么两个元素 p， $q \in \mathcal{K}$相容，当且仅当 $\forall x \in dom(p) \cap dom(q)(p(x) = q(x)$。这是因为 p， q都是将 p限制在 $dom(p) \cap dom(q)$ 上所得函数的扩展。如果 p， q相容，那么 $p \cup q$是二者的一个扩展。

例5.12。 考虑 1.10 中的偏序 P 。那么两个人 x， y 相容，当且仅当他们有共同的后代，因此所有没有子女的人的集族是 P 中的一个反链。由于人数有限，它满足可数链条件。

例 5.13。设 $\mathrm{P} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) : \mathrm{a} < \mathrm{b}, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}\}$，并且当且仅当 $[\mathrm{a},\mathrm{b}] \subseteq (\mathrm{c}, \mathrm{d})$ 时，$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \leq (\mathrm{c}, \mathrm{d})$。设 $\mathrm{S} \subset \mathrm{P}$ 是一个反链，那么对每个属于 $\in \mathrm{S}$ 的区间 (a,b)，我们都能找到一个有理数 $\mathrm{q} \in (\mathrm{a},\mathrm{b})$，因为 $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$，并且 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$中是稠密的（这里指拓扑意义上的稠密，而非定义 5.15 中的稠密）。因此 S 是可数的，因为 $\mathbb{Q}$ 是可数的，所以 P 满足可数链条件。

更一般地说：

引理 5.14。 如果 X 是一个可分拓扑空间，那么 X 中不存在不可数族两两不相交的开子集。

这里，X 可分是指 X 含有一个可数稠密子集。

证明。 设D 是X 的一个可数稠密子集（由于X 是可分的，这样的子集存在）。设 $\{U_\alpha\}$是X中两两不相交的开子集族。那么对于每个$U\alpha$，存在$d \in D$使得$d \in U\alpha$。因此，由于D 是可数的， $\{U_\alpha\}$ 是可数的。□

定义5.15。 若子集$A \subseteq P$ 在偏序P 中是稠密的，则 $\forall p \in P(\exists d \in D(d \leq p)$).

特别地，P 在P 中是稠密的，但我们关注的是更小的稠密子集。

例5.16。 子集 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$ 中按其通常的序是稠密的。

例5.17。 如果我们将例1.10中的偏序反向，那么所有女性组成的集族是稠密的，因为每个人都有一位女性祖先。

例5.18。考虑例5.11中的偏序 $\mathcal{K}$ 。令 $\mathrm{E}_h := \{\mathrm{f} \in \mathcal{K} : \exists \mathrm{x} \in \mathrm{dom}(\mathrm{f}) : \mathrm{f}(\mathrm{x}) \neq \mathrm{h}(\mathrm{x})\}$，其中 $\mathrm{h} \in^\omega 2$。令 $\mathrm{f} \in \mathcal{K}$。由于 dom(h) 是无限的，而 dom(f) 是有限的$\exists \mathrm{x} \in \mathrm{dom}(\mathrm{h})\backslash \mathrm{dom}(\mathrm{f})$。于是我们可以将 f 延拓为某个 g，使得 $\mathrm{dom}(\mathrm{g}) = \mathrm{dom}(\mathrm{f}) \cup \{\mathrm{x}\}$，并定义

$g(x) \neq h(x)$。于是 g 的定义域有限，且与 h 不同，因此 $g \in E_h$，并且 $g \leq f$。因此，E_h 在 $\mathcal{K}$中稠密。

设$D_n = \{f \in \mathcal{K} : n \in dom(f)\}$。那么$D_n$也稠密，因为对于任意$f \in \mathcal{K}$，若$n \notin dom(f)$，我们都可以将$f$扩展为函数$g$，使得$n \in dom(g)$。

定义 5.19。 P 上的滤子G 是P的一个子集，满足：

1) $\forall p, q \in G(\exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)).2) \ \forall q \in G(p \geq q \Rightarrow p \in G).$

例 5.20。 某个人（任意一个人）的所有祖先构成的集合，是 1.10 中偏序下的一个滤子。

定义 5.21。 马丁公理(κ)是如下命题：若 $\langle P \leq \rangle$ 是一个基数为 κ 的偏序，且 $\mathcal{D}$ 是P的 $\leq \kappa$ 个稠密子集组成的集族，那么存在一个滤子G，使得 $\forall D \in \mathcal{D}(G \cap D \neq 0)$。

公理。 马丁公理。 马丁公理(κ) 对所有 $\kappa < 2^{\omega}$ 成立。

例5.22。 例1.10中的偏序里的任何稠密集都必须包含所有没有子女的人，因此，由某个（任意一个）没有子女的人的所有祖先组成的滤子与任意多个稠密集都有交集。

引理5.23。 马丁公理(2^{w})不成立。

证明。 我们给出一个反例：

考虑例5.11中的 $\mathcal{K}$。

设 G 是P上的一个滤子。那么，由于G 中的任意两个元素都相容，我们可以将$f_G := \bigcup G$定义为G中所有函数的共同扩张。

定义 $\mathcal{D} = \{\{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in {}^{\omega}2\}\}$，其中 E_h和 D_n是例5.18中的稠密集。于是 $|\mathcal{D}| = \omega + 2^{\omega} = 2^{\omega}$ 由定理4.6可知。

现在，若 $\forall \mathrm{D} \in \mathcal{D}(\mathrm{G} \cap \mathrm{D} \neq 0)$，那么对于每个 $\mathrm{n} \in \omega$，都存在一个函数 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，使得 $\mathrm{n} \in \mathrm{dom(g)}$；由于 f_G 扩展了它们所有，$\mathrm{dom}(\mathrm{f}_G) = \omega$。此外，对于每个函数 $\mathrm{h} \in {}^{\omega}2$，都存在一个函数 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ 与 $\mathrm{h}|_{dom(g)}$ 不同；由于 f_G 扩展了 G ∈中的所有 g，我们有 f_G 与 h 不同。因此，$\mathrm{f}_G \in {}^{\omega}2$ 并且与所有 $\mathrm{h} \in {}^{\omega}2$都不同，这就产生了矛盾。□

引理5.24. 马丁公理(ω)成立。

证明。设 $\langle \mathrm{P} \leq \rangle$ 是基数为 ω 的偏序，并设 $\mathrm{D} = \{\mathrm{D}_n : \mathrm{n} \in \omega\}$ 是由稠密子集构成的族。固定 $\mathrm{p}_0 \in \mathrm{P}$，并对每个 n 选取 $\mathrm{p}_n \in \mathrm{D}_n$，使得 $\mathrm{p}_n \leq \mathrm{p}_{n-1}$；这是可能的，因为 D_n 是稠密的。定义 $\mathrm{G} := \{\mathrm{q} \in \mathrm{P} : \exists \mathrm{n}(\mathrm{p}_n \leq \mathrm{q})\}$，则 G 是一个滤子，且 $\forall \mathrm{D}_n \in \mathrm{D}(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}_n \neq 0)$。□

现在我们用以下偏序来回答问题1和问题2:

定义 5.25. 对于 $A \subseteq P(\omega)$ 的几乎不交集偏序 P_A 为

$$\{\langle s, F\rangle : s \subset \omega \wedge |s| < \omega \wedge F \subseteq A \wedge |F| < \omega\}$$

其中 $\langle s', F'\rangle \leq \langle s, F\rangle$ 若 $s \subseteq s' \wedge F \subseteq F' \wedge \forall x \in F(x \cap s' \subseteq s)$。

引理 5.26. P_A 中的两个元素 $\langle s_1, F_1\rangle$ 和 $\langle s_2, F_2\rangle$ 相容，当且仅当 $\forall x \in F_1(x \cap s_2 \subseteq s_1) \wedge \forall x \in F_2(x \cap s_1 \subseteq s_2)$。

证明。 P_A 中的两个元素 $\langle s_1, F_1\rangle$ 和 $\langle s_2, F_2\rangle$ 相容
$\iff \langle s_1 \cup s_2, F_1 \cup F_2\rangle$ 扩张 $\langle s_1, F_1\rangle$ 和 $\langle s_2, F_2\rangle \iff \forall x \in F_1(x \cap (s_1 \cup s_2) \subseteq s_1) \wedge \forall x \in F_2(x \cap (s_1 \cup s_2) \subseteq s_2) \iff \forall x \in F_1(\forall n \in x \setminus s_1 (n \notin s_1 \cup s_2) \wedge \forall x \in F_2(\forall n \in x \setminus s_2 (n \notin s_1 \cup s_2) \iff \forall x \in F_1(\forall n \in x \setminus s_1 (n \notin s_2) \wedge \forall x \in F_2(\forall n \in x \setminus s_2 (n \notin s_1) \iff \forall x \in F_1(x \cap s_2 \subseteq s_1) \wedge \forall x \in F_2(x \cap s_1 \subseteq s_2)$。 □

定理 5.27。 假设 *MA(k)*。若 $A, C \subseteq P(\omega)$ 满足 $|A| \leq k$ $|B| \leq k$，且对所有 $y \in C$ 及所有有限集 F $|y \setminus \bigcup F| = \omega$，则存在 $d \subseteq \omega$ 使得 $\forall x \in A(|d \cap x| < \omega)$ 且 $\forall x \in C(|d \cap x| = \omega)$

证明。对 $\mathrm{y} \in \mathrm{C}$ 和 $\mathrm{n} \in \omega$，令 $\mathrm{E}_n^y = \{\langle \mathrm{s}, \mathrm{F}\rangle \in \mathrm{P}_A : \mathrm{s} \cap \mathrm{y} \not\subset \mathrm{n}\}$。我们先证明 E_n^y 在 P_A 中稠密：设 $\langle \mathrm{s}, \mathrm{F}\rangle \in \mathrm{P}_A$，那么对于 $\mathrm{m} \in \mathrm{y} \setminus \bigcup \mathrm{F}$ 且 $\mathrm{m} > \mathrm{n}$，我们有 $\langle \mathrm{s} \cup \mathrm{m}, \mathrm{F}\rangle$ 延伸 $\langle \mathrm{s}, \mathrm{F}\rangle$，因为 $\{\mathrm{m}\} \notin \bigcup \mathrm{F}$，因此对于 $\mathrm{x} \in \mathrm{F}$，有 $\mathrm{x} \cap \mathrm{s} \cup \{\mathrm{m}\} = \mathrm{x} \cap \mathrm{s} \subseteq \mathrm{s}$。此外，$\mathrm{s} \cup \{\mathrm{m}\} \cap \mathrm{y} \not\subset \mathrm{n}$，因为 $\mathrm{m} > \mathrm{n}$，所以 $\langle \mathrm{s} \cup \mathrm{m}, \mathrm{F}\rangle \in \mathrm{E}_n^y$。

对于 $x \in A$，令 $D_x = \{\langle s, F\rangle : x \in F\}$。我们证明 D_x 是稠密的：对于 $\langle s, F\rangle \in P_A$，有 $\langle s, F \cup \{x\}\rangle \in D_x$，且显然它扩张了 $\langle s, F\rangle$。

令 $D = \{\{D_x : x \in A\} \cup \{E_n^y : n \in \omega \wedge y \in C\}\}$。那么根据马丁公理(k)，存在一个滤子 G，使得 $\forall D \in D(G \cap D \neq 0)$。

令 $\mathrm{d}_G = \bigcup \{\mathrm{s} : \exists \mathrm{F}(\langle \mathrm{s}, \mathrm{F}\rangle \in \mathrm{G})\}$。那么，如果 $\langle \mathrm{s}, \mathrm{F}\rangle, \langle \mathrm{s}', \mathrm{F}'\rangle \in \mathrm{G}$，则它们相容，因此 $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{F}(\mathrm{x} \cap \mathrm{s}' \subseteq \mathrm{s})$，根据引理 5.26。因此，（由于 $\langle \mathrm{s}', \mathrm{F}'\rangle$ 是任意的） $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{F}(\mathrm{x} \cap \mathrm{d}_G \subseteq \mathrm{s})$。

由于 $D_x \cap G \neq 0$ 对于 $x \in A$，于是 $x \in F$，其中 $\langle s, F\rangle \in G$。因此 $x \cap d_G \subseteq s$，所以 $\forall x \in A(|x \cap d_G| < \omega)$。

此外，对于 $y \in C$，我们有 $\forall n(y \cap d_G \not\subset n)$，因此 $|y \cap d_G| = \omega$。所以，$d = d_G$ 可行。 □

推论5.28。 假设马丁公理(κ)成立。那么对于 $\omega \leq \kappa < 2^\omega$，问题*2*的答案是“是”。

证明。设 $A \subset P(\omega)$ 是一个几乎不交族，且 $|A| = \kappa$。我们证明，对于所有有限集 $F \subset A$，都有 $|\omega \setminus \bigcup F| = \omega$。假设 $|\omega \setminus \bigcup F| < \omega$，那么对于 $x \in A \setminus \bigcup F$，我们有 $|x| = \omega$（因为 A 是一个几乎不交族），并且 $|x \cap \bigcup F| = \omega$，因为 $|x \cap \omega| = \omega$ 且 $|x \cap (\omega \setminus \bigcup F)| < \omega$。由于 F 是有限集，存在某个 $y \in F$，使得 $|x \cap y| = \omega$，这与 A 是几乎不交族矛盾。

因此，定理 5.27 可应用于 $C = \{\omega\}$，所以存在一个 d，它与 A 的所有元素都几乎不相交，因此 A 不是极大的。□

定理 5.29。假设马丁公理 (k) 成立。那么对于 $\omega \leq \kappa < 2^{\omega}$，问题 *1* 的答案是“是”。

证明。对于满足 $|B| = k$ 的 $A \subset B \subseteq P(\omega)$，其中 $|\omega \leq k < 2^{\omega}|$，且 B 几乎不相交，我们有定理 5.27 可应用于 $A = A$ 和 $C = B \setminus A$。因此存在一个 $d \subseteq \omega$，使得 $\forall x \in A(|d \cap x| < \omega)$，且 $\forall x \in B \setminus A(|d \cap x| = \omega)$ (*)。

定义 $\phi: P(\omega) \to P(B)$ 为 $\phi(d) = \{x \in B: |x \cap d| < \omega\}$。

由 (*) 可知，对于任意 $A \in P(B)$，存在 $d \in P(\omega)$，使得 $\phi(d) = A$，因此 ϕ 是满射。于是，根据引理 4.14，$2^{\omega} = |P(\omega)| \geq |P(\kappa)| = 2^{\kappa}$。然后由 $2^{\omega} \leq 2^{\kappa}$ 可得该定理。□

6. 马丁公理的等价形式

在最后这一节中，我们给出马丁公理的等价形式，其中一个令人惊讶的是纯粹的拓扑命题。

定义 6.1. 设 X 是一个拓扑空间。分别用 $int(b)$ 和 $cl(b)$ 表示 b 的内部和闭包。

若子集 $b \subseteq X$ 满足正则 （在拓扑意义下），即 $b = int(cl(b))$。$ro(X)$ 是 X 的正则开集代数，由 $b \subseteq X$ 中的正则开子集构成，其运算定义为 $b \wedge c = b \cap c$，$v \vee c = int(cl(b \cup c))$，而 b 的补集为 $b' = int(X \setminus b</style>)$。

定义 6.2. 如果每个子集都有上确界和下确界，则称布尔代数为完备的。

引理 6.3. 设 P 为一个偏序。存在一个完备布尔代数 $\mathcal{B}$，称为 P 的完备化，以及一个映射 $i: P \to \mathcal{B} \setminus \{0\}$，使得：

(1) $i''P$ 在 $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ 中稠密。*(2)* $\forall p, q \in P$ $(p \leq q \Rightarrow i(p) \leq i(q))$。*(3)* $\forall p, q \in P$ $(p \perp q \iff i(p) \wedge i(q) = 0)$。

证明。令 $N_p = \{q \in P: q \leq p\}$，并在 P 上定义一个以 $\{N_p: p \in P\}$ 为基的拓扑。接着定义 $\mathcal{B} = ro(P)$ 和 $i(p) = int(cl(N_p))$。若 $q \in N_p$，则 $1 \leq p$，因此 $N_q \subseteq N_p$。我们验证它们满足 (1)-(3)：

令$b \neq 0 \in ro(X)$。若$p \in b$，则$N_p \subseteq b$，所以$i(p) = int(cl(N_p)) \subseteq int(cl(b)) = b$。因此得到 (1)。

设$p, q \in P$ s.t. $p \leq q$，则$i(p) = N_p \subseteq N_q = i(q)$。因此得到（2）。

如果 p、q 相容，则存在某个 r $\leq$p、q。于是 i(r) $\leq$i(p),i(q)，从而 i(p) $\wedge$i(q) $\neq 0$。反之，如果 p、q 不相容，则 $N_p \cap N_q = 0$，因此 cl(N_p) $\cap N_q = 0$，因为 N_q 是开集，所以 i(p)$\cap N_q$ = int(cl(N_p)) $\cap N_q = 0$，因为 int(cl(N_p)) $\subseteq$ cl(N_p))。于是 i(p) $\cap$cl(N_q) $= 0$，因为 i(p) 是开集，所以 i(p)$\cap$i(q) $=$i(p)$\cap$int(cl(N_q)) $= 0$。因此得到（3）。□

这为我们提供了一种将布尔代数与偏序关联起来的方法。

例6.4。 如果P 中的任意两个元素都相容，那么P 的完备化 $\mathcal{B}$ 就是含两个元素的布尔代数:

这是我尝试证明这一点的过程。

设$a \in i''P$。那么$a' \notin i''P$，因为$a \wedge a' = 0$；所以，如果它们在i中都有原像，那么根据(3)，它们就不相容。

那么，要么 a′ = 0，要么 $\exists$b $\in$ i″P，使得 b <a′，这是由 i″P 在 $\mathcal{B}\backslash\{0\}$ 中的稠密性得出的。如果 $\exists$b $\in$ i″P，使得 b < a′，那么根据 a 和 b 的原像相容这一点，我们有 a $\wedge$ b = d $\neq 0$。但这样一来，d $\leq$a 且 d $\leq$b < a′，因此 a $\wedge$a′ $\geq$ d $\neq 0$，矛盾。

因此，$a' = 0$，然后$a = 1$，即 $\forall p \in P$，我们有$i''(p) = 1$。然后，由于$i''P$稠密，我们有$\forall q \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$ $(q \geq 1)$，即 $\mathcal{B}$ 是含两个元素的布尔代数。

定义 6.5. 偏序P 的一个超滤子 是P 上的一个滤子，它不被P上的任何其他滤子真包含。

定理 6.6. 对于任意 $\kappa \geq \omega$ 等价:

1) 马丁公理(κ)。*2)* 马丁公理(κ) 限制于基数为 $\leq \kappa$的偏序。*3)* 马丁公理(κ)限制于完备布尔代数，即限制于形如$\mathcal{B}\backslash\{0\}$的偏序，其中 $\mathcal{B}$ 是完备的可数链条件布尔代数。*4)* 对于任意紧致的可数链条件豪斯多夫空间 X，若 U_α 是 X 的稠密开子集（ $\alpha < \kappa$），则$\cap_\alpha U_\alpha \neq 0$。

证明。 我们只证明 (4)⇒(3)、(1)⇒(4) 和 (3)⇒(2)，接下来只需证明 (2)⇒(1)。

(4)⇒(3):

设 $\mathcal{B}$ 是一个可数链条件布尔代数（我们不要求 $\mathcal{B}$ 完备）。设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个由 $\leq$个k 稠密子集组成的集族。

定义如下:

X =在 $\mathcal{B}$ 上的斯通空间，由 $\mathcal{B}$ 上的超滤子组成，$N_b = \{G \in X : b \in G\}$ 对每个 $b \in \mathcal{B}$ 和 $W_D = \bigcup\{N_b : b \in D\}$ 对每个 $D \in \mathcal{D}$。

那么，X 是豪斯多夫空间，N_b 是 X 中的基本开集，并且对于任意 $N_c, N_b \in X$，我们有 $N_c \cap N_b = 0 \iff b \wedge c = 0$，因此 X 满足可数链条件，因为 $\mathcal{B}$ 也满足。

在拓扑意义上，W_D 是开且稠密的：由于 D 在序意义上稠密，对于任意 $c \in \mathcal{B}$，都存在 b，使其是 c 的扩展。因此，$b \wedge c \neq 0$，从而 $N_c \cap N_b \neq 0$，继而 $N_c \cap W_D \neq 0$。

因此，我们可以应用 (d) 来定义滤子 $G \in \bigcap\{W_D : D \in \mathcal{D}\}$。那么，对于每个 $D \in \mathcal{D}$，我们有 $G \in W_D$，所以 $\exists b(G \in N_b)$，因此 $\exists b(b \in G)$，所以 $G \cap D \neq 0$。

对于 (1)⇒(4)，我们需要以下内容。

定义 6.7. 集合 P 的非空子集族 X 具有有限交性质(FIP)，如果 X 的任意有限子族的交集都非空。

定义偏序 $\langle \mathrm{P} \leq \rangle$：$\mathrm{P} = \{\mathrm{p} \subseteq \mathrm{X}: \mathrm{p} \neq 0$ 在 X 中是开集$\}$ 且 $\mathrm{p} \leq \mathrm{q} \iff \mathrm{p} \subseteq \mathrm{q}$。那么，p、q 不相容当且仅当 $\mathrm{p} \cap \mathrm{q} = 0$；由于 X 满足可数链条件，P 也满足可数链条件。设 G 是 P 上的滤子，则 G 具有有限交性质，因此 $\{\bar{}\mathrm{b}: \mathrm{b} \in \mathrm{G}\}$ 也具有有限交性质，因为 $\mathrm{b} \subseteq \bar{}\mathrm{b}$。拓扑空间紧致当且仅当其任意具有有限交性质的闭集集族$\bar{}$的交集非空。因此 $\bigcap\{\mathrm{b}: \mathrm{b} \in \mathrm{G}\} \neq 0$。那么，对每个 α，集合 $\mathrm{D}\alpha := \{\mathrm{p} \in \mathrm{P}: \bar{}\mathrm{p} \in \mathrm{U}_\alpha\}$ 在 P 中稠密，因为 $\mathrm{U}\alpha$ 在 X 中稠密，且 X 是正则的。根据$\bar{}$马丁公理(κ)，存在一个滤子 G，使得 $\forall \alpha < \kappa(\mathrm{G} \cap \mathrm{D}_\alpha \neq 0)$。于是 $0 \neq \bigcap\{\mathrm{b}: \mathrm{b} \in \mathrm{G}\} \subseteq \bigcap_\alpha \mathrm{U}_\alpha \neq 0$。

(3)⇒(2):

设 P 是一个偏序，$|P| \leq \kappa$，且 $\mathcal{D}$ 是 P 的稠密子集族。设 $\mathcal{B}$ 和 i 满足引理 6.3 的条件。

对于 $b \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$，存在 $i(p) \leq b$，因为 $i''P$ 由引理 6.3 (1) 可知在 $\mathcal{B}$ 中稠密。于是存在 $d \in D$，使得 $d \leq p$，因为 D 在 P 中稠密。因此 $i(d) \leq i(p) \leq b$，所以 $i''D$ 在 $\mathcal{B}$ 中稠密。

因此，我们可以将 $MA(k)$ 限制在布尔代数上应用，从而得到一个滤子 G，它与每个 $i''D$ 相交，其中 $D \in \mathcal{D}$。接着，对于 $H := i^{-1}(G)$，有 $H \cap D \neq 0$。

现在我们验证 H 是一个滤子。

若 $P \ni p \geq h \in H$，则 $\mathcal{B} \ni i(p) \geq i(h) \in G$，由引理 6.3 (2) 可知；又因为 G 是一个滤子，所以 $i(p) \in G$，因此 $p \in H$。

令 $\mathrm{D}_{pq} = \{\mathrm{r} \in \mathrm{P} : (\mathrm{r} \leq \mathrm{p} \wedge \mathrm{r} \leq \mathrm{q}) \vee \mathrm{r} \perp \mathrm{p} \vee \mathrm{r} \perp \mathrm{q}\}$ 对所有 $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathrm{P}$ 均成立。那么每个 D_{pq} 在 P 中稠密；令 $\mathrm{r}_0 \in \mathrm{P}$。若 $\exists \mathrm{r}_1 \leq \mathrm{r}_0$ 使得 $\mathrm{r}_1 \perp \mathrm{p} \vee \mathrm{r}_1 \perp \mathrm{q}$，则 $\mathrm{r}_1 \in \mathrm{D}_{pq}$。否则，$\mathrm{r}_0$ 的每个扩展都

与p和q相容，特别是r_0也相容。于是 $\exists r_1 \leq r_0,p$，因此r_1与q相容，所以有 $\exists r_2 \leq r_1,q$。于是$r_2 \leq p,q,r_1$，因此$r_2 \in D_{pq}$扩展r_0。

由于 $|P| \leq \kappa$我们有 $|\mathcal{D} \cup \{D_{pq} : p, q \in P\}| \leq \kappa$因此我们假设 $D_{pq} \in \mathcal{D}$。于是 $\exists r \in H \cap D_{pq}$；又由于根据引理 6.3 (3)，$H$ 的元素两两相容，因此我们有 $r \leq p, q$ 且 $r \in H$。因此 H 是一个滤子。□

参考文献

[1] 格奥尔格·康托尔。《关于集合论中的一个初等问题》。载于：《德国数学家协会年报》1 (1890/91)，第 72–78 页。[2] 保罗·J·科恩。《连续统假设的独立性》。载于：《美国国家科学院院刊》50.6 (1963年)。[3] 安德鲁·戴维·欧文和哈里·多伊奇。罗素悖论。爱德华·N·扎尔塔编。https://plato.stanford.edu/archives/spr2021/entries/russell-paradox/。2021年。[4] 肯尼思·库南。集合论：独立性证明导论。2006年。[5] D.A. Martin 和 R.M. Solovay。《内部科恩扩张》。载于：《数学逻辑年刊》2 (1970)。doi：10.1016/0003-4843(70)90009-4。[6] Ernst Zermelo。《集合论基础研究 I》。载于：《数学年刊》65.2 (1908)。