arXiv:2301.08220v1 [math.CO] 19 Jan 2023

几乎所有凯莱映射都是地图正则表示

PABLO SPIGA 和 DARIO STERZI

Abstract. Cayley映射是构建于群上的凯莱图之上的组合结构。因此，原群嵌入其自同构群中，我们可以探究在什么情况下两者相等（此时称该Cayley映射为地图正则表示，或简称 MRR），以及这种情况出现的概率。第一个问题已由 Jajcay 作答。本文探讨其概率版本，并证明随着群的规模增大，所有凯莱映射中地图正则表示所占的比例趋近于 1。

1. Introduction

本节首先定义凯莱图和地图，介绍相关背景并陈述主要定理。第二节将证明该定理。

1.1. 凯莱图。本文只讨论有限群和有限图。按惯例，图 Γ 是一个有序对 (V, E)，其中 V 是有限非空集，E 是 V 的一个 2- 子集族。图的自同构是保持集合 E 不变的 V 上的一个置换；图上的路径是由相邻顶点组成的序列 $v_1, v_2, \ldots, v_n$，即对于所有 i，都有 $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$。顶点 v 的邻域是集合 $\Gamma(v) = \{w \in V | \{v, w\} \in E\}$，其中包含所有通过一条边与它相连的顶点。

设 R 是一个群，S 是 R 的逆封闭子集，也就是说，$S = \{s^{-1} | s \in S\}$。凯莱图 $\mathrm{Cay}(R, S)$ 是满足以下条件的图：$V = R$，且当且仅当 $tr^{-1} \in S$ 时有 $\{r, t\} \in E$，即 $E = \{\{r, sr\} | s \in S, r \in R\}$。施加条件 $S = S^{-1}$ 是为了保证 $tr^{-1} \in S$ 当且仅当 $rt^{-1} \in S$。凯莱图中的路径 $r_0, r_1, \ldots, r_n$，可以等价地用其起点 r_0 以及来自 S 的唯一元素序列 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 来指定，使得 $r_{i+1} = s_{i+1} r_i$。通常我们关注连通凯莱图，即任意两个顶点之间至少存在一条路径。这等价于要求 S 是该群的生成集。本文将始终作此假设。

群 R 的图正则表示（GRR）是一个图，其自同构群是群 R，且该群在图的顶点上正则作用。（如果一个置换群 R 是传递的，并且R 的单位元是唯一能固定定义域中某个点的元素，那么该置换群就是正则的。）容易看出，R 在自身上的右正则作用保持边不变，因此 R 嵌入于

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05C25、05C30、20B25、20B15。
Key words and phrases. 正则表示、Cayley映射、自同构群、渐近计数、图正则表示、图正则表示。

Aut(Cay(R, S))。[1] 因此， R 的图正则表示是一个定义在 R 上的凯莱图，且不具有其他自同构。

20世纪70年代的大部分研究主要致力于确定哪些群容许图正则表示。Godsil 在 [3] 中最终回答了这个问题。Babai 和 Godsil 猜想，除两个自然的群族外，图正则表示不仅存在，而且数量很多；也就是说，随着 $|R| \to \infty$，群 R 上的凯莱图是图正则表示的概率趋于 1。第一作者在阿拉斯加大学费尔班克斯分校举行的 SIGMAP 2022会议上，报告了 [9, 10, 11, 12] 中关于 Babai-Godsil猜想的最新进展。在这次会议期间，Robert Jajcay 提议对凯莱映射进行类似的研究。[2] 下面我们将介绍一些凯莱映射的背景，阐述 Jajcay 提出的问题，并陈述我们的主要结果。

1.2. 图映射与凯莱映射。设 $\Gamma := (V, E)$ 是一个图。给定 $v \in V$，我们用 $\Gamma(v)$ 表示 v 在 Γ 中的邻域。Γ 上的旋转是一个集合 $\rho := (\rho_v)_{v \in V}$，其中每个 $\rho_v : \Gamma(v) \to \Gamma(v)$ 都是 [3] 上 $\Gamma(v)$ 的一个循环序。地图是一个有序对 (Γ, ρ)，其中 Γ 是一个连通图，ρ 是 Γ 的一个旋转。

地图背后的理念是，它们表示可定向曲面上的一种 CW复形结构，其 1-骨架就是给定的图；本质上，这相当于将图嵌入可定向曲面，并将其分割成圆盘。详情请参见[4] 。 ρ_v 是嵌入中与 v 关联的边的循环排序。

直观地说，地图（Γ， ρ）的自同构是一对对象：一个图的自同构，以及一个与该嵌入相容的曲面保向同胚。从组合角度看，这对应于 Γ 的一个自同构（即保持边的顶点置换），它还保持旋转 ρ。为了使这一想法更加严谨，我们稍作迂回。令 Aut(Γ) 为 Γ 的自同构群，令 R（Γ）为 Γ的所有旋转的集合。现在，Aut(Γ) 在 R（Γ）上有一个自然作用：

$$\begin{aligned} R(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(\Gamma) &\longrightarrow R(\Gamma) \\ (\rho, \varphi) &\longmapsto \rho^{(\varphi)}, \end{aligned}$$

其中 $\rho^{(\varphi)}_{v^\varphi} = \varphi^{-1} \rho_v \varphi$，对所有 $v \in V$ 都成立。换言之，顶点v^φ 处的旋转 $\rho^{(\varphi)}$ 在 ρ_v 将 u 映到 w 时，会将 u^φ 映到 w^φ 。现在，地图 $M = (\Gamma, \rho)$ 的自同构是图 Γ 的一个自同构 φ ，满足 $\rho^{(\varphi)} = \rho$，也就是说，

$$\rho_{v^\varphi} = \varphi^{-1} \rho_v \varphi, \quad \text{for each } v \text{ vertex of } \Gamma. \tag{1.1}$$

众所周知 [2] ，如果底层图是连通的，那么映射自同构由其在一条有向边（即一对相邻顶点组成的有序对）上的取值唯一确定。我们简要回顾一下原因：设 φ 是一个映射自同构，w_0、w_1 是相邻顶点，分别映射到 w_0^φ 和 w_1^φ ，而 w_0、w_1、.....、w_t是图中的一条路径。我们可以将这条路径描述为一连串左转和右转；更贴切地说，可以将其类比为在连续经过的环岛上应选择的出口。

[1]我们令自同构从右侧作用，因此用 x^φ 表示顶点x 在自同构 φ下的像，并约定 $x^{\varphi\psi}$ 表示（x^φ）$^\psi$。[2]在本文准备期间，Xia 和 Zheng 宣布已经解决了 Babai-Godsil 猜想，见 [13]。[3]有限集合上的循环序是一种置换，其不含不动点，且其循环分解中只有一个循环。

必定存在自然数 n_i，使得 $i \in \{1,\dots,t-1\}$ 满足 $w_{i+1} = w_{i-1}^{\rho_{w_i}^{n_i}}$。因此，路径 φ（w_0） φ（w_1）.....，φ（w_t）由以下关系唯一确定:

$$w_{i+1}^{\varphi} = w_{i-1}^{\varphi\rho_{w_i^{\varphi}}^{n_i}} \text{ for } i \in \{1,\dots,t-1\}.$$

换言之，连通图上的地图的自同构群在有向边集合上半正则地作用。

现在设 R 是一个群， S 是如上所述的不含单位元且对取逆封闭的生成集。对于每一种循环序 $\mathfrak{r}$： $S \to S$，我们定义 Cayley映射 $CM(R,S,\mathfrak{r}) = (\Gamma,\rho)$ 如下： Γ 是 Cayley图 $Cay(R,S)$，并且对于每个 $g \in R$ 以及每个属于顶点 g 的邻域 $\Gamma(g)$ 的 x，

$$\begin{aligned}\rho_g :\Gamma(g) &\longrightarrow \Gamma(g)\\ x &\longmapsto \rho_g(x) := g\mathfrak{r}(g^{-1}x).\end{aligned}$$

这是唯一一个具有绕单位顶点 $e \in R$ 的指定旋转 $\mathfrak{r}$ 的地图，并且群在 Cayley图上的右正则作用保持该旋转。

从组合角度看，我们可以将 Cayley映射视为一个三元组 $(R,S,\mathfrak{r})$，其中

- R 是一个有限群,
- $S \subseteq R \setminus \{e\}$ 是一个生成集，且包含 $S = S^{-1}$，并且
- $\mathfrak{r}$： $S \to S$ 是一个循环序。

1.3. 地图正则表示与 Jajcay 的问题。给定一个 Cayley 映射 $CM(R,S,\rho)$， R的右正则表示包含在 $CM(R,S,\mathfrak{r})$ 的自同构群中。类似于图正则表示，若 $CM(R,S,\mathfrak{r})$ 满足

$$\mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r})) \cong R.$$

据我们所知，这一定义由 Robert Jajcay 在 [6] 中提出。 [6] 中的定理 7 表明，每个不同构于 $\mathbb{Z}_3$ 或 $\mathbb{Z}_2^2$ 的有限群都具有一个地图正则表示。注意， $CM(R,S,\mathfrak{r})$ 是一个地图正则表示，当且仅当 $CM(R,S,\mathfrak{r})$ 中唯一固定某个顶点的自同构是单位元。

既然地图正则表示的存在性已经确立，研究凯莱映射中地图正则表示的丰富程度便相当自然。事实上，Robert Jajcay 曾提出疑问：如 $|R| \to \infty$ 所述， R 上的凯莱映射中，地图正则表示所占比例是否趋于 1？这一计数问题有多种处理方式，而本文只关注标记凯莱地图：在同一个群上，两个凯莱映射 $CM(R,S,\mathfrak{r})$ 和 $CM(R,S',\mathfrak{r}')$ 被视为相同，当且仅当 $S = S'$ 和 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$。我们成功地给出了肯定答案。

定理1.1。当 $|R| \to \infty$ 时， R 上标记凯莱地图中的地图正则表示所占比例趋于 1。

Xia 和 Zheng [13] 最近宣布，Babai-Godsil猜想已得到肯定解。这意味着，除指数大于 2 的阿贝尔群和广义二面体群外，当 $|R| \to \infty$ 时， R 上的凯莱图以趋近于 1 的概率是图正则表示。我们的工作与 [13], 中的工作有一些关联，例如，两项结果都依赖于 Lubotzky [1] 提出的一个关于群生成的定理。然而，我们的定理1.1与 [13] 中的主要结果之间并无直接推论关系；例如，Babai-Godsil

猜想得到肯定解，并不意味着定理1.1正确。事实上，固定凯莱图 Cay(R, S) 上的Cayley映射数量为 ($|S|-1$)!，因此，大多数 Cayley映射的底层凯莱图的连接集几乎包含整个群，而随机Cayley图的连接集中大约有 $|R|/2$ 个元素。更确切地说：这两个问题考察的是凯莱图空间上不同的边缘概率分布。

2. PROOF OF MAIN THEOREM

在本节中，设 R 为一个有限群，并令 r 表示其阶。

我们研究包含关系 $R \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{CM}(R,S,\mathfrak{r})) \leq \mathrm{Sym}(R)$。我们的策略是证明 R 与 Sym(R) 之间的中间子群要成为 Cayley映射的自同构群必须满足一个必要条件，界定满足该条件的子群数量，然后界定与其中至少一个子群相容的有序对 ($S,\mathfrak{r}$) 的数量。

下面的引理本质上是对 [5] 中相关见解的重新表述。

引理 2.1. 对于任意 Cayley映射 $CM(R,S,\mathfrak{r})$，单位顶点 e 的稳定子 $\mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r}))_e$ 是一个阶小于 $|R|$ 的循环群。若 $\mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r}))_e = \langle\gamma\rangle$，则 $S^\gamma = S$，且限制 $\gamma|_S$ 与 γ 的阶相同，并且它是 $\mathfrak{r}$ 的幂。

证明。固定 e 的自同构会将其邻域 $\Gamma(e) = S$ 映射到自身。

由于该群在有向边上的作用是半正则的，稳定子中的一个元素由其在 S 上的作用唯一确定，即限制映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r}))_e &\longrightarrow \mathrm{Sym}(S)\\ \varphi &\longmapsto \quad \varphi|_S\end{aligned}$$

是单射。

此外，若 $\varphi \in \mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r}))_e$，那么由 (1.1) 可得 $\mathfrak{r} = \varphi^{-1}\mathfrak{r}\varphi$，即 $\varphi|_S \in \mathrm{C}^{\mathrm{Sym}(S)}(\mathfrak{r})$。根据置换群中的标准计算，我们有 $\mathrm{C}^{\mathrm{Sym}(S)}(\mathfrak{r}) = \langle\mathfrak{r}\rangle$。因此，$\mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r}))_e$ 同构于一个循环群的子群，故 $\mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r}))_e$ 是循环群，且其所有元素在 S 上的限制都是 $\mathfrak{r}$ 的幂。□

到目前为止，我们一直采用这样的观点：一个有 r 个元素的群 R 可以通过通常的右正则表示嵌入 Sym(r)。为便于阐述，我们采用等价的表述“R 是 Sym(r) 的一个正则子群”；此处正则是指，对于 $\{1,\dots,r\}$ 中的任意两点，都存在唯一一个 R 中的置换将前者映射到后者。

引理2.2. 对于 Sym(r) 的每个正则子群 R，满足以下条件的 Sym(r) 子群 G 的数量

- $R < G$ 和
- G_1 是循环的，且 $|G_1| \leq r-1$ （其中 G_1 是 G 中 1 的稳定子）

至多为 $2^{7(\log_2 r)^2+12\text{对数}^2 r}$。

证明。给定两个抽象群 G 和 G' 以及 $H \leq G$、$H' \leq G'$，若存在一个群同构 $\phi\colon G \to G'$，满足 $H^\phi = H'$，我们就记作 $(G,H) \sim (G',H')$。显然，$\sim$ 定义了一个等价关系。我们用 $[G,H]$ 表示包含 (G,H) 的 $\sim$-等价类。现在考虑

$$\mathcal{M} = \{[G,H] \mid G \text{由 } (\log_2 r+1) \text{ 生成 } H \leq G, |G| \leq r(r-1), \text{且 } H \text{是循环的}\}.$$

Claim 1: 我们有

$$|\mathcal{M}| \leq 2^{4(\log_2(r))^2+12\log_2 r}. \tag{2.1}$$

由 [1, 定理 1] 结合 [1, 注 3(1)] 可知，阶为 N 且由 d 个元素生成的群的同构类数至多为 $N^{2(d+1)\log_2(N)} = 2^{2(d+1)(\log_2(|N|))^2}$。特别地，将此定理应用于 $d := \log_2(r) + 1$ 以及 $N \leq r(r-1)$，可知由 $(\log_2(r) + 1)$ 个元素生成且阶至多为 $r(r-1)$ 的群的数目至多为 $2^{4(\log_2(r)+2)\log^2 r} \cdot r^2$（注意，第二个因子统计了 N 的选择数： G 的基数）。现在，设 G 为一个阶至多为 $r(r-1)$ 的群。由于 G 至多有 $|G| < r^2$ 个循环子群 H，我们的论断得证。 ■

现在，设 R 是 $\mathrm{Sym}(r)$ 的一个正则子群，并设 $\mathcal{S}_R$ 是 $\mathrm{Sym}(r)$ 中满足 $R < G$、 G_1 为循环群且 $|G_1| \leq r-1$ 的子群 G 构成的集合。由于 $G = RG_1$，且由于任何阶为 r 的群 R 至多需要 $\log_2 r$ 个生成元，因此我们推得 G 至多需要 $\log_2(r)$ 个生成元 $+1$。

Claim 2: 我们有

$$|\mathcal{S}_R| \leq 2^{3(\log_2 r)^2}|\mathcal{M}|. \tag{2.2}$$

每个 $G \in \mathcal{S}_R$ 都通过映射 $\varphi\colon G \mapsto [G, G_1]$ 确定 $\mathcal{M}$ 的一个元素。

我们证明， $\mathcal{S}_R$ 中具有相同 φ 像的元素至多有 $2^{3(\log_2 r)^2}$ 个，由此 (2.2) 立即成立。我们用反证法，并设 $G^1, \ldots, G^\ell \in \mathcal{S}_R$ 满足 $\varphi(G^i) = \varphi(G^1)$，对每个 $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ 均成立，其中 $\ell > 2^{3(\log_2 r)^2}$。于是存在一个群同构 $\phi_i\colon G^1 \to G^i$，满足 $(G^i)_1 = ((G^1)_1)^{\phi_i}$。因此， G^1 在陪集空间 $G^1/(G^1)_1$ 上的置换表示，与 G^i 在陪集空间 $G^i/(G^i)_1$ 上的置换表示置换同构。因此， G^1 和 G^i 通过 $\mathrm{Sym}(r)$ 的某个元素共轭，即对于某个 $\sigma_i \in \mathrm{Sym}(r)$，有 $G^1 = (G^i)^{\sigma_i}$。现在，由于 G^1 在 $\{1, \ldots, r\}$ 上传递地作用，将 σ_i 替换为形如 $g_i\sigma_i$ 的元素（其中 $g_i \in G^1$），我们可以假设 σ_i 固定 1，即 $1^{\sigma_i} = 1$。

由于 $R \leq G^i$ 对每个 i 都成立，我们得到 R^{σ_1}、.....、R^{σ_ℓ} 是 G^1 的正则子群。由于 R 由 $\log_2(r)$ 个元素生成，我们看到 G^1 至多包含 $|G^1|^{\log_2(r)} \leq r^{2\log_2 r} = 2^{2(\log_2 r)^2}$ 个阶为 r 的不同子群。特别地，由于 $\ell > 2^{3(\log_2 r)^2}$，我们看到对某个 $t > 2^{(\log_2(r))^2}$ 以及某个大小为 t 的 $\{1, \ldots, \ell\}$ 的子集 $\{i_1, \ldots, i_t\}$，有 $R^{\sigma_{i_1}} = \cdots = R^{\sigma_{i_t}}$。因此 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_j}^{-1}$ 规范化了 R。由于 $1^{\sigma_{i_1}\sigma_{i_j}^{-1}} = 1$，对每个 $j \in \{1, \ldots, t\}$， $\sigma_{i_1}\sigma_{i_j}^{-1}$ 都是 R 的一个自同构。由于 R 至多有 $|R|^{\log_2(r)} = 2^{(\log_2(r))^2}$ 个自同构，我们得到对于两个不同的指标 j 和 j'，有 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_j}^{-1} = \sigma_{i_1}\sigma_{i_{j'}}^{-1}$。
因此 $\sigma_{i_j} = \sigma_{i_{j'}}$ 且 $G^{i_j} = (G^1)^{\sigma_{i_j}^{-1}} = (G^1)^{\sigma_{i_{j'}}^{-1}} = G^{i_{j'}}$，这与假设矛盾。 ■

由 (2.1) 和 (2.2)，我们得到

$$|\mathcal{S}_R| \leq 2^{7(\log_2 r)^2+12\log_2 r},$$

这个引理的证明随即得出。 □

接下来需要估算群上与固定中间子群 G 相容且具有循环点稳定子 H 的 Cayley映射数量 R。

引理 2.3. 对于 Sym(r) 的每一对子群 R 和 H，若 R 是正则的，且 $H=\langle\gamma\rangle$ 是非恒等的、阶小于 r 并固定点 1 的循环子群，令

$$\mathcal{R}_\gamma=\{(S,\mathfrak{r})|S\subseteq\{2,\dots,r\},\ \mathfrak{r}\ cyclic\ ordering\ on\ S,\ \gamma\in\mathrm{Aut}(CM(R,S,\mathfrak{r}))\}$$

是所有在 R 上且以 γ 为自同构的凯莱映射的集合。那么 $|\mathcal{R}_\gamma|\leq(r-1)\frac{r}{2}\lfloor r/2\rfloor!\,2^r$。

证明。设 l 是 γ 的阶。由引理 2.1，若 $(S,\mathfrak{r})\in\mathcal{R}_\gamma$，则 $S^\gamma=S$；因此，S 是 H-轨道的并。此外，$\gamma|_S$ 是 $\mathfrak{r}$ 的幂；因此，$\gamma|_S$ 是由 l 个长度相同且在 S 中无不动点的 k 个不相交循环构成的乘积。显然，$kl=|S|<r$。固定一个 S（因而也固定 k 和 l），有 $\mathfrak{r}\in\mathsf{C}^{\mathrm{Sym}(S)}(\gamma|_S)$。经过常规计算，$\mathsf{C}^{\mathrm{Sym}(S)}(\gamma|_S)$ 同构于缠绕积 C_l wr Sym(k)。因此，给定 S，$\mathfrak{r}$ 至多有 $l^kk!$ 种选择。

如果 n_l 是 γ的循环分解中长度为 l 的循环数，那么有 $\binom{n_l}{l}$ 种 S 的选择，使得 $\gamma|_S$ 分解为 k 个长度为 l的循环。

综合以上各项，得到

$$|\mathcal{R}_\gamma|\leq\sum_{l=2}^{r-1}\sum_{k=1}^{n_l}\binom{n_l}{k}k!l^k. \tag{2.3}$$

显然 $ln_l\leq|S|<r$，因此 $n_l\leq r/l$。

接下来，我们使用广义二项式系数 $\binom{x}{k}=\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(x-i)$。注意，$\binom{x}{k}$ 关于实变量 $x\geq k$单调递增。经过简单计算可得不等式

$$\frac{\binom{r}{l+1}k!(l+1)^k}{\binom{r}{l}k!l^k}=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{r-i(l+1)}{r-il}\leq 1.$$

这表明，式（2.3）中的被加数关于 l 单调不增，因此可以用 $l=2$对它们进行估计。由此可得

$$|\mathcal{R}_\gamma|\leq\sum_{l=2}^{r-1}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{r}{l}\rfloor}\binom{\lfloor\frac{r}{l}\rfloor}{k}k!l^k\leq\sum_{l=2}^{r-1}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{r}{l}\rfloor}\binom{\frac{r}{l}}{k}k!l^k\leq\sum_{l=2}^{r-1}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{r}{l}\rfloor}\binom{\frac{r}{2}}{k}k!2^k.$$

此外，简单计算可得（对于 $0\leq k\leq x$），$\binom{x}{k+1}-\binom{x}{k}\geq 0$ 当且仅当 $k<\frac{x}{2}$。因此，我们可以用一个“近似中心二项式系数”来估计广义二项式系数：$\binom{\frac{r}{2}}{k}\leq\binom{\frac{r}{2}}{\lfloor\frac{r}{4}\rfloor}$。于是

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_\gamma|&\leq\sum_{l=2}^{r-1}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\binom{\frac{r}{2}}{\lfloor\frac{r}{4}\rfloor}k!2^k\leq\sum_{l=2}^{r-1}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\binom{\frac{r}{2}}{\lfloor\frac{r}{4}\rfloor}\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor!2^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\\&\leq(r-1)\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor 2^{\frac{r}{2}}\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor!2^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}\leq(r-1)\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{r}{2}\right\rfloor!2^r.\end{aligned}$$

□

定理1.1 的证明。注意，具有 $S=R\setminus\{e\}$ 的 Cayley映射有 $(r-2)!$ 个（这正是循环排序的数量 $\mathfrak{r}$），Cayley映射的总数必然更多。因此，结合引理 2.2 和 2.3，我们推得，在 R 上具有大于 R 的自同构群的 Cayley映射所占比例小于

$$\frac{((r-1)\frac{r}{2}\lfloor r/2\rfloor!2^r)(2^{7(\log_2 r)^2+12\log_2 r})}{(r-2)!},$$

当 $r\to\infty$ 时趋于 0。 □

References

[1] A . Lubotzky, 《有界生成有限群的计数》， *J . Algebra* **238**(2001)，194 – 199.[2] N. Biggs 和 A. T. White, 《 *Permutation groups and combinatorial structures*》，数学学会讲义第33卷，剑桥大学出版社，剑桥，1979年。[3] C. D. Godsil，非可解群的图正则表示，《图论中的代数方法》（塞格德，1978），221–239页， *Colloq. Math. Soc. János Bolyai* **25**，北荷兰，阿姆斯特丹—纽约，（1981）。[4] J. Gross，T. Tucker， *Topological Graph Theory* 第113页，约翰·威立父子出版公司，纽约，1987年。[5] R. Jajcay, 《凯莱映射的自同构群》，
J. of Combinatorial Theory B辑59（1993），297–310页。[6] R. Jajcay, 《凯莱图与映射自同构群的结构》，

J. Algebraic ( ), –

Combinatorics **12** 2000 73 84
。[7] G. Jones，本原置换群的循环正则子群， *J. Group Theory* **5** (2002)，403–407 页。[8] A. Mann, 《含有许多对合的有限群》， *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994)，383–85页。[9] J. Morris，M. Moscatiello，P. Spiga，凯莱图的渐近计数，

Ann. ( ), –

Mat. Pura Appl. **201** 2022 1417 1461
。[10] J. Morris，P. Spiga，凯莱有向图的渐近计数， *Israel J. Math.* **242**(2021)，401–459 页。[11] P. Spiga，关于 Babai-Godsil 猜想与 Xu 关于凯莱图计数的猜想之间的等价性，
Art Discrete Appl. Math. **4** (2021)，第1期，论文编号1.10，共18页。[12] P. Spiga，具有许多基数至多为二的子轨道的有限传递群及其在凯莱图计数中的应用， *Canadian J. Math.*，即将出版。[13] B. Xia，S. Zheng，图正则表示的渐近计数，预印本，https://arxiv.org/abs/2212.01875。

Pablo Spiga, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, University of Milano-Bicocca,Via Cozzi 55, 20125 Milano, Italy*Email address*: pablo.spiga@unimib.it

Dario Sterzi, Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita",
University of Padova, Via Trieste 53, 35121 Padova, Italy*Email address*:
dario.sterzi@studenti.unipd.it