# 重新探讨阻尼谐振子：通往平衡的最快路径

K. Lelas，[1] N. Poljak，[2] 和 D. Jukić[3]1)萨格勒布大学纺织技术学院，克罗地亚2)萨格勒布大学理学院物理系3)萨格勒布大学土木工程学院

（*电子邮箱：k lelas@ttf.unizg.hr）

（日期：2023年7月11日）

理论上，阻尼谐振子的解会渐近趋近平衡，即零能态，却永远无法真正到达；而临界阻尼解比欠阻尼解或过阻尼解更快趋近平衡。在实验中，采用这一模型描述的系统，当系统能量降至某个阈值以下时，便达到平衡；该阈值对应于测量仪器的能量分辨率。我们表明，（几乎）总能找到一个最佳欠阻尼解，它比其他所有欠阻尼解以及临界阻尼解更早达到这一能量阈值，无论该阈值有多低。我们还指出，对于某一类特定初始条件，这一结论有一个例外：某个特定的过阻尼解会比其他所有解更早达到平衡态。我们通过实验验证了部分研究结果。

arXiv:2301.08222v2 [physics.class-ph] 9 Jul 2023

## I. 引言

阻尼谐振子在什么条件下能最快回到平衡态？标准教科书的回答是：无论初始条件如何，振子在临界阻尼状态下回到平衡态的速度最快[1–5]。由于这一模型的解都无法真正到达平衡态，只能渐近地趋近于平衡态，教科书作者通常会考察一般的欠阻尼、临界阻尼和过阻尼解在无限时间极限下趋近平衡态的收敛速度，并以此论证这一答案[1]。确实，从这种渐近意义上说，临界阻尼解比其他解更快地趋近平衡态。考虑实验分辨率后，情况会变得更为微妙；将最大超调量设为等于位移分辨率，便可确定欠阻尼状态下使振子最快稳定到平衡的阻尼系数[6]。类似地，Heald[7] 将最小可检测超调量设为等于位移分辨率，并计算出会因振子最快回到平衡态而被误认为临界阻尼的欠阻尼程度。

在本文中，我们利用朗伯 W 函数[8]从理论上求出了这样一个时间间隔：在此期间，欠阻尼位移的包络在绝对值上小于临界阻尼振子的位移。根据阻尼系数，我们确定了欠阻尼位移的包络变得大于临界阻尼振子位移的时刻。我们发现，对于明显处于欠阻尼状态的阻尼系数，例如比临界阻尼系数小 10% 的情况，在该时刻及之后的位移在实验上实际上是无法测量的。

在理想情况下，平衡态就是零能态，此时位移和速度均为零；在这里，我们将平衡态定义为振子的能量已降至初始能量的某个（无限小）比例的状态，例如低于给定实验能量分辨率的状态。我们表明，可以找到欠阻尼状态下的最优阻尼系数，使系统能量比具有相同初始条件的任何其他欠阻尼、临界阻尼或过阻尼振子更快地降至这一预定阈值以下。对此存在一个例外：对于一组特殊的初始条件，无论我们将平衡态定义为零能态，还是定义为具有初始能量某个无限小比例的状态，过阻尼振子都比其他振子更快达到平衡态。为在实验上检验我们的论断，我们设计了一个参数可变的RLC电路，并使用标准实验室示波器测量电阻器两端的振荡电压。测量结果与理论发现一致。

## II. 模型简要回顾

阻尼简谐振子的微分方程形式为

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0\,, \tag{1}$$

其中，$x(t)$ 表示作为时间函数的、相对于平衡位置的位移，点号表示时间导数，$\gamma > 0$ 为阻尼系数，$\omega_0$ 表示无阻尼振子的角频率（即振子的固有频率）。当$x = 0$ 和 $\dot{x} = 0$同时满足相应条件时，系统达到零能态。方程（1）的解的形式取决于 $\gamma$ 与 $\omega_0$之间的关系，从而产生三种可能的状态。

对于 $\gamma < \omega_0$，系统处于欠阻尼状态，其解为

$$\begin{aligned} x_{ud}(t) &= Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \phi)\,, \quad \text{with} \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega^2}} \quad \text{and} \\ \phi &= \arctan\left(-\frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega x_0}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

这里，$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ 是阻尼振子的角频率，$A$ 和 $\phi$ 是由初始条件决定的常数，

这些初始条件为 $x_0 \equiv x(0)$ 和 $v_0 \equiv \dot{x}(0)$。位移在指数衰减的包络内作准周期振荡，该包络由下式给出

$$A(t) = Ae^{-\gamma t} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0+\gamma x_0)^2}{\omega^2}}e^{-\gamma t}. \tag{3}$$

我们要在此强调，位移的极大值并不与包络相切，因此将函数 (3) 称为随时间变化的振幅[9]可能会造成误解。容易验证，速度的包络 $\dot{x}_{ud}(t)$ 也呈现类似的行为，因此系统渐近地趋近平衡。

当 $\gamma = \omega_0$ 时，系统处于临界阻尼状态，其解为

$$x_c(t) = (x_0 + (v_0 + \omega_0 x_0)t)\, e^{-\omega_0 t}. \tag{4}$$

该解不发生振荡而趋近平衡。

当 $\gamma > \omega_0$ 时，系统处于过阻尼状态，其解为

$$x_{od}(t) = e^{-\gamma t}\left(\frac{v_0+(\gamma+\alpha)x_0}{2\alpha}e^{\alpha t} - \frac{v_0+(\gamma-\alpha)x_0}{2\alpha}e^{-\alpha t}\right), \tag{5}$$

其中 $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$。与临界阻尼状态一样，该解不发生振荡而趋近平衡。

欠阻尼振荡的包络按$e^{-\gamma t}$衰减，因此，为了比较欠阻尼解和临界阻尼解的衰减，我们考察比值

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_c(t)}{e^{-\gamma t}} = \lim_{t\to\infty}(x_0 + (v_0+\omega_0 x_0)t)\, e^{-(\omega_0-\gamma)t} = 0, \tag{6}$$

由于 $\omega_0 > \gamma$。因此，临界阻尼解比欠阻尼解更快地趋近平衡。对于过阻尼状态，在无限时间极限下趋近平衡的过程由缓慢衰减的指数函数 $e^{(-\gamma+\alpha)t}$ 控制，因此我们计算

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_c(t)}{e^{(-\gamma+\alpha)t}} = \lim_{t\to\infty}(x_0 + (v_0+\omega_0 x_0)t)\, e^{-(\omega_0-\gamma+\alpha)t} = 0, \tag{7}$$

这是由于 $\omega_0 - \gamma + \alpha > 0$。同样，临界阻尼解比过阻尼解更快地趋近平衡。最后这一结论并非完全普遍，因为存在这样一种特殊情况：初始位移和速度异号，且满足 $|v_0| > |x_0\omega_0|$。在这种情况下，可以选择一个阻尼系数 $\gamma$，使乘在缓慢衰减的指数函数前的因子为零，只留下快速衰减的指数函数$e^{(-\gamma-\alpha)t}$。此时，具有相同初始条件的过阻尼振子比临界阻尼振子更快地趋近平衡态。

现在我们来考察振子的能量。将式 (1) 乘以 $\dot{x}(t)$，并将所得结果中的第一项和第三项改写为时间导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x(t)^2}{2}\right) + 2\gamma\dot{x}(t)^2 = 0. \tag{8}$$

例如，若考虑黏性流体中的弹簧振子，方程 (8) 中的第一项是单位质量总机械能（动能加势能）的时间导数，第二项则是单位质量耗散力的功率。系统在时间$t$ 的机械能与其初始机械能之比为

$$\frac{E(t)}{E_0} = \frac{\dot{x}(t)^2 + \omega_0^2 x(t)^2}{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}. \tag{9}$$

利用（9），我们可以将（8）改写为能量相对衰减率

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{E(t)}{E_0}\right) = -\frac{4\gamma}{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}\dot{x}(t)^2. \tag{10}$$

这里，为便于后续使用，我们定义任意时刻$t$ 动能与总能量的比值为

$$\beta(t) = \frac{\dot{x}(t)^2}{\dot{x}(t)^2 + \omega_0^2 x(t)^2}. \tag{11}$$

注意，在欠阻尼情形下，当 $\beta_{ud}(t) = 1$时，系统处于平衡位置，且只有动能。反之，当 $\beta_{ud}(t) = 0$ 时，系统处于转折点，且只有势能。利用（11），我们可以用自然对数将（10）改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\frac{E(t)}{E_0}\right) = -4\gamma\beta(t), \tag{12}$$

因为总能量严格为实数且为正。（12）式对三种振荡状态均有效，即欠阻尼、临界阻尼和过阻尼状态。考虑到欠阻尼情形具有准周期运动的特点，我们发现该式在分析欠阻尼情形时尤其有用。

（10）式和（12）式显然相关，但必须注意它们隐含的差异。例如，当 $\dot{x}(t)^2 = 0$且 $\beta(t) = 0$时，两种损耗率的极大值都为零，但极小值出现的时刻不同。与无阻尼系统相比，欠阻尼振子达到最大速度的时刻略早于它到达平衡位置[10]，此时 $\beta(t) = 1$。为避免混淆，以下我们将（12）式称为能量损失率。

总而言之，阻尼谐振子的解会渐近趋近平衡态，但永远不会真正到达。从这种渐近意义上说，除某种特定的过阻尼振子情况外，临界阻尼振子在所有情况下都能最快回到平衡态。在自然界和实验中，由该模型描述的系统会达到一种有效平衡态，此时系统的能量已降至周围噪声的水平，或测量仪器的能量分辨率所能达到的水平。基于这一思路，我们将定义：对于满足$t > \tau$的时间，系统处于平衡态

$$\frac{E(\tau)}{E_0} = 10^{-\delta}, \tag{13}$$

其中， $\delta > 0$ 是一个无量纲参数，用来定义系统中剩余初始能量所占的比例。在下一节中，我们将证明，对于任意有限的 $\delta$值，总能在欠阻尼状态（$\gamma < \omega_0$）下找到一个最优解，使其按照式（13）的意义，比所有其他具有相同初始条件的欠阻尼解或临界阻尼解更早达到平衡态。

## III. 通往平衡的最快路径

### A. 位移分析

我们关注由$x_0 > 0$ 和$v_0 = 0$给出的初始条件。这组初始条件对应的欠阻尼解、临界阻尼解和过阻尼解为：

$$x_{ud}(t) = A(t)\cos(\omega t + \phi), \quad \text{with}$$
$$A(t) = x_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \quad \text{and} \tag{14}$$
$$\phi = \arctan\left(-\frac{\gamma}{\omega}\right),$$

$$x_c(t) = x_0(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}, \tag{15}$$

$$x_{od}(t) = \frac{x_0}{2\alpha} e^{-\gamma t}\left[(\gamma+\alpha)e^{\alpha t} - (\gamma-\alpha)e^{-\alpha t}\right]. \tag{16}$$

临界阻尼解（15）和过阻尼解（16）没有零点，而且过阻尼解趋近平衡状态的速度更慢。因此，我们可以得出结论：对于任意 t $> 0$，过阻尼解都比临界阻尼解离平衡更远（我们在补充材料第 SI 节中严格证明了，对于任意 t $> 0$，$x_{od}(t) > x_c(t)$）。因此，以下不再考虑过阻尼状态。图1展示了包络 A(t)、 $\gamma = 0.6\omega_0$时的欠阻尼解 $x_{ud}$(t)，以及临界阻尼解 $x_c$(t)。假设图1模拟了一项真实实验，其位移分辨率为例如 $\Delta x = \pm 0.1 x_0$（这是较差的分辨率，这里仅作为示例）。从该实验的角度来看，欠阻尼解比临界阻尼解更早稳定到平衡状态。将最大超调量设为位移分辨率，就可以确定欠阻尼状态下的阻尼系数，使阻尼振子在实验分辨率范围内尽可能快地达到平衡，正如 Armstrong[6] 已经指出的那样。在这里，我们求出时间间隔 t $\in (\tau_1, \tau_2)$，在此期间 A(t) $< x_c$(t)，从而使欠阻尼解 $x_{ud}$(t)的包络实际上比 $x_c$(t)更接近平衡。

通过分析两个交叉时刻 $\tau_1$ 和 $\tau_2$ 对阻尼系数的依赖关系，我们可以深入了解欠阻尼解与临界阻尼解之间的关系。令 $A(\tau_{1,2}) = x_c(\tau_{1,2})$ 相等，得到

$$e^{(\omega_0-\gamma)\tau_{1,2}} - \omega\tau_{1,2} - \frac{\omega}{\omega_0} = 0, \tag{17}$$

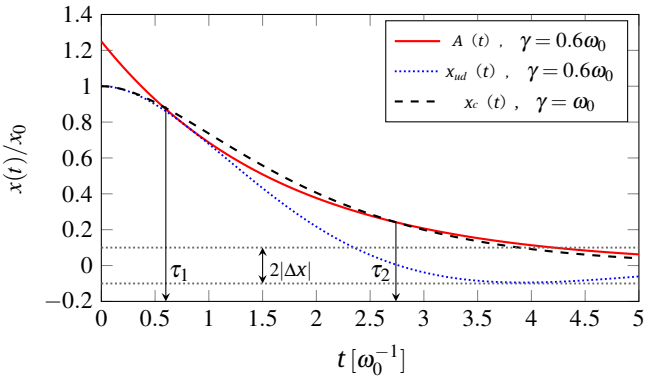



图1。包络$A\ (t)$ （实线红色曲线）和完整的欠阻尼解$x_{ud}\ (t)$（$\gamma = 0.6\omega_0$，蓝色点线）与临界阻尼解$x_c\ (t)$ （黑色虚线）进行比较。箭头表示时刻 $\tau_1$ 和 $\tau_2$，此时$A\ (t)\ = x_c\ (t)$。在时间间隔$t\ \in (\tau_1,\ \tau_2)$ 内，欠阻尼解$x_{ud}\ (t)$ 的包络比$x_c\ (t)$ 更接近平衡。欠阻尼情形下的位移幅值比临界阻尼情形更早被限制在带状区域 $\pm 0.1x_0$ 内，并在之后的所有时刻都保持在该区域内。

有两个解（见附录 A）

$$\tau_{1,2} = -\frac{1}{\omega_0-\gamma} W_{0,-1}\left(-\frac{\omega_0-\gamma}{\omega e^{\frac{\omega_0-\gamma}{\omega_0}}}\right) - \frac{1}{\omega_0}, \tag{18}$$

其中 $W_0(y)$ 和 $W_{-1}(y)$ 是朗伯 W 函数的两个不同分支[8]。

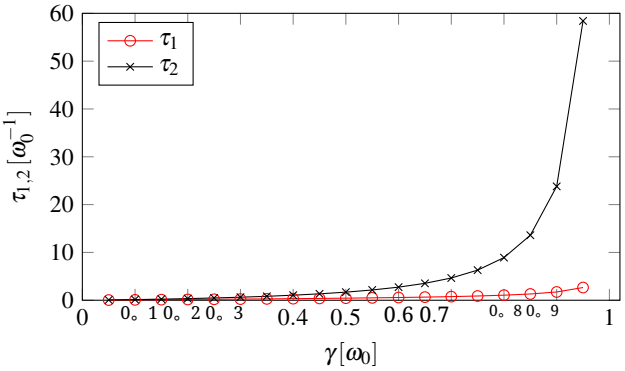



图 2. 当 $\gamma[\omega_0]$ 从 0.05 到 0.95、步长为 0.05 时，方程 (18) 的解。在时间 $\tau_1$ 和 $\tau_2$之间，欠阻尼解 $x_{ud}(t)$ 以小于临界阻尼解 $x_c(t)$ 幅值的包络 $A(t)$ 振荡。

图 2 展示了由（18）得到的结果。在 $\gamma = 0.9\omega_0$ 的情况下：交叉时刻为 $\tau_1 = 1.73\omega_0^{-1}$和 $\tau_2 = 23.81\omega_0^{-1}$，由此得到 $A(\tau_1) = 0.48x_0$ 以及 $A(\tau_2) = 1.14 \times 10^{-9}x_0$。在此情况下，对于 $t > \tau_1$，欠阻尼解 $x_{ud}(t)$ 振荡，其包络的幅值小于临界阻尼解，直到两个解都在 $t = \tau_2$ 时达到数量级为 $10^{-9}x_0$ 的位移。一般而言，由于欠阻尼解的位移幅值小于临界阻尼解的位移幅值，因而

$\tau_1 < t < \tau_2$，那么如果 $A(\tau_2)$ 小于实验分辨率，则在 $\tau_1$ 之后的任何时刻，测得的欠阻尼位移都不会大于临界阻尼位移。注意，$\tau_2$ 会在 $\gamma$ 接近 $\omega_0$ 时发散，因此，通过选择足够大的阻尼系数，可以使 $A(\tau_2)$ 任意小。因此，尽管对于 $t > \tau_2$，临界阻尼位移比欠阻尼位移更快地接近平衡，但对于任意给定的实验分辨率，总能找到一个阻尼系数 $\gamma$，使得测量结果显示欠阻尼解会先达到平衡。

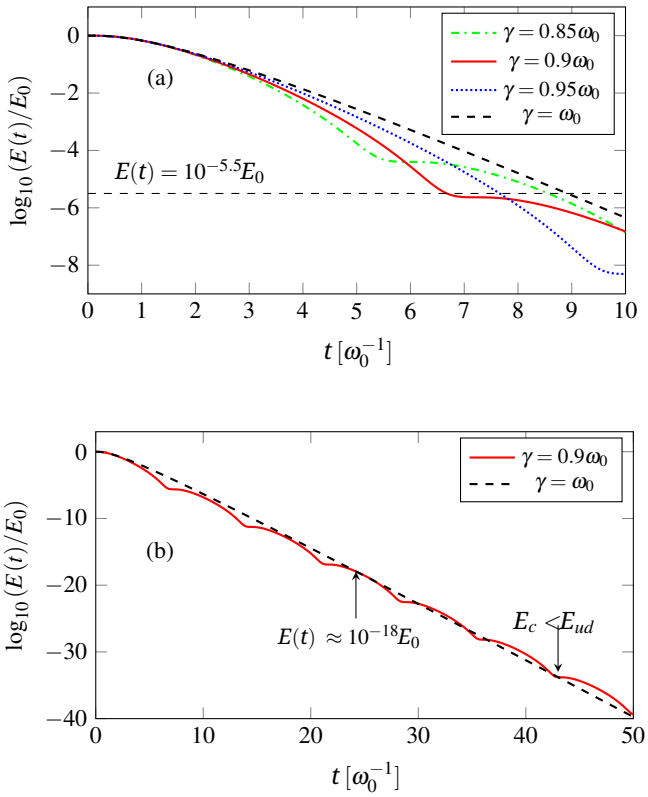



图 3. (a) 欠阻尼振子的能量比 (9) 的以 10 为底的对数：$\gamma = 0.85\omega_0$（绿色点划线）、$\gamma = 0.9\omega_0$（红色实线）、$\gamma = 0.95\omega_0$（蓝色点线），以及临界阻尼振子（黑色虚线）。(b) 较长时间内 $\gamma = 0.9\omega_0$（红色实线）和临界阻尼振子的能量比 (9)。当 $t = 24.24\omega_0^{-1}$ 时，两个系统的能量相等，如箭头所示。此后，欠阻尼情形的能量比会在临界阻尼振子的相同比值上下振荡，直到 $t = 43.03\omega_0^{-1}$（同样以箭头标出）；之后它始终高于该比值。

### B. 能量分析

现在我们将注意力转向系统的能量。在图 3(a) 中，我们展示了四个 $\gamma = \{0.85\omega_0, 0.9\omega_0, 0.95\omega_0, \omega_0\}$ 取值下比值 (9) 的以 10 为底的对数。能量

对于各种欠阻尼情形，能量比仅略高于临界阻尼振子的相应比值，时间范围分别从 $t = 0$ 到 $t = \{1.10\omega_0^{-1}, 1.06\omega_0^{-1}, 1.03\omega_0^{-1}\}$，对应 $\gamma = \{0.85\omega_0, 0.9\omega_0, 0.95\omega_0\}$。过了这些时刻，在图 3(a) 所示的剩余时间段内，欠阻尼曲线始终低于临界阻尼曲线。在图 3(b) 中，我们展示了相同的行为，这次取 $\gamma = 0.9\omega_0$ 的情形，并考察更长的时间段。我们注意到，当 $t = 24.24\omega_0^{-1}$ 时，两个系统的能量比相等。能量比相等的时刻略晚于欠阻尼振子包络与临界阻尼振子位移相等的时刻（$t = \tau_2 = 23.81\omega_0^{-1}$，见第 III A 节）。我们认为这些时刻并不重合，是因为包络与完整的欠阻尼解存在差异；也就是说，欠阻尼位移的绝对值晚于包络才超过临界位移。过了 $t = 24.24\omega_0^{-1}$ 之后，欠阻尼振子的能量比会周期性地低于临界阻尼振子的能量比。最后，当 $t > 43.03\omega_0^{-1}$ 时，对应于 $E(t) < 10^{-33}E_0$，，欠阻尼振子的能量比将永久高于临界阻尼振子的能量比，这与无限时间极限 (6) 一致。其他取值的欠阻尼系数也表现出相同的定性行为。为了确定一个最优阻尼系数 $\gamma$，使系统能量最快降至指定能级，我们先来看图 3(a) 中的一个例子，其中画出了一条水平线，对应于 $E(t)/E_0 = 10^{-5.5}$。显然，$\gamma = 0.9\omega_0$ 的欠阻尼振子最先达到对应 $E(t)/E_0 = 10^{-5.5}$ 的水平线，早于其他欠阻尼振子。

### C. 唯一最优阻尼系数的存在性

通过一个具体例子，我们现在展示，可以确定一个唯一的欠阻尼 $\gamma$，使振子到达某一能级的速度快于采用任何其他 $\gamma$ 时的情况。由式 (14) 描述的欠阻尼振子，在以下时刻处于平衡位置：

$$\tau_{A_n} = \frac{1}{\omega}\left[(2n-1)\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\gamma}{\omega}\right)\right], \tag{19}$$

并在以下时刻位于转折点：

$$\tau_{B_n} = \frac{n\pi}{\omega}, \tag{20}$$

其中，$n \in \mathbb{N}$ 是分别计数平衡位置穿越次数和转折点的指标。在图4(a)中，我们展示了临界阻尼振子和欠阻尼振子的能量损失率 (12)，其中 $\gamma = \{0.886\omega_0, 0.9\omega_0\}$。对于 $\gamma = 0.9\omega_0$ 的情况，能量损失率的最大绝对值为 $4\gamma = 3.6\omega_0$。这意味着，根据 (12)，$\beta_{ud} = 1$ 在时间 $\tau_{A_1} = 6.17\omega_0^{-1}$。此时，系统首次经过平衡位置。相比之下，当 $\beta_{ud} = 0$ 在 $\tau_{B_1} = 7.21\omega_0^{-1}$ 时，能量损失率为零，此时系统首次到达转折点。显然，

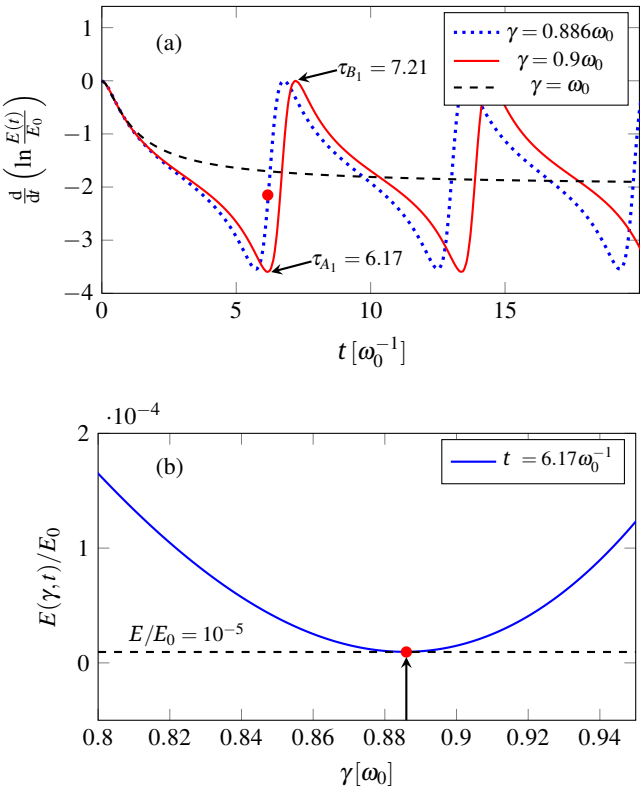



图 4. (a) 临界阻尼振子（黑色虚线）和满足 $\gamma = 0.886\omega_0$（蓝色点线）及 $\gamma = 0.9\omega_0$（红色实线）的欠阻尼振子的能量损失率 (12)。首次穿越平衡位置的时间 $\tau_{A_1}$ 以及系统首次到达转折点的时间 $\tau_{B_1}$ 用箭头标出。对于 $\gamma = 0.9\omega_0$，有 $\tau_{A_1} = 6.17\omega_0^{-1}$、$\tau_{B_1} = 7.21\omega_0^{-1}$。红圈标出了 $\gamma = 0.886\omega_0$ 在 $t = 6.17\omega_0^{-1}$ 时的能量损失率。(b) 在 $t = 6.17\omega_0^{-1}$ 时，能量比 (9) 随 $\gamma$ 变化的曲线（蓝色实线）。当 $\gamma = 0.886\omega_0$ 时，能量比达到全局最小值（箭头指向红圈标出的最小值）。水平虚线表示 $\gamma = 0.886\omega_0$ 在 $t = 6.17\omega_0^{-1}$ 时达到的能级。详情见正文。

$\gamma = 0.886\omega_0$（或任何其他 $\gamma < \omega_0$）都会产生定性上相同的行为。

在图4(b)中，我们展示了能量比(9)随 $\gamma$ 在 $t = 6.17\omega_0^{-1}$ 时的变化关系。此时，具有 $\gamma = 0.9\omega_0$ 的振子首次到达平衡位置；我们可以看到，对于略小的阻尼系数，即 $\gamma = 0.886\omega_0$，能量比达到全局最小值。该能量极小值为 $10^{-5}E_0$。假设这就是实验的能量分辨率；我们将此阈值能量记为 $E_{th}$。这里需要注意，对于任意 $\gamma$，能量都是时间的单调递减函数。因此，对于 $t < 6.17\omega_0^{-1}$，$E(\gamma,t) > E_{th}$，而具有 $\gamma = 0.886\omega_0$ 的振子在 $t = 6.17\omega_0^{-1}$ 时达到 $E_{th}$，比具有任何其他 $\gamma$ 的振子都更快。我们可以得出结论：对于实验中 $E_{th} = 10^{-5}E_0$ 的情况，$\gamma = 0.886\omega_0$ 是最佳阻尼系数。

这个例子表明，如果在某一时刻，能量作为 $\gamma$ 的函数在某个 $\gamma_{min}$ 处达到全局最小值，那么阻尼系数为 $\gamma_{min}$ 的振子比其他所有振子更快达到该能量极小值，也就是说，对于该能量阈值，$\gamma_{min}$ 是最优阻尼系数。在附录B中，我们展示了能量比（9）及其全局最小值在更广泛的 $\gamma$ 范围内，以及在更长时间跨度内不同时间点的变化情况。显然，对于任意能级 $E_{th}$，都可以找到唯一的最优阻尼系数。

我们在此指出，具有最优阻尼系数的振子在位移处于平衡位置与第一个转折点之间时达到 $E_{th}$（图4(a)中的红色圆圈标出了该位置）。在同一时刻，阻尼系数稍大的振子（即具有 $\gamma = 0.9\omega_0$ 的振子）首次到达平衡位置，其能量略高于最优阻尼的振子（见图4(b)）。在附录B中，我们证明，最优阻尼系数（能量比值 (9) 在某一时刻达到最小值）与使系统在同一时刻首次到达平衡位置的阻尼系数之间的差值，会随着 $E_{th}$ 取值降低而减小。因此，正如下文所示，若使用 (19) 确定 $\gamma$，使系统首次到达平衡时其能量恰好等于 $E_{th}$，便可得到对最优阻尼系数的极佳初步估计，并为精确数值确定提供良好的起点。

### D. 最优阻尼系数的确定

当系统的能量等于 $10^{-\delta}E_0$，且满足某个 $\delta > 0$ 时，我们将其定义为有效地处于平衡状态，并分两步求出最优欠阻尼系数 $\gamma_{opt}$。

首先，我们确定使系统首次经过平衡位置时达到这一能量水平的 $\gamma$。我们将证明，该值 $\gamma$ 是最优阻尼系数的极佳初步近似。因此，我们将其称为第一步最优阻尼，记作 $\gamma_1$。第二步中，我们利用 $\gamma_1$ 找出一小组欠阻尼系数，使系统达到能量 $10^{-\delta}E_0$ 的速度快于阻尼系数为 $\gamma_1$ 的系统，然后从这组系数中确定最优阻尼系数 $\gamma_{opt}$。

第一步最优阻尼系数 $\gamma_1$ 由条件 $E(\tau_{A1}) = 10^{-\delta}E_0$ 确定。由于在 $\tau_{A_1}$ 时总能量等于动能，因此我们可以将所选条件写为

$$\frac{E_{ud}(\tau_{A_1})}{E_0} = \frac{\dot{x}_{ud}(\tau_{A_1})^2}{\omega_0^2 x_0^2} = 10^{-\delta}. \tag{21}$$

接下来，将 (19) 中的 $n = 1$ 与 (14) 的时间导数结合，可得

$$\exp\left[-2\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\right)\right] = 10^{-\delta}. \tag{22}$$

(22) 的左侧仅是 $\gamma$ 的函数，我们将其记为 $f(\gamma)$。因此，对于任意给定的 $\delta > 0$，我们可以根据以下条件通过图解法确定 $\gamma_1$

$$\log_{10}(f(\gamma)) = -\delta. \tag{23}$$

图5绘出了 $\log_{10} f(\gamma)$ 以及对应于 $\delta = 10$ 的水平线。它们的交点给出 $\gamma_1 = 0.9698\omega_0$。其他 $\delta$ 取值下的结果列于表 I。

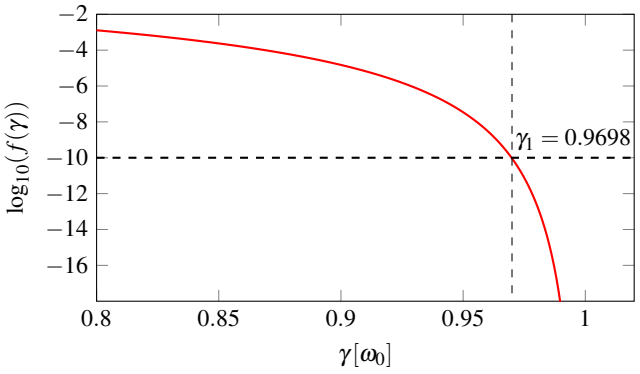



图5. 使用条件 (23) 图示确定 $\delta = 10$ 的第一步最优阻尼 $\gamma_1$。对于确定的 $\gamma_1 = 0.9698\omega_0$，欠阻尼振子的能量在首次到达平衡位置时会永久降至预设阈值能量以下。

| $E(t)/E_0$ | $\gamma_1\,[\omega_0]$ | $\tau_{A_1}[\omega_0^{-1}]$ | $\tau_c[\omega_0^{-1}]$ | $(\tau_c-\tau_{A_1})/\tau_c\,[\%]$ |
|---|---|---|---|---|
| $10^{-4}$ | 0.8688 | 5.30 | 6.96 | 23.85 |
| $10^{-6}$ | 0.9286 | 7.44 | 9.56 | 22.17 |
| $10^{-8}$ | 0.9555 | 9.63 | 12.10 | 20.35 |
| $10^{-10}$ | 0.9698 | 11.87 | 14.57 | 18.53 |
| $10^{-12}$ | 0.9782 | 14.12 | 17.03 | 17.09 |
| $10^{-14}$ | 0.9835 | 16.36 | 19.46 | 15.98 |
| $10^{-16}$ | 0.9872 | 18.69 | 21.88 | 14.54 |
| $10^{-18}$ | 0.9897 | 20.94 | 24.28 | 13.76 |

表 I. 第一列给出了比值 $E(t)/E_0$，该比值定义了有效平衡态。第二列给出了由式 (23) 得到的第一步最优欠阻尼系数 $\gamma_1$。第三列给出了欠阻尼振子（系数为 $\gamma_1$）到达有效平衡态时的时间 $\tau_{A_1}$。第四列给出了临界阻尼振子达到相同能量水平所需的时间，第五列则给出了欠阻尼振子相对于临界阻尼振子的相对时间优势。

现在我们继续第二步，求出最优阻尼系数。我们关注能量分辨率 $10^{-6}E_0$；对于其他任何选择，步骤都相同。由表 I 可知，振子在首次到达平衡位置时达到这一分辨率，即在 $t = 7.44\omega_0^{-1}$。图 6 展示了这一时刻能量比 (9) 随 $\gamma$ 的变化关系。从图中可以确定，在这一时刻能量小于 $10^{-6}E_0$ 的欠阻尼系数子集 $\gamma \in (0.9104\omega_0, 0.9286\omega_0)$；该子集中的欠阻尼系数对应的能量下降到实验能量分辨率以下的速度快于 $\gamma_1$。由于该子集是

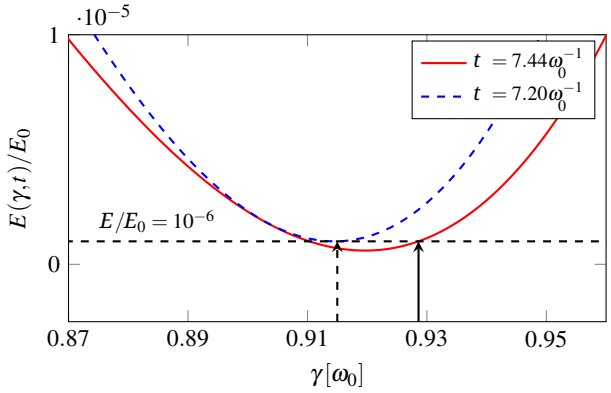



图6. 能量比（9）随 $\gamma$变化，在$t = 7.44\omega_0^{-1}$时（红色实线）和 $t = 7.20\omega_0^{-1}$时（蓝色虚线）。$\gamma = 0.9286\omega_0$ 在$t = 7.44\omega_0^{-1}$时达到的能级以水平虚线标出，红色实线上对应于 $\gamma = 0.9286\omega_0$ 的点以实心箭头标出。红色曲线位于水平线下方的部分对应区间$\gamma \in (0.9104\omega_0, 0.9286\omega_0)$，在此区间内（此时）能量低于 $\gamma = 0.9286\omega_0$的能量。对于 $\gamma = 0.9145\omega_0$，能量在$t = 7.20\omega_0^{-1}$时达到最小值，以虚线箭头标出。详情见正文。

由于范围仅有 $\Delta\gamma = 0.0182\omega_0$，我们只需遍历这个子集中的数值，并通过数值计算找出使系统能量比 (9) 在最短时间内与水平线 $10^{-6}$ 相交的 $\gamma$ 最优阻尼系数。我们发现，$\gamma_{opt} = 0.9145\omega_0$ 在$t = 7.20\omega_0^{-1}$时达到能量分辨率，比任何其他 $\gamma$都快。为确认这一点，我们在图 6 中绘制了 $\gamma$在$t = 7.20\omega_0^{-1}$时的能量比 (9)，可以看到，$\gamma_{opt} = 0.9145\omega_0$ 的最小值恰好触及能量分辨率水平线。

在此示例中，$\gamma_{opt}$ 比 $\gamma_1$ 小 1.52%（随着能量阈值降低，这一差值也会减小，见附录 B），而该系统达到能量分辨率水平所需的时间比采用 $\gamma_1$ 的系统少 3.26%。视实验条件而定，这一差异可能很显著，但在许多应用中，将 $\gamma_1$ 视为最优值已足够。例如，在下一节中，我们将通过实验检验研究结果；由于 $\gamma_{opt}$ 与 $\gamma_1$ 之间的差异造成的变化处于实验分辨率范围内，因此无法检测出来。

对于所有其他类型的初始条件，系统能量的变化规律在定性上与初始条件$x_0 > 0$ 和$v_0 = 0$ 时相同（见补充材料[11], 第 SII–SIV 节），但有一个例外。对于初始位移和速度符号相反且满足 $|v_0| > |x_0\omega_0|$这一特殊情况，可以选择

$$\gamma = \frac{\left(\frac{|v_0|}{|x_0|}\right)^2 + \omega_0^2}{2\frac{|v_0|}{|x_0|}} \tag{24}$$

在过阻尼状态下，式 (5) 中乘在缓慢衰减的指数函数前的因子为零，因此只剩下快速衰减的指数函数 $e^{(-\gamma-\alpha)t}$。对于这一特定的

初始条件，阻尼系数为 (24) 的过阻尼解比其他任何解都更快回到平衡（详情见补充材料[11], 第 SIV 节，第 C 小节）。

感兴趣的读者可参阅补充材料[11],的 SV 和 SVI 节，其中我们考察了能量损失率与临界阻尼和欠阻尼情况下能量之比之间的关系，并展示了针对 $\tau_{A_2}$ 进行优化的结果。也就是说，我们允许系统经过平衡位置一次，发生过冲，并在第二次到达平衡位置时达到实验能量分辨率。可以预期，通过这种方式得到的结果中，欠阻尼振子相较于临界阻尼振子的优势会更小，因为欠阻尼振子的能量在每个周期后都会越来越接近临界阻尼振子的能量，直到最终超过它（见图 3(a) 和 (b)）。

## IV. 实验验证

我们使用串联RLC电路测试了模型。其他系统也适用于此目的，例如带有涡流阻尼系统的物理摆，该系统能够非常精确地控制阻尼条件[12]。

描述该电路的微分方程 is

$$\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} I(t) = 0 . \tag{25}$$

该方程具有阻尼谐振子 (1) 的形式，其中

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{and} \quad 2\gamma = \frac{R}{L} . \tag{26}$$

由于本文始终以 $\omega_0$ 为单位表示 $\gamma$，因此更方便的写法是

$$\gamma = \frac{R}{2L}(\omega_0 \sqrt{LC}) = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\,\omega_0 = \zeta\,\omega_0 . \tag{27}$$

我们注意到，电路中的电流 $I(t)$ 呈现阻尼振荡，电阻器两端的电压 $RI(t)$ 也是如此，后者可以用示波器测量。

电路使用量程为 $0\,\Omega$ 至 1 MΩ 的十进电阻箱搭建，其制造商标称公差为 1%；电感器的电感为 (14.80 ± 0.03) mH；可变电容器的量程为 0 F 至 $10\,\mu$F。电压由 Agilent 33500B 波形发生器提供的方波产生，该发生器具有低频失真 (± 1 μHz) 和较高的电压保持精度（设定值的 1%）[13]。使用 UNI-T UTD2102CEX 100 MHz 示波器测量电阻器两端的电压。示波器的测量不确定度取决于读数刻度；时间和电压的测量均设为最小读数单位的 1/4。

最初，波源频率设为 200 Hz，电压步长设为 3.3 V。电容设为 1 nF，电阻设为 $800\,\Omega$。我们确认电路具有

使用 Peak-Tech 2005 和 Fluke 115 万用表测得，电路中没有显著的杂散电阻和电感。我们观察到电阻两端电压呈欠阻尼振荡，如图7所示。蓝线表示开关电压源的电压（单位电压步长为 1V），红线表示电阻两端测得的电压（单位电压步长为 265 mV）。两者均使用相同的时间轴测量，单位测量步长为 $10\,\mu$s。

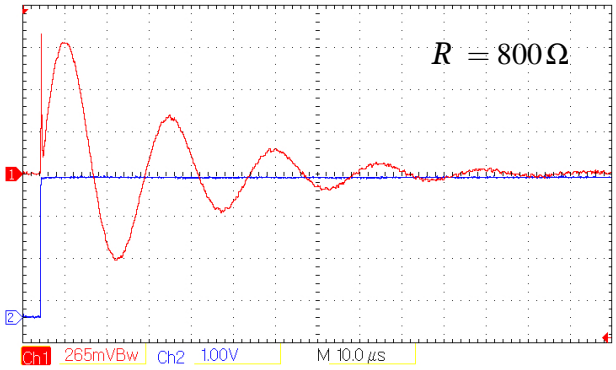



图7. 电路参数为$R$ = 800Ω、$L$ = 14.8 = 1 mH 和$C$ nF 时，电阻器两端测得的欠阻尼振荡电压示例。电压绘于纵轴，时间绘于横轴。

使用示波器的测量工具，我们测量了振荡中相邻两个极大值或极小值之间的时间间隔，共测量五次，并取其倒数以获得频率，测得频率为 (40.0 ± 0.2) kHz。利用该数值，我们确定了电路的电容，得到 (1.06 ± 0.01) nF。由于电路中不可避免地存在杂散电容，该数值与可变电容器设定的值略有不同。利用这些数值，我们现在可以求出电路的无量纲阻尼因子 $\zeta$

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = (0.107 \pm 0.001) , \tag{28}$$

这证实了振荡确实处于欠阻尼状态。对应于临界阻尼振荡的电阻值为：

$$R_{critical} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = (7.47 \pm 0.04)\,\mathrm{k\Omega} . \tag{29}$$

此处需要指出，计算得出的$R_{critical}$ 不确定度纯粹源于测量不确定度，并不反映实验分辨率。经过检验，我们发现，装置电阻无论向哪个方向变化，若变化幅度小于 $250\,\Omega$，所引起的电压变化都在实验分辨率范围内，因此分辨率约为 ≈ 7%。

将电阻值设为临界值后，我们再次测量了电阻两端的电压。如图 8 所示，这次没有观察到振荡，这正是临界阻尼振子的预期表现。

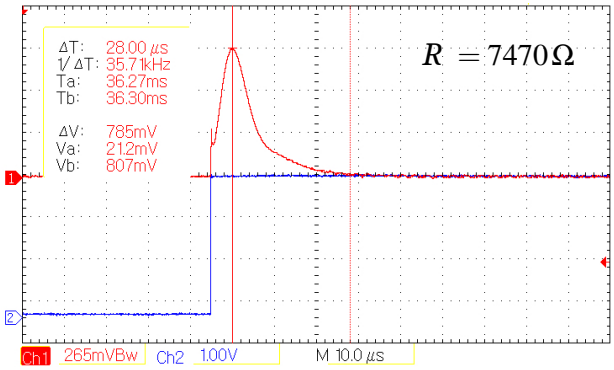



图8. 临界阻尼电路的示波器读数，$R = 7.47\text{k}\Omega$（红色曲线）。电压从最大值降至示波器分辨率所需的时间间隔为（$28.0 \pm 0.4$）$\mu$s，即两条红色竖线之间的间隔。蓝线表示开关电压信号。

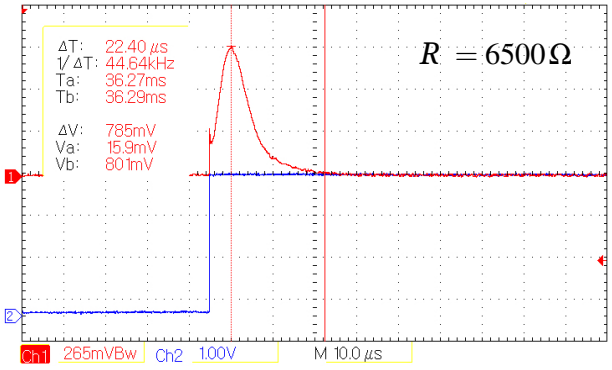



图 9. 欠阻尼电路的示波器读数，其中 $R = 6.5\text{k}\Omega$（红色曲线）。测得电压从最大值降至示波器分辨率所需的时间间隔为（$22.4 \pm 0.4$）$\mu$s。

我们测量了信号达到极大值的时刻与信号变得无法通过示波器的测量分辨率分辨的时刻之间的时间间隔，并通过测量工具确认了这一点。该分辨率取为最小测量增量的 1/4，在本例中对应于 $\approx 13\text{mV}$。由于最大电压为 $\approx 800\text{mV}$，因此分辨率约为最大电压的 1.625%。测得这两个时刻之间的时间间隔为 $(28.0 \pm 0.4)\ \mu\text{s} = (7.1 \pm 0.1)\,\omega_0^{-1}$。测量不确定性源于测量工具的时间分辨率，其单步为 $\Delta t = 0.2\,\mu\text{s}$。

由于我们测量的时间间隔从振子位移达到最大值时开始。实际上，这使初始条件与第三节中的初始条件相同，因此我们可以将测量结果与该节所得结果进行比较。观察图3(a)可知，在$t = (7.1 \pm 0.1)\,\omega_0^{-1}$时，临界阻尼振子的能量处于区间$[6.6, 9.4] \cdot 10^{-5}\,E_0$内。该区间中心对应的欠阻尼 $\gamma_1 = \zeta_1 \omega_0$ 由式（22）求得，换算后电阻值为

$$R_1 = 2\zeta_1 \sqrt{\frac{L}{C}} = (6.52 \pm 0.03)\,\text{k}\Omega\,. \qquad (30)$$

该值被舍入为 6.5 kΩ，因为我们的电阻实验灵敏度约为 250 Ω。请注意，由于对电阻变化的实验灵敏度为 $\approx 7$ %，将电阻设为 6.5kΩ 实际上涵盖了 $\zeta$ 的范围，其中既包含 $\zeta_1$，也包含 $\zeta_{opt}$；后者与前者相差几个百分点。

我们首先将电阻设为预测的最优电阻值 6.5 kΩ。图 9 显示了该电阻值下示波器的读数。电压从最大值降至示波器分辨率所需的时间为 $(22.4 \pm 0.4)\,\mu\text{s}$。与临界阻尼系统相比，时间缩短了 $(20 \pm 3)$%，这与表 I 中给出的结果一致。

接下来，我们以250 Ω为步长，将电阻从 4kΩ 逐步调至 8kΩ。我们始终确保信号的最大电压设为 800 mV。我们确认，在实验分辨率范围内，电阻设为 6.5 kΩ时，电压降至零的速度最快，这与式 (30) 的预测一致。

将电阻值降低至最优值以下后，我们开始逐渐观察到电压信号低于参考电压的过冲（见补充材料[11]，第 SVII 节）。当电阻高于临界值时，系统变为过阻尼，信号降至参考水平所需的时间比临界情况下更长。

## V. 结论

本文的结果表明，与普遍看法相反，如果我们希望阻尼振子尽可能快地达到平衡态，临界阻尼绝非最佳选择。对于大多数初始条件，都可以确定一个欠阻尼状态下的唯一阻尼系数，使振子以最快速度达到平衡态。只有在一组特定的初始条件下，情况才有所不同：此时，过阻尼振子才是最佳选择。

这些发现对于理解所有可用阻尼谐振子模型描述的系统都具有重要意义，例如汽车减震器[14]，RLC电路及其他振荡电路、测量设备[15]，等。近期，阻尼振子模型被用于刻画机器学习算法的收敛性，并建立了算法所对应的微分方程与阻尼振子模型之间的联系[16]。尽管这些算法会以有限精度收敛到解，但此前一直认为，临界阻尼有利于提高收敛速度[16]。我们认为，我们的研究结果在这一背景下也可能具有重要意义。

**VI. 致谢**

本研究得到 QuantiXLie 卓越中心的支持。该项目由克罗地亚政府和欧盟通过欧洲区域发展基金及竞争力与凝聚力业务计划共同资助（资助编号：KK.01.1.1.01.0004）。

**VII. 作者贡献**

K.L. 和 N.P. 并列第一作者。K.L. 提出了论文的构想，并完成了理论方面的工作。N.P. 完成了实验方面的工作。K.L. 和 N.P. 撰写了论文。D.J. 参与了有关理论问题的讨论，并撰写了论文的部分内容。

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

**附录 A：兰伯特函数**

本节将更详细地讨论方程（17）的解。该方程的解 $\tau_1$ 和 $\tau_2$ 是一些时刻，在这些时刻，欠阻尼振子的包络 $A(t)$等于临界状态下振子的位移$x_c(t)$。首先，我们注意到（17）可以改写为

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}+\omega\tau\right)e^{-(\omega_0-\gamma)\tau}=1, \tag{A1}$$

随后作代换

$$u\equiv-(\omega_0-\gamma)\,\tau+\frac{\gamma-\omega_0}{\omega_0} \tag{A2}$$

即可将（A1）表示为兰伯特方程[8]的形式

$$ue^{u}=y \tag{A3}$$

其中采用简记符号

$$y\equiv\frac{\gamma-\omega_0}{\omega e^{\frac{\omega_0-\gamma}{\omega_0}}}. \tag{A4}$$

这里注意到 $-1/e<y<0$，因为 $0<\gamma<\omega_0$ 在欠阻尼状态下。在这种情况下，兰伯特方程（A3）关于未知数$u$[8]有两个解：

$$u_1=W_0(y),\ u_2=W_{-1}(y), \tag{A5}$$

其中，$W_0$ 和$W_{-1}$ 是 Lambert W 函数的两个分支。我们可以将其简洁地写为$u1_{,2}=W0_{,-1}(y)$。将解$u_1$ 和$u_2$ 代回代换式 (A2)，即可得到交叉时刻 $\tau_1$ 和 $\tau_2$的两个解，如式 (18) 所示：

$$\tau_{1,2}=-\frac{1}{\omega_0-\gamma}W_{0,-1}\left(-\frac{\omega_0-\gamma}{\omega e^{\frac{\omega_0-\gamma}{\omega_0}}}\right)-\frac{1}{\omega_0}. \tag{A6}$$

**附录B：不同时间时刻下能量比(9) 随 $\gamma$ 的变化$t$**

图 B1 展示了五个时刻下能量比 (9) 的以 10 为底的对数随 $\gamma\in[0,1.5\omega_0]$ 变化的情况。可以看到，随着时间增加，会形成新的局部极小值，但全局最小值仍然存在，且其位置趋近于临界阻尼值 $\gamma=\omega_0$。每条曲线上的黑点表示在该时刻系统首次到达平衡位置时 $\gamma$的取值。可以看到，能量低于 $\gamma$对应能量的阻尼系数范围会随时间增加而缩小。因此，随着优化使能量越来越低，$\gamma_1$ 与 $\gamma_{opt}$（见第三节 D 小节）之间的差值也会减小。对于$t>15\omega_0^{-1}$，其行为在定性上相同。

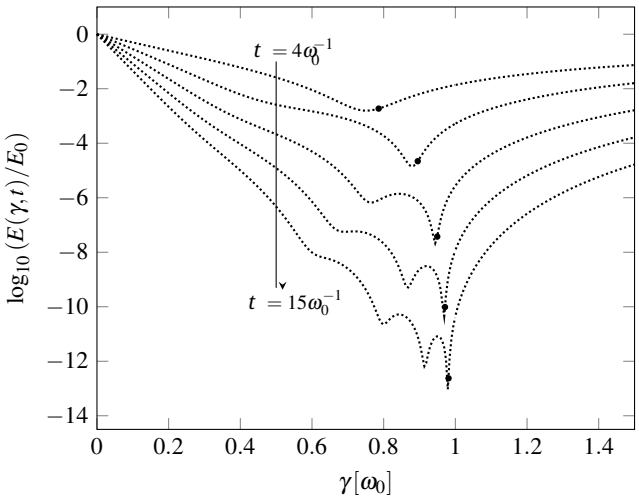



图 B1. 能量比 (9) 的以 10 为底的对数随 $\gamma$ 在时刻 $t=\{4\omega_0^{-1},6\omega_0^{-1},9\omega_0^{-1},12\omega_0^{-1},15\omega_0^{-1}\}$ 的变化（黑色点线，从上到下排列，如箭头所示）。每条曲线上的黑色小圆点表示 $\gamma$ 的取值，在该取值下，振子在相应时刻首次到达平衡位置。

[1]D. J. Morin，经典力学导论：附习题与解答（剑桥大学出版社，英国剑桥，2008）。[2]H. J. Pain，《振动与波的物理学》（约翰·威立父子出版公司，英国奇切斯特，2005）。[3]F. S. Crawford，《波：伯克利物理学课程》第*3*卷（麦格劳-希尔，美国纽约，1968）。[4]D. J. Morin，《波》（草稿）（https://scholar.harvard.edu/david-morin/waves，访问于 2022 年 7 月 19 日）。[5]M. Mongelli 和 N. A. Batista，“《优美的摆动：摆、流体、力与计算机》”，《流体》**5**，1–35（2020）。[6]H. L. Armstrong，“最优阻尼”，《美国物理学杂志》**34**，824（1966）。[7] M. A. Heald，“如何判断系统是否达到了临界阻尼？”，《美国物理学杂志》**46**，989（1978）。[8]R. M. Corless、G. H. Gonnet、D. E. G. Hare、D. J. Jeffrey 和 D. E. Knuth，“论朗伯 W 函数”，《计算数学进展》**5**，329–359（1996）。[9]A. S. de Castro，“阻尼谐振子：对一些标准教材的修正”，《美国物理学杂志》**54**，741（1986）。

[10]P.F. Hinrichsen，“磁阻尼振荡的加速度、速度与位移”，《物理教师》**57**，250（2019）。[11]参见补充材料：[待由 AIPP 插入网址]。[12]M. I. González 和 A. Bol，“物理摆的受控阻尼：临界条件附近的实验”，《欧洲物理学杂志》**27**，257–264（2006）。[13]K. technologies，“https://www.keysight.com/us/en/assets/7018-05928/data-sheets/5992-2572.pdf”（访问于 2022 年 7 月 19 日）。[14]H. D. Young、R. A. Freedman、A. L. Ford 和 F. W. Sears，《*Sears* 和 *Zemansky* 大学物理：含近代物理学》（培生·艾迪生·韦斯利，美国旧金山，2004）。[15]R. Khurana，《电子仪器与测量》（Vikas 出版社，印度新德里，2015）。[16]优化算法背后的物理系统（加拿大蒙特利尔，2018），第32届神经信息处理系统大会。

# 《阻尼谐振子再探：通往平衡的最快路径》补充材料

本补充材料包含额外的方程、图和表。为标明这些内容属于补充材料，编号时会在前面加上大写字母“S”。例如，补充文档中的第一幅图标为“图 S1”，第二张表标为“表 SII”，等等。本文中提及的方程、图和表，若未标注“S”，则指正文中的相应内容。

**SI. 证明：当初始位移相同且初始静止时，$\mathbf{x}x_{od}(t) \geq x_c(t)$**

我们来考察临界阻尼振子和过阻尼振子的解；两者均从静止状态出发，且相对于平衡位置具有相同的位移：

$$x_c(t) = x_0\,(1+\omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}\,, \tag{S1}$$

$$x_{od}(t) = x_0 e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma+\alpha}{2\alpha}e^{\alpha t} - \frac{\gamma-\alpha}{2\alpha}e^{-\alpha t}\right), \tag{S2}$$

其中 $\alpha = \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$和 $\gamma > \omega_0$。这里我们利用这样一个事实：$x_c(t)$ 和 $x_{od}(t)$ 都是整函数，因此可以利用它们在任意点处的泰勒展开进行比较。首先，我们将过阻尼解改写为双曲函数之和，使泰勒展开中的所有系数均为正，以便于比较：

$$x_{od}(t) = x_0 e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\sinh(\alpha t) + \cosh(\alpha t)\right). \tag{S3}$$

过阻尼情形在 $\alpha t = 0$附近的泰勒展开为：

$$\begin{aligned} x_{od}(t) &= x_0 e^{-\gamma t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\frac{(\alpha t)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(\alpha t)^{2n}}{(2n)!}\right) \\ &= x_0 e^{-\gamma t}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\left(\frac{\alpha t}{1!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \ldots\right) + 1 + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \ldots\right) \\ &= x_0 e^{-\gamma t}\left(1 + \frac{\gamma t^1}{1!} + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\gamma\alpha^2 t^3}{3!} + \ldots\right). \end{aligned} \tag{S4}$$

我们的目标是比较临界阻尼和过阻尼情况下的位移。我们声称，对于所选的初始条件，过阻尼情况下的位移始终大于或等于临界阻尼情况下的位移，$x_{od}(t) \geq x_c(t)$。将不等式两侧除以$x_0$ 并乘以$e^{\gamma t}$ ，不等号方向保持不变，因为这两个因子均为正。因此，利用已计算出的左侧泰勒展开式，我们得到：

$$\left(1 + \frac{\gamma t^1}{1!} + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\gamma\alpha^2 t^3}{3!} + \ldots\right) \geq (1+\omega_0 t)e^{(\gamma-\omega_0)t}. \tag{S5}$$

右侧在 $(\gamma-\omega_0)t = 0$ 附近的泰勒展开式等于：

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma-\omega_0)^{n-1}(\gamma+(n-1)\omega_0)t^n}{n!}. \tag{S6}$$

现在，我们可以通过比较$t^n$的相应系数，来比较（S5）的左侧和右侧。首先注意，两侧$t^0$ 和$t^1$ 的系数相同。接下来可以看出，左侧展开式中的系数因 n 的奇偶性而异。我们先考察$n$ 为偶数的情况，并令$n = 2k$，其中$k \in \mathrm{N}$。比较$t^{2k}$ 的幂可得：

$$\frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} \geq \frac{(\gamma-\omega_0)^{2k-1}(\gamma+(2k-1)\omega_0)}{(2k)!}. \tag{S7}$$

约去 $(2k)!$ 并展开 $\alpha = \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$，得到：

$$\begin{aligned} (\gamma^2-\omega_0^2)^k &\geq (\gamma+(2k-1)\omega_0)(\gamma-\omega_0)^{2k-1} \\ [(\gamma-\omega_0)(\gamma+\omega_0)]^k &\geq (\gamma+(2k-1)\omega_0)(\gamma-\omega_0)^{2k-1}. \end{aligned} \tag{S8}$$

约去 $(\gamma-\omega_0)^k$ 不会改变不等式方向，因为$\gamma > \omega_0$。因此剩下：

$$(\gamma+\omega_0)^k \geq (\gamma+(2k-1)\omega_0)(\gamma-\omega_0)^{k-1}. \tag{S9}$$

进一步化简右侧，得到：

$$\begin{aligned} (\gamma+\omega_0)^k &\geq (\gamma+2k\omega_0-\omega_0)(\gamma-\omega_0)^{k-1} \\ &\geq (\gamma-\omega_0)^k + 2k\omega_0(\gamma-\omega_0)^{k-1}. \end{aligned} \tag{S10}$$

左侧可写为 $((\gamma-\omega_0)+2\omega_0)^k$，并利用二项式定理展开：

$$\begin{aligned} ((\gamma-\omega_0)+2\omega_0)^k &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\gamma-\omega_0)^{k-i}(2\omega_0)^i \\ &= (\gamma-\omega_0)^k + k(\gamma-\omega_0)^{k-1}(2\omega_0) \\ &+ \sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}(\gamma-\omega_0)^{k-i}(2\omega_0)^i. \end{aligned} \tag{S11}$$

可以看出，二项式展开中明确写出的前两项等于 (S10) 的右侧。其余所有项均为正，因此当 $k > 1$ 时，(S10) 的左侧严格大于右侧；而当 $k = 1$时，两侧相等。

接下来，我们考察 n 为奇数的情况，并令其为 $n = 2k+1$，其中 $k \in \mathrm{N}$。比较 $t^{2k+1}$ 的幂可得：

$$\frac{\gamma\alpha^{2k}}{(2k+1)!} > \frac{(\gamma-\omega_0)^{2k}(\gamma+2k\omega_0)}{(2k+1)!}. \tag{S12}$$

请注意，在这种情况下，我们假设方程的左侧严格大于右侧，下面我们将对此进行证明。

如前所述，我们约去 $(2k+1)!$ 并展开$\alpha=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$，得到：

$$\begin{aligned}\gamma(\gamma^2-\omega_0^2)^k &> (\gamma+2k\omega_0)(\gamma-\omega_0)^{2k}\\ \gamma[(\gamma-\omega_0)(\gamma+\omega_0)]^k &> (\gamma+2k\omega_0)(\gamma-\omega_0)^{2k}.\end{aligned} \tag{S13}$$

接下来，我们消去 $(\gamma-\omega_0)^k$，得到

$$\gamma(\gamma+\omega_0)^k > (\gamma+2k\omega_0)(\gamma-\omega_0)^k. \tag{S14}$$

左侧可写为 $\gamma((\gamma-\omega_0)+2\omega_0)^k$，并利用二项式定理展开：

$$\begin{aligned}\gamma((\gamma-\omega_0)+2\omega_0)^k &= \gamma\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\gamma-\omega_0)^{k-i}(2\omega_0)^i\\ &= \gamma(\gamma-\omega_0)^k+\gamma k(\gamma-\omega_0)^{k-1}(2\omega_0)\\ &+ \gamma\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}(\gamma-\omega_0)^{k-i}(2\omega_0)^i.\end{aligned} \tag{S15}$$

展开式的第二项可改写为

$$\begin{aligned}\gamma k(\gamma-\omega_0)^{k-1}(2\omega_0) &= (\gamma-\omega_0+\omega_0)k(\gamma-\omega_0)^{k-1}(2\omega_0)\\ &= 2k\omega_0(\gamma-\omega_0)^k+2k\omega_0^2(\gamma-\omega_0)^{k-1}.\end{aligned}$$

这样，整个左侧等于：

$$\begin{aligned}\gamma(\gamma+\omega_0)^k &= \gamma(\gamma-\omega_0)^k+2k\omega_0(\gamma-\omega_0)^k\\ &+ 2k\omega_0^2(\gamma-\omega_0)^{k-1}+\gamma\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}(\gamma-\omega_0)^{k-i}(2\omega_0)^i.\end{aligned}$$

由于前两项与 (S14) 的右侧相同，且其余各项均为正，因此我们得出该不等式成立。对于$k=1$ 这一特殊情况，结论同样成立，因为此时左侧等于

$$\gamma(\gamma+\omega_0)^1=\gamma(\gamma-\omega_0)^1+2\omega_0(\gamma-\omega_0)^1+2\omega_0^2, \tag{S16}$$

显然，在这个特殊情形下，它大于右侧。总之，在所有情形下，(S5) 的左侧都大于或等于右侧，因此，在这些初始条件下，$x_{od}(t)\geq x_c(t)$ 这一陈述始终成立，且仅当 $t=0$ 时等号成立。

**SII. 初始条件：零伸长与最大速度**

接下来，我们关注初始条件为$x_0=0$ 和$v_0>0$的情况。这里给出了考虑给定初始条件后，三种振子状态的解

$$x_{ud}(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{-\gamma t}\sin(\omega t), \tag{S17}$$

$$x_c(t) = v_0 t e^{-\omega_0 t}, \tag{S18}$$

$$x_{od}(t) = \frac{v_0}{\alpha}e^{-\gamma t}\sinh(\alpha t)=\frac{v_0}{\alpha}e^{-\gamma t}\frac{1-e^{-2\alpha t}}{2e^{-\alpha t}}, \tag{S19}$$

其中使用了前面引入的记号。在图 S1(a) 中，我们将欠阻尼解$x_{ud}(t)$（ $\gamma=0.9\omega_0$ ）绘为红色实线，将临界阻尼解$x_c(t)$绘为黑色虚线，并将过阻尼解$x_{od}(t)$中$\gamma=1.1\omega_0$ 对应的曲线绘为蓝色点线， $\gamma=5\omega_0$ 对应的曲线绘为红色点线。所有解均按相同因子缩放，使其成为无量纲量。可以看到，在给定时间范围的末端，欠阻尼解最接近平衡。观察图 S1(a) 中的过阻尼曲线，可能会认为可以选择一个很大的阻尼系数 $\gamma$，从而比任何欠阻尼和/或临界阻尼振子更早达到平衡。我们在此说明，事实并非如此。在图 S1(b) 中，我们像图 S1(a) 一样展示了欠阻尼解和临界阻尼解，以及过阻尼解，其中 $\gamma=100\omega_0$ 对应蓝色点线， $\gamma=200\omega_0$ 对应红色点线。可以看到，当 $\gamma\gg\omega_0$时，过阻尼解呈现阶跃状行为，这可以通过如下解析近似来解释。对于 $\gamma\gg\omega_0$，我们有

$$\alpha=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}=\gamma\sqrt{1-\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2}\approx\gamma. \tag{S20}$$

利用 (S20) 和 (S19)，可得

$$x_{od}(t)\approx\frac{v_0}{2\gamma}\left(1-e^{-2\gamma t}\right). \tag{S21}$$

由 (S21) 可知，在此极限下，过阻尼解从 $t=0$ 时的零值迅速上升至 $v_0/(2\gamma)$，其中 $t\gtrsim 1/\gamma$；这与图 S1(b) 所示结果完全吻合。总之，选取一个非常大的 $\gamma$（与 $\omega_0$ 相比）会使振子迅速达到一个实际上趋于无穷小的最大伸长量，随后才极其缓慢地开始返回平衡位置。因此，与正文中的处理类似，本小节后续分析不考虑过阻尼状态。

在图 S2 中，我们展示了比值 (9) 的以 10 为底的对数：对于欠阻尼振子， $\gamma=0.85\omega_0$ 对应绿色点划线， $\gamma=0.9\omega_0$ 对应红色实线， $\gamma=0.95\omega_0$ 对应蓝色虚线；临界阻尼振子则对应黑色虚线。我们注意到，在这些初始条件下，振子的行为在定性上与图 3(a) 所示的情况非常相似。因此，我们省略更细节的内容，并按照正文中的描述继续进行优化。

给定初始条件的欠阻尼振子第 $n$ 次到达平衡位置的时刻为

$$\tau_{A_n}=\frac{n\pi}{\omega}, \tag{S22}$$

其中 $n\in\mathbb{N}$。我们将系统达到平衡的时刻定义为其能量等于 $10^{-\delta}E_0$, 并满足某个 $\delta>0$ 的时刻。欠阻尼系数 $\gamma_1$ 即为使系统在 $\tau_{A_1}$ 给定的时刻达到该能级的系数。由于在这一时刻，振子的总能量等于其动能

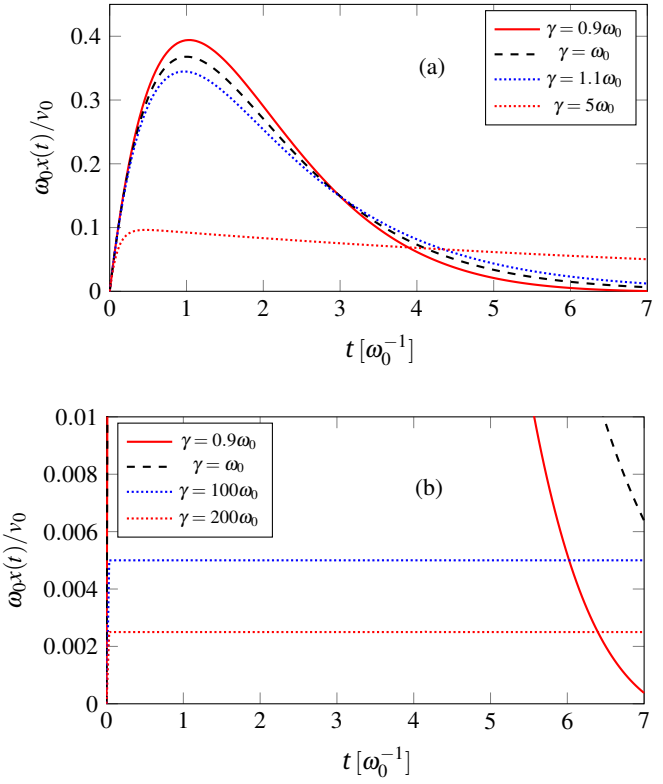



图 S1. (a) 当 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时的欠阻尼解（红色实线）、临界阻尼解（黑色虚线），以及当 $\gamma = 1.1\omega_0$（蓝色点线）和 $\gamma = 5\omega_0$（红色点线）时的过阻尼解。所有解均按相同因子缩放，使其成为无量纲。(b) 欠阻尼解（红色实线）、临界阻尼解（黑色虚线），以及当 $\gamma = 100\omega_0$（蓝色点线）和 $\gamma = 200\omega_0$（红色点线）时的过阻尼解。当 $\gamma \gg \omega_0$ 时，过阻尼解呈现阶跃状行为。

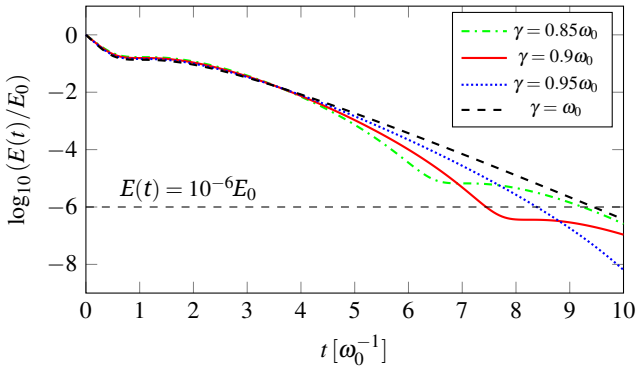



图 S2. 欠阻尼振子在 $\gamma = 0.85\omega_0$（绿色点划线）、$\gamma = 0.9\omega_0$（红色实线）、$\gamma = 0.95\omega_0$（蓝色点线）以及临界阻尼振子情况下的比值 (9) 的以 10 为底的对数。图中还加入了参考能量 $E(t) = 10^{-6}E_0$，以便更容易比较各曲线。

能量，因此我们可以将平衡条件写为

$$\frac{E_{ud}(\tau_{A_1})}{E_0} = \frac{\dot{x}_{ud}(\tau_{A_1})^2}{v_0^2} = 10^{-\delta}. \tag{S23}$$

利用 (S22) 并结合$n = 1$ 以及 (S17) 的时间导数，我们得到

$$\exp\left(-\frac{2\gamma\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\right) = 10^{-\delta}. \tag{S24}$$

表 SI 展示了由此条件得到的 $\gamma_1$ 结果。将能量比 (9) 视为 $\tau_{A_1}$ 时关于 $\gamma$ 的函数，可以用与正文定性上相同的方法得到 $\gamma_{opt}$。

| $E(t)/E_0$ | $\gamma_1\,[\omega_0]$ | $\tau_{A_1}\,[\omega_0^{-1}]$ | $\tau_c\,[\omega_0^{-1}]$ | $(\tau_c - \tau_{A_1})/\tau_c\,[\%]$ |
|---|---|---|---|---|
| $10^{-4}$ | 0.8261 | 5.57 | 6.79 | 17.97 |
| $10^{-6}$ | 0.9103 | 7.59 | 9.45 | 19.68 |
| $10^{-8}$ | 0.9465 | 9.74 | 12.00 | 18.83 |
| $10^{-10}$ | 0.9647 | 11.93 | 14.50 | 17.72 |
| $10^{-12}$ | 0.9751 | 14.17 | 16.96 | 16.45 |
| $10^{-14}$ | 0.9815 | 16.41 | 19.40 | 15.41 |
| $10^{-16}$ | 0.9858 | 18.71 | 21.83 | 14.29 |
| $10^{-18}$ | 0.9887 | 20.96 | 24.24 | 13.53 |

表 SI. 欠阻尼系数 $\gamma_1$（第 2 列）是根据条件 (S24) 在不同的 $\delta$（第 1 列）取值下得到的。最后三列分别显示满足条件 (S24) 的时刻（第 3 列）、临界阻尼振子的能量降至相同水平所需的时间（第 4 列），以及欠阻尼振子相较于临界阻尼振子的相对时间优势（第 5 列）。

### SIII. 初始伸长量与速度同号

初始条件满足$x_0 \neq 0$且$v_0 \neq 0$，但两者符号相同的情况，是正文和前一小节中已探讨情况的直接组合。因此，那里的结论在这里同样成立；我们总能找到一个最优的欠阻尼系数，使具有此 $\gamma$ 的振子的能量在第一次（或第二次、第三次等）到达平衡位置时降至低于预设阈值的水平。与临界阻尼振子相比，欠阻尼振子所节省的相对时间取决于初始条件以及预设的能量值，其关系在代数上并不简单，但在最优情形下的优化选择中，该时间优势仍然大于零。因此，本节省略更详细的推导，并得出结论：我们的发现仍然成立。

### SIV. 初始伸长量与速度符号相反

最后，我们关注初始条件为$x_0 > 0$且$v_0 < 0$的情况（反之亦然，这种情况可通过翻转坐标符号来处理）。如下文所示，对于这些初始条件，振子在欠阻尼状态下的行为在定性上与已分析过的初始条件相同，而临界阻尼状态和过阻尼状态则呈现出一些新的特性。因此，这里我们重新列出临界阻尼振子和过阻尼振子的解，即式（3）和式（4），并将$v_0 = -|v_0|$考虑在内

$$x_c(t) = (x_0 + (\omega_0 x_0 - |v_0|)t)\, e^{-\omega_0 t}, \tag{S25}$$

$$x_{od}(t) = e^{-\gamma t}\left(\frac{(\gamma+\alpha)x_0 - |v_0|}{2\alpha} e^{\alpha t} - \frac{(\gamma-\alpha)x_0 - |v_0|}{2\alpha} e^{-\alpha t}\right). \tag{S26}$$

根据初始动能与势能之间的关系，我们分析三种情况。

#### A. 初始动能小于初始势能

初始动能小于初始势能这一条件可以改写为 $|v_0| < \omega_0 x_0$。若该条件成立，临界阻尼解 (S25) 没有零点，因此会渐近趋近平衡位置，且始终不会过冲。由于阻尼系数较大，过阻尼解 (S26) 趋近平衡位置的速度比临界阻尼解更慢。因此可以得出结论：对于任意 $t > 0$，与临界阻尼解相比，过阻尼解离平衡位置更远。因此，对于所选的初始条件，过阻尼振子也始终不会过冲平衡位置。

在图 S3 中，我们展示了欠阻尼振子的比值 (9) 的以 10 为底的对数，其中 $\gamma = 0.9\omega_0$ 对应实线红色曲线，临界阻尼振子对应黑色虚线，过阻尼振子（$\gamma = 1.1\omega_0$）对应蓝色点线。绘制这些曲线时，我们选取了 $|v_0| = \omega_0 x_0/2$。我们看到，对于这类初始条件，欠阻尼振子相较于临界阻尼振子的行为，在定性上与此前考察并在图 3(a) 和图 S2 中展示的情况相同。因此，可以像之前一样对欠阻尼系数进行优化。

#### B. 初始动能等于初始势能

初始动能等于初始势能的情况可写为 $|v_0| = \omega_0 x_0$。在这

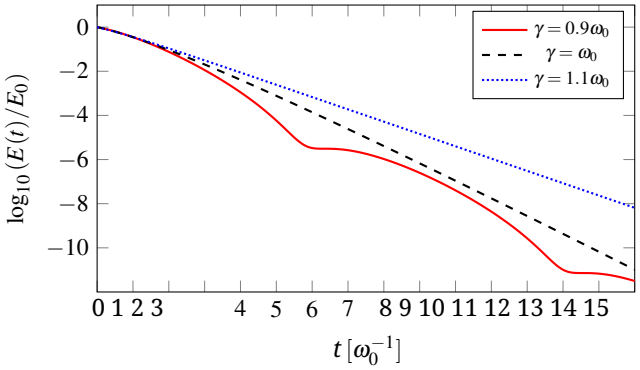



图 S3. 欠阻尼振子（红色实线）在 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时、临界阻尼振子（黑色虚线）以及过阻尼振子在 $\gamma = 1.1\omega_0$ 时的比值 (9) 的以 10 为底的对数。曲线是在条件 $|v_0| = \omega_0 x_0/2$ 下绘制的。

种情况下，临界阻尼解 (S25) 中的线性项相互抵消，只剩下纯指数行为，$x_c(t) = x_0 e^{-\omega_0 t}$。因此，临界阻尼解仍然没有任何零点，也就是说，它永远不会到达平衡位置。按照 SIV A 中相同的推理，我们可以得出结论：对于任意 $t > 0$，过阻尼振子的位移 (S26) 都大于临界阻尼振子的位移。

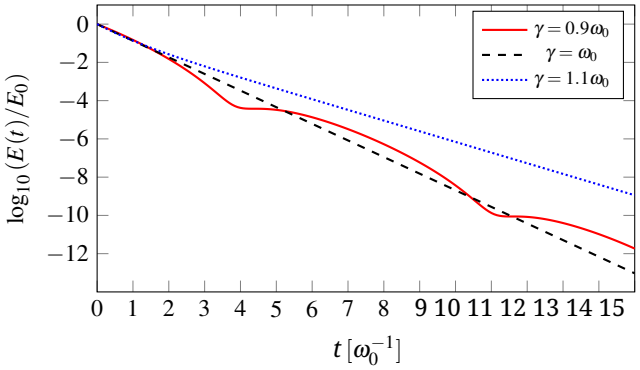



图 S4. 当初始动能和势能相等时，欠阻尼振子在 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时、临界阻尼振子以及过阻尼振子在 $\gamma = 1.1\omega_0$ 时的比值 (9) 的以 10 为底的对数。

图 S4 展示了欠阻尼振子在 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时的比值 (9) 的以 10 为底的对数（实红线）、临界阻尼振子（黑色虚线）以及在 $\gamma = 1.1\omega_0$ 时的过阻尼振子（蓝色点线）。在这种情况下，我们可以注意到，当 $t = 5\omega_0^{-1}$ 时，欠阻尼振子的能量首次就已等于临界阻尼振子的能量。这远早于图 3(b) 所示的首次交点时刻 $t = 24.24\omega_0^{-1}$。因此，我们

原则上可以像之前一样对欠阻尼系数进行优化，但与临界阻尼解相比，优势较小。

### C. 初始动能大于初始势能

当 $|v_0| > \omega_0 x_0$ 时，就会出现最后这种情况。与前面的情况不同，临界阻尼振子的解 (S25) 在以下位置为零：

$$t_c = \frac{x_0}{|v_0| - \omega_0 x_0}. \tag{S27}$$

因此，它会越过平衡位置，达到新的最大伸长量，随后渐近地趋近平衡位置。在这种情况下，过阻尼振子的解 (S26) 也在以下位置为零：

$$t_{od} = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{(\gamma-\alpha)+|v_0|}{(\gamma+\alpha)-|v_0|}. \tag{S28}$$

根据 $\gamma$ 的大小，过阻尼振子可能会越过平衡位置，也可能不会。我们可以选择一个过阻尼的 $\gamma$，使 (S26) 中括号内乘在第一个指数函数前的因子抵消；这发生在

$$\tilde{\gamma} = \frac{\left(\frac{|v_0|}{x_0}\right)^2 + \omega_0^2}{2\left(\frac{|v_0|}{x_0}\right)}. \tag{S29}$$

此时，过阻尼振子的解可简化为

$$x_{od}(t) = \frac{|v_0| - (\tilde{\gamma}-\tilde{\alpha})x_0}{2\tilde{\alpha}} e^{-(\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha})t} = x_0 e^{-(\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha})t}, \tag{S30}$$

其中 $\tilde{\alpha} = \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - \omega_0^2}$。对于过阻尼系数 $\tilde{\gamma}$，(S28) 中对数内分式的分母也会变为零，这意味着过阻尼解的零点出现在 $t_{od} \to \infty$。因此，对于 $\gamma \in \langle \omega_0, \tilde{\gamma} \rangle$ 过阻尼解会过冲一次，越过平衡位置；而对于 $\gamma \in [\tilde{\gamma}, \infty\rangle$，它会趋近平衡位置，但始终不会发生过冲。由于 (S30) 中的 $\tilde{\gamma} > \omega_0$ 和 $\tilde{\alpha} > 0$，显然，过阻尼振子 (S30) 比临界阻尼振子更快地趋近平衡。

在图 S5(a) 中，我们展示了欠阻尼振子的比值 (9) 的以 10 为底的对数，其中 $\gamma = 0.9\omega_0$ 对应实线红色曲线，临界阻尼振子对应黑色虚线，过阻尼振子在 $\gamma = 1.245\omega_0$ 时对应紫色曲线，在 $\gamma = 1.25\omega_0$ 时对应蓝色点线，在$\gamma = 1.255\omega_0$ 时对应青色虚线。绘制这些曲线时，我们选取了条件 $|v_0| = 2\omega_0 x_0$。由此可根据 (S29) 得到 $\tilde{\gamma} = 1.25\omega_0$，如图 S5(b) 中的蓝色点线所示。我们可以清楚地看到，$\tilde{\gamma}$的过阻尼振子比欠阻尼振子和临界阻尼振子衰减得都快。对于略小于 $\tilde{\gamma}$ 的阻尼系数，例如 $\gamma = 1.245\omega_0$ 对应紫色曲线，此时系统可能会稍早达到某个期望的能级；在本例中，能级为 $10^{-7}E_0$。原则上，我们可以优化过阻尼振子的阻尼系数，但如图 S5(a) 所示，与 $\tilde{\gamma}$ 相比，这样做带来的时间收益微不足道。因此，我们得出结论：对于这类初始条件，只需选择系统参数，使阻尼系数尽可能接近 $\tilde{\gamma}$，即可实现最快达到平衡。

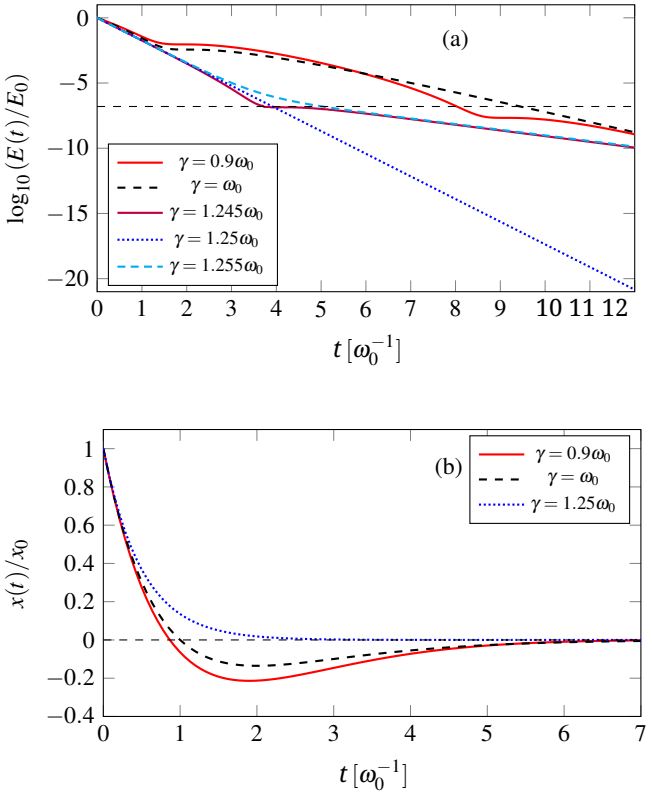



图 S5. (a) 欠阻尼振子的比值 (9) 的以 10 为底的对数，其中 $\gamma = 0.9\omega_0$（红色实线）、临界阻尼振子（黑色虚线），以及过阻尼振子，其中 $\gamma = 1.245\omega_0$（紫色曲线）、$\gamma = 1.25\omega_0$（蓝色点线）和 $\gamma = 1.255\omega_0$（青色虚线）。曲线根据条件 $|v_0| = 2\omega_0 x_0$绘制。为便于比较各曲线，图中还标出了能级 $E = 10^{-7}E_0$。(b) 振子的位移随时间的变化。

### SV. 初始条件为 $x_0 > 0$ 且 $v_0 = 0$ 时，临界阻尼能量与欠阻尼能量比

图 4(a) 展示了临界阻尼振子的能量与欠阻尼振子的能量之比

$$\frac{E_c(t)}{E_{ud}(t)} = \frac{\dot{x}_c(t)^2 + \omega_0^2 x_c(t)^2}{\dot{x}_{ud}(t)^2 + \omega_0^2 x_{ud}(t)^2}, \tag{S31}$$

在 $\gamma = 0.9\omega_0$ 的情况下。比值 (S31) 的极大值也是差值的极大值

$$\ln \frac{E_c(t)}{E_{ud}(t)} = \ln \frac{E_c(t)}{E_0} - \ln \frac{E_{ud}(t)}{E_0}, \tag{S32}$$

因此，可以根据以下条件求出使比值（S31）达到第$n$个极大值的时刻 $\tau_{max_n}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln \frac{E_c(t)}{E_0} - \ln \frac{E_{ud}(t)}{E_0}\right)\Big|_{t=\tau_{max_n}} = 0. \tag{S33}$$

这意味着，在临界阻尼振子和欠阻尼振子的相对能量损失相等的时刻，比值达到极大值（关于术语的说明，请参见方程（11）和（13），以及其后的段落）。图4(b)中，黑色虚线表示临界阻尼振子的能量损失率，红色实线表示 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时欠阻尼振子的能量损失率。我们看到，图4(a)所示的比值（S31）的三个极大值，分别出现在两条能量损失率曲线的第一个、第三个和第五个交点处，这些交点以箭头标出，并记为 $\tau_{max_n}$，其中$n = \{1,2,3\}$。$\tau_{max_n}$的值是根据图形数值求得的，因为无法通过解析方法确定。

对于所选的欠阻尼振子情形，能量损失率的最大幅值等于 $4\gamma = 3.6\omega_0$。这意味着，根据式（13），$\beta_{ud} = 1$ 在我们记为 $\tau_{A_1}$ 的时刻。在这一瞬间，系统首次到达平衡位置，其总能量等于动能。相比之下，当$\beta_{ud} = 0$ 时，能量损失率为零，这一时刻记为 $\tau_{B_1}$；此时振子的总能量等于其势能。需要说明的是，我们在此选取了一个 $\gamma = 0.9\omega_0$ 的欠阻尼振子作为示例。选择欠阻尼状态下的任何其他 $\gamma$，都会呈现定性上相同的行为。不同情形之间的定量差异在于：欠阻尼振子与临界阻尼振子的能量相等之前出现的极大值数量，以及这些极大值的高度。图 S7(a) 和 (b) 展示了 $\gamma = 0.85\omega_0$ 和 $0.95\omega_0$ 时的比值（S31）。在同一图中，我们用竖直虚线标出临界阻尼振子的能量首次等于欠阻尼振子能量的时刻。

这里我们讨论一个近似，用来估算比值 (S31) 取得极大值的时刻$\tau_{max_n}$。观察图 S6 可知，较好的初步猜测是，这些时刻$\tau_{max_n}$ 接近满足 $\beta_{ud} = 1/2$ 的时刻。具体而言，对于图 S6 所示的情形，我们发现 $\beta_{ud}(\tau_{max_1})$ =0.477；类似地，$\beta_{ud}(\tau_{max_{2,\ 3}}) \approx 0.5$。因此，取得极大值的时刻可以很好地近似为满足 $\beta_{ud}(t_n) = 1/2$ 的时刻$t_n$，也就是说，振子的动能等于其势能时。这一条件可解析地写为

$$\dot{x}_{ud}(t_n)^2 = \omega_0^2 x_{ud}(t_n)^2. \tag{S34}$$

对 (S34) 开平方时，必须考虑到在某些时刻 $\tau_{max_n}$（第一次、第三次和第五次交叉

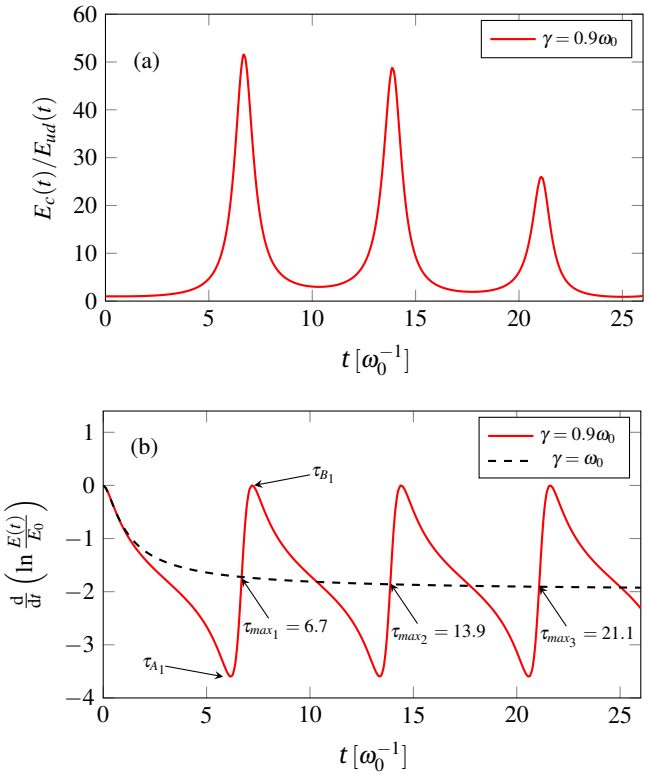



图 S6。(a) 当 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时，临界阻尼振子的能量与欠阻尼振子的能量之比。极大值出现在临界阻尼振子和欠阻尼振子的能量损失率相等的时刻。(b) 临界阻尼振子的能量损失率（黑色虚线）以及当 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时欠阻尼振子的能量损失率（红色实线）。(a) 中所示的三个极大值出现在箭头所示的时刻，记为 $\tau_{max_n}$，其中 $n = \{1,2,3\}$。$\beta_{ud}$ 在标记为 $\tau_{A_1}$ 的时刻等于 1，在标记为 $\tau_{B_1}$的时刻等于 0。

图4(b)中的能量损耗率）欠阻尼振子正远离平衡位置运动，这意味着速度与伸长量的符号相同。于是我们有

$$\dot{x}_{ud}(t_n) = \omega_0 x_{ud}(t_n). \tag{S35}$$

求解（S35）可得

$$t_n = \frac{1}{\omega}\left(\arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0 + \gamma}\right) + n\pi\right), \tag{S36}$$

其中 $n \in \mathbb{N}$。我们关注欠阻尼振子和临界阻尼振子的能量首次相交之前出现的极大值总数。当 $\gamma = 0.9\omega_0$ 时，我们只取 $n = \{1,2,3\}$，因为这是在 $t = 24.24\omega_0^{-1}$ 之前出现的唯一交点。在表 SII 中，我们给出了数值计算得到的时刻 $\tau_{max_1}$，以及利用式 (S36) 并取 $n = 1$ 得到的时刻 $t_1$；结果保留两位小数，涵盖区间 $\gamma \in [0.7\omega_0, \omega_0\rangle$ 内的五个阻尼系数。很容易看出

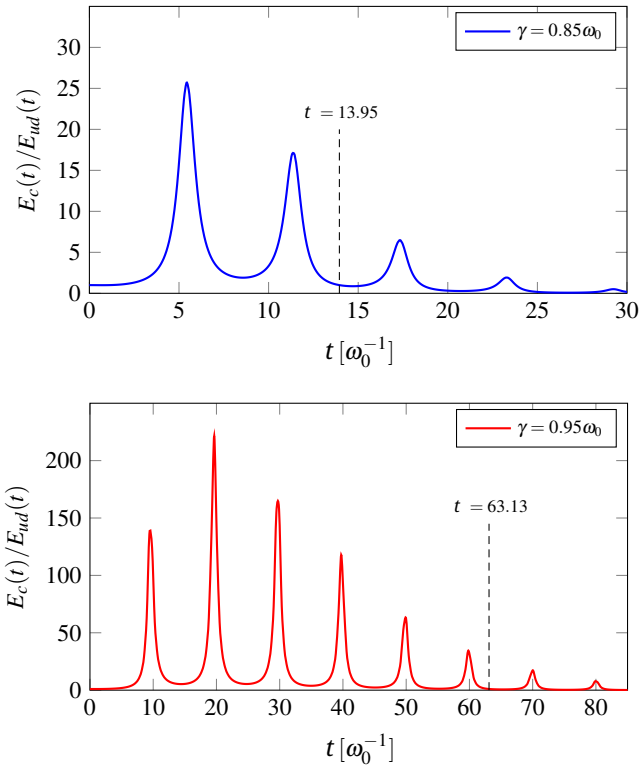



图 S7. 在 $\gamma = 0.85\omega_0$ 和 $0.95\omega_0$ 的情况下，临界阻尼振子的能量与欠阻尼振子的能量之比。竖直虚线表示临界阻尼振子的能量首次等于欠阻尼振子能量的时刻。

对于 $\tau_{max_1} \approx t_1$，相对误差小于 1%。对于其他极大值，计算得到的近似值也非常准确，即 $\tau_{max_n} \approx tn$，其中 $n > 1$，阻尼系数也处于同一区间。

| $\gamma[\omega_0]$ | $\tau_{max_1}[\omega_0^{-1}]$ | $t_1[\omega_0^{-1}]$ | $(\tau_{max_1} - t_1)/\tau_{max_1}$[%] |
|---|---|---|---|
| 0.7 | 3.81 | 3.84 | −0.79 |
| 0.8 | 4.70 | 4.70 | 0 |
| 0.9 | 6.70 | 6.69 | 0.15 |
| 0.95 | 9.56 | 9.55 | 0.1 |
| 0.99 | 21.78 | 21.77 | 0.05 |

表 SII。数值获得的时刻 $\tau_{max_1}$（第 2 列）以及由（S36）并结合 $n = 1$ 得到的$t_1$（第 3 列），对应五种不同的阻尼系数（第 1 列）。可以很容易看出，$\tau_{max_1} \approx t_1$，相对误差小于 1%（第 4 列）。

| $E(t)/E_0$ | $\gamma_2\,[\omega_0]$ | $\tau_{A_2}[\omega_0^{-1}]$ | $\tau_c[\omega_0^{-1}]$ | $(\tau_c - \tau_{A_2})/\tau_c$[%] |
|---|---|---|---|---|
| $10^{-4}$ | 0.6477 | 7.11 | 6.96 | −2.16 |
| $10^{-6}$ | 0.7767 | 8.89 | 9.56 | 7 |
| $10^{-8}$ | 0.8492 | 10.84 | 12.10 | 10.41 |
| $10^{-10}$ | 0.8926 | 12.90 | 14.57 | 11.46 |
| $10^{-12}$ | 0.9201 | 15.01 | 17.03 | 11.86 |
| $10^{-14}$ | 0.9385 | 17.18 | 19.46 | 11.72 |
| $10^{-16}$ | 0.9513 | 19.37 | 21.88 | 11.47 |
| $10^{-18}$ | 0.9605 | 21.57 | 24.28 | 11.16 |

表 SIII。由不同 $\delta$（第 1 列）的取值，根据条件（S38）得到的欠阻尼系数 $\gamma_2$（第 2 列）。后三列分别显示了条件（S38）对 $\gamma_2$（第 3 列）成立的时刻、临界阻尼振子的能量降至相同水平的时间（第 4 列），以及与临界阻尼振子相比，欠阻尼振子的相对时间优势（第 5 列）。

## SVI. 关于欠阻尼 $\gamma$ 相对于 $\tau_{A_2}$ 的优化

使用式 (20)，令 $n = 2$，我们得到

$$\exp\left[-2\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\left(\frac{3\pi}{2}+\arctan\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\right)\right] = 10^{-\delta}. \tag{S37}$$

将式 (S37) 左侧简记为 $f(\gamma)$，利用条件可以通过图解法确定在 $\tau_{A_2}$ 达到目标能级的伽马值

$$\log_{10}(f(\gamma)) = -\delta. \tag{S38}$$

表 SIII 展示了采用这种方法，在 $\delta$ 取不同值时得到的结果。可以看到，第五列给出的欠阻尼振子相对于临界阻尼振子的相对优势，小于表 I 中的情况。这是预料之中的，因为欠阻尼振子的能量在每个周期之后都更接近临界阻尼振子的能量，直至最终超过它（见图 3(a) 和 (b)）。需要注意第五列第一行的负值，这表明临界阻尼振子达到能量 $E(t) = 10^{-4}E_0$ 早于欠阻尼振子。当然，我们也可以寻找一个阻尼系数，使欠阻尼振子在第三次、第四次等经过平衡位置时达到平衡，但这样一来，它相对于临界阻尼振子的优势会越来越小。

## SVII. 可检测过冲实验

作为一个可以检测到过冲的实验示例，我们给出了电阻值为

5 kΩ 时的电压读数，如图 S8 所示。我们注意到，第二次交越发生在（25.2 ± 0.4） μ s，此后电压低于示波器的分辨率。

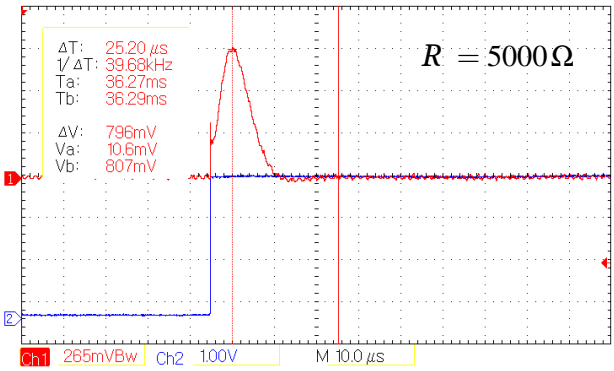



图 S8. 欠阻尼电路中示波器上的读数，其中$R = 5\text{k}\Omega$（红色曲线）。测得电压从最大值降至示波器分辨率所需的时间间隔为（25.2 ± 0.4） μs。可以清楚地看到，信号过冲至参考电压以下。