arXiv:2301.08285v1 [math.OA] 19 Jan 2023

完全正映射的近似唯一扩张性质

IAN THOMPSON

Abstract. 我们研究含幺算子空间的非交换 Choquet 边界中给定点的酉轨道闭包，并采用逐点范数收敛拓扑。这也可以更详尽地表述为：那些与一个具有唯一扩张性质的表示近似酉等价的 C*-包络的 $*$-表示。尽管这些 $*$-表示本身不一定具有唯一扩张性质，我们证明它们的含幺完全正扩张受到显著限制。当底层算子空间可分时，这使我们能够将本研究与 Arveson 超刚性猜想联系起来。最后，作为一项应用，我们重新表述经典的 Sa˘skin 定理和 Arveson 本质正规性猜想。

1. Introduction

Weyl–von Neumann 定理将可分希尔伯特空间上的正规算子刻画为模去紧算子后的对角算子。在 [45], Voiculescu 提出了关于可分 C $*$-代数在可分希尔伯特空间上的表示的广泛非交换推广。也就是说，每个 *-表示 $*\colon \pi\ (\ \mathfrak{A}\ \to\ B)$ 在逐点范数闭的酉轨道中，属于某个不可约 $\mathcal{H}_\pi$-表示的直和。也就是说，存在一族不可约 $*$- 表示 $*\colon \{\pi_i\ (\ \mathfrak{A} \to B) : \mathcal{H}_i$ 以及一列酉算子 $i \in I\}:\ u_n$ 使得 $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i \to \mathcal{H}_\pi$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u_n^* \pi(t) u_n - \left(\bigoplus_{i\in I} \pi_i \right)(t) \right\| = 0, \qquad t \in \mathfrak{A}.$$

此外，我们可以假设 $u_n^*\pi(t)u_n$ 等于不可约表示的直和
$*$-表示模去紧算子，对每个 n 都成立。在 [45], 中，有若干结果统称为“Voiculescu 定理”。就我们的目的而言，Voiculescu 定理指的是：当 $*$-表示具有逐点相同的秩时，作用于可分希尔伯特空间上的可分 C*-代数的 $*$-表示恰好具有相同的逐点范数闭酉等价类。

在 [23, 定理 3.14], 中，Hadwin 给出了 Voiculescu 定理的一个非可分推广，我们现在来介绍。为此，回顾一下，希尔伯特空间算子的秩指值域闭包的维数。我们称两个 C*-代数 $\mathfrak{A}$ 上的 $*$表示 π、σ 近似酉等价，若存在一族酉算子网 u_β: $\mathcal{H}_\sigma \to \mathcal{H}_\pi$，使得对每个$t \in \mathfrak{A}$，都有 $\|u_\beta^*\pi(t)u_\beta - \sigma(t)\| \to 0$。当 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathcal{H}_\pi$ 可分时，可以用序列代替该网。

Date: 2023年1月23日。作者部分获得了加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）CGS-D 奖学金的资助。

随后，Hadwin 证明，π 和 σ 近似酉等价，当且仅当对于每个 $t \in \mathfrak{A}$，$\mathrm{rank}(\pi(t)) = \mathrm{rank}(\sigma(t))$。当 $\mathcal{H}_\pi$ 不可分时，人们或许会想到在处理基数时会遇到困难，但我们的结果并不需要如此复杂的处理。作为 Hadwin 定理的推论，通常可以预期，一个 $*$表示的近似酉等价类相当大。事实上，若 π 和 σ 是具有相同核的 $*$表示，那么只要选取足够大的基数 κ，$\pi^{(\kappa)}$ 和 $\sigma^{(\kappa)}$就近似酉等价。

我们的工作着重研究一类特别重要的 $*$-表示的近似酉等价类，这类表示与含幺算子空间相关。为此，算子空间是 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 的子空间；当 $\mathcal{M}$ 自伴且含幺时，$\mathcal{M}$ 称为算子系统。我们将包含含幺算子空间 $\mathcal{M}$ （位于 $B(\mathcal{H})$ 中）的最小 C*-代数记为 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$。C*-包络是 $\mathcal{M}$ 的一个 C*-覆盖 $(\mathrm{C}^*_e(\mathcal{M})\ \varepsilon)$，并满足以下泛性质：对于 $\mathcal{M}$ 的任意 C*-覆盖 $(\mathfrak{A}, \iota)$，都存在一个 $*$-表示 $\theta : \mathfrak{A} \to \mathrm{C}^*_e(\mathcal{M})$，使得 $\theta \circ \iota = \varepsilon$。C*-包络的存在性并非显而易见，最初由[25]证明。另一种途径是，Arveson [2] 的一项大型纲领表明，由于 $\mathcal{M}$ [4] 存在足够多的边界表示，C*-包络总是存在 [15],[21],[35]。我们称 $*$-表示 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 关于 $\mathcal{M}$ 具有唯一扩张性质，若对于满足 $\psi\,|_{\mathcal{M}} = \pi\,|_{\mathcal{M}}$ 的任意含幺完全正映射 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$，都有 $\psi = \pi$。此外，若 π 不可约，则称 π 为 $\mathcal{M}$ 的边界表示。Arveson 纲领以及随后众多进展 [3],[5],[10],[11],[12],[13],[16],[17],[18],[27],[30],[32],[34]，表明，边界表示蕴含了含幺算子空间的许多内在特征，可视为非交换 Choquet 边界 [4]。我们的主要灵感来源于这些进展之一 [5]。

ˇ 受 Korovkin 和 Saˇskin 的经典结果启发，Arveson 提出了一种非交换逼近理论，该理论以边界表示 [5] 的形式表述。最初，Korovkin 证明了一个刚性结果，涉及定义域和值域均为 $\mathrm{C}[0,1]$ 的正映射序列。随后，ˇSaˇskin 证明，Korovkin 的结果是某个特定含幺算子空间 $\mathcal{M} \subset \mathrm{C}[0,1]$ 的一个实例，该空间满足如下性质：$\mathrm{C}[0,1]$ 的所有不可约 $*$-表示都是 $\mathcal{M}$ [43] 的边界表示。具体而言，ˇSaˇskin 表明，给定一个紧致度量空间 X，$\mathrm{C}(X)$ 的每个不可约 $*$-表示都是含幺算子空间 $\mathcal{M} \subset \mathrm{C}(X)$ 的边界表示，当且仅当：只要 $\psi_n : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(X)$ 是一个含幺正映射序列，并且对每个 $g \in \mathcal{M}$ 都有 $\|\psi_n(g) - g\| \to 0$，那么对于每个 $f \in \mathrm{C}(X)$，便有 $\|\psi_n(f) - f\| \to 0$。数十年后，Arveson 给出了这一现象的非交换推广 [5, 定理 2.1]。给定一个可分含幺算子空间$\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$，Arveson 证明，$\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 的每个 $*$-表示相对于 $\mathcal{M}$ 都具有唯一扩张性质，当且仅当：只要 $\omega : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{K})$ 是一个忠实的 $*$-表示，且 $\psi_n : B(\mathcal{K}) \to B(\mathcal{K})$ 是一个满足以下条件的含幺完全正映射序列

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(\omega(m)) - \omega(m)\| = 0, \qquad m \in \mathcal{M},$$

那么必然有

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi_n(\omega(t)) - \omega(t)\| = 0, \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

若一个含幺算子空间 $\mathcal{M}$ 满足其所有 $*$-表示都具有唯一扩张性质，则称其为 超刚性。遗憾的是，Arveson 未能以不可约 $*$-表示来表述超刚性。因此，Arveson 猜想，对于可分含幺算子空间 $*$，C*($\mathcal{M}$的每个不可约 $\mathcal{M}$ -表示都是边界表示，当且仅当 C $*$的每个 *($\mathcal{M}$-表示相对于$\mathcal{M}$都具有唯一扩张性质。尽管付出了大量努力，[5],[8],[9],[11],[17],[28],[30],[33],[34],[42], Arveson 超刚性猜想仍未得到解答，即使在交换情形下也是如此。事实上，读者应当注意，由于完全正映射的值域不同，目前尚不清楚 Sa˘skin的结果是否与 Arveson 结果的交换情形一致。

对于 Arveson 猜想的非平凡方向，假设每个不可约的 $*$-表示都是 $\mathcal{M}$ 的边界表示。众所周知，唯一扩张性质在直和下保持不变[5, 命题 4.4]。因此，Voiculescu 定理意味着，每个作用在可分希尔伯特空间上的 C*($\mathcal{M}$) 的 $*$-表示，都近似酉等价于一个
$*$-表示，且该表示具有唯一扩张性质。若 Arveson 猜想成立，那么这些 $*$-表示必然具有唯一扩张性质。因此，我们工作的主要目的是研究那些近似酉等价于具有唯一扩张性质的 $*$-表示的 $*$-表示。

在第 2 节中，我们记录关于以下对象的初步信息和基本观察： $*$-表示 C*($\mathcal{M}$)，它们近似酉等价于一个
$*$-表示具有唯一扩张性质。特别地，我们探讨不可约 $*$-表示若与某个边界表示近似酉等价，是否必然也是边界表示。文献中已有几个例子表明，这个问题的答案是否定的（例2 及其相关讨论），我们在此记录其中一个例子的详细内容。

在第3节中，我们研究唯一扩张性质的一种变体。我们的首个主要结果（定理3.6）表明，这种变体会在以下对象之间传递：
$*$-表示与具有唯一扩张性质的 $*$-表示近似酉等价。

定理 1.1。设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$是一个含幺算子空间，且 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$是一个 $*$-表示，与一个具有唯一扩张性质的 $*$-表示近似酉等价。若 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$是一个满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$的含幺完全正映射，则存在一个由酉算子 $u_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$组成的网，使得对于每个 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，在弱算子拓扑下有 $u_\beta^* \psi(t) u_\beta \to \pi(t)$。

我们称满足定理 $*$所述结论的 C*($\mathcal{M}$) 表示1.1 具有相对于 $\mathcal{M}$的近似唯一扩张性质。在第 $\mathcal{M}$节中，我们研究具有近似唯一扩张性质的 $*$表示类，并建立一系列这类 $*$表示所满足的结构性质（命题3.5、3.7和3.8）。因此，我们得以将本文的工作与 Arveson 超刚性猜想联系起来（定理3.11

和4.8）。回顾一下，若每个不可约*-代数 $\mathfrak{A}$ 表示后极限，则称该 C $*$-表示的像（对 $\mathfrak{A}$ 而言）都包含紧算子理想。

定理 1.2。设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个可分含幺算子空间。考虑以下命题：

(i) 算子空间 $\mathcal{M}$ 是超刚性的。(ii) $C^*(\mathcal{M})$ 的每个不可约 $*$-表示都是边界表示。(iii) $C^*(\mathcal{M})$ 的每个不可约 $*$-表示都近似酉等价于一个边界表示。(iv) $C^*(\mathcal{M})$ 的每个 $*$-表示都具有近似唯一扩张性质。

那么，我们有 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)，且 (iii)⇏(ii)。此外，如果 $C^*(\mathcal{M})$ 是后极限的，那么我们有 (iv)⇒(ii)。

由于一般而言 (iii)⇏(ii)，我们的结果将对一类不满足“每个不可约表示都.....”这一性质的含幺算子空间，导出相同的限制
$*$-表示是边界表示。因此，对于每个 $*$-表示，这些算子空间的完全正扩张空间具有极强的限制性；然而，也存在一些不可约的 $*$-表示并非边界表示（例 2）。

现在我们揭示本文的主要结果，该结果对具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示的完全正扩张空间给出了限制（定理 4.1 和 4.4）。

定理 1.3. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$为一个含幺算子空间，且 $\pi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示。假设 $\psi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是满足$\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$的含幺完全正映射。则以下陈述成立。

(i) 存在一个同态条件期望 $\Gamma_\psi : C^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{Im}\pi$，满足 $\Gamma_\psi \circ \psi = \pi$。(ii) 条件期望 Γ_ψ 相对于 $\mathrm{Im}\psi$具有唯一扩张性质。(iii) 我们有 $\ker\Gamma_\psi$ 是 $C^*(\mathrm{Im}\psi)$ 的最小闭双边理想，并且该理想包含 $\mathrm{Im}(\psi - \pi)$。特别地，$\psi = \pi$ 当且仅当 Γ_ψ 是等距的。

因此，定理 1.3 证明存在一个 C*-代数的分裂正合列，其形式如下：

$$0 \longrightarrow \langle\langle \mathrm{Im}(\psi - \pi)\rangle\rangle \longrightarrow C^*(\mathrm{Im}\psi) \longrightarrow \mathrm{Im}\pi \longrightarrow 0$$

其中第二项是 $C^*(\mathrm{Im}\psi)$ 中包含 $\mathrm{Im}(\psi - \pi)$ 的最小闭双边理想。第 4 节的后续结果是上述发展的推论。特别是，这使我们能够应用所建立的方法，获得关于任意等距完全正扩张结构的新结果

$*$-表示的 C*-包络（推论 4.2）。

在第 5 节中，我们考察两类可能适用于本文结果的具体例子。第一类是对 ˇ Saˇskin 定理（命题 5.1）的重新表述，涉及交换性和近似唯一扩张性质。对于第二项应用，注意到 Voiculescu 定理和 Arveson 纲领保证，具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示这一集合总是相当庞大的。

扩张性质的表示总是相当庞大。因此，人们会认为，要求单个 $*$-表示具有近似唯一扩张性质是一个较弱的假设。尽管如此，我们仍将这一方法应用于由 Drury-Arveson 空间上乘子函数的商模导出的算子系统，并发现超刚性被编码在一个具有近似唯一扩张性质的单个 $*$-表示中（定理 5.2）。借助 Kennedy 和 Shalit 的工作 [30], ，我们的研究得以重新表述 Arveson 的本质正规性猜想。

致谢。作者谨向导师 Rapha¨el Clouˆatre 致谢，感谢其在准备本稿期间给予的诸多有益讨论。

2. Approximate unitary equivalence and the unique extensionproperty

本节将介绍若干预备知识，以及唯一扩张性质与其在近似酉等价下保持之间的基本关系。小节2.2 和2.3 中的结果可能为专家所熟知，但目前尚无精简的论述。

2.1. 预备知识。首先，我们记录文献中的一些众所周知的事实。我们从一个核心工具开始，用以判定两个 $*$-表示何时近似酉等价。该结论最初见于 [23, 定理 3。14]。

定理 2.1. 设 $\mathfrak{A}$ 是一个 C*-代数。假设 $\pi:\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_\pi)$且 $\sigma:\ \mathfrak{A}\to B(\mathcal{H}_\sigma)$是 $*$-表示。那么，以下陈述等价。

(i) $*$-表示 π 和 σ 近似酉等价。(ii) 对每个 $t\in\mathfrak{A}$，都有 $\operatorname{rank}(\pi(t))=\operatorname{rank}(\sigma(t))$。

接下来，我们记录一些关于具有唯一扩张性质的 $*$-表示的基本事实。

引理 2.2. 设 $\mathcal{M}\subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\{\pi_i:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_i):i\in I\}$ 是一族 $*$-表示。那么，以下陈述等价。

(i) 对每个 $i\in I$，π_i 相对于 $\mathcal{M}$ 都具有唯一扩张性质。(ii) $\bigoplus_{i\in I}\pi_i$ 相对于 $\mathcal{M}$ 具有唯一扩张性质。

证明。参见 [5, 命题 4.4] 和 [12, 引理 2.8]。 □

最后，我们需要一些关于超刚性和边界表示的已知事实。特别是，陈述 (iii) 表明，出于超刚性猜想的考虑，假设 $\mathcal{M}$ 生成其 C*-包络并无妨。

定理 2.3。设 $\mathcal{M}\subset B(\mathcal{H})$ 为含幺算子空间，且 $(\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}),\varepsilon)$ 表示 $\mathcal{M}$ 的 C*-包络。令 $\theta:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$ 表示满足 $\theta|_{\mathcal{M}}=\varepsilon$ 的 $*$- 表示。那么，以下陈述成立。

(i) 存在 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$ 的一个等距 $*$-表示，它相对于 $\varepsilon(\mathcal{M})$ 具有唯一扩张性质。(ii) 如果 $\beta:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\beta)$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个边界表示，那么存在一个 $*$-表示 $\tilde{\beta}:\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\beta)$，使得 $\beta=\tilde{\beta}\circ\theta$。(iii) 如果 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 的每个不可约 $*$-表示都是相对于 $\mathcal{M}$ 的边界表示，那么 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 就是 $\mathcal{M}$ 的 C*-包络。

证明。(i)：根据 [12, 引理 2。11], 存在一个集合 Δ 其中的元素均为相对于 $\varepsilon(\mathcal{M})$ 的边界表示，且定义在 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}$上，并且$\bigoplus_{\delta\in\Delta}\delta$ 是等距的。因此，由引理2.2，$\bigoplus_{\delta\in\Delta}\delta$ 是 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}$的等距 -表示，且相对于 $\varepsilon(\mathcal{M})$ 具有唯一扩张性质。

(ii)：根据 [4, 定理 7。1] 和 [15, 定理 3。3], 存在一个集合 Σ 由关于 $\mathcal{M}$的边界表示组成，它们定义在 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M}$上，且 $\bigoplus_{\sigma\in\Sigma}\sigma$在 $\mathcal{M}$ 上完全等距（或者参见 [12, 定理 2。10]）。定义 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M}$的一个闭双边理想如下：

$$\mathfrak{J}_\Sigma = \bigcap_{\sigma\in\Sigma} \ker\sigma.$$

根据 [2, 定理 2.2.3], ，理想 $\mathfrak{J}_\Sigma$ 等于所有定义在 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 上的、关于 $\mathcal{M}$ 的边界表示的核的交。于是，根据 [2,命题 2.2.4 和定理 2.2.5], ，$\mathrm{C}^*(\mathcal{M})/\mathfrak{J}_\Sigma$ 是 $\mathcal{M}$ 的 C^*-包络。由于 $\mathfrak{J}_\Sigma \subset \ker\beta$，结论 (ii) 显然成立。

(iii)：同样，令 $\mathfrak{J}_\Sigma$ 表示所有定义在 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 上的、关于 $\mathcal{M}$ 的边界表示的核的交。根据 [2, 命题 2.2.4 和定理 2.2.5], ，$\mathrm{C}^*(\mathcal{M})/\mathfrak{J}_\Sigma$ 是 $\mathcal{M}$ 的 C^*-包络。因此，由于 $\mathfrak{J}_\Sigma = \{0\}$，(iii) 显然成立。□

我们指出，定理 $\mathfrak{J}_\Sigma$ 的证明中构造的闭双边理想2.3 称为Shilov理想，它属于 $\mathcal{M}$ 在 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 中。由于 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})/\mathfrak{J}_\Sigma$是*的 C $\mathcal{M}$包络，因此， $\mathcal{M}$ 的所有边界表示通常被视为非交换 Choquet 边界。 $\mathcal{M}$

2.2. 近似酉等价与唯一扩张性质。为开展我们的研究，我们首先证明，具有唯一扩张性质的 $*$-表示通常并不在近似酉等价下封闭。

命题 2.4. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，并假设 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 的 C^*-包络。那么，以下陈述等价。

(i) 算子空间 $\mathcal{M}$ 是超刚性的。(ii) 若 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示，且它与一个具有唯一扩张性质的 $*$-表示近似酉等价，那么 π 具有唯一扩张性质。

证明。显然，(i)⇒(ii)。反之，设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。我们证明 π 具有唯一扩张性质。由于 $\mathcal{M}$生成其 C^*-包络，根据引理 2.2 和定理 2.3 (i)，不妨设π 是单射的。定义无限基数 $\kappa = \max\{\aleph_0, \dim\mathcal{H}_\pi\}$。必要时考虑$\pi^{(\kappa)}$，我们还可以假设，对于每个非零$t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，都有 $\mathrm{rank}(\pi(t)) = \kappa$。

现在，根据定理 2.3 (i)，存在一个单射 $*$-表示 σ $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，其关于 $\mathcal{M}$具有唯一扩张性质。再次，我们可以假设对于每个非零 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$, 都有 $\mathrm{rank}(\sigma(t)) = \kappa$。根据定理 2.1，我们有 π和 σ 近似酉等价。因此， π 根据假设，关于 $\mathcal{M}$ 具有唯一扩张性质。□

注记 2.5。假设 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$ 是可分且后极限的。为研究超刚性，读者或许会希望考察唯一扩张性质在直积分下的表现，因为这一工具可用于

将无重数 $*$-表示分类至酉等价 [6, 定理 4.3。4]然而，由于 [23, 推论 6。3] 和引理 2.2，只要唯一扩张性质在近似酉等价下稳定，它就在直积分下稳定。我们选择研究后者，但需要指出，利用直积分的研究也已取得一些进展 [5],[34]。

现在，我们讨论具有唯一扩张性质的不可约 $*$-表示的近似酉等价。接下来的两个例子表明，这个问题的答案比前一个问题更微妙。

我们首先指出，命题 2.4 的一个变体甚至在函数空间的经典情形下也不成立。为此，回忆一下，后极限 C*-代数具有这样的性质：拥有相同核的不可约 $*$-表示必定酉等价 [19, 推论 4.1。10]。因此，只要 C*-包络是后极限的，非交换 Choquet 边界在近似酉等价下便自动保持稳定。

例 1。存在一个紧致度量空间 X 以及一个含幺子代数 $\mathcal{A} \subset \mathrm{C}(X)$，它在 X 上分离点，并且 Choquet 边界是 Shilov 边界的真子集 [39, pg. 42]。换言之，并非每个不可约 $*$-表示是 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{A})$ 的边界表示，见定理 II.11.3]。

另一方面，假设 π 是 $\mathcal{A}$的边界表示。若 σ 是 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{A})$ 的一个不可约 $*$-表示，且与 π近似酉等价，那么根据前面的讨论， π 与 σ 酉等价。因此，σ 也是 $\mathcal{A}$的边界表示。所以，$\mathcal{A}$ 的边界表示在近似酉等价下保持不变，但并非 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{A})$ 的每个不可约 $*$-表示都是 $\mathcal{A}$的边界表示。

对于任何其他不具超刚性且具有后极限 C*-包络的含幺算子空间，也可以得到上述结论。然而，去掉后极限假设后，非交换 Choquet 边界在近似酉等价下不一定封闭。两个展示这种保持性失效的例子分别是由一对自由独立半圆算子生成的算子系统 [16, 例 6.6.3]，以及无限 Cuntz 代数 [36, 例 2 的延续。我们回顾后一个例子的细节。

例 2。令 $\mathcal{O}_\infty$ 表示由生成元 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 生成的无限 Cuntz 代数，并考虑由 $\{V_n$ 生成的代数 $\mathcal{A}:\ n \in \mathbb{N}\}$。由于 $\mathrm{C}^*(\mathcal{A}) \cong \mathcal{O}_\infty$ 是单的， $\mathcal{O}_\infty$ 的所有不可约 $*$-表示都近似酉等价。

然而，按酉等价分类， $\mathcal{O}_\infty$ 存在唯一一个不是 $\mathcal{A}$ 的边界表示的不可约 $*$-表示。事实上，$\mathcal{O}_\infty$ 的 $*$-表示与满足 $\sum_{n=1}^{\infty} W_n W_n^* \leq I$ 的等距算子序列 $(W_n)^{n\geq 0}$ 一一对应。当且仅当相应的等距算子序列满足 $\sum_{n=1}^{\infty} W_n W_n^* = I$ 时，不可约 $*$-表示才是 $\mathcal{A}$ 的边界表示（详情见 [36] ）。根据 Popescu [40, 定理 1.3], ，在酉等价意义下，存在唯一一个满足 $\sum_{n=1}^{\infty} W_n W_n^* \neq I$ 的此类不可约 $*$-表示。

我们指出，由一对自由独立半圆算子生成的算子系统，可能呈现出与无限 Cuntz 代数相反的极端情形。事实上，在 [16, 例 6.6.3],中，构造了一类不可数的

不可约 $*$-表示，其中除有限个以外，均为边界表示。同时，基于与例 2相同的推理，可以得到 C*-包络的所有不可约 $*$-表示彼此近似酉等价。另一方面，在例 2中发现，存在唯一一个不可约 $*$-表示不是边界表示。

2.3. 唯一扩张性质的渐近性质。 在逐点收敛序列的框架下，唯一扩张性质有一个众所周知的刻画。可分版本见 [34, 命题 2。2]。我们记录不可分版本，它是通过用网替换序列得到的。

命题 2.6. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\pi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。则下列陈述等价。

(i) $*$-表示 π 相对于 $\mathcal{M}$ 具有唯一扩张性质。(ii) 若 $\psi_\alpha : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个由含幺完全正映射组成的网，并且对每个 $m \in \mathcal{M}$， $\psi_\alpha(m) \to \pi(m)$ 在弱算子拓扑下成立，则对每个 $t \in C^*(\mathcal{M})$， $\psi_\alpha(t) \to \pi(t)$ 在弱算子拓扑下成立。(iii) 若 $\psi_\alpha : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个由含幺完全正映射组成的网，并且对每个 $m \in \mathcal{M}$， $\psi_\alpha(m) \to \pi(m)$ 在强算子拓扑下成立，则对每个 $t \in C^*(\mathcal{M})$， $\psi_\alpha(t) \to \pi(t)$ 在强算子拓扑下成立。

我们重新阐释命题 2.6 ，以便将唯一扩张性质与含幺完全正扩张的近似酉等价概念联系起来。我们将在后续章节中重新探讨这一思路。

命题 2.7. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\pi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。那么，下列陈述等价。

(i) $*$-表示 π 相对于 $\mathcal{M}$ 具有唯一扩张性质。(ii) 若 $\psi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射，则存在一列酉算子 $w_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得对于每个 $t \in C^*(\mathcal{M})$， $w_\beta^* \pi(t) w_\beta \to \psi(t)$ 在强算子拓扑下成立。

证明。(i) $\Rightarrow$ (ii)：在这种情况下， $\psi = \pi$ ，因此我们可以取 w_β 为 $\mathcal{H}_\pi$ 上的恒等算子。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：设 $\psi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射，并设 $w_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$ 是由酉算子构成的网，使得对于每个 $t \in C^*(\mathcal{M})$，在强算子拓扑下有 $w_\beta^* \pi(t) w_\beta \to \psi(t)$。由于在有界子集上乘法关于强算子拓扑连续，且网 $(w_\beta \pi(\cdot) w_\beta)_\beta$ 由 $*$-表示构成，我们可以得出，对于所有 $s, t \in C^*(\mathcal{M})$，都有 $\psi(st) = \psi(s)\psi(t)$。由于 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$，我们进而得到 $\psi = \pi$。□

正如我们将在第3节中看到的，命题2.7 的等价性不再成立 e
如果在陈述 (ii) 中互换映射 ψ 和 π 的角色。

3. Approximate unique extension property

为了研究具有唯一扩张性质的 $*$-表示的近似酉等价类，我们将注意力集中于唯一扩张性质的一种变体。

定义 3.1. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。若对于任何满足 $\psi\,|_{\mathcal{M}} = \pi\,|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$，都存在一个酉元网 $u_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得对每个 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，$u_\beta^* \psi(t) u_\beta \to \pi(t)$ 在弱算子拓扑下成立，则称 π 关于 $\mathcal{M}$ 具有近似唯一扩张性质。

在不会造成混淆的情况下，我们将不再提及算子空间，而只说 $*$-表示具有近似唯一扩张性质。此外，当 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{H}_\pi$ 可分时，酉元网可以替换为一个序列。

我们提醒读者，近似唯一扩张性质不同于命题中所述的唯一扩张性质的刻画 2.7 (ii)。例如，我们将看到，这可由定理3.6推出。此外，我们指出，定义3.1 在某种程度上让人想起文献中出现过的其他条件，但基本上彼此独立 [14, 定理 5。2],[24, 定理 2。4]。

回想一下，根据定理*2.3 (ii)，边界表示可经由 C-包络分解。由于近似唯一扩张性质似乎对完全正扩张的空间施加了重要限制，人们或许会想知道是否存在类似的现象。尽管作者不知道有这样的限制，我们先给出一个足以满足本文目的的事实。

引理 3.2. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，$\mathfrak{A} \subset B(\mathcal{K})$ 是一个 C^* 代数。设 $q : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to \mathfrak{A}$ 是一个满射 $*$同态，且 $\pi : \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$表示。如果 $\pi \circ q$ 相对于 $\mathcal{M}$具有近似唯一扩张性质，那么 π 相对于 $q(\mathcal{M})$ 具有近似唯一扩张性质。

证明。假设 $\psi : \mathfrak{A} \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个含幺完全正映射，满足 $\psi\,|_{q(\mathcal{M})} = \pi\,|_{q(\mathcal{M})}$。那么 $\varphi := \psi \circ q$ 是一个含幺完全正映射，满足 $\varphi\,|_{\mathcal{M}} = (\pi \circ q)\,|_{\mathcal{M}}$。根据假设，存在一个酉算子网$u_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得

$$\lim_\beta u_\beta^* \varphi(t) u_\beta = (\pi \circ q)(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

在弱算子拓扑下。因此，

$$\lim_\beta u_\beta^* \psi(s) u_\beta = \pi(s), \qquad s \in \mathfrak{A},$$

在弱算子拓扑下。因此 π 具有近似唯一扩张性质。

□

作为一个完全等距表示，$\mathcal{M}$ 会诱导出一个 $*\mathrm{C}^*$包络的-同构[37, 第 219], 引理 3.2 表明，具有近似唯一扩张性质的 $*\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}$的-表示在完全等距同构下保持不变。

命题 3.3. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{N} \subset B(\mathcal{K})$ 是分别生成其 C^*-包络的含幺算子空间。假设 $\iota : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是一个含幺完全等距线性映射，并设 $\theta : \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}) \to \mathrm{C}_e^*(\mathcal{N})$ 是一个满足 $\theta\,|_{\mathcal{M}} = \iota$ 的 $*$-同构。那么，$\pi : \mathrm{C}_e^*(\mathcal{N}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 关于 $\mathcal{N}$ 具有近似唯一扩张性质，当且仅当 $\pi \circ \theta$ 关于 $\mathcal{M}$具有近似唯一扩张性质。

证明。 如果 $\pi\circ\theta$ 关于 $\mathcal{M}$具有近似唯一扩张性质，那么 π 关于 $\mathcal{N}$ 根据引理3.2，也具有近似唯一扩张性质。

反之，若 $\pi=(\pi\circ\theta)\circ\theta^{-1}$ 相对于 $\mathcal{N}$具有近似唯一扩张性质，那么由引理 $\pi\circ\theta$， $\mathcal{M}$ 再次相对于 3.2也具有近似唯一扩张性质。 □

此外，我们指出，近似唯一扩张性质有一个刻画，其形式令人想起命题 2.6。

命题 3.4. 设 $\mathcal{M}\subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\pi:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。则以下陈述等价。

(i) $*$-表示 π 具有近似唯一扩张性质。(ii) 若 $\psi_\alpha:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一列含幺完全正映射的网，使得对于每个 $m\in\mathcal{M}$，$\psi_\alpha(m)\to\pi(m)$ 在弱算子拓扑下成立，则存在一个子网 $(\psi_{\alpha_\eta})_\eta$，其由含幺完全正映射构成；并且存在一列酉算子 $u_\beta\in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得

$$\lim_\beta\lim_\eta u_\beta^*\psi_{\alpha_\eta}(t)u_\beta=\pi(t),\qquad t\in\mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

在弱算子拓扑下。

证明。(i)⇒(ii)：设 $\psi_\alpha:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一列含幺完全正映射的网，使得对每个 $m\in\mathcal{M}$，$\psi_\alpha(m)\to\pi(m)$ 在弱算子拓扑下收敛。由紧致性可取一个子网 $(\psi_{\alpha_\eta})_\eta$，它由含幺完全正映射组成，并在逐点弱算子拓扑下收敛到一个含幺完全正映射 $\varphi:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\pi)$，见定理 7.4]。换言之，对每个 $t\in\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，我们有 $\psi_{\alpha_\eta}(t)\to\varphi(t)$ 在弱算子拓扑下收敛。因此，我们有 $\varphi|_{\mathcal{M}}=\pi|_{\mathcal{M}}$。

由于 π 具有近似唯一扩张性质，存在一列酉算子网 $u_\beta\in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得对每个 $t\in\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，$u_\beta^*\varphi(t)u_\beta\to\pi(t)$ 在弱算子拓扑下收敛。因此我们得出

$$\lim_\beta\lim_\eta u_\beta^*\psi_{\alpha_\eta}(t)u_\beta=\lim_\beta u_\beta^*\varphi(t)u_\beta=\pi(t),\qquad t\in\mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

正如所需。

(ii)⇒(i)：显然。 □

现在我们着手确定一大类具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示。为此，我们要求近似唯一扩张性质在近似酉等价下保持不变。

命题 3.5. 设 $\mathcal{M}\subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\pi:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。假设 π 具有近似唯一扩张性质。若 $\sigma:\mathrm{C}^*(\mathcal{M})\to B(\mathcal{H}_\sigma)$ 是一个与 π 近似酉等价的 $*$-表示，则 σ 也具有近似唯一扩张性质。

证明。容易看出，近似唯一扩张性质在酉等价下保持不变。因此，由于存在酉算子 $U:\mathcal{H}_\sigma\to\mathcal{H}_\pi$，我们可以

为简单起见，假设 $\mathcal{H}_\sigma = \mathcal{H}_\pi$。在这种情况下，存在一个酉算子网$w_\gamma \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得

$$\lim_\gamma \|w_\gamma^* \sigma(t) w_\gamma - \pi(t)\| = 0, \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

特别地，我们还有

$$\lim_\gamma \|\sigma(t) - w_\gamma \pi(t) w_\gamma^*\| = 0, \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

设 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个含幺完全正映射，满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \sigma|_{\mathcal{M}}$。由紧致性，[37, 定理 7。4], 我们可以得到一个子网 $(w_{\gamma_\eta}^* \psi(\cdot) w_{\gamma_\eta})_\eta$，它由含幺完全正映射构成；并且存在一个含幺完全正映射 $\varphi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$，使得

$$\lim_\eta w_{\gamma_\eta}^* \psi(t) w_{\gamma_\eta} = \varphi(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

在弱算子拓扑下。特别地，

$$\varphi(m) = \lim_\eta w_{\gamma_\eta}^* \psi(m) w_{\gamma_\eta} = \lim_\eta w_{\gamma_\eta}^* \sigma(m) w_{\gamma_\eta} = \pi(m), \qquad m \in \mathcal{M}.$$

由于 π 具有近似唯一扩张性质，因此存在一个酉元网$u_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得

$$\pi(t) = \lim_\beta u_\beta^* \varphi(t) u_\beta = \lim_\beta \lim_\eta u_\beta^* w_{\gamma_\eta}^* \psi(t) w_{\gamma_\eta} u_\beta, \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

于是我们看到

$$\lim_\gamma \lim_\beta \lim_\eta w_\gamma u_\beta^* w_{\gamma_\eta}^* \psi(t) w_{\gamma_\eta} u_\beta w_\gamma^* = \lim_\gamma w_\gamma \pi(t) w_\gamma^* = \sigma(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

因此，存在一个与上述迭代极限相对应的酉元网 $v_\alpha := w_{\gamma_\alpha} u_{\beta_\alpha}^* w_{\gamma_{\eta_\alpha}}^*$（例如，参见[29, 第 69] 页），于是我们有

$$\lim_\alpha v_\alpha^* \psi(t) v_\alpha = \sigma(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

因此，σ 具有近似唯一扩张性质。 □

这使我们能够得到一类特别重要的 $*$表示，它们具有近似唯一扩张性质。

定理 3.6. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$表示，并且它与一个具有唯一扩张性质的 $*$表示近似酉等价。那么，π 具有近似唯一扩张性质。

证明。 根据命题 3.5，只需证明具有唯一扩张性质的 $*$-表示具有近似唯一扩张性质。因此，我们假设 π 具有唯一扩张性质。在这种情况下，若 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$的含幺完全正映射，那么 $\psi = \pi$，因此我们可以取 u_β 为恒等算子。 □

我们指出，Voiculescu 定理的一种表述指出：对于可分 C^*-代数$\mathfrak{A}$ 在可分希尔伯特空间上的两个近似酉等价的 $*$表示 π 和 σ，其极限差 $\sigma(t) - u_n^* \pi(t) u_n$ 可以对每个 $t \in \mathfrak{A}$ 和每个 $n \in \mathbb{N}$ [45, 定理 1.5]都取为紧算子。对于可分算子 [14, 的元组，也有类似的结论 [14, 定理 5.2]。因此，我们不禁想知道，在我们的情形下，差 $\pi(t) - u_\beta^* \psi(t) u_\beta$能否在可分性假设下取为紧算子。然而，我们不知道是否

由于命题3.5中对紧致性的应用，在我们的语境下这种加强是否可能。

由于通常的唯一延拓性质在近似酉等价下并不保持（例 2），由定理 3.6 可知，近似唯一扩张性质确实不同于通常的唯一延拓性质。此外，请注意，只要 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 具有近似唯一扩张性质，且 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是 $\pi|_{\mathcal{M}}$ 的一个完全正扩张，我们便可由 [34, Lemma 2.1] 得出，存在一个酉元网 $u_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得对每个 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，$u_\beta^* \psi(t) u_\beta \to \pi(t)$ 在强算子拓扑下成立。特别地，不能在命题 2.7 中交换映射 ψ 和 π 的角色。

尽管存在上述差异，近似唯一扩张性质的表现仍足够良好，可以形成一个性质良好的 $*$-表示类。

命题 3.7. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。若 $\{\pi_i : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_i) : i \in I\}$ 是一族具有近似唯一扩张性质的 $*$- 表示，则 $\pi = \bigoplus_{i \in I} \pi_i$ 也具有近似唯一扩张性质。

证明. 设 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i)$ 是一个满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射。对每个 i，定义一个含幺完全正映射

$$\psi_i : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_i), \qquad t \mapsto P_{\mathcal{H}_i} \psi(t)|_{\mathcal{H}_i},$$

并注意到 $\psi_i|_{\mathcal{M}} = \pi_i|_{\mathcal{M}}$。进而，由于每个 π_i 都具有近似唯一扩张性质，我们可以得到一个有向集 Λ_i 以及相应的酉算子网 $u_{\lambda_i} \in B(\mathcal{H}_i)$，$\lambda_i \in \Lambda_i$，使得

$$\lim_{\lambda_i \in \Lambda_i} u_{\lambda_i}^* \psi_i(t) u_{\lambda_i} = \pi_i(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

其中收敛是指弱算子拓扑下的收敛。

现在，令 $\mathcal{F}$ 表示由 I 的有限子集组成的有向集。给定 $F = \{i_1, \ldots, i_n\} \in \mathcal{F}$ 和 $\lambda_{i_k} \in \Lambda_{i_k}$，在 $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i$ 上定义一个酉算子如下

$$u_{F,\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}} = \bigoplus_{i \in \mathcal{F}} u_{\lambda_i} \oplus \bigoplus_{i \notin \mathcal{F}} I_{\mathcal{H}_i}$$

其中，$I_{\mathcal{H}_i}$ 表示作用在 $\mathcal{H}_i$ 上的恒等算子。对于 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$，我们有

$$P_{\mathcal{H}_i} u_{F,\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}}^* \psi(t) u_{F,\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}} |_{\mathcal{H}_i} = \begin{cases} u_{\lambda_i}^* \psi_i(t) u_{\lambda_i}, & i \in F \\ \psi_i(t), & i \notin F. \end{cases}$$

因此，迭代极限必定

$$\lim_{\lambda_{i_1} \in \Lambda_{i_1}} \lim_{\lambda_{i_2} \in \Lambda_{i_2}} \cdots \lim_{\lambda_{i_n} \in \Lambda_{i_n}} P_{\mathcal{H}_i} u_{F,\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}}^* \psi(t) u_{F,\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}} |_{\mathcal{H}_i}$$

对于任意 $i \in I$ 和任意 $F = \{i_1, \ldots, i_n\} \in \mathcal{F}$，都在弱算子拓扑下存在。事实上，若 $i \in \mathcal{F}$，则极限等于 $\pi_i(t)$；而当 $i \notin \mathcal{F}$ 时，极限等于 $\psi_i(t)$。因此

$$\lim_{\{i_1,\ldots,i_n\} \in \mathcal{F}} \lim_{\lambda_{i_1} \in \Lambda_{i_1}} \lim_{\lambda_{i_2} \in \Lambda_{i_2}} \cdots \lim_{\lambda_{i_n} \in \Lambda_{i_n}} P_{\mathcal{H}_i} u_{F,\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}}^* \psi(t) u_{F,\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_n}} |_{\mathcal{H}_i} = \pi_i(t)$$

对于每个 $i \in I$。因此，根据 [29, 第 69], 存在一列酉算子 $u_\beta \in B(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i)$，使得

$$\lim_\beta P_{\mathcal{H}_i} u_\beta^* \psi(t) u_\beta |_{\mathcal{H}_i} = \pi_i(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

对于每个 $i \in I$。

由紧致性可知，我们可以取一个子网 $(u^*_{\beta_\eta}\psi(\cdot)^{u_{\beta_\eta}})_\eta$和一个含幺完全正映射 φ：$\mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\bigoplus_{i\in I}\mathcal{H}_i)$，使得

$$\lim_\eta u^*_{\beta_\eta}\psi(t)u_{\beta_\eta} = \varphi(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

在弱算子拓扑下 [37, 定理 7。4]接下来，论证直接改编自 [5, 命题 4。4]事实上，注意到 $P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} = \pi(t)P_{\mathcal{H}_i}$ 对每个 $i \in I$ 均成立，因此由施瓦茨不等式可得，

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)^*(I - P_{\mathcal{H}_i})\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} &= P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)^*\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} - P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)^*P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} \\ &\le P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t^*t)P_{\mathcal{H}_i} - P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)^*P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} \\ &= \pi(t^*t)P_{\mathcal{H}_i} - \pi(t)^*\pi(t)P_{\mathcal{H}_i} = 0. \end{aligned}$$

因此 $(I - P_{\mathcal{H}_i})\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} = 0$，所以

$$\lim_\eta u^*_{\beta_\eta}\psi(t)u_{\beta_\eta} = \varphi(t) = \sum_{i\in I}\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} = \sum_{i\in I}P_{\mathcal{H}_i}\varphi(t)P_{\mathcal{H}_i} = \sum_{i\in I}\pi(t)P_{\mathcal{H}_i} = \pi(t).$$

□

回想引理2.2 指出，命题3.7 中的蕴含关系，在将近似唯一扩张性质替换为通常的唯一延拓性质时，已知是一个等价关系。相反，我们将证明，对于具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示而言，逆命题远非成立（命题3.9）。首先，我们需要命题 3.7 的一个推论，它使我们能够构造更多具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示。

命题 3.8. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示。那么，以下陈述成立。

(i) 如果 $\sigma : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\sigma)$ 是一个满足 $\ker\sigma = \ker\pi$ 的 $*$-表示，那么存在某个基数 κ，使得 $\sigma^{(\kappa)}$ 具有近似唯一扩张性质。(ii) 如果 $\rho : \mathrm{C}^*_e(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\rho)$ 是一个等距 $*$-表示，那么存在一个基数 μ，使得 $\rho^{(\mu)}$ 具有近似唯一扩张性质。

证明。(i)：定义一个无限基数 $\kappa = \max\{\dim\mathcal{H}_\pi, \dim\mathcal{H}_\sigma, \aleph_0\}$。对于每个$t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \setminus \ker\sigma$，我们有

$$\mathrm{rank}(\sigma^{(\kappa)}(t)) = \kappa\mathrm{rank}(\sigma(t)) = \kappa,$$

以及同样地，秩$(\pi^{(\kappa)}(t)) = \kappa$. 由于 $\ker\pi = \ker\sigma$，定理 2.1 表明 $\sigma^{(\kappa)}$近似酉等价于 $\pi^{(\kappa)}$。由命题 3.5 和 3.7，我们发现 $\sigma^{(\kappa)}$ 具有近似唯一扩张性质。

(ii)：由定理 2.3 (i)，存在一个等距 $*$-表示 $\beta : \mathrm{C}^*_e(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\beta)$，它具有唯一扩张性质。因此，由 (i) 可知，存在一个基数 μ 使得 $\rho^{(\mu)}$ 具有近似唯一扩张性质。□

根据命题 3.8 (ii)，我们可以确认，近似唯一扩张性质对于子表示而言表现得很不稳定。

命题 3.9. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设每当 $\pi : \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示，且 $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_\pi$ 是一个对 $\mathrm{Im}\pi$ 具有约化性的闭子空间时，我们都有该 $*$-表示

$$t \mapsto \pi(t)\,|_{\mathcal{F}}, \qquad t \in \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}),$$

也具有近似唯一扩张性质。因此，我们有每个
$*$-表示都具有近似唯一扩张性质。

证明。设 β 是在可分希尔伯特空间上的 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$ 的等距 $*$-表示，并且具有近似唯一扩张性质（由定理 2.3 或命题 3.8 可知这样的表示存在）；再设 $\pi : \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。于是存在一个基数 κ，使得根据命题 3.7，$\beta^{(\kappa)}$ 具有近似唯一扩张性质。由定理 2.1 可知，$\beta^{(\kappa)} \oplus \pi$ 与 $\beta^{(\kappa)}$近似酉等价。因此，根据命题 3.5，$\beta^{(\kappa)} \oplus \pi$ 具有近似唯一扩张性质。根据假设，我们得出 π 具有近似唯一扩张性质。□

我们通过将本文的工作与 Arveson 超刚性猜想联系起来，结束本节。首先，我们注意到以下结论。

命题 3.10. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个可分含幺算子空间。那么，以下陈述等价。

(i) $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 的每个不可约 $*$-表示都具有近似唯一扩张性质。(ii) $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 的每个 $*$- 表示都具有近似唯一扩张性质。

证明。对于非平凡方向，假设 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 的每个不可约 $*$-表示都具有近似唯一扩张性质，并设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示。由于 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 是可分的，我们可以写成 $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$其中 $\pi_i : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_i)$ 是在可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}_i$ 上的一个 $*$-表示。由于 $\mathcal{H}_i$ 是可分的，我们有 π_i 近似酉等价于不可约 $*$-表示的直和 [45, 推论 1.6]。根据假设、命题 3.5 和命题 3.7，我们可以得出每个 π_i 都具有近似唯一扩张性质。因此，由命题 3.7，π 具有近似唯一扩张性质。□

我们仍不确定命题 3.10 中是否可以去掉可分性。事实上，我们需要用到 Voiculescu 的一项结果 [45], ，该结果指出，每个 $*$-表示在满足某些可分性条件时，都近似酉等价于不可约 $*$-表示的直和。然而，我们不知道在不可分情形下是否存在这一事实的类似结果。

另外，注意命题3.10 可以视为对 Arveson 超刚性猜想的一个近似版本的肯定回答。事实上，正如命题 3.10 所反映的，要确定具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示这一类，只需研究那些具有近似唯一扩张性质的不可约 $*$-表示。

现在我们可以陈述本节的主要结果。

定理 3.11. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个可分含幺算子空间。考虑以下陈述:

(i) 算子空间 $\mathcal{M}$ 是超刚性的。(ii) $C^*(\mathcal{M})$ 的每个不可约 $*$-表示都是边界表示。(iii) $C^*(\mathcal{M})$ 的每个不可约 $*$-表示都近似酉等价于某个边界表示。(iv) $C^*(\mathcal{M})$ 的每个 $*$-表示都具有近似唯一扩张性质。

那么，我们有 (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)，且 (iii)$\not\Rightarrow$(ii)。

证明。方向 (i)⇒(ii)⇒(iii) 显然，而 (iii)⇒(iv) 是定理3.6 和命题 3.10的推论。最后，通过考虑例 (ii)$\not\Rightarrow$，得到 (iii)2。□

后文将揭示，对于像中含有紧算子的那些不可约 $*$-表示，近似唯一扩张性质与通常的唯一扩张性质相一致（定理 4.8）。因此，当 $C^*(\mathcal{M})$ 是后极限时，命题 (ii)、(iii) 和 (iv) 等价。

4. Split sequences for completely positive extensions

假设 π 相对于含幺算子空间 $\mathcal{M}$ 具有近似唯一扩张性质。现在我们将介绍对 $\pi|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正扩张的结构所施加的限制。这将成为本节论证的核心，也是我们工作的主要结果。

为此，回忆一下，给定 C^*-代数 $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$，一个 条件期望 是一个压缩线性投影 $E: \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$。当 E 具有乘法性时，我们称该映射是 同态的。根据 Tomiyama 定理 [7, 定理 1.5。10], 条件期望自动是完全正的，并满足 $E(aba') = aE(b)a'$ 对每个 a，$a' \in \mathfrak{A}$ 以及 $b \in \mathfrak{B}$。因此，同态条件期望是一个 $*$-同态。

定理 4.1. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一延拓性质的 $*$-表示，且 $\psi : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射。那么，以下结论成立。

(i) 存在一个同态条件期望 $\Gamma_\psi : C^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{Im}\pi$，满足 $\Gamma_\psi \circ \psi = \pi$。(ii) 若 $\mathcal{H}_\pi$ 可分，则对于每个 $t \in C^*(\mathcal{M})$，$\mathrm{rank}(\pi(t)) \leq \mathrm{rank}(\psi(t))$。(iii) 我们有，$\ker \Gamma_\psi$ 是 $C^*(\mathrm{Im}\psi)$ 中包含 $\mathrm{Im}(\psi - \pi)$ 的最小闭双边理想。(iv) 我们有，$\mathrm{Im}(id - \Gamma_\psi) = \ker \Gamma_\psi$，且 $C^*(\mathrm{Im}\psi) = \ker \Gamma_\psi + \mathrm{Im}\pi$。(v) 我们有，$\psi = \pi$ 当且仅当 Γ_ψ 是等距的。

证明。（i）：由于 π 具有近似唯一扩张性质，存在一个酉元网 $u_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得对于每个 $t \in C^*(\mathcal{M})$，$u_\beta^* \psi(t) u_\beta \to \pi(t)$在弱算子拓扑下成立。由 [34, 引理 2.1], 可知，收敛实际上发生在强算子拓扑下。因此，给定一个非交换变量的 $*$-多项式 p 以及有限多个元素 $t_1, \ldots, t_n \in C^*(\mathcal{M})$，我们有

$$\lim_\beta u_\beta^* p(\psi(t_1), \ldots, \psi(t_n)) u_\beta = p(\pi(t_1), \ldots, \pi(t_n))$$

在强算子拓扑下。由于 $\mathrm{Im}\psi$ 中各词的线性张成在 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$中稠密，我们得到一个 $*$-同态

$$\Gamma_\psi : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{Im}\pi, \qquad x \mapsto \lim_\beta u_\beta^* x u_\beta.$$

显然， $\Gamma_\psi \circ \psi = \pi$。注意

$$\mathrm{Im}\pi = \mathrm{C}^*(\pi(\mathcal{M})) = \mathrm{C}^*(\psi(\mathcal{M})) \subset \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi).$$

由于

$$(\Gamma_\psi \circ \pi) \mid_{\mathcal{M}} = (\Gamma_\psi \circ \psi) \mid_{\mathcal{M}} = \pi \mid_{\mathcal{M}}$$

且 Γ_ψ 是一个 $*$-表示，因此可得 $\Gamma_\psi \circ \pi = \pi$。所以， Γ_ψ 是所需的条件期望。

(ii)：众所周知，若 $\mathcal{H}_\pi$ 可分，则秩函数在弱算子拓扑下是下半连续的。于是 (ii) 立即成立，因为存在酉元网 $u_\beta \in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得 $u_\beta^* \psi(t) u_\beta \to \pi(t)$在弱算子拓扑下成立。

(iii)：由于 $\Gamma_\psi \circ \psi = \pi = \Gamma_\psi \circ \pi$，可得

$$\mathrm{Im}(\psi - \pi) \subset \ker \Gamma_\psi.$$

令 $\mathfrak{J}$ 为 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 中包含 $\mathrm{Im}(\psi - \pi)$ 的最小闭双边理想。必然有 $\mathfrak{J} \subset \ker \Gamma_\psi$。我们将证明，每个元素 $\zeta \in \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 都可以表示为 $J + \pi(t)$，其中 $J \in \mathfrak{J}$ 且 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$。注意到

$$\mathfrak{D} = \{J + \pi(t) \ : \ J \in \mathfrak{J},\ t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})\}$$

由于它是 $\mathrm{Im}\pi/\mathfrak{J}$ 在商映射 $q : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)/\mathfrak{J}$ 下的原像，因此是 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 的闭子集。于是，由稠密性，只需考虑$\zeta \in \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 属于 $\mathrm{Im}\psi$ 中词的线性张成的情形。在这种情况下，由于 ψ 和 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$ 都是含幺的，我们可以得到一个有限个词的和

$$\zeta = \sum_i \psi(t_{i_1}) \dots \psi(t_{i_n})$$

其中 n 是一个固定整数，且对每个 k, ℓ，都有 $t_{k_\ell} \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$。固定一个 i，我们将通过一个简单的归纳论证证明， $\psi(t_{i_1}) \dots \psi(t_{i_n})$ 可以表示为 $J + \pi(t)$。对于基础步骤，注意到

$$\psi(t_{i_1}) = \psi(t_{i_1}) - \pi(t_{i_1}) + \pi(t_{i_1})$$

且 $(\psi(t_{i_1}) - \pi(t_{i_1})) \in \mathfrak{J}$。现在，对于归纳步骤，我们可以得到 $K \in \mathfrak{J} \mathrm{and} s \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$, 使得 $\psi(t_{i_1}) \dots \psi(t_{i_{n-1}}) = K + \pi(s)$。于是我们看到

$$\begin{aligned}
\psi(t_{i_1}) \dots \psi(t_{i_n}) &= (K + \pi(s))\psi(t_{i_n}) \\
&= (K + \pi(s))(\psi(t_{i_n}) - \pi(t_{i_n}) + \pi(t_{i_n})) \\
&= K(\psi(t_{i_n}) - \pi(t_{i_n}) + \pi(t_{i_n})) + \pi(s)(\psi(t_{i_n}) - \pi(t_{i_n})) + \pi(s t_{i_n}).
\end{aligned}$$

因此，我们得到该结论对 ζ 也成立。

现在，令 $k \in \ker \Gamma_\psi$，并将 $k = J + \pi(t)$ 表示为，其中 $J \in \mathfrak{J}$ 且 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$。于是我们得到

$$k - J = \pi(t) = \Gamma_\psi(\pi(t)) = \Gamma_\psi(k - J) = 0.$$

因此 $k = J$ 并且我们有 $\mathfrak{J} = \ker \Gamma_\psi$。

(iv)：这可由关于线性幂等算子的一个标准事实推出，但我们将其记录下来以供后续论证使用。由于 Γ_ψ 是一个线性幂等算子，很容易看出 $\mathrm{Im}(id-\Gamma_\psi) = \ker\Gamma_\psi$。于是，

$$\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) = \mathrm{Im}(id-\Gamma_\psi) + \mathrm{Im}\Gamma_\psi = \ker\Gamma_\psi + \mathrm{Im}\pi.$$

(v)：这是 (iii) 的直接推论。 □

对于满足如下性质的忠实 $*$-表示：所有因子表示都具有唯一扩张性质的核 C*-代数，类似于 (i) 的结论早已为人所知 [34, 定理 4。2]。其中的构造需要运用直积分和测度分解方面的复杂技巧。相比之下，我们在定理4.1 中的方法，为所有不具超刚性的含幺算子空间给出了一个非平凡推论。事实上，只要 $\mathcal{M} \subset \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$ 不具超刚性，根据命题 $*$2.4和定理3.6，就存在一个 $\mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$ 的 $*$-表示，它具有近似唯一扩张性质，但不具有通常的唯一扩张性质。2.4和定理3.6。

作为定理4.1的推论，我们可以得出一个具有独立价值的结论。据我们所知，以下结果尚未见诸其他文献。

推论 4.2. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个等距 $*$-表示，并且 $\psi : \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个满足 $\psi\mid_{\mathcal{M}} = \pi\mid_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射。那么，以下结论成立。

(i) 映射 ψ 是完全等距的。(ii) 有 $\mathrm{C}_e^*(\mathrm{Im}\psi) \cong \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$。

证明。(i)：根据命题3.8，存在一个基数 κ，使得 $\Pi := \pi^{(\kappa)}$ 具有近似唯一扩张性质。注意，映射 $\Psi := \psi^{(\kappa)}$ 在 $\mathcal{M}$上与Π 一致。因此，根据定理4.1，存在一个同态条件期望$\Gamma_\Psi : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\Psi) \to \mathrm{Im}\Pi$，满足 $\Gamma_\Psi \circ \Psi = \Pi$。由于 Π 是等距的，因此立即可得 Ψ 是完全等距的。最后，这意味着 ψ 本身必定是完全等距的。

(ii)：由陈述 (i)，存在一个完全序同构 $\iota : \mathrm{Im}\psi \to \mathrm{Im}\pi$，使得 $\iota\circ\psi = \pi$。由于 $\mathrm{Im}\pi$ 是一个 C*-代数，因此可得 $\mathrm{Im}\pi \cong \mathrm{C}_e^*(\mathcal{M})$ 是 $\mathrm{Im}\psi$ 的 C*-包络。□

推论4.2 中的论证可以改作他用。若 π 具有近似唯一扩张性质，且 ψ 是一个完全正扩张，并且 $\ker\pi \subset \ker\psi$，那么实际上这两个核相等，因此存在一个完全序同构 $\iota : \mathrm{Im}\psi \to \mathrm{Im}\pi$，由 $\Gamma_\psi\mid_{\mathrm{Im}\psi}$给出。用 [32, 定理 10.5], 的语言来说，我们可以得出结论：算子系统 Im 的非交换状态空间ψ 是一个“非交换鲍尔单纯形”。

我们简要指出，条件期望 Γ_ψ 的存在提供了一种工具，可用于确定完全正扩张 ψ 何时与 $*$-表示 π 一致。

推论 4.3. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是具有近似唯一扩张性质的 a $*$-表示，且 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是满足$\psi\mid_{\mathcal{M}} = \pi\mid_{\mathcal{M}}$的含幺完全正映射。那么，以下陈述等价。

(i) 等式 $\psi = \pi$ 成立。

(ii) 线性映射 $(id - \Gamma_\psi)$ 是压缩映射。

证明。 由定理 4.1 显然可知 Γ_π 是恒等表示，因此 (i)⇒ (ii) 显然成立。

(ii)⇒(i)：映射 $(id - \Gamma_\psi)$ 是到 $\ker \Gamma_\psi$ 的线性投影，由定理 4.1(iv) 得出。根据假设，结合 Tomiyama 定理 [7, 定理 1.5。10]，我们得出 $(id - \Gamma_\psi)$ 是一个条件期望。因此，给定 $k \in \ker \Gamma_\psi$和 $x \in \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$，我们有

$$xk = (id - \Gamma_\psi)(xk) = (id - \Gamma_\psi)(x)k = xk - \Gamma_\psi(x)k$$

因此 Γ_ψ (x) $k = 0$。由于 $x \in \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 是任意的，我们必有 $k = 0$。所以 Γ_ψ是单射，因此， $\psi = \pi$ 由定理 4.1 (v)。□

在接下来的论述中，我们需要引入一些术语。设 $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ 是含幺算子空间，并用 UCP$(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 表示从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的含幺完全正映射的集合。UCP$(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 中的幂等元素之间有一种自然的序关系，定义为 $\varphi \prec \varphi'$ 当且仅当 $\varphi \circ \varphi' = \varphi' \circ \varphi = \varphi$。给定 $\mathcal{M}$ 的一个子空间 $\mathcal{F}$，若幂等元 φ 在 UCP$(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 中所有满足固定 $\mathcal{F}$ 的幂等元素中是最小的，则称其为一个最小 $\mathcal{F}$-投影。最小 $\mathcal{F}$-投影此前已用于证明算子系统 [37, 的内射包络存在（第 15] 章）。我们将证明映射 Γ_ψ 满足这一极小性条件，并由其在 Imψ 上的行为唯一确定。

定理 4.4. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示，且设 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个满足 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射。那么，以下结论成立。

(i) 每个满足 $\sigma|_{\ker \Gamma_\psi} = 0$ 的 $*$-表示 σ: C*(Imψ) $\to B(\mathcal{H}_\sigma)$，相对于 Im$\psi$ 都具有唯一扩张性质。(ii) 映射 Γ_ψ 是 UCP(C*(Imψ) $B(\mathcal{H}_\pi)$) 中的一个极小 Imπ-投影。

证明。 (i)：设 $\varphi : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to B(\mathcal{H}_\sigma)$ 是一个满足 $\varphi|_{\mathrm{Im}\psi} = \sigma|_{\mathrm{Im}\psi}$. 由于 σ 在 $\ker \Gamma_\psi$上为零，我们可以表示为 $\sigma = \widetilde{\sigma} \circ \Gamma_\psi$ 其中$\widetilde{\sigma} : \mathrm{Im}\pi \to B(\mathcal{H}_\sigma)$ 是一个 $*$-表示。注意，根据定理 4.1，

$$(\varphi \circ \psi)(t) = (\sigma \circ \psi)(t) = (\widetilde{\sigma} \circ \Gamma_\psi \circ \psi)(t) = (\widetilde{\sigma} \circ \pi)(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

根据施瓦茨不等式，对每个 $t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M})$,

$$\varphi(\psi(t)^*\psi(t)) \le (\varphi \circ \psi)(t^*t) = (\widetilde{\sigma} \circ \pi)(t^*t) = \varphi(\psi(t))^*\varphi(\psi(t)) \le \varphi(\psi(t)^*\psi(t))$$

因此 $\varphi(\psi(t)^*\psi(t)) = \varphi(\psi(t))^*\varphi(\psi(t))$。因此，我们有 Im$\psi$ 是 φ [37, 定理 3。18]的乘法域的子集。因此，由于$\varphi|_{\mathrm{Im}\psi} = \sigma|_{\mathrm{Im}\psi}$，我们必有 $\varphi = \sigma$。

(ii)：设 $\Omega : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个幺正完全正幂等映射，满足 $\Omega \circ \pi = \pi$ 且 $\Omega \prec \Gamma_\psi$。在此情形下，根据定理 4.1，

$$\Omega \circ \psi = \Omega \circ \Gamma_\psi \circ \psi = \Omega \circ \pi = \pi.$$

由于 $\Omega|_{\mathrm{Im}\psi} = \Gamma_\psi|_{\mathrm{Im}\psi}$，由 (i) 可得 $\Omega = \Gamma_\psi$。 □

作为定理4.4的推论，我们接下来证明幂等元 Γ_ψ 与此类映射的定义域之间存在一一对应关系。特别地，完全正扩张 ψ 将等于一个 $*$-表示 π ，且具有

近似唯一扩张性质，前提是完全正扩张的像足够小。这推广了 [9, 推论 33]。

推论 4.5. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示，且 $\psi, \psi' : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是满足 $\psi\,|_{\mathcal{M}} = \psi'\,|_{\mathcal{M}} = \pi\,|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射。那么，以下陈述等价。

(i) 我们有 $\ker \Gamma_\psi \subset \ker \Gamma_{\psi'}$。(ii) 我们有 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \subset \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi')$。(iii) 我们有 $\Gamma_{\psi'}\,|_{\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)} = \Gamma_\psi$。

特别地，我们有 $\Gamma_\psi = \Gamma_{\psi'}$ 当且仅当 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) = \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi')$。此外，$\psi = \pi$ 只要 $\mathrm{Im}\,\psi \subset \mathrm{Im}\pi$。

证明。蕴含关系 (iii)⇒(i) 显然，而 (i)⇒(ii) 直接由定理4.1 (iv) 得出，因为

$$\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) = \ker \Gamma_\psi + \mathrm{Im}\pi \subset \ker \Gamma_{\psi'} + \mathrm{Im}\pi = \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi').$$

(ii)⇒(iii)：在这种情况下，我们得到一个良定义的含幺完全正映射 $\varphi := \Gamma_{\psi'} \circ \psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to \mathrm{Im}\pi$，满足

$$\varphi\,|_{\mathcal{M}} = (\Gamma_{\psi'} \circ \psi)\,|_{\mathcal{M}} = (\Gamma_{\psi'} \circ \pi)\,|_{\mathcal{M}} = \pi\,|_{\mathcal{M}}\,.$$

因此，由定理4.1 (i)，

$$\pi(t) = (\Gamma_\varphi \circ \varphi)(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}),$$

因为 $\varphi(t)$ 属于幂等元 $\Gamma_\varphi : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\varphi) \to \mathrm{Im}\pi$. 的像中。由此可得 $\Gamma_{\psi'} \circ \psi = \pi$。然而，根据定理 4.4 (i)，映射 Γ_ψ 相对于 $\mathrm{Im}\psi$ 具有唯一扩张性质。因此，由于 $\Gamma_{\psi'}\,|_{\mathrm{Im}\psi} = \Gamma_\psi\,|_{\mathrm{Im}\psi}$，可得 $\Gamma_{\psi'}\,|_{\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)} = \Gamma_\psi$。

对于最后一个结论，请注意，每当 $\mathrm{Im}\psi \subset \mathrm{Im}\pi$ 时，由条件 (iii) 可得

$$\Gamma_\psi = \Gamma_\pi\,|_{\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)} = id,$$

其中 id 表示 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 的恒等表示。由定理 4.1 (v)，我们得出 $\psi = \pi$。 □

回顾一下，根据命题3.10，要确定具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示的类别，只需确定具有近似唯一扩张性质的不可约 $*$-表示的类别（前提是 $\mathcal{M}$ 可分）。其他任何 $*$-表示都可以由这类 $*$-表示的直和或近似酉等价得到。在此，我们将说明条件期望 Γ_ψ 在完全正扩张的直和与近似酉等价下的行为。我们先讨论直和。

推论 4.6. 设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\{\pi_i : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_i) : i \in I\}$ 是一族具有近似唯一扩张性质的 $*$- 表示。对于每个 $i \in I$，设 $\psi_i : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_i)$ 是满足 $\psi_i\,|_{\mathcal{M}} = \pi_i\,|_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射。于是，定义 $\pi = \bigoplus_{i\in I} \pi_i$ 和 $\psi = \bigoplus_{i\in I} \psi_i$，可知映射 $\Gamma_\psi : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{Im}\pi$ 满足

$$\Gamma_\psi((x_i)_{i\in I}) = (\Gamma_{\psi_i}(x_i))_{i\in I}, \qquad (x_i)_{i\in I} \in \mathrm{C}^*(Im\psi).$$

证明。注意， ψ 是满足 $\psi\mid_{\mathcal{M}}=\pi\mid_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射，并回忆一下， π 根据命题具有近似唯一扩张性质3.7。因此，若定义

$$\Lambda : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{Im}\pi, \qquad (x_i)_{i\in I} \mapsto (\Gamma_{\psi_i}(x_i))_{i\in I},$$

于是注意到 Λ 是一个满足条件的完全正映射 $\Lambda\circ\psi=\pi$. 因此我们有 $\Lambda=\Gamma_\psi$ 根据定理 4.4 (i)。 □

接下来，我们讨论近似酉等价的完全正扩张如何影响条件期望 Γ_ψ 。若存在一个酉算子网 $w_\gamma\in B(\mathcal{H}_\pi)$ 满足以下条件，则称含幺完全正映射 $\psi,\psi' : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 近似酉等价:

$$\lim_\gamma \|w_\gamma^*\psi'(t)w_\gamma-\psi(t)\|=0, \qquad t\in \mathrm{C}^*(\mathcal{M}).$$

特别地，当 ψ 与 ψ' 近似酉等价时，存在一个 $*$-同构 $\Omega : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi')$，满足 $\Omega\circ\psi=\psi'$。

推论 4.7。设 $\mathcal{M}\subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间。假设 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示，并且 $\psi,\psi' : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是满足 $\psi\mid_{\mathcal{M}}=\psi'\mid_{\mathcal{M}}=\pi\mid_{\mathcal{M}}$ 的含幺完全正映射。假设存在一个 $*$-同构 $\Omega : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi')$，满足 $\Omega\circ\psi=\psi'$. 。那么，我们有 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)=\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi')$，且 $\Gamma_\psi=\Gamma_{\psi'}$。

证明。 注意，由定理 4.1 (i)，可得

$$\pi=\Gamma_{\psi'}\circ\psi'=\Gamma_{\psi'}\circ\Omega\circ\psi.$$

由定理 4.4 (i)，可知 $\Gamma_{\psi'}\circ\Omega=\Gamma_\psi$。因此，我们得到 $\ker\Gamma_{\psi'}=\ker\Gamma_\psi$ ，这是因为 Ω 是一个 $*$-同构。由推论 4.5，我们得出 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)=\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi')$，且 $\Gamma_\psi=\Gamma_{\psi'}$。 □

我们以一个例子结束本节，该例展示了近似唯一扩张性质何时等价于通常的唯一延拓性质。这使我们能够在特殊情形下改进定理 3.11 。

定理 4.8。设 $\mathcal{M}\subset B(\mathcal{H})$ 是一个含幺算子空间，且 $\pi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个 $*$-表示，满足 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})\subset\mathrm{Im}\pi$。那么，以下陈述等价。

(i) π 具有唯一扩张性质。(ii) π 近似酉等价于一个边界表示。(iii) π 具有近似唯一扩张性质。

特别地，如果 $\mathcal{M}$ 是可分的且 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$是后极限的，那么每个不可约 $*$-表示都是 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$的边界表示，当且仅当 $\mathrm{C}^*(\mathcal{M})$的每个 $*$-表示都具有近似唯一扩张性质。

证明。 方向 (i) ⇒(ii) 显然，而 (ii)⇒(iii) 是定理3.6。对于 (iii)⇒(i)，设 $\psi : \mathrm{C}^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是 $\pi\mid_{\mathcal{M}}$ 的一个完全正扩张。注意到 Γ_ψ 是一个 $*$- 表示，它在 $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ 上保持不变，因此必定是恒等表示（例如，参见 [38, 命题 3.5]）。此时，由定理 4.1 (v)，我们有 $\psi=\pi$ ，因此 π 具有唯一扩张性质。

对于最后一个结论，若 C*(M) 的每个不可约 ∗-表示都是边界表示，则根据定理 3.11，C*(M) 的每个 ∗-表示都具有近似唯一扩张性质。反过来，注意到每个不可约 ∗-表示 $\sigma : C^*(\mathcal{M}) \to B(\mathcal{H}_\sigma)$ 都具有近似唯一扩张性质。由于 C*(M) 是后极限的，因此有 $\mathfrak{K}(\mathcal{H}_\sigma) \subset \mathrm{Im}\sigma$。因此，上一段保证 σ 具有唯一扩张性质。□

我们指出，定理4.8 中的最后一个结论使我们能够在特定情形下重新表述 Arveson 超刚性猜想。设 $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ 是可分的含幺算子空间，使得 $C_e^*(\mathcal{M})$ 是后极限的，并假设存在一个 ∗-表示 $C_e^*(\mathcal{M})$，它不具有唯一扩张性质。那么，若 Arveson 猜想成立，就必定存在一个 ∗-表示 $C_e^*(\mathcal{M})$，它不具有近似唯一扩张性质。

最后请注意，定理 4.8 使我们能够轻松地识别出许多这样的情形：
∗-表示若具有近似唯一扩张性质，就必然经由 C*-包络分解。

例 3. 令 H^2 表示开单位圆盘 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ 上经典的 Hardy 空间，并令 $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ 表示单位圆。我们用 A(𝔻) 表示圆盘代数，它是 $C(\overline{\mathbb{D}})$ 中全纯函数构成的闭子代数。

考虑乘法算子 $\mathcal{A} \subset B(H^2)$ 的子代数 M_φ，其中 $\varphi \in A(\mathbb{D})$。有关该代数的更多细节，读者可参阅 [1],[20],[26]。就我们的目的而言，我们注意到存在一个众所周知的 C*-代数的分裂正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{K}(H^2) \longrightarrow C^*(\mathcal{A}) \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

并且 $C^*(\mathcal{A})$ 是 Toeplitz 代数。此外，我们有 $C_e^*(\mathcal{A}) \cong C(\mathbb{T})$（例如，这可由 [11, 推论 6.4] 得出）。

注意，恒等表示 $\pi : C^*(\mathcal{A}) \to B(H^2)$ 的像包含$\mathfrak{K}(H^2)$。由于 π 不通过 *-包络因子 $\mathcal{A}$分解，我们有 π不可能是 $\mathcal{A}$ 的边界表示，这是由定理2.3 (ii) 得出的。因此，根据定理 π 4.8， π 也不具有近似唯一扩张性质。

5. Concrete applications

在本节中，我们将研究成果应用于几类算子空间。这使我们能够重新诠释经典的 ˇ Saˇskin 定理（命题 5.1），并得到 Arveson 本质正规性猜想的新表述（定理 5.2）。

5.1. 函数空间。在这里，我们研究交换性存在时的近似唯一扩张性质。为此，我们回顾 Saˇskin 的经典定理[43]。给定一个紧致度量空间 X 和一个含幺函数空间 $\mathcal{M} \subset C(X)$，ˇSaˇskin 证明，对于 C(X) 的每个不可约 ∗-表示，它是 $\mathcal{M}$ 的边界表示，当且仅当：只要 $\psi_n : C(X) \to C(X)$ 是满足以下条件的含幺完全正映射序列：对每个 $m \in \mathcal{M}$，均有 $\|\psi_n(m) - m\| \to 0$，那么对于每个 $t \in C(X)$，均有 $\|\psi_n(t) - t\| \to 0$。将序列替换为网后，非可分情形下也有相应的推广 [17, 定理 5.3]。

命题 5.1. 设 X 是一个紧 Hausdorff 空间，且 $\mathcal{M} \subset C(X)$ 是一个含幺函数空间。假设 C(X) 是 $\mathcal{M}$ 的 C*-包络。那么，以下陈述等价。

(i) 每当 $\pi : \mathrm{C}(X) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示，且 $\psi : \mathrm{C}(X) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个含幺完全正映射，使得 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 是交换的，并且 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$，我们就有 $\psi = \pi$。(ii) 每当 $\psi_\alpha : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(X)$ 是一列满足 $\|\psi_\alpha(g) - g\| \to 0$ 的含幺完全正映射网，对每个 $g \in \mathcal{M}$ 都成立，则对每个 $f \in \mathrm{C}(X)$，我们有 $\|\psi_\alpha(f) - f\| \to 0$。(iii) $\mathrm{C}(X)$ 的每个不可约 $*$-表示都是一个边界表示。

证明。 (ii)⇔(iii)：这是 ˇSaˇskin 定理的不可分版本 [17, 定理 5。3]。

(iii)⇒(i)：设 $\pi : \mathrm{C}(X) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个具有近似唯一扩张性质的 $*$-表示，且设 $\psi : \mathrm{C}(X) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个含幺完全正映射，使得 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)$ 是交换的，并且 $\psi|_{\mathcal{M}} = \pi|_{\mathcal{M}}$。若 Y 是一个紧 Hausdorff 空间，且 $\Omega : \mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi) \to \mathrm{C}(Y)$ 是 $*$-同构，则 $\Omega \circ \psi : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(Y)$ 是一个含幺完全正映射，满足 $(\Omega \circ \psi)|_{\mathcal{M}} = (\Omega \circ \pi)|_{\mathcal{M}}$。因此，$\Omega \circ \psi = \Omega \circ \pi$ 根据 [17, 定理 5.1]，从而 $\psi = \pi$ 如所需。

(i)⇒(ii)：令 $\pi : \mathrm{C}(X) \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 为一个等距 $*$-表示，并令 $\psi_\alpha : \mathrm{C}(X) \to \mathrm{C}(X)$ 为一列满足对每个 $g \in \mathcal{M}$ 都有 $\|\psi_\alpha(g) - g\| \to 0$ 的含幺完全正映射。定义一个 $*$-同态

$$\pi_{\mathcal{U}} : \mathrm{C}(X) \to \left(\prod_\alpha \mathrm{Im}\pi\right)/\mathfrak{J}, \qquad f \mapsto (\pi(f))_\alpha + \mathfrak{J},$$

其中 $\mathfrak{J}$ 是 $\prod_\alpha \mathrm{Im}\pi$ 的闭双边理想，由满足 $\|\pi(f_\alpha)\| = \|f_\alpha\| \to 0$ 的网 $(\pi(f_\alpha))_\alpha$ 构成。根据 $\mathfrak{J}$ 的定义，我们有 $\ker \pi_{\mathcal{U}} = \ker \pi$，因此 $\pi_{\mathcal{U}}$ 是等距的。通过等距 $*$-同态 ι，将 $(\prod_\alpha \mathrm{Im}\pi)/\mathfrak{J}$ 表示在某个希尔伯特空间上后，我们可以应用命题 3.8 (ii)，得到一个基数 κ，使得 $(\iota \circ \pi_{\mathcal{U}})^{(\kappa)}$ 具有近似唯一扩张性质。

现在，定义一个含幺完全正映射

$$\psi : \mathrm{C}(X) \to \left(\prod_\alpha \mathrm{Im}\pi\right)/\mathfrak{J}, \qquad f \mapsto ((\pi \circ \psi_\alpha)(f))_\alpha + \mathfrak{J}.$$

根据假设，ψ 和 $\pi_{\mathcal{U}}$ 在 $\mathcal{M}$ 上相同。因此，$(\iota \circ \psi)^{(\kappa)}$ 和 $(\iota \circ \pi_{\mathcal{U}})^{(\kappa)}$ 在 $\mathcal{M}$ 上也相同。然而，由于 $\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}(\iota \circ \psi)^{(\kappa)})$ 是交换 C^*-代数，该假设使我们可以得出结论：$(\iota \circ \psi)^{(\kappa)} = (\iota \circ \pi_{\mathcal{U}})^{(\kappa)}$。由于 ι 和 $\pi_{\mathcal{U}}$ 是等距的，并且根据 $\pi_{\mathcal{U}}$ 的定义，可知对于每个 $f \in \mathrm{C}(X)$. □, $\|\psi_\alpha(f) - f\| \to 0$

我们指出，命题5.1 与 [17, 定理 5.1], 非常相似，但在条件 (i) 中，我们可以额外假设 π 具有近似唯一扩张性质。根据定理4.8，我们看到，（先验地）条件 (i) 中唯一非平凡的蕴含涉及那些无法分解为不可约表示的 $*$-表示。另一方面，命题5.1 保证该条件实际上等价于一个关于不可约 $*$-表示的陈述。

最后，我们想指出，另一个颇值得注意之处是，存在许多不满足条件 (i) 的含幺算子空间实例（例 1）。

5.2. 本质正规性。接下来，我们将所构建的方法应用于另一类算子系统，并将我们的工作与 Arveson 的另一个广为研究的猜想联系起来。

为此，设 $d \geq 2$ 为一个固定的正整数， $\mathbb{B}_d \subset \mathbb{C}^d$ 表示开单位球， $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_d]$ 表示复 d元多项式代数。Drury-Arveson 空间 H_d^2 是定义在 $\mathbb{B}_d$ 上的再生核希尔伯特空间，其对应的核为

$$k(z,w) = \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle}, \qquad z, w \in \mathbb{B}_d.$$

令 $M_p \in B(H_d^2)$ 表示与 $p \in \mathbb{C}[z]$ 相关联的多项式乘子。行算子

$$M_z = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_d}) : (H_d^2)^{(d)} \longrightarrow H_d^2$$

称为 Drury-Arveson 空间的 d-移位。接下来，固定一个齐次理想$I \lhd \mathbb{C}[z]$。显然， IH_d^2 对 M_z 不变。于是，我们定义作用在 $\mathcal{F}_I = H_d^2 \ominus IH_d^2$ 上的算子 d- 元组 $S = (S_1, \ldots, S_d)$，如下所示:

$$S_i = P_{\mathcal{F}_I} M_{z_i} \mid_{\mathcal{F}_I}, \qquad 1 \leq i \leq d.$$

定义 $\mathfrak{T}_I = \mathrm{C}^*(\mathcal{S}_I$为与齐次理想 I相关联的 Toeplitz 代数。接着，已知 $\mathfrak{K}(\mathcal{F}_I) \subset \mathfrak{T}_I$ [41, 定理 1。3] 因此，我们定义$\mathcal{O}_I = \mathfrak{T}_I / \mathfrak{K}(\mathcal{F}_I$为与该理想相关联的 Cuntz 代数。全文中，令 $q : \mathfrak{T}_I \to \mathcal{O}_I$ 表示商映射。现在，我们提出关于这一算子元组的主要猜想。

Arveson 本质正规性猜想：若 $I \lhd \mathbb{C}[z]$ 是一个齐次理想，那么对于每个 $1 \leq i$, $S_i S_j^* - S_j^* S_i$ 都是一个紧算子， $j \leq d$.

满足上述判据的算子元组称为本质正规。在 Arveson 本质正规性猜想中，主要关注点之一是， S 是满足 $p(S) = 0$ （对每个 $p \in I$ [44, 成立）的交换行收缩的通用算子 d元组，定理 8.4]。因此，本质正规性猜想与球上的非交换簇理论相关。

Kennedy 和 Shalit 揭示了本质正规性猜想与 Arveson 超刚性猜想之间的联系。假设 $I \lhd \mathbb{C}[z]$是一个非零齐次理想，其中不包含线性多项式，且在 $\mathbb{C}[z]$中的余维不是有限的。若令 $\mathcal{S}_I$ 表示由 S_1、……、 S_d生成的算子系统，那么元组 S 的本质正规性等价于算子系统$\mathcal{S}_I$ [30, 的超刚性（定理 4.12],[31]）。现在，我们将用近似唯一扩张性质来重新表述该元组的本质正规性。

定理 5.2. 设 $I \lhd \mathbb{C}[z]$ 是一个非零齐次理想，不包含任何线性多项式，且 I 在 $\mathbb{C}[z]$ 中不是有限余维。那么，以下陈述等价。

(i) 存在一个 $*$ 的等距表示 $\mathcal{O}_I$ ，它相对于 q 具有近似唯一扩张性质 $\mathcal{S}_I$。(ii) 元组 $S = (S_1, \ldots, S_d)$ 是本质正规。(iii) 算子系统 $\mathcal{S}_I$ 是超刚性的。(iv) $\mathfrak{T}_I$ 的每个不可约 $*$ 表示都是 $\mathcal{S}_I$ 的边界表示。

证明。 方向 (iii)⇒ (iv)显然，(iv)⇒(i)由引理 3.2和定理 3.11推出，而 (ii)⇔(iii)是 [30, 定理412],[31]的推论。

(i)⇒ (ii): 设 $\pi:\ \mathcal{O}_I \to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个等距 $*$-表示，它相对于 $q(\mathcal{S}_I)$ 具有近似唯一扩张性质，并考虑 $\sigma:=\pi\circ q$。注意到 σ 在 $\mathcal{F}_I$ 上的紧算子上为零，因此由[30, 命题 4.13]，可知，存在一个含幺完全正映射 $\psi:\ \mathfrak{T}_I \to B(\mathcal{H}_\pi)$，使得 $\psi|_{\mathcal{S}_I}=\sigma|_{\mathcal{S}_I}$ 并且

$$\psi(S_i^*S_j)=\sigma(S_jS_i^*),\qquad 1\le i,j\le d.$$

此外，根据[30, 引理 4.6]，，我们可以表示为 $\psi=\varphi\circ q$，其中 $\varphi:\ \mathcal{O}_I\to B(\mathcal{H}_\pi)$ 是一个含幺完全正映射。由于$\varphi|_{q(\mathcal{S}_I)}=\pi|_{q(\mathcal{S}_I)}$，我们得到一个酉元网 $u_\beta\in B(\mathcal{H}_\pi)$，使得对于每个 $x\in\mathcal{O}_I$，$u_\beta^*\varphi(x)u_\beta\to\pi(x)$在弱算子拓扑下收敛。因此，对于每个 $t\in\mathfrak{T}_I$，$u_\beta^*\psi(t)u_\beta\to\sigma(t)$在弱算子拓扑下收敛。与定理 4.1 的证明类似，我们得到一个同态条件期望 $\Gamma_\psi:\mathrm{C}^*(\mathrm{Im}\psi)\to\mathrm{Im}\sigma$，满足 $\Gamma_\psi\circ\psi=\sigma$。特别地，我们看到

$$\sigma(S_i^*S_j)=(\Gamma_\psi\circ\psi)(S_i^*S_j)=\sigma(S_jS_i^*),\qquad 1\le i,j\le d.$$

由于 $\ker\sigma=\mathfrak{K}(\mathcal{F}_I)$，我们得到对于每个 $1\le i,j\le d$，$S_i^*S_j-S_jS_i^*$都是紧算子。换言之，元组 $S=(S_1,\dots,S_d)$是本质正规的。□

注 5.3. 仿照上述证明，可以将条件 (i) 替换为以下陈述：存在一个 $*$对 $\mathfrak{T}_I$ 的表示，它相对于 $\mathcal{S}_I$ 具有近似唯一扩张性质，且其核等于 $\mathcal{F}_I$上的紧算子。

此前尚无人记载算子系统 $\mathcal{S}_I$ 满足 Arveson 超刚性猜想的条件（参见定理 4.12之后的 [30, 讨论）。不过，这一点可以由 [30]中的结果推出。事实上，由 [30, 定理 3.3], 可知，$q(\mathcal{S}_I)$ 的 C*-包络是交换的，因此边界表示由某些特征组成。回想一下，根据定理 2.3 (ii)，边界表示必须经由 C*-包络分解。于是很容易验证，若 $\mathcal{S}_I$ 的边界表示 $\pi:\mathfrak{T}_I\to B(\mathcal{H}_\pi)$ 在 $\mathcal{F}_I$上的紧算子上为零，则 π 必为一个特征。因此，若 $\mathfrak{T}_I$ 的每个不可约 $*$表示都是边界表示，那么必有$\mathcal{O}_I$ 是一个交换 C*-代数。由此，元组 S 是本质正规，因此，根据 [30, 定理 4.12],[31], $\mathfrak{T}_I$ 是超刚性的。

乍看之下，条件 (i) 似乎只是一个较弱的规定，因此人们或许会认为，有许多齐次理想的选择都能得到本质正规元组。不过我们提醒读者，由于元组 S 的本质正规性等价于 $\mathcal{O}_I$ 是 $q(\mathcal{S}_I)$ 的 C*-包络，因此尚不清楚 $\mathcal{O}_I$ 是否必然具有具备近似唯一扩张性质的等距 $*$-表示。

References

[1] Jim Agler、John McCarthy 和 Linus E Kramer, *Pick interpolation and Hilbert function spaces* 44, 2002 , 第 卷，美国数学会，。[2] William Arveson, *Subalgebras of C*-algebras*, 《Acta Mathematica》123 (1969), 第 1 期, 141–224。[3] , *Subalgebras of C*-algebras III: Multivariable operator theory*, 《Acta Mathematica》181 (1998), 第 2 期, 159–228。[4] , *The noncommutative Choquet boundary*, 《美国数学会杂志》21 (2008), 第 4 期, 1065–1084。[5] , *The noncommutative Choquet boundary II: hyperrigidity*, 《以色列数学杂志》184 (2011), 第 1 期, 349–385。

[6] , *An invitation to C*-algebras*, 第 39 卷, 施普林格科学与商业媒体, 2012年。[7] Nathanial Patrick Brown 和 Narutaka Ozawa, *C*-algebras and finite-dimensional approximations* 2008 , 第 88 卷, 美国数学会, 。[8] Rapha¨el Clouˆatre, *Non-commutative peaking phenomena and a local version of the hyperrigidity conjecture* **117** 2018 2, 221 , 《伦敦数学会会刊》 (), 第 – 期, 245。[9] , *Unperforated pairs of operator spaces and hyperrigidity of operator systems*, 《加拿大数学杂志》70 (2018), 第 6 期, 1236–1260。[10] Rapha¨el Clouˆatre 和 Adam Dor-On, , arXiv 预印本 arXiv:。 ()。[11] Rapha¨el Clouˆatre 和 Michael Hartz, *Multiplier algebras of complete Nevanlinna–Pickspaces: dilations, boundary representations and hyperrigidity*, 《泛函分析杂志》274 (2018), 第 6 期, 1690–1738。[12] Rapha¨el Clouˆatre 和 Ian Thompson, *Finite dimensionality in the non-commutative Choquet boundary: peaking phenomena and C*-liminality*, 《国际数学研究通讯》2022 (2022), 第 20 期, 16046–16093。[13] , *Minimal boundaries for operator algebras*, arXiv 预印本 arXiv:2208.05919 (2022)。[14] Kenneth R Davidson、Adam Dor-On、Orr Moshe Shalit 和 Baruch Solel, *Dilations, in-clusions of matrix convex sets, and completely positive maps*, 《国际数学研究通讯》2017 (2017), 第 13 期, 4069–4130。[15] Kenneth R Davidson 和 Matthew Kennedy, *The Choquet boundary of an operator system*, 《杜克数学杂志》164 (2015), 第 15 期, 2989–3004。[16] , *Noncommutative Choquet theory*, arXiv 预印本 arXiv:1905.08436 (2019)。[17] , *Choquet order and hyperrigidity for function systems*, 《数学进展》385 (2021), 107774。[18] Kenneth R Davidson 和 Benjamin Passer, *Strongly peaking representations and compressions of operator systems* **2022** 2022 , 《国际数学研究通讯》 (), 第 7 期, 5037 5070–。[19] Jacques Diximier, *C*-algebras*, North-Holland, 阿姆斯特丹 8 (1977), 322–329。[20] Ronald G Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, 第 179 卷, 施普林格科学与商业媒体, 2012年。[21] Michael A Dritschel 和 Scott A McCullough, *Boundary representations for families of representations of operator algebras and spaces* 2005 159 167 , 《算子理论杂志》 (), –。[22] Theodore W Gamelin, *Uniform algebras*, 第 311 卷, 美国数学会, 2005年。[23] Donald W Hadwin, *Nonseparable approximate equivalence*, 《美国数学会汇刊》266 (1981), 第 1 期, 203–231。[24] , *Completely positive maps and approximate equivalence*, 《印第安纳大学数学杂志》36 (1987), 第 1 期, 211–228。[25] Masamichi Hamana, *Injective envelopes of operator systems*, 《数学科学研究所刊物》15 (1979), 第 3 期, 773–785。[26] Kenneth Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Courier Corporation, 2007年。[27] Evgenios TA Kakariadis, *The Šilov boundary for operator spaces*, 《积分方程与算子理论》76 (2013), 第 1 期, 25–38。[28] Elias G Katsoulis 和 Christopher Ramsey, *The hyperrigidity of tensor algebras of C*-correspondences* **483** 2020 , 《数学分析与应用杂志》 (), 第 1 期, 123611。[29] John L Kelley, *General topology*, Courier Dover Publications, 2017年。[30] Matthew Kennedy 和 Orr Moshe Shalit, *Essential normality essential norms and hyperrigidity* , , 《泛函分析杂志》 (), 第 – 期。[31] , *Corrigendum to: Essential normality, essential norms and hyperrigidity*, 《泛函分析杂志》270 (2016), 第 7 期, 2812–2815。[32] Matthew Kennedy 和 Eli Shamovich, *Noncommutative Choquet simplices*, 《数学年刊》（2021）, 1–39。[33] Se-Jin Kim, *Hyperrigidity of C*-correspondences*, 《积分方程与算子理论》93 (2021), 第 4 期, 1–17。[34] Craig Kleski, *Korovkin-type properties for completely positive maps*, 《伊利诺伊数学杂志》58 (2014), 第 4 期, 1107–1116。

[35] Paul S Muhly 和 Baruch Solel, *An algebraic characterization of boundary representations*, 《非自伴算子代数、算子理论及相关主题》, 1998年, 第 189–196 页。[36] ,
_____ *Tensor algebras over C^*-correspondences: Representations dilations and C^*- envelopes* , 《泛函分析杂志》 ( ) , 第 – 期。[37] Vern Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, 剑桥大学出版社, 2002年。[38] , *Weak expectations and the injective envelope*, 《美国数学会汇刊》363 （2011年）, 第 9 期, 4735–4755 页。[39] Robert R Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, 施普林格, 2001年。[40] Gelu Popescu, *Isometric dilations for infinite sequences of noncommuting operators*, 《美国数学会汇刊》316（1989年）, 第 2 期, 523–536 页。[41] ,
Operator theory on noncommutative varieties, 《印第安纳大学数学杂志》（2006年）, 389–442 页。[42] Guy Salomon, *Hyperrigid subsets of Cuntz-Krieger algebras and the property of rigidity at zero* , 《算子理论杂志》 ( ) , 第 1 期, 61– 页。[43] Ju A ˇSaˇskin,
The Milman–Choquet boundary and the theory of approximations, 《泛函分析及其应用》1（1967年）, 95–96 页。[44] OrrMoshe Shalit 和 Baruch Solel, *Subproduct systems*, 《数学文献》14（2009年）, 801–868 页。[45] Dan Voiculescu, *A non-commutative Weyl-von Neumann theorem*, 《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》21（1976年）, 97–113 页。

Department of Mathematics, University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, CanadaR3T 2N2*Email address*: thompsoi@myumanitoba.ca