arXiv:2301.08307v1 [math.AG] 19 Jan 2023

# $K^M$上同调在权重 3 中的可由拟群表示性：推广 Bloch 的一个结果

EOIN MACKALL

Abstract. 我们推广了 Bloch 关于单位元处 Milnor $K$-上同调群的可由拟群表示性的一个结果。特别地，我们证明，对于定义在代数域扩张 $k/\mathbb{Q}$ 上的 $X$ 光滑、真且几何连通的簇，函子

$$\mathscr{T}_X^{i,3}(A) = \ker\left(\mathrm{H}^i(X_A, \mathcal{K}^M_{3,X_A}) \to \mathrm{H}^i(X, \mathcal{K}^M_{3,X})\right),$$

定义在 Artin 局部 $k$-代数 $(A, \mathfrak{m}_A)$ 上，其中 $A/\mathfrak{m}_A \cong k$，只要 $X$ 的某些霍奇数为零，该函子就是可由拟群表示的。

## 1. Introduction

Bloch[Blo75] 证明了，对于定义在数域 $k$ 上的簇 $X$，Milnor $K$-上同调 $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{K}^M_{2,X})$ 是一个有趣的对象，适合通过变形理论进行研究。更确切地说，Bloch 找到了一个必要且充分的判据，用于确定将局部 Artin $k$-代数 $A$ 映射到典范映射之核的函子是否原可表

$$\mathrm{H}^i(X_A, \mathcal{K}^M_{2,X_A}) \to \mathrm{H}^i(X, \mathcal{K}^M_{2,X})$$

其条件是 $X$ 的某些霍奇数消失。回顾一下，[Sch68]若函子 $F\colon \mathsf{Art}_k \to$ 集合 从范畴 $\mathsf{Art}_k$（其对象为剩余域为 $A/\mathfrak{m}_A \cong k$ 的局部 Artin $k$-代数（$A, \mathfrak{m}_A$））原可表，则存在完备局部诺特 $k$-代数（$R, \mathfrak{m}_R$），使得：

(1) 对所有整数 $n \geq 1$，$(R/\mathfrak{m}_R^n, \mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^n)$ 都是 $\mathsf{Art}_k$ 中的一个对象；(2) 存在函子的典范同构 $F \simeq h_R$，使其在$F$与函子 $h_R\colon \mathsf{Art}_k \to$ 集合之间建立同构，该函子由如下对应刻画：$h_R(A) = \mathrm{Hom}_{\text{local } k\text{–代数}}(R, A)$，其中 $(A, \mathfrak{m}_A)$ 是 $\mathsf{Art}_k$ 中的任意对象。

证明 Bloch 判据所必需的一个关键要素，是对于局部 $\mathbb{Q}$-代数，其限制映射 $K_2(B) \to K_2(A)$ 的核之间存在某个对数比较同构

日期：2023年1月23日。2020年数学主题分类：19E08；14D15。关键词和短语： $K$-上同调；可由拟群表示。

$A$以及一个 $A$-代数 $B$，带有 $A$-增广 $\rho:\ B\to A$ 使得核 $J=\ker(\rho)$ 是幂零的，而绝对 Kähler 微分群的某个子商则是针对 ¨（这也已在 $B$ 中证明；参见 [Blo75]）。

自[Blo75], 以来，人们已尝试从不同方向推广 Bloch 的结果。列举其中一些成功案例：Stienstra[Sti83] 将原可表性判据推广到了定义在更一般基域上的曲面；Maazen 和 Stienstra [MS78] 为 $K_2(R)$ 的一大类环给出了显式表示 $R$，使他们得以恢复 Bloch 所给出的与微分之间的关系；更近些时候，Gorchinskiy 和 Tyurin $K$将 Bloch 的对数比较同构推广到了更高阶 Milnor [GT18], 群 [Dri14], Dribus 也独立完成了这一推广。

在本文中，我们说明 Gorchinskiy 和 Tyurin 以及 Dribus 的定理如何经层化，从而能够研究与更高阶 Milnor $K$-上同调群 $\mathrm{H}^i(X,\mathcal{K}^M_{n,X})$ 相关的函子的原可表性。我们的主要结果是权重 3 Milnor $K$-上同调的原可表性充分性判据。也就是说，我们证明，对于满足一系列假设的簇 $X$（具体而言，$X$ 在几何上应当足够良好，定义在某个代数扩张 $k/\mathbb{Q}$上，并且具有某些消失的霍奇数），将一个 Artin 局部 $k$-代数 $(A,\mathfrak{m}_A)$（其剩余域为 $A/\mathfrak{m}_A\cong k$）赋予群 $\mathrm{H}^i(X_A,\mathcal{K}^M_{3,X_A})$ 的函子在单位元处是原可表的（定理 3.1）。我们的证明也像 Bloch 的证明一样具有描述性，因为我们通过构造一个同构来证明原可表性

$$\ker\left(\mathrm{H}^i(X_A,\mathcal{K}^M_{3,X_A})\to\mathrm{H}^i(X,\mathcal{K}^M_{3,X})\right)\cong\mathrm{H}^i(X,\Omega^2_{X/k})\otimes_k\mathfrak{m}_A$$

这本身也具有独立的研究价值。

最后，我们指出，此处证明的大多数结果实际上适用于任意权重的所有 Milnor $K$-上同调群 $n\geq 1$。我们的主定理仅限于权重 3，这是因为作者无法确定与微分 $p$-形式相关的某些层上同调群 $p>2$ 的消失性。因此，若能推广引理 3.3中的消失性结果，就有望证明适用于任意权重的可由拟群表示的相应充分性判据。

致谢。作者谨向一位匿名审稿人致谢，其意见和建议大大提升了本文的可读性。

约定。全文采用以下约定：

- 簇是一个在基域上分离且有限型的整概形。

记号。全文采用以下记号:

- $k/\mathbb{Q}$ 是一个固定的代数扩张
- $(A, \mathfrak{m}_A)$ 是一个 Artin 局部 $k$-代数，其结构映射为 $s: k \to A$，剩余域为 $A/\mathfrak{m}_A = k$
- $X$ 是一个光滑的 $k$-簇，其结构映射为 $\phi: X \to \mathrm{Spec}(k)$，且$X_A = X \times_k \mathrm{Spec}(A)$ 是 $X$ 在 $\mathrm{Spec}(A)$ 上的平凡变形
- $\pi_1: X_A \to X$ 和 $\pi_2: X_A \to \mathrm{Spec}(A)$ 分别是第一和第二投影。
- $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X_A}$ 是约化 $\rho: X \to X_A$的理想层。

## 2. 推广布洛赫的结果

本节旨在汇集一些预备知识（大多不加证明），它们直接推广了文献中的已知结果。

定义 2.1. 我们用 $\mathcal{R}^1_\rho$ 表示核层

$$\mathcal{R}^1_\rho = \ker\left(\Omega^1_{X_A/k} \twoheadrightarrow \rho_*\Omega^1_{X/k}\right).$$

该层有时在文献中记作 $\Omega^1_{X_A,\ \mathcal{J}}$ 或 $\Omega^1_{X\times A,\ X\times\mathfrak{m}_A}$。注意， $\mathcal{R}^1_\rho$ 是凝聚的。

定义 2.2. 对任意 $n > 1$，我们将 $\mathcal{R}^n_\rho$ 定义为核

$$\mathcal{R}^n_\rho = \ker\left(\Omega^n_{X_A/k} \twoheadrightarrow \wedge^n\left(\rho_*\Omega^1_{X/k}\right)\right).$$

这等于像层

$$\mathcal{R}^n_\rho = \mathrm{Im}\left(\mathcal{R}^1_\rho \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \Omega^{n-1}_{X_A/k} \twoheadrightarrow \Omega^n_{X_A/k}\right).$$

注意， $\mathcal{R}^n_\rho$ 也是凝聚的。

注记 2.3。将微分 $d^n: \Omega^n_{X_A/k} \to \Omega^{n+1}_{X_A/k}$ 限制到子层 $\mathcal{R}^n_\rho$ 后，它们组成一个复形

$$\mathcal{R}^0_\rho := \mathcal{J} \to \mathcal{R}^1_\rho \xrightarrow{d^1} \mathcal{R}^2_\rho \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{i-1}} \mathcal{R}^i_\rho \xrightarrow{d^i} \cdots.$$

我们常将 $d$ 记作这些微分中的任意一个。

对于任意概形 $Y$，我们将 $\mathcal{K}^M_{n,Y}$ 记作与以下赋值定义的米尔诺夫 $K$-群预层相关联的扎里斯基层

$$U \rightsquigarrow K^M_n(\mathcal{O}_Y(U))$$

对任意开集 $U \subset Y$。于是有一个正合列

$$0 \to \mathcal{K}^M_{n,\rho} \to \mathcal{K}^M_{n,X_A} \to \mathcal{K}^M_{n,X} \to 0$$

由约化 $\mathcal{O}_{X_A} \to \rho_* \mathcal{O}_X$ 诱导，其中 $\mathcal{K}^M_{n,\rho}$ 定义为相应的核层。此外，该正合列由结构映射右分裂

$$\mathcal{O}_X \to s_* \mathcal{O}_{X_A} \to s_* \rho_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X.$$

引理 2.4. 对每个 $n \geq 2$，存在阿贝尔群层的同构

$$\psi^n : \mathcal{K}^M_{n,\rho} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^{n-1}_\rho / d\mathcal{R}^{n-2}_\rho$$

由对以下对象的 Bloch 映射进行层化而得：[GT18，定理 2。10]。 □

从现在起，我们通过和式将 $\Omega^1_{X_A/k}$ 识别为

$$\Omega^1_{X_A/k} \cong \pi_1^* \Omega^1_{X/k} \oplus \pi_2^* \Omega^1_{A/k}$$

通过以下文献中的同构：[Sta21，标签 01V1]。类似地，我们将.....识别为

$$\Omega^n_{X_A/k} \cong \bigoplus_{j=0}^{n} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-j}_{A/k} \tag{Kün}$$

对于任意 $0 \leq j \leq n$，我们使用记号

$$\Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-j}_{A/k} := \pi_1^* \Omega^j_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_{X_A}} \pi_2^* \Omega^{n-j}_{A/k} \quad \left( \cong \Omega^j_{X/k} \otimes_k \Omega^{n-j}_{A/k} \right)$$

在乘积上层的外积 $X_A = X \times_k \mathrm{Spec}(A)$的情形。以下两个引理是对 $n = 1$ 的情形的直接推广，这一点见于 [Blo75, §3]。

引理 2.5。复合映射

$$\mathcal{R}^n_\rho \to \Omega^n_{X_A/k} \twoheadrightarrow \bigoplus_{j=0}^{n-1} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-j}_{A/k}$$

由自然包含和投影所诱导，给出一个短正合列

$$0 \to \Omega^n_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A \to \mathcal{R}^n_\rho \to \bigoplus_{j=0}^{n-1} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-j}_{A/k} \to 0.$$

此外，这个正合列是分裂的。 □

从现在起，我们用 $\mathfrak{m}^0_A = \ker(\mathfrak{m}_A \xrightarrow{d} \Omega^1_{A/k})$ 表示给定的核。

引理 2.6. 对于任意 $n \geq 1$，下面这个由微分和包含映射构成的方块是交换的。

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} \Omega^{n-1}_{X/k} \otimes_k \mathfrak{m}^0_A & \longrightarrow & \mathcal{R}^{n-1}_\rho \\ \downarrow{\scriptstyle d \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ \Omega^n_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A & \longrightarrow & \mathcal{R}^n_\rho \end{array}$$

由方块 $(*)$还可得到一个正合列

$$0 \to \frac{\Omega^n_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A}{\mathrm{Im}(d \otimes 1)} \to \frac{\mathcal{R}^n_\rho}{d\mathcal{R}^{n-1}_\rho} \to \mathcal{C}^n_\rho \to 0$$

其中

$$\mathcal{C}^n_\rho = \frac{\bigoplus_{j=0}^{n-1} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-j}_{A/k}}{\Omega^{n-1}_{X/k} \otimes_k d(\mathfrak{m}_A) + d\left(\bigoplus_{j=0}^{n-2} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-1-j}_{A/k}\right)}$$

是典范商层。

证明。要证明上面的方形图 $(*)$ 是交换的，只需注意到德拉姆复形 $\Omega^\bullet_{X_A/k}$ 的微分 $d$ ，通过 (K¨un) 的同构，可以识别为全复形 $\mathrm{Tot}(\Omega^\bullet_{X/k} \boxtimes \Omega^\bullet_{A/k})$ 的微分；更多信息请参阅[Sta21、Tag0FM9、Tag 012Z]。由 $(*)$ 的存在性可知，存在一个行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^{n-1}_{X/k} \otimes_k \mathfrak{m}^0_A & \longrightarrow & \mathcal{R}^{n-1}_\rho & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{d}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^n_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A & \longrightarrow & \mathcal{R}^n_\rho & \longrightarrow & \bigoplus_{j=0}^{n-1} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-j}_{A/k} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中我们使用占位符

$$\mathcal{E} = \Omega^{n-1}_{X/k} \otimes_k \left(\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}^0_A\right) \oplus \bigoplus_{j=0}^{n-2} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-1-j}_{A/k}$$

˜并用 $d$ 表示构成最右侧垂直箭头的诱导映射。

我们将在下文的引理 2.7 中证明，复合映射的核

$$\mathcal{R}^{n-1}_\rho \xrightarrow{d} \mathcal{R}^n_\rho \to \bigoplus_{j=0}^{n-1} \Omega^j_{X/k} \boxtimes \Omega^{n-j}_{A/k}$$

由 $\ker(d)$ 和 $\Omega^{n-1}_{X/k} \otimes_k \mathfrak{m}^0_A$ 局部生成。这意味着，˜对于每个点 $x \in X_A$，核 $d$ 中的 $\mathcal{E}_x$ 的任意局部截面 $\psi$ 都可以提升为局部截面 $\psi' \in (\mathcal{R}^{n-1}_\rho)_x$ ，且该截面可写成来自 $\ker(d)_x$ 的局部截面之和。关于给定正合列的引理最后一个断言，则可由对上述交换图应用蛇形引理得出。

□

引理 2.7。 沿用引理 *2.6*中的记号，设 $x \in X_A$ 是一个点，并设 $\psi \in (\mathcal{R}^{n-1}_\rho)_x$ 是一个局部截面，使得 $d(\psi)$ 包含于$(\Omega^n_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A)_x \subset (\mathcal{R}^n_\rho)_x$。则 $\psi \in \ker(d)_x + (\Omega^{n-1}_{X/k} \otimes_k \mathfrak{m}^0_A)_x$。

证明。固定一组基 $\{e_i\}_{i\in I}$，作为 $k$-向量空间 $\mathfrak{m}_A^0$ 的基，并将其扩充为一组基 $\{e_i\}_{i\in J}$，作为 $k$-向量空间 $\mathfrak{m}_A$的基。注意，可能出现 $\mathfrak{m}_A^0 = 0$ 的情况，此时有 $I = \emptyset$；我们可以假设$\mathfrak{m}_A \neq 0$，因为若 $\mathfrak{m}_A = 0$，则 $A = k$，结论便立即成立。

根据 Kähler 微分的一般性质，特别是 ¨ [Sta21，Tag02HP]，，我们有 $\Omega^1_{A/k}$ 由以下元素生成，为一个 $A$-模 $\{de_i\}_{i\in J}$。考虑 $A$-模 $\Omega^1_{A/k}$ 作为一个 $k$-向量空间，可知这些元素

$$\{de_i\}_{i\in J\setminus I}, \quad \text{and} \quad \{e_j de_i\}_{j\in J, i\in J\setminus I}$$

张成 $\Omega^1_{A/k}$。由构造可知，元素 $\{de_i\}_{i\in J\setminus I}$ 是 $k$-线性无关的，因此，通过限制到子集 $J' \subset J$，我们可以假设这一族元素

$$\{de_i\}_{i\in J\setminus I} \cup \{e_j de_i\}_{j\in J', i\in J\setminus I}$$

构成 $\Omega^1_{A/k}$ 的一组基。

利用引理 $\mathcal{R}_\rho^{n-1}$中给出的 2.5的分裂，任意一个局部截面 $\psi \in (\mathcal{R}_\rho^{n-1})_x$ 都可以写成如下的和

$$\psi = \sum_{i\in I} \omega_i \otimes e_i + \sum_{j\in J\setminus I} \omega_j \otimes e_j + \sum_{r\in J\setminus I} \alpha_r \otimes de_r + \sum_{r\in J\setminus I, s\in J'} \alpha_{r,s} \otimes e_s de_r + \psi'$$

其中我们有：

- $\omega_i \in \Omega^{n-1}_{X/k,x}$ for all $i \in I$,
- $\omega_j \in \Omega^{n-1}_{X/k,x}$ for all $j \in J \setminus I$,
- $\alpha_r \in \Omega^{n-2}_{X/k,x}$ for all $r \in J \setminus I$,
- $\alpha_{r,s} \in \Omega^{n-2}_{X/k,x}$ for all pairs $(r, s) \in (J \setminus I) \times J'$,
- and for a uniquely determined local section $\psi'$ of $(\mathcal{R}_\rho^{n-1})_x$ contained in the summand coming from $\bigoplus_{j=2}^{n-1} \Omega^{n-1-j}_{X/k} \boxtimes \Omega^j_{A/k}$.

将微分 $d$ 作用于局部截面 $\psi$，得到：

$$\begin{aligned} d(\psi) = &\sum_{i\in I} d\omega_i \otimes e_i \\ &+ \sum_{j\in J\setminus I} d\omega_j \otimes e_j + (-1)^{n-1}\omega_j \otimes de_j \\ &+ \sum_{r\in J\setminus I} d\alpha_r \otimes de_r \\ &+ \sum_{r\in J\setminus I, s\in J'} d(\alpha_{r,s}) \otimes e_s de_r + (-1)^{n-2}\alpha_{r,s} \otimes de_s \wedge de_r \\ &+ d\psi'. \end{aligned}$$

按适当的双次数合并各项，可写为：

$$d(\psi) - \psi'' = \sum_{i\in J} d\omega_i \otimes e_i + \sum_{j\in J\setminus I} (d\alpha_j + (-1)^{n-1}\omega_j) \otimes de_j + \sum_{r\in J\setminus I, s\in J'} d(\alpha_{r,s}) \otimes e_s de_r$$

对于包含在那些以 $\Omega^j_{A/k}$ 为因子的直和项之和中的局部截面 $\psi''$ of $(\mathcal{R}^n_\rho)_x$，对任意 $j \geq 2$。

现在假设 $d(\psi)$ 包含在 $(\Omega^n_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A)_x$ 中。由此可得$\psi'' = 0$， $d(\alpha_{r,\ s})$ 存在消失 $= 0$，对所有 $r \in J \setminus I$ 均成立，并且我们得到等式 $d\alpha_j + (-1)^{n-1}\omega_j = 0$，对所有 $j \in J \setminus I$ 均成立。从后一个等式中我们得到

$$\omega_j = d((-1)^n \alpha_j)$$

对所有 $j \in J \setminus I$ 均成立。由此我们得到这两者

$$\sum_{j\in J\setminus I} \omega_j \otimes e_j + \sum_{r\in J\setminus I} \alpha_r \otimes de_r \quad \text{and} \quad \sum_{r\in J\setminus I, s\in J'} \alpha_{r,s} \otimes e_s de_r + \psi'$$

都是 $\ker(d)_x$ 的元素。将其与上文 $\psi$ 的表示进行比较，便可立即得出该结论。□

例 2.8. 如果 $A = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 是对偶数环，那么 $\mathfrak{m}^0_A = 0$ 和 $\mathcal{C}^n_\rho = 0$ 都成立。由此可得

$$\mathrm{H}^i(X, \mathcal{R}^n_\rho / d\mathcal{R}^{n-1}_\rho) = \mathrm{H}^i(X, \Omega^n_{X/k})$$

在此情形下，任取 $i \geq 0$，并任取 $n \geq 1$。

例 2.9。在 $n = 1$的情形下，层 $\mathcal{C}^n_\rho$ 可简化为

$$\mathcal{C}^1_\rho = \mathcal{O}_X \otimes_k \left(\Omega^1_{A/k} / d(\mathfrak{m}_A)\right).$$

这正是 [Blo75]中研究的情形；具体而言，层 $\mathcal{C}^1_\rho$ 出现在[Blo75, (3.2)]中。

例 2.10。对于 $n = 2$，上述层 $\mathcal{C}^n_\rho$ 变为

$$\mathcal{C}^2_\rho = \frac{\left(\Omega^1_{X/k} \boxtimes \Omega^1_{A/k}\right) \oplus \left(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^2_{A/k}\right)}{\Omega^1_{X/k} \otimes_k d(\mathfrak{m}_A) + d(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k})}.$$

我们将在下一节更详细地研究这个层。

## 3. Weight 3

对于具有剩余域 $A/\mathfrak{m}_A \cong k$ 的 Artin 局部 $k$-代数 $(A, \mathfrak{m}_A)$，如上所述，我们将赋予其群的函子记作 $\mathscr{T}^{i}{}_{,X}{}^{n}$

$$\mathscr{T}_X^{i,n}(A) = \mathrm{H}^i(X, \mathcal{K}^M_{n,\rho}).$$

本节的目标是证明以下定理。

定理 3.1. 设 $X$ 是一个光滑、真且几何连通的 $k$-簇。固定一个整数 $j \geq 1$，并进一步假设满足以下条件：

(1) $\mathrm{H}^j(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{H}^{j+1}(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{H}^{j+2}(X, \mathcal{O}_X) = 0$,
(2) $\mathrm{H}^j(X, \Omega^1_{X/k}) = \mathrm{H}^{j+1}(X, \Omega^1_{X/k}) = 0$.

那么存在一个典范同构

$$\mathscr{T}_X^{j,3}(A) = \mathrm{H}^j(X, \Omega^2_{X/k}) \otimes_k \mathfrak{m}_A$$

对于上述任意 Artin 局部 $k$-代数 $(A, \mathfrak{m}_A)$，均成立。特别地，这意味着函子 $\mathscr{T}^{j}{}_{,X}{}^{3}$ 是原可表的。

例 3.2。 定理 3.1 的假设在以下情形下成立： $j = 3$且 $X$ 是 $\mathbb{P}^7$ 中的两个光滑二次超曲面的完全交；或者 $X$是 $\mathbb{P}^6$中的光滑三次超曲面，参见 [Rap72, 2]。此外，当 $X$ 是一个 Gushel-Mukai 五维簇时，[DK19，命题 31]中的假设也成立。

定理 3.1 的证明关键性地依赖于下面两个引理。

引理 3.3。设 $X$ 是几何整的。固定某个 $j \geq 1$。另外假设：

(1) $\mathrm{H}^j(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{H}^{j+1}(X, \mathcal{O}_X) = 0$,
(2) *and* $\mathrm{H}^j(X, \Omega^1_{X/k}) = \mathrm{H}^{j+1}(X, \Omega^1_{X/k}) = 0$.

于是有 $\mathrm{H}^j(X, \mathcal{C}^2_\rho) = 0$，因此也有

$$\mathrm{H}^j(X, \mathcal{R}^2_\rho / d\mathcal{R}^1_\rho) = \mathrm{H}^j(X, \Omega^2_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A / d\Omega^1_{X/k} \otimes_k \mathfrak{m}_A^0),$$

对于任意 Artinian 局部 $k$-代数 $(A, \mathfrak{m}_A)$，其中 $A/\mathfrak{m}_A \cong k$ 如上。

证明。为证明该引理，我们将使用正合列

$$0 \longrightarrow \left(\Omega^1_{X/k} \otimes_k d(\mathfrak{m}_A)\right) \cap d(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k}) \to \left(\Omega^1_{X/k} \otimes_k d(\mathfrak{m}_A)\right) \oplus d(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k})$$
$$\hookrightarrow \left(\Omega^1_{X/k} \boxtimes \Omega^1_{A/k}\right) \oplus \left(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^2_{A/k}\right) \longrightarrow \mathcal{C}^2_\rho \longrightarrow 0$$

其中，第二个箭头为（$+$，$-$），第三个箭头为和（$a$，$b$）$\mapsto a+b$。我们将确定这些层各自的上同调群；随后拼接若干长正合上同调序列，并据此推出结论。

为简化记号，我们记

$$D = \left(\Omega^1_{X/k} \otimes_k d(\mathfrak{m}_A)\right) \cap d(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k})$$

并令 $K$ 为第三个箭头的核。将上面的四项正合列拼接起来，可得两个短正合列

$$0 \to D \to \left(\Omega^1_{X/k} \otimes_k d(\mathfrak{m}_A)\right) \oplus d(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k}) \to K \to 0 \tag{S1}$$

and

$$0 \to K \to \left(\Omega^1_{X/k} \boxtimes \Omega^1_{A/k}\right) \oplus \left(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^2_{A/k}\right) \to \mathcal{C}^2_\rho \to 0. \tag{S2}$$

第一个非平凡项 $D$ 可以表示为

$$D = \left(\Omega^1_{X/k} \otimes_k d(\mathfrak{m}_A)\right) \cap d(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k}) = d(\mathcal{O}_X) \otimes_k d(\mathfrak{m}_A) \subset \Omega^1_{X/k} \boxtimes \Omega^1_{A/k}.$$

根据[Har77，注 2.9。1] 层上同调与任意（尤其是有限）个直和可交换，因此得到一个同构

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^i(X, D) &= \mathrm{H}^i(X, d(\mathcal{O}_X) \otimes_k d(\mathfrak{m}_A)) \\ &\cong \mathrm{H}^i(X, d(\mathcal{O}_X)) \otimes_k d(\mathfrak{m}_A). \end{aligned}$$

由于 $X$ 是几何整的，因而不可约，常值层 $\underline{k}$ 是弗拉斯克的。从与短正合列相关联的长正合上同调序列

$$0 \to \underline{k} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} d(\mathcal{O}_X) \to 0$$

进而可知，对于任意 $i \geq 1$，存在一个同构

$$\mathrm{H}^i(X, d(\mathcal{O}_X)) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X)$$

由于弗拉斯克层的高阶上同调根据 [Har77，命题 25] 而消失。综上，得到一个同构

$$\mathrm{H}^i(X, D) \cong \mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k d(\mathfrak{m}_A)$$

对于任意 $i \geq 1$。

要计算序列（S1）中间项的上同调，我们需要以一种便于计算其上同调的方式来写出 $d(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k})$。但请注意，微分

$$\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^1_{A/k} \xrightarrow{d} \left(\Omega^1_{X/k} \boxtimes \Omega^1_{A/k}\right) \oplus \left(\mathcal{O}_X \boxtimes \Omega^2_{A/k}\right)$$

的核为 $\underline{k}\otimes_k L$，其中 $L=\ker(\Omega^1_{A/k}\to\Omega^2_{A/k})$。通过类似之前的论证，并注意到 $\underline{k}\otimes_k L$ 也是弗拉斯克的，我们对所有 $i>0$都有同构

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^i(X,d(\mathcal{O}_X\boxtimes\Omega^1_{A/k}))&\cong\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X\boxtimes\Omega^1_{A/k})\\&\cong\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X)\otimes_k\Omega^1_{A/k}.\end{aligned}$$

与 (S1) 相关联的长正合上同调序列现在分解为短正合序列，对每个 $i\geq 1$,

$$\begin{aligned}0\to\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X)\otimes d(\mathfrak{m}_A)\to\left(\mathrm{H}^i(X,\Omega^1_{X/k})\otimes d(\mathfrak{m}_A)\right)\oplus\left(\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X)\otimes\Omega^1_{A/k}\right)\\\to\mathrm{H}^i(X,K)\to 0.\end{aligned}$$

我们关于 $\mathcal{O}_X$ 和 $\Omega^1_{X/k}$的上同调消失的假设意味着 $\mathrm{H}^j(X,K)$ 和 $\mathrm{H}^{j+1}(X,K)$ 均消失。

与 (S2) 相关联的正合列现在表明

$$\mathrm{H}^j(X,\mathcal{C}^2_\rho)\cong\left(\mathrm{H}^j(X,\Omega^1_{X/k})\otimes\Omega^1_{A/k}\right)\oplus\left(\mathrm{H}^j(X,\mathcal{O}_X)\otimes\Omega^2_{A/k}\right).$$

但根据假设，后一个空间的两个直和项都消失。最后，结论</output>

$$\mathrm{H}^i(X,\mathcal{R}^2_\rho/d\mathcal{R}^1_\rho)=\mathrm{H}^i(X,\left(\Omega^2_{X/k}\boxtimes\mathfrak{m}_A\right)/\left(d\Omega^1_{X/k}\otimes_k\mathfrak{m}^0_A\right))$$

可由引理 2.6推出。 □

注 3.4。 若 $X$ 是光滑、真且几何整的$k$-簇，则由微分诱导的映射 $\mathrm{H}^*(X,\mathcal{O}_X)\to\mathrm{H}^*(X,\Omega^1_{X/k})$ 消失（这可由霍奇-德拉姆谱序列的退化推出，例如 DI87，推论 2 中已证明了这一点）。在这种情况下，可以修改上述证明（不对 [DI87、推论 2。7]）或 Ω $\mathcal{O}_X$ 的上同调消失作任何假设），从而证明

$\mathrm{H}^i(X,\mathcal{C}^2_\rho)\cong\left(\mathrm{H}^i(X,\Omega^1_{X/k})\otimes_k\Omega^1_{A/k}/d(\mathfrak{m}_A)\right)\oplus\left(\mathrm{H}^i(X,\mathcal{O}_X)\otimes_k\Omega^2_{A/k}/d(\Omega^1_{A/k})\right)$ 对任意 $i\geq 1$均成立。因此，若对某个固定的 $j\geq 1$，有 $\mathrm{H}^j(X,\Omega^1_{X/k})=0$且 $\mathrm{H}^j(X,\mathcal{O}_X)=0$，则 $\mathrm{H}^j(X,\mathcal{C}^2_\rho)=0$。

引理 3.5. 设 $X$ 是一个光滑、真且几何连通的 $k$-簇。固定两个整数 $p\geq j\geq 1$，并进一步假设满足以下条件：

*(1)* $\mathrm{H}^{p+q}(X,\Omega^{j-q-1}_{X/k})=0$ *for all* $0\leq q\leq j-1$

*(2) and* $\mathrm{H}^{p+q}(X,\Omega^{j-q}_{X/k})=0$ *for all* $1\leq q\leq j$

于是，典范商映射诱导出一个同构

$$\mathrm{H}^p(X,\Omega^j_{X/k})\otimes_k\mathfrak{m}_A\cong\mathrm{H}^p\left(X,\frac{\Omega^j_{X/k}\boxtimes\mathfrak{m}_A}{d\Omega^{j-1}_{X/k}\otimes_k\mathfrak{m}^0_A}\right)$$

对于任意如上所述的 Artinian 局部 $k$-代数 $(A, \mathfrak{m}_A)$，

证明。记

$$\mathscr{K}^i = \ker\left(\Omega^i_{X/k} \xrightarrow{d^i} \Omega^{i+1}_{X/k}\right)$$

为给定的层核，并记

$$\mathscr{H}^i = \mathrm{H}\left(\Omega^{i-1}_{X/k} \to \Omega^i_{X/k} \to \Omega^{i+1}_{X/k}\right)$$

为给定的同调层，即 $\mathscr{K}^i$ 除以第一个态射的像层所得的商。虽然我们不会用到它，但层 $\mathscr{H}^i$ 也可以视为如下预层的层化：该预层将每个开集 $U \subset X$ 关联到代数德拉姆上同调 $\mathrm{H}^i_{dR}(U)$。

使用这一记号，可得以下正合列：

$$(D_0) \qquad 0 \to \underline{k} \to \mathcal{O}_X \to d\mathcal{O}_X \to 0,$$

$$(H_i) \qquad 0 \to d\Omega^{i-1}_{X/k} \to \mathscr{K}^i \to \mathscr{H}^i \to 0 \quad \text{for } i \geq 1,$$

$$(D_i) \qquad 0 \to \mathscr{K}^i \to \Omega^i_{X/k} \to d\Omega^i_{X/k} \to 0 \quad \text{for } 1 \leq i \leq j-1,$$

$$(D_j) \qquad 0 \to d\Omega^{j-1}_{X/k} \otimes_k \mathfrak{m}^0_A \to \Omega^j_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A \to \frac{\Omega^j_{X/k} \boxtimes \mathfrak{m}_A}{d\Omega^{j-1}_{X/k} \otimes_k \mathfrak{m}^0_A} \to 0.$$

与 $(D_j)$ 相关联的长正合列表明，为了证明该引理，只需证明以下各项同时消失

$$\mathrm{H}^p(X, d\Omega^{j-1}_{X/k}) = \mathrm{H}^{p+1}(X, d\Omega^{j-1}_{X/k}) = 0.$$

考察当 $i = j-1$ 时的正合列 $(D_i)$，可知这由同时消失推出

$$\mathrm{H}^p(X, \Omega^{j-1}_{X/k}) = \mathrm{H}^{p+1}(X, \mathscr{K}^{j-1}) = 0$$

$$\text{and } \mathrm{H}^{p+1}(X, \Omega^{j-1}_{X/k}) = \mathrm{H}^{p+2}(X, \mathscr{K}^{j-1}) = 0.$$

根据假设，$\Omega^{j-1}_{X/k}$ 的上同调消失；此外，由当 $i = j-1$ 时与 $(H_i)$ 相关联的上同调长正合列可知，$\mathscr{K}^{j-1}$ 的上同调消失可由同时消失推出

$$\mathrm{H}^{p+1}(X, d\Omega^{j-2}_{X/k}) = \mathrm{H}^{p+1}(X, \mathscr{H}^{j-1}) = 0$$

$$\text{and } \mathrm{H}^{p+2}(X, d\Omega^{j-2}_{X/k}) = \mathrm{H}^{p+2}(X, \mathscr{H}^{j-1}) = 0.$$

根据 [BO74，推论 6。2], 上同调 $\mathrm{H}^a(X, \mathscr{H}^b) = 0$在 $a > b$ （当 $a = p$ 且 $b = j-1$时，根据假设，这一条件成立）时消失。重复这一论证即可得出结论，

最终归结为计算与（$D_0$）相关联的长正合列各项。□

定理 *3.1* 的证明。 该同构

$$\mathscr{T}_X^{j,3}(A) \cong \mathrm{H}^j(X, \Omega^2_{X/k}) \otimes_k \mathfrak{m}_A$$

可由引理 2.4、2.6、3.3和 3.5 立即得到。

函子 $\mathscr{T}^{j,}{}_X{}^3$ 是原可表的，这一点可用 Schlessinger 判据 [Sch68，定理 211] 立即验证。不过，我们将改为证明，在定理陈述的假设下，函子 $\mathscr{T}^{j,}{}_X{}^3$ 具有切空间—阻碍理论；这一条件足以保证原可表性，其证明见 [FG05，推论 6.35]。具体而言，我们将证明存在有限维 $k$-向量空间 $T_1$， $T_2$ 以及一个正合列

$$0 \to T_1 \otimes_k J \to \mathscr{T}_X^{j,3}(A') \to \mathscr{T}_X^{j,3}(A) \to T_2 \otimes_k J \tag{T-O}$$

每当存在一个小扩张时

$$0 \to J \to A' \to A \to 0$$

局部 Artin $k$-代数（$A$， $\mathfrak{m}_A$）和（$A'$， $\mathfrak{m}_{A'}$），其剩余域同构于 $k$（回忆一下，若 $A'$ 是 $A$ 的小扩张，当且仅当 $J \cdot \mathfrak{m}_{A'} = 0$）。从构造中可以清楚看出，正合列（T-O）关于小扩张具有函子性，由此即完成证明。

因此，假设我们处于上述情形，且已给定 $A, A', J$。我们将看到 $T_1 \cong \mathrm{H}^j(X, \Omega^2_{X/k})$ and $T_2 = 0$。由满射 $A' \to A$ 可得一个正合行构成的交换梯形图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{T}_X^{j,3}(A') & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(X_{A'}, \mathcal{K}^M_{3,X_{A'}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(X, \mathcal{K}^M_{3,X}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{T}_X^{j,3}(A) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(X_A, \mathcal{K}^M_{3,X_A}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(X, \mathcal{K}^M_{3,X}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

鉴于这些同构

$\mathscr{T}^{j,}{}_X{}^3(A') \cong \mathrm{H}^j(X, \Omega^2_{X/k}) \otimes_k \mathfrak{m}_{A'}$ 和 $\mathscr{T}^{j,}{}_X{}^3(A) \cong \mathrm{H}^j(X, \Omega^2_{X/k}) \otimes_k \mathfrak{m}_A$，最左侧的垂直箭头是一个满射，其核为 $\mathrm{H}^j(X, \Omega^2_{X/k}) \otimes_k J$。结合上文的说明，定理立即得证。□

## References

[Blo75] Spencer Bloch，关于 Artin $Q$-代数的 $K_2$，并将其应用于代数循环，《Comm. Algebra》3 (1975), 405–428。MR 371891[BO74] Spencer Bloch 和 Arthur Ogus，Gersten 猜想与概形的同调，《Ann. Sci. École Norm. Sup.》(4) 7 (1974), 181–201 (1975)。MR 412191

[DI87] Pierre Deligne 和 Luc Illusie，关于 de Rham 复形的模 $p^2$ 提升与 $'$分解，《数学发明》89 (1987)，第 2 期，247–270。MR 894379[DK19] Olivier Debarre 和 Alexander Kuznetsov，Gushel-Mukai 簇：线性空间与周期，《京都数学杂志》59 (2019)，第 4 期，897–953。MR 4032203[Dri14] Benjamin F. Dribus，Milnor K-理论的 Goodwillie 型定理，2014，arXiv。https://arxiv.org/abs/1402.2222。[FG05]Barbara Fantechi 和 Lothar G¨ottsche，点的局部性质与希尔伯特概形，《基础代数几何》，《数学调查专著》，第 123 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2005 年，第 139–178 页。MR 2223408[GT18] S. O. Gorchinskiĭ 和 D. N. Tyurin，分裂幂零扩张的相对 Milnor $K$-群与微分形式，《俄罗斯科学院数学辑刊》82 (2018)，第 5 期，23–60。MR 3859378[Har77]Robin Hartshorne，《代数几何》，施普林格出版社，纽约-海德堡，1977 年，《数学研究生教材》第 52 卷。MR 0463157[MS78] Hendrik Maazen 和 Jan Stienstra，分裂根对的 $K_2$ 表示，《纯粹与应用代数杂志》10 (1977/78)，第 3 期，271–294。MR 472795[Rap72] Michael Rapoport，P. Deligne《曲面的 Weil 猜想》一文的补充，《数学发明》15 (1972)，227–236。MR 309943[Sch68] Michael Schlessinger，Artin 环上的函子，《美国数学会汇刊》130 (1968)，208–222。MR 217093[Sta21]Stacks 项目作者，Stacks 项目，https://stacks.math.columbia.edu，2021。[Sti83] Jan Stienstra，特征零下光滑射影曲面的乔群 $\mathrm{CH}^2(X)$ 的形式完备化，《Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.》45 (1983)，第 3 期，361–382。MR 718076 电子邮箱：eoinmackall $at$ gmail.com 网址：www.eoinmackall.com