arXiv:2301.08320v2 [math.CA] 5 May 2023

球域长球波函数的更多性质及相关近似带限函数的逼近

AHMED SOUABNI

Abstract. 本文旨在对 [25] 中定义的球面长旋转椭球波函数给出各种显式局部估计；这些函数是有限傅里叶变换和某个微分算子的特征函数。具体而言，我们给出了这些函数及其相关特征值的进一步精细界。因此，我们证明了球面 PSWF 适用于近似带限函数的逼近，并将这一结果与球多项式相关的结果进行了比较。

数学主题分类：42C10,65L70, 41A10。
关键词：球面长旋转椭球波函数，球多项式，有限傅里叶变换，近似带限函数。

1. Introduction

时间受限和带限函数是信号处理中的基础工具。根据海森堡不确定性原理，信号不可能同时受到时间和频带限制。因此，一个自然的假设是信号为近似带限信号。自20世纪60年代开创性的研究以来，Landau、Pollak 和 Slepian 最初对此问题进行了研究，并引入长椭球波函数，作为表示近似带限函数的最优正交系 [7] [11] [12] [22]。在对上述问题的研究中，Slepian 首先指出，长旋转椭球波函数是有限傅里叶变换算子对应于特征值 λ 的特征函数，即

$$\int_{-1}^{1} e^{icxt}\psi(t)dt = \lambda\psi(x) \qquad x \in I = (-1,1).$$

Slepian 等人[22] 证明，后一个积分算子与某个斯图姆-刘维尔算子可交换。因此，长旋转椭球波函数也是以下二阶微分方程的解

$$\Big((1-x^2)\psi'(x)\Big)' + (\chi - c^2x^2)\psi = 0$$

通过分离球坐标下亥姆霍兹方程的变量，也可以得到该方程。

这一点至关重要，因为它是对勒让德微分方程的扰动，并由此将长旋转椭球波函数与正交多项式联系起来。
我们之所以关注长椭球波函数理论，是因为它们具有广泛的应用和显著的性质。长期以来，时频集中问题仅在有限区间上得到研究。随后，研究范围扩展到

本研究部分得到 DGRST 研究资助项目 LR21ES10 和 PHC-Utique 研究项目 20G1503 的支持。

其他几何区域，例如圆盘、三维球、球面和三角形。读者可参考例如 [3] [9] [19] [20] [24]。

我们关注 Slepian 在 [21] 中提出的扩展，其中该问题被推广到了 d 维情形。与一维情形不同，关于有界高维区域上的时频集中的问题尚未得到足够关注。

在本文的第一部分，我们将研究多维球中的长椭球波函数。请注意，最早研究这一问题的是 Slepian，他在 [21] 中将有限傅里叶变换推广到了 d 维。最近，[25], 中的作者作出了重要贡献：他们将定义球面长旋转椭球波函数的斯图姆-刘维尔算子写成一种适当的形式，从而保留了一维情形的关键特征。更具体地说，他们将所关注的斯图姆-刘维尔算子表示为定义球多项式的算子的 $c^2\|x\|^2$ 阶扰动。因此，我们已具备研究长椭球波函数的谱方法所需的全部要素。这里还应提及，尽管 [25], 考虑了更一般的背景，本文旨在给出积分算子的特征值和特征函数的一些精细界，并确立球面 PSWF 的其他一些性质。

本文的第二个目的是研究用球面长旋转椭球波函数级数展开逼近近似带限函数的效果。尽管球面 PSWF 具有重要性质，但由于没有计算它们的显式公式，我们无法直接处理它们。因此，一种经典方法是用球多项式基显式计算其系数。于是，直接在球多项式基下展开近似带限函数，并考察这种框架下的逼近效果，便十分方便。

现在让我们进一步具体说明，并引入一些精确定义和记号。设 $\mathbb{R}^d$ 为 d 维欧几里得空间，x 表示列向量 $(x_1, \cdots x_d)^T$。

对于 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$，我们将 $\mathbb{R}^d$ 上的内积记为 $<\mathbf{x}, \mathbf{y}>:= \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ 和 $\|\mathbf{x}\|$ 将表示相应的欧几里得范数 $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{<\mathbf{x}, \mathbf{x}>} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$。

球面长旋转椭球波函数定义为以下集中问题的解

$$\text{Find } f = \arg\max_{f \in \mathcal{B}_c} \frac{\int_{\mathbb{B}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}.$$

Here

$$\mathcal{B}_c := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \hat{f}(u) = 0 \quad \forall u \notin \mathbb{B}^d(0, c)\},$$

其中，$\mathbb{B}^d := \mathbb{B}^d(\mathbf{0}, 1)$ $\mathbb{B}^d(\mathbf{0}, c)$ 更一般地定义为 $\mathbb{B}^d(\mathbf{0}, c) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| \leq c\}$。该问题的解是有限傅里叶变换的特征函数，其定义为

$$\mathcal{F}_c.f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{B}^d} e^{-ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

另一方面，球面 PSWF 也是下列微分算子的特征函数

$$\mathcal{L}_{c,\mathbf{x}} = -\nabla.(1 - \|\mathbf{x}\|^2)\nabla - \Delta_0 + c^2\|\mathbf{x}\|^2,$$

其中， ∇ 和 Δ_0 分别表示梯度和拉普拉斯-贝尔特拉米算子。对于任意正实数 c，我们分别用 $\mu_k^{(m)}(c)$ 和 $\chi_k^{(m)}(c)$ 表示对应于 $\mathcal{F}_c$ 和$\mathcal{L}_{c,\mathbf{x}}$的特征值。

$$\mathcal{F}_c.\psi_{k,\ell}^{(m,c)} = \mu_k^{(m)}(c)\psi_{k,\ell}^{(m,c)}; \quad \mathcal{L}_{c,\mathbf{x}}.\psi_{k,\ell}^{(m,c)} = \chi_k^{(m)}(c)\psi_{k,\ell}^{(m,c)}; \quad 1 \le l \le \frac{2m+d-2}{m}\binom{m+d-3}{m-1}; \quad k,m \in \mathbb{N}..$$

请注意，根据 Zhang 等人在[25], 中给出的这一微分算子的形式，球面 PSWF 可推广正交球多项式 (c=0)

$$P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{x}) = \widetilde{P}_k^{(0,m+\frac{d}{2}-1)}(2\|\mathbf{x}\|^2-1)Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{B}^d, \quad 1 \le l \le \frac{2m+d-2}{m}\binom{m+d-3}{m-1}, \quad k,m \in \mathbb{N}.$$

Here $\widetilde{P}^{(\alpha,\beta)}_k$ 是稍后将定义的归一化雅可比多项式。请注意，这一形式还提供了一种用于计算球面 PSWF 的 Bouwkamp 谱算法。

我们的第一个结果是对 $\left\|\psi_k^{(m,c)}{}_{,\ell}\right\|_\infty$ 的估计。

定理 A：设 $c>0$。对于满足 $\chi_k^{(m)} > \max\{$ c^2+8 的任意整数 $k($ $d)'(2/3)^6\left(\frac{2\pi}{-}\right)^2 +$ $4(m+\frac{d}{2})(m+\frac{d}{2}-1)\ -4+c^2\}+m(m+d)$，我们有

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{B}^d}\left|\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x})\right| \le \frac{3\sqrt{3\left(m+\frac{d}{2}-1\right)}}{2}\sqrt{\frac{N(d,m)}{\Omega_{d-1}}}\sqrt{\chi_k^{(m)}(c)}.$$

这里 $N(d,m) = \frac{2m+d-2}{m}\binom{m+d-3}{m-1}$. 和 Ω_{d-1} 表示 S^{d-1}的表面积。

如前所述，作为本文第一部分的应用，我们将给出用球面 PSWF 和球多项式逼近近似带限函数的质量。这里需要指出的是，这个问题在一维情形下已于 [8] 中得到解决。首先，让我们定义近似带限函数的概念。

定义 1.1。设 $c>0$ 和 $\epsilon_c>0$。若函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 满足以下条件，则称其为 ϵ_c-带限函数

$$\int_{\|\mathbf{x}\|>c} |\hat{f}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \le \epsilon_c^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

用球面长椭球波函数和球多项式逼近近似带限函数的结果由以下两个定理给出。

定理 B：设 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个 ϵ_c-带限函数。那么对于任意正整数$N \ge \frac{ec}{4}$，有

$$\left\|f - S_N^{(M)}f\right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \le \left(2\epsilon_c + C_{M,d}|\mu_N^{(M)}(c)|\left(\chi_N^{(M)}(c)\right)^{1/2}\right)\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

其中 $C_{M,\ d} = \frac{3}{2}\left(\frac{c}{4\pi}\right)^{1/4}\sqrt{(M+\frac{d}{2}-1)^{\frac{d}{2}}+1}$ 且 $S_N^{(M)}f$是函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 在由前几个球面长旋转椭球波函数张成的空间上的正交投影

.
定理 C：设 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个 ϵ_c 带限函数。则对于任意正整数$N \geq \frac{ec-\frac{d+1}{2}}{2}$，有

$$\left\|f - \Pi_N^{(M)}.f\right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \left(2\epsilon_c + C_N \left(\frac{ec}{2(N+1)+M+1+\frac{d+1}{2}}\right)^{2(N+1)+M+1+\frac{d+1}{2}}\right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

where $C_{N,m,d} = \dfrac{1}{2^{2N+M+\frac{d}{2}+3}\sqrt{ec(4N+3M+d+4)}} \left[1 + \dfrac{1}{4\ln\left(\frac{ec}{2N+M+2+\frac{d+1}{2}}\right)}\right]^{1/2}$ and $\Pi_N^M f$ 是函数 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 在由前几个球多项式张成的空间上的正交投影。

由上述两个定理可以得出，使用球域长球波函数或球多项式对近似带限函数进行逼近，效果相同。使用长球波函数的唯一优势是截断指标最小。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍一些后续将用到的预备结果。第 3 节讨论球面长旋转椭球波函数的一些谱性质，即相关积分算子的特征值行为，以及给出 $\left\|\psi_k^{(m,c)}\right\|_\infty$ 上界的一些局部估计。最后，在第 4 节中，我们将球域 PSWF 基与球多项式基进行比较，讨论近似带限函数的逼近效果。

2. Mathematical preliminaries about some special functions

本节回顾一些特殊函数的重要性质，主要是球多项式。为此，我们介绍球多项式定义中涉及的球谐函数的相关预备知识。此外，我们还回顾贝塞尔函数的一些性质，这些性质将在后续各节中频繁用到。

2.1. 贝塞尔函数。

对于 $\alpha > -\frac{1}{2}$，贝塞尔函数 J_α 是常微分方程的有界解，该方程为（例如参见 [23]）：

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad x > 0,$$

这等价于：

$$(xy')' + \left(x - \frac{\alpha^2}{x}\right)y = 0.$$

J_α 的界和局部估计在本文中经常用到。一个简单而实用的局部估计如下，见 [16]

$$\sup_{x\geq 0} \sqrt{x}|J_\alpha(x)| \leq c_\alpha,$$

with

$$c_\alpha = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} & \text{if } |\alpha| \le 1/2 \\ 0.675\sqrt{\alpha^{1/3} + \frac{1.9}{\alpha^{1/3}} + \frac{1.1}{\alpha}} & \text{if } \alpha > 1/2. \end{cases}$$

贝塞尔函数的第二个著名估计见 [[17]第227] 页，公式如下

$$\left|\frac{J_\alpha(x)}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.1}$$

当自变量小于阶数时，贝塞尔函数的另一种估计为

$$1 \le \frac{J_\alpha(\alpha x)}{x^\alpha J_\alpha(\alpha)} \le e^{\alpha(1-x)} \qquad \alpha > 0 \quad \text{and} \quad 0 < x \le 1. \tag{2.2}$$

在 [18], 中，作者给出了一个更精确的不等式，并证明了

$$\exp\Big[\frac{\alpha^2(1-x^2)}{4\alpha+4}\Big] \le \frac{J_\alpha(\alpha x)}{x^\alpha J_\alpha(\alpha)} \le \exp\Big[\frac{\alpha^2(1-x^2)}{2\alpha+4}\Big] \qquad \alpha > 0 \quad \text{and} \quad 0 < x \le 1. \tag{2.3}$$

以下不等式给出了 $J_\alpha(\alpha)$ 的一个下界（请参阅 [6]）

$$J_\alpha(\alpha) \ge \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi(\alpha+\alpha_0)^{1/3}} \qquad \alpha_0 \cong 0.0943498$$

因此，结合前两个不等式可得

$$J_\alpha(\alpha x) \ge \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi(\alpha+\alpha_0)^{1/3}} x^\alpha \exp\Big[\frac{\alpha^2(1-x^2)}{4\alpha+4}\Big]. \qquad (\alpha > 0 \quad \text{and} \quad 0 < x \le 1). \tag{2.4}$$

球贝塞尔函数定义为（见 [17] 第262页）

$$j_{n,c}^{(\alpha)}(x) = \sqrt{2(2n+\alpha+1)}\frac{J_{2n+\alpha+1}(cx)}{\sqrt{cx}}, \quad x \in (0,\infty). \tag{2.5}$$

后一组函数满足以下正交关系,

$$\int_0^{+\infty} j_{n,c}^{(\alpha)}(x) j_{m,c}^{(\alpha)}(x) \underset{\cdot}{\mathrm{x}} = \delta_{n,m}.$$

回忆一下，函数 $f \in L^2(0,\infty)$ 的汉克尔变换为

$$\mathcal{H}^\alpha.f(x) := \int_0^\infty \sqrt{xy} J_\alpha(xy) f(y) dy; \quad \alpha > -1/2.$$

球贝塞尔函数的汉克尔变换为（例如，见 [21]）

$$\mathcal{H}^\alpha.j_{n,c}^{(\alpha)}(x) = \frac{\sqrt{2(2n+\alpha+1)}}{c}\left(\frac{x}{c}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,0)}\left(1-2\left(\frac{x}{c}\right)^2\right)\chi_{[0,c]}(x). \tag{2.6}$$

这里 $P_n^{(\alpha,\beta)}$是由下式定义的雅可比多项式

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right].$$

注意到汉克尔变换是一个对合，因此可以将 (2.6) 写成更合适的形式

$$\int_0^1 y^{\alpha+1} J_\alpha(cxy) P_n^{(0,\alpha)}(2y^2-1)dy = (-1)^n \frac{J_{2n+\alpha+1}(cx)}{cx}. \tag{2.7}$$

2.2. 球谐函数。 $\mathbb{R}^d$ 的单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 记为

$$\mathbb{S}^{d-1} := \{\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d : \|\hat{\mathbf{x}}\| = 1\}.$$

$L^2(S^{d-1})$上的内积定义为

$$< f, g >_{S^{d-1}} := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\hat{\mathbf{x}}) g(\hat{\mathbf{x}}) d\sigma(\hat{\mathbf{x}}),$$

其中 $d\sigma$ 为表面测度。
设 $\mathcal{H}_n^d$ 为 n 次调和齐次多项式空间，且 $N(d,n) :=$dim $\mathcal{H}_n^d$。众所周知， $N(d,n)$ $= \frac{2n+d-2}{n}\binom{n+d-3}{n-1}$. 注意，函数 $H_n \in \mathcal{H}_n^d$ 的径向变量和角变量可以分离： $H_n(\mathbf{x})$ $= H_n(r\hat{\mathbf{x}}) = r^n H_n(\hat{\mathbf{x}})$。这里，$(r := \|\mathbf{x}\|, \hat{\mathbf{x}} := \frac{x}{r})$ 是 x 的球坐标

定义 2.1. 次数为 n 的球谐函数记为 $Y_n(\hat{\mathbf{x}})$，它是 d 个变量中的 n 次调和齐次多项式在单位 ($d-1$)-球面上的限制。

众所周知，球谐函数满足

$$\Delta_0 . Y_n = -n(n+d-2)Y_n.$$

换言之 ， Y_n 是角向部分的特征函数，该角向部分由拉普拉斯算子给出 y

$$\Delta_0 = \sum_{1\le j<i\le d} D_{ij}^2 \qquad \text{where} \qquad D_{ij} = x_j\partial x_i - x_i \partial x_j.$$

球面谐波 在单位球面上彼此正交，即 s

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_n(\hat{\mathbf{x}}) Y_m(\hat{\mathbf{x}}) d\sigma(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \qquad m \neq n.$$

给定一组由 n 次球谐函数组成的 $N(d,n)$ 个线性无关函数，可以构造出一组标准正交函数 $\{Y_i^{(n)}\}_{i=1}^{N(d,n)}$。因此

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_i^{(n)}(\hat{\mathbf{x}}) Y_j^{(m)}(\hat{\mathbf{x}}) d\sigma(\hat{\mathbf{x}}) = \delta_{n,m}\delta_{i,j}.$$

球谐函数还满足以下加法公式

$$\sum_{j=1}^{N(d,n)} Y_j^{(n)}(\hat{\mathbf{x}}) Y_j^{(n)}(\hat{\mathbf{y}}) = \frac{N(d,n)}{\Omega_{d-1}} \frac{C_n^{(\frac{d-2}{2})}(<\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}>)}{C_n^{(\frac{d-2}{2})}(1)}; \qquad \Omega_{d-1} := \sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}, \tag{2.8}$$

这表明，超球多项式 $C^{(\frac{d-2}{2})}{}_n$ 是 d 维空间中的基本球谐函数，类似于情形 $d=2$ 中的 cos。
回顾一下，超球多项式的定义如下：

$$C_n^{(\lambda)}(x) := \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1/2)} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x); \quad C_n^{(\lambda)}(1) = \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+1)} \quad (n \ge 1).$$

我们将重新 将超球多项式在以下条件下的归一化写为 m

引理 2.2. 对任意正整数 n，在上述记号下，对任意 $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}^{d-1}$，有

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |C_n^{(\frac{d-2}{2})}(<\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}>)|^2 d\sigma(\hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{\Omega_{d-1}}{N(d,n)} \left(C_n^{(\frac{d-2}{2})}(1)\right)^2. \tag{2.9}$$

证明。证明仅基于 (2.8) 和 $\{Y_n\}_n$ 的归一化。事实上，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |C_n^{(\frac{d-2}{2})}(<\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}>)|^2 d\sigma(\hat{\mathbf{y}}) &= \left(\frac{\Omega_{d-1}}{N(d,n)}\right)^2 \left(C_n^{(\frac{d-2}{2})}(1)\right)^2 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{j=1}^{N(d,n)} Y_j^{(n)}(\hat{\mathbf{x}}) Y_j^{(n)}(\hat{\mathbf{y}})\right)^2 d\sigma(\hat{\mathbf{y}}) \\
&= \left(\frac{\Omega_{d-1}}{N(d,n)}\right)^2 \left(C_n^{(\frac{d-2}{2})}(1)\right)^2 \sum_{j=1}^{N(d,n)} Y_j^{(n)}(\hat{\mathbf{x}}) Y_j^{(n)}(\hat{\mathbf{x}}) \\
&= \left(\frac{\Omega_{d-1}}{N(d,n)}\right)^2 \left(C_n^{(\frac{d-2}{2})}(1)\right)^2 \frac{N(d,n)}{\Omega_{d-1}}
\end{aligned}$$

□

设 Y_n 是任意一个次数为 n 的球谐函数。利用 Y_n 的正交性，并结合 (2.8)，可得

$$Y_n(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{N(d,n)}{C_n^{(\lambda)}(1)\Omega_{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Y_n(\hat{\mathbf{y}}) C_n^{(\frac{d-2}{2})}(<\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}>)\, d\sigma(\hat{\mathbf{y}}).$$

考虑到超球多项式的归一化 (2.9)，并利用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$|Y_n(\hat{\mathbf{x}})| \le \sqrt{\frac{N(d,n)}{\Omega_{d-1}}}. \tag{2.10}$$

最后，需要指出的是，球谐函数的（在单位球面上的）有限傅里叶变换由 [15], [1] 中给出的下列表达式明确表示。对于 $\hat{\mathbf{x}}\ \hat{\mathbf{y}} \in \mathbb{S}^{d-1}$ 和 $w > 0$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{-iw<\hat{\mathbf{x}}.\hat{\mathbf{y}}>} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) d\sigma(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{(2\pi)^{d/2}(-i)^m}{w^{\frac{d-2}{2}}} J_{m+\frac{d-2}{2}}(w) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{y}}) \quad 1 \le \ell \le N(d,n), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

2.3. 球体上的球多项式：正交多项式。球多项式定义为

$$P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{x}) = \widetilde{P}_k^{(0,m+\frac{d}{2}-1)}(2\|\mathbf{x}\|^2 - 1) Y_l^m(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{B}^d \quad 1 \le \ell \le N(d,m) \qquad k, m \in \mathbb{N}.$$

Here

$$\widetilde{P}_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\sqrt{h_k}} P_k^{(\alpha,\beta)}(x), \quad h_k = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{k!(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}. \tag{2.12}$$

文献 [15] 已证明，球多项式关于通常的内积正交。另请注意， $P_{k\,\ell}^{(m)}$,的总次数为 $m+2k$。此外，球多项式是下列微分算子的特征函数（参见 [15]定理 11.15）：

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}.P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{x})=\Big(-\nabla(I-\mathbf{x}\mathbf{x}^t)\nabla\Big)P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{x})=(m+2k)(m+2k+d)P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{x}). \tag{2.13}$$

注意，在 [25], 中，作者已证明这个算子还可以写成以下几种更适用的形式:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{x}} &= -\nabla(1-\|\mathbf{x}\|^2)\nabla-\Delta_0\\ &= -(1-r^2)\partial_r^2-\frac{d-1}{r}\partial_r+(d+1)r\partial_r-\frac{1}{r^2}\Delta_0,\end{aligned} \tag{2.14}$$

接下来，我们将计算球多项式 $P_{k\,\ell}^{(m)}$ ，的有限傅里叶变换。

引理 2.3. 对所有 $\mathrm{y}=\tau\hat{}\mathrm{y}\in\mathbb{B}^d$，我们有

$$\int_{\mathbb{B}^d}e^{-ic<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}P_{j,\ell}^{(m)}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\frac{(2\pi)^{d/2}(-i)^m(-1)^j}{2}\frac{J_{2j+m+d/2(c\tau)}}{(c\tau)^{\frac{d}{2}}}Y_\ell^{(m)}(\hat{\boldsymbol{y}}). \tag{2.15}$$

证明。设 $\mathrm{x}=\rho\hat{}\mathrm{x}$ 且 $\mathrm{y}=\tau\hat{}\mathrm{y}$，则结合 (2.11) 和 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}^d}e^{-ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>}P_{j,\ell}^{(m)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_0^1\rho^{m+d-1}P_k^{(0,m+d/2-1)}(2\rho^2-1)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}e^{-ic\rho\tau<\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}}>}Y_\ell^{(m)}(\hat{\mathbf{x}})d\sigma(\hat{\mathbf{x}})d\rho\\ &= \frac{(2\pi)^{d/2}(-i)^m}{(c\tau)^{d/2-1}}\int_0^1\rho^{m+d/2}J_{m+\frac{d}{2}-1}(c\rho\tau)P_j^{(0,m+\frac{d}{2}-1)}(2\rho^2-1)d\rho.Y_\ell^{(m)}(\hat{\mathbf{y}})\\ &= \frac{(2\pi)^{d/2}(-i)^m(-1)^j}{2(c\tau)^{\frac{d-1}{2}}}\frac{J_{2j+m+d/2(c\tau)}}{\sqrt{c\tau}}Y_\ell^{(m)}(\hat{\mathbf{y}}).\end{aligned} \tag{2.16}$$

□

3. Ball prolate spheroidal wave functions : Definitions and spectralproperties

3.1. 定义与归一化。这里应当指出，本文给出的球面长旋转椭球波函数的等价定义，是对 Slepian 在 [21] 中给出的定义，以及 Zhang 及其合作者最近在 [25] 中给出的定义的结合。我们以经典方式引入球面 PSWF，即将其定义为能量最大化问题的解，因而它们是积分算子的特征函数，最终也是适当微分算子的特征函数。

在本文中，我们采用以下定义来定义 $\mathbb{R}^d$ 上的傅里叶变换,

$$\mathcal{F}.f(\mathbf{x})=\hat{f}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i<\mathbf{x},\mathbf{y}>}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}.$$

回顾一下，采用这种归一化后，有 $\left\| \tilde{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$。反演公式可写为

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i<\mathbf{x},\mathbf{y}>} \hat{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

我们研究单位球上最集中的带限函数问题，即

$$\text{Find } f = \arg\max_{f \in \mathcal{B}_c} \frac{\int_{\mathbb{B}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}}. \tag{3.17}$$

由 (2.11)，并将积分写成球极坐标 $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{S}^{d-1}$，可得

$$\int_{\mathbb{B}^d} e^{ic<\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{z}>} d\mathbf{x} = \frac{(2\pi)^{d/2}}{\big(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\big)^{\frac{d}{2}-1}} \int_0^1 r^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d}{2}-1}(cr\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|) dr.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^{\frac{d}{2}} J_{\frac{d}{2}-1}(cr\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|) dr &= \frac{1}{\big(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\big)^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 (cr\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{d}{2}-1}(cr\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|) dr \\ &= \frac{1}{\big(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\big)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} (r\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{d}{2}-1}(r\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|) \Big(\frac{r}{c}\Big)^{\frac{d-1}{2}} \chi_{[0,c]}(r) dr \\ &= \frac{J_{d/2}\Big(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\Big)}{c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

注意，最后一个等式是在 n=0 in (2.7) 中得到的。最后，结合上面两个方程，可得

$$\int_{\mathbb{B}^d} e^{ic<\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{z}>} d\mathbf{x} = (2\pi)^{d/2} \frac{J_{d/2}\Big(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\Big)}{\big(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\big)^{\frac{d}{2}}}.$$

我们将这一结果保留下来，它在下文中会很有用，列为以下引理 .

引理 3.1. 对于任意正实数 c，以及任意 $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{B}^d$，我们有

$$\int_{\mathbb{B}^d} e^{ic<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}>} d\boldsymbol{x} = (2\pi)^{d/2} \frac{J_{d/2}\Big(c\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|\Big)}{\big(c\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|\big)^{\frac{d}{2}}}. \tag{3.19}$$

现在，令 $f\in\mathcal{B}_c$,

$$\begin{aligned}\frac{\int_{\mathbb{B}^d}|f(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x}} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{\int_{\mathbb{B}^d}\Big(\int_{\mathbb{R}^d}e^{i<\mathbf{x},\mathbf{y}>}\hat{f}(\mathbf{y})d\mathbf{y}\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-i<\mathbf{x},\mathbf{z}>}\overline{\hat{f}(\mathbf{z})}d\mathbf{z}\Big)d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\mathbf{x})\overline{\hat{f}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}}\\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^d\frac{\int_{\mathbb{B}^d(0,c)}\Big(\int_{\mathbb{B}^d(0,c)}\Big(\int_{\mathbb{B}^d}e^{i<\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{z}>}d\mathbf{x}\Big)\hat{f}(\mathbf{y})d\mathbf{y}\Big)\overline{\hat{f}(\mathbf{z})}d\mathbf{z}}{\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\mathbf{x})\overline{\hat{f}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}}\\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{d/2}\frac{\int_{\mathbb{B}^d(0,c)}\Big(\int_{\mathbb{B}^d(0,c)}\frac{J_{d/2}(\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|)}{\Big(\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\Big)^{\frac{d}{2}}}\hat{f}(\mathbf{y})d\mathbf{y}\Big)\overline{\hat{f}(\mathbf{z})}d\mathbf{z}}{\int_{\mathbb{B}^d(0,c)}\hat{f}(\mathbf{x})\overline{\hat{f}(\mathbf{x})}d\mathbf{x}}. \qquad (3.20)\end{aligned}$$

因此，通过直接的变量和函数变换，方程的解为

$$\arg\max_{f\in\mathcal{B}_c}(2\pi)^{\frac{d}{2}}\frac{\int_{\mathbb{B}^d}|f(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^d}|f(\mathbf{x})|^2d\mathbf{x}}$$

积分算子 $\mathcal{Q}_c$ 的特征函数为

$$\mathcal{Q}_c.f(\mathbf{x})=\Big(\frac{c}{2\pi}\Big)^d\int_{\mathbb{B}^d}(2\pi)^{d/2}\frac{J_{d/2}(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|)}{\Big(c\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|\Big)^{\frac{d}{2}}}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \qquad (3.21)$$

容易验证， $\mathcal{Q}_c=\big(\frac{c}{2\pi}\big)^d\mathcal{F}_c^*\circ\mathcal{F}_c$其中 $\mathcal{F}_c$ 是定义在 $L^2(\mathbb{B}^d)$ 上的有限傅里叶积分算子，其定义为

$$\mathcal{F}_c.f(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{B}^d}e^{-ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \qquad (3.22)$$

文献 [25] 已证明

- $\mathcal{Q}_c$ 的特征函数与下列正自伴微分算子的特征函数相同

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{c,\mathbf{x}} &= -\nabla.(1-\|\mathbf{x}\|^2)\nabla-\Delta_0+c^2\|\mathbf{x}\|^2\\ &= -(1-r^2)\partial_r^2-\frac{d-1}{r}\partial_r+(d+1)r\partial_r-\frac{1}{r^2}\Delta_0+c^2r^2. \qquad (3.23)\end{aligned}$$

- $\mathcal{L}_{c,\mathbf{x}}$ 和 $\mathcal{Q}_c$ （或等价地 $\mathcal{F}_c$）的特征函数可写成如下形式

$$\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x})=r^m\phi_k^{(m,c)}(2r^2-1)Y_\ell^m(\hat{x}), \qquad (3.24)$$

这里，$(r := |\mathbf{x}|, \hat{\mathbf{x}} := \frac{x}{r})$ 是 $\mathbf{x}$ 的球坐标，k、m 是两个正整数，$1 \le \ell \le N(d,m)$ 和 $\phi_k^{(m,c)}$ 满足

$$\frac{-1}{\omega_{0,\beta_{m,d}}(\eta)}\partial_\eta\Big(\omega_{1,\beta_{m,d}+1}(\eta)\partial_\eta\phi_k^{(m,c)}\Big) + \frac{c^2(\eta+1)}{8}\phi_k^{(m,c)} = \alpha_{k,m}(c)\phi_k^{(m,c)} \tag{3.25}$$

其中 $\eta = 2r^2 - 1$, $\gamma_{m,\ d} = m(m+d)$ 和 $\omega_{\alpha,\ \beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

- $\mathcal{L}_{c,\ \mathbf{x}}$、$\mathcal{F}_c$ 和 $\mathcal{Q}_c$ 的特征值分别记为 $\chi_{(m)\ k}(c)$、$\mu_{(m)\ k}(c)$、$\lambda_{(m)\ k}(c)$，它们与 ℓ 无关。

我们将球形旋转椭球波函数定义为能量最大化问题 (3.17) 的解；这些解同时也是所有算子 $\mathcal{Q}_c$, $\mathcal{F}_c$ 和 $\mathcal{L}_{c,\ \mathbf{x}}$ 的特征函数。因此，对于 $c > 0$、k、$m \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le \ell \le N(d,m)$，可以写为

$$\mathcal{L}_{c,\mathbf{x}}.\psi_{k,\ell}^{(m,c)} = \chi_k^{(m)}(c)\psi_{k,\ell}^{(m,c)}; \quad \mathcal{F}_c.\psi_{k,\ell}^{(m,c)} = \mu_k^{(m)}(c)\psi_{k,\ell}^{(m,c)}; \quad \mathcal{Q}_c.\psi_{k,\ell}^{(m,c)} = \lambda_k^{(m)}(c)\psi_{k,\ell}^{(m,c)},$$

其中

$$\lambda_k^{(m)} = \Big(\frac{c}{2\pi}\Big)^d |\mu_k^{(m)}|$$

注 3.2. 本注中，我们采用球 prolate 长旋转椭球波函数的分离形式，说明这些函数的径向部分也是有限汉克尔变换的特征函数。需要指出的是，这条注释在 [21] 中以不同方式给出。由 (3.24) 和 (2.11)，可写为

$$\lambda_k^{(m)} r^m \phi_k^{(m,c)}(2r^2-1) = (2\pi)^{d/2}(-i)^m \int_0^1 \frac{J_{m+\frac{d}{2}-1}(cr\tau)}{(cr\tau)^{\frac{d}{2}-1}}\tau^{m+d-1}\phi_k^{(m,c)}(2r^2-1)d\tau.$$

为得到下式，进行代换 $\varphi_k^{(m,c)}(r) := r^{m+\frac{d-1}{2}}\phi_k^{(m,c)}(2r^2-1)$ 较为方便

$$\lambda_k^{(m)}\varphi_k^{(m,c)}(r)\sqrt{c}\big(\frac{c}{2\pi}\big)^{d/2}(i)^m = \int_0^1 J_{m+\frac{d}{2}-1}(cr\tau)\sqrt{cr\tau}\varphi_k^{(m,c)}(\tau)d\tau.$$

Then

$$\alpha_k^{(m)}\varphi_k^{(m)}(r) = \int_0^1 J_\alpha(cr\tau)\sqrt{cr\tau}\varphi_k^{(m)}(\tau)d\tau = \mathcal{H}_c^{(\alpha)}.\varphi_k^{(m)}(r); \quad \alpha = m+\frac{d}{2}-1; \quad \alpha_k^{(m)} = \sqrt{c}\big(\frac{c}{2\pi}\big)^{d/2}\lambda_k^{(m)}(c). \tag{3.26}$$

这里的 $\mathcal{H}_c^{(\alpha)}$ 是有限汉克尔变换，其定义为

$$\mathcal{H}_c^{(\alpha)}.f(x) = \int_0^1 \sqrt{cxy}J_\alpha(cxy)f(y)dy.$$

值得注意的是，关于有限汉克尔变换的特征值性质问题已得到广泛研究，参见例如 [5], [14] 和 [4]。

最后需要指出，球面 PSWF 通过以下规则进行归一化 :

$$\int_{\mathbb{B}^d}\big(\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x})\big)^2 d\mathbf{x} = 1,$$

或者等价地，用径向部分表示：

$$\int_0^1 r^{2m+d-1}\Big(\phi_k^{(m,c)}(2r^2-1)\Big)^2 dr = 1 \quad \text{or} \quad \int_{-1}^1 (1+t)^{m+\frac{d}{2}-1}|\phi_k^{(m,c)}|^2(t)dt = 2^{m+\frac{d}{2}-1}.$$

最后，我们用极限算子来表示球 prolate：设 U 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个有限测度集， $\mathcal{D}(U)$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中由支撑在 U 上的函数构成的子空间，

$$\mathcal{D}(U) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : f(x) = 0 \quad \forall x \notin U\},$$

并回顾一下， $\mathcal{B}_c$ 是由傅里叶变换支撑在 $\mathbb{B}^d(0,c)$ 中的函数构成的 Paley-Wiener 空间，

$$\mathcal{B}_c = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{F}.f(u) = 0 \quad \forall u \notin \mathbb{B}^d(0,c)\}.$$

设 $D_U.f(x) = \chi_U(x)f(x)$ 是将 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 正交投影到 $\mathcal{D}(U)$ 上的正交投影，且 $B_c.f(x) = \mathcal{F}^{-1}\chi_{\mathbb{B}^d(0,c)}\mathcal{F}.f(x)$ 是将 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 正交投影到 $\mathcal{B}_c$ 上的正交投影。利用（3.19），

$$B_c.f(x) = \Big(\frac{c}{2\pi}\Big)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d}(2\pi)^{d/2}\frac{J_{d/2}(c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)}{(c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)^{d/2}}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

于是，可以将积分算子 $\mathcal{Q}_c$ 表示为极限算子：

$$\mathcal{Q}_c = D_{\mathbb{B}^d}B_cD_{\mathbb{B}^d}$$

3.2. $\lambda_n^{(m)}(c)$ 的行为。最近， [4], 中的作者给出了特征值 $\alpha_k^{(m)}$ 的精确行为；根据注 3.2, 这些特征值与对应于球 prolate 函数的特征函数相关。具体而言，只需按照我们的记号改写 [4] 中的定理 3.2，即可直接推导出 $\lambda_n^m(c)$ 的渐近超指数衰减：

命题 3.3. 对于给定的实数 $m, c > 0$，存在一个仅依赖于 c 的常数 A，使得对于每个 $n > \frac{ec}{4}$，我们都有

$$\lambda_n^{(m)}(c) \le A\left[\frac{ec}{4n+2m+d}\right]^{4n+2m+d}. \tag{3.27}$$

在下述命题中，我们给出特征值 $\lambda_n^m(c)$ 的一个下界。

命题 3.4. 对于任意正实数 $c > 0$ 以及任意 $n \ge \frac{ec}{4}$，我们有

$$\lambda_n^m(c) \ge C\Big(\frac{ec}{4n+2m+d}\Big)^{4n+2m+d}_2,$$

其中， $C = \Big(\underline{2^{2/3}3^{1/6}\pi}\ \ \underline{\Gamma(1/3)\,(2k+\alpha+\alpha_0+1)^{1/3}}\Big)\ (2\pi^{\,d/2})$、 α 和 α_0 分别定义于 $c^{\frac{d+1}{2}}$ (3.26) 和 (2.4) 中。

证明。我们将证明有限汉克尔变换的特征函数满足这一下界，并再次利用关于球面 PSWF 的特征函数与

圆形波函数的特征函数之间关系的注记（3.26）。为此，我们回顾一下，利用 Courant-Fischer极大极小定理，$\mathcal{Q}_c^{(\alpha)}:= c\mathcal{H}_c^{(\alpha)} \circ \mathcal{H}_c^{(\alpha)}$的特征函数可由下式刻画:

$$\alpha_n^{(m)}(c) = \max_{V\in G_n} \min_{y\in V;\|y\|=1} < \mathcal{Q}_c^{(\alpha)} y; y >$$

由于 $\left(T_{(\alpha)n} := \sqrt{2(2n+\alpha+1)}x^{\alpha+1/2}P_n^{(0,\alpha)}(2x^2-1)\right)_n$ 是 $L^2(0,1)$ 的标准正交基，因此

$$\alpha_n^{(m)}(c) \geq < \mathcal{Q}_c^{(\alpha)} T_n^{(\alpha)}, T_n^{(\alpha)} >_{L^2([0,1])} .$$

另一方面，利用 (2.6) 并结合 (2.5)，可得

$$\left\|\mathcal{H}_c^{(\alpha)}.T_k^{(\alpha)}\right\|_2^2 = \left\|j_k^{(\alpha)}\right\|_2^2 = 2(2k+\alpha+1)\int_0^1 \left|\frac{J_{2k+\alpha+1}(cx)}{\sqrt{cx}}\right|^2 dx.$$

由 (2.4)，可以写成:

$$J_{2k+\alpha+1}(cx) \geq \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi(2k+\alpha+\alpha_0+1)^{1/3}} e^{-(2k+\alpha+1)\left(\ln(2k+\alpha+1)-1/4\right)} (cx)^{2k+\alpha+1} e^{\frac{-(cx)^2}{4(2k+\alpha+1)}}$$

因此,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{H}_c^{(\alpha)}.T_k^{(\alpha)}\right\|_2 &\geq C^2 e^{-2(2k+\alpha+1)\left(\ln(2k+\alpha+1)-1/4\right)} \int_0^c x^{2(2k+\alpha+1/2)} e^{-\frac{x^2}{2(2k+\alpha+2)}} dx \\
&\geq C^2 e^{-2(2k+\alpha+1)\left(\ln(2k+\alpha+1)\right)} \int_0^c x^{2(2k+\alpha+1/2)} e^{-\frac{x^2}{2(2k+\alpha+2)}} dx \\
&\geq C^2 \Big(\frac{ec}{2(2k+\alpha+1)}\Big)^{2k+\alpha+1}.
\end{aligned}$$

最后，证明只需用到注 3.2。 □

在下一个命题中，我们将简要描述特征值 $\lambda_n^{(m)}(c)$ 的计数的一阶近似。这里我们采用众所周知的 Landau 方法 [10] ，该方法基于计算 $\mathcal{Q}_c$ 的迹和希尔伯特-施密特范数。

命题3.5. 设 $0<\delta<1$ ，并令 $M_c(\delta)$ 表示不小于 δ 的特征值 $\lambda_k(c)$ 的个数。则

$$M_c(\delta) = \frac{c^d}{2^d}\frac{1}{\Gamma^2(\frac{d}{2}+1)} + o(c^d).$$

证明。我们首先利用 Mercer 定理以及以下事实来计算 $\mathcal{Q}_c$ 的迹： $K(0) = \frac{1}{2^{d/2}\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$，且 $\mu(\mathbb{B}^d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$（这里 μ 表示勒贝格测度），

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_c) = \sum_n \lambda_n^{(m)}(c) = \Big(\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\Big)^d \mu(\mathbb{B}^d)K(0) = \frac{c^d}{2^d\Gamma^2(\frac{d}{2}+1)}. \tag{3.28}$$

这里 $K(x) := \frac{J_{d/2}(\|x\|)}{(\|x\|)^{d/2}}$。另一方面，为了推导 $\|\mathcal{Q}_c\|_{HS}$的估计，我们按如下步骤进行

$$\|\mathcal{Q}_c\|_{HS} = \sum_n \left(\lambda_n^{(m)}(c)\right)^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2d} \int_{\mathbb{B}^d}\int_{\mathbb{B}^d} |K(c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)|^2 d\mathbf{x}d\mathbf{y}.$$

通过进行变量代换 $y = \sigma$ 和 $x = \sigma + \frac{\tau}{c}$，可得

$$\|\mathcal{Q}_c\|_{HS} = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{B}^d} \left(\int_{c(\mathbb{B}^d-\sigma)} |K(\tau)|^2 d\tau \right) d\sigma.$$

注意

$$\begin{aligned} \int_{c(\mathbb{B}^d-\sigma)} |K(\tau)|^2 d\tau &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |K(\tau)|^2 d\tau = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{J_{d/2}^2(\|\tau\|)}{\|\tau\|^d} d\tau \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{J_{d/2}^2(t)}{t} dt = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

最后一个等式归因于 [[17] 第 22.58 式，第 244]页。此外，$\mathbb{B}^d - \sigma$ 包含某些 $B(0,\alpha)$。然后，根据勒贝格控制收敛定理，有 $\lim_{c\to\infty} \frac{1}{c^d}\|\mathcal{Q}_c\|_{HS} = \frac{1}{2^d\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$。

即

$$\|\mathcal{Q}_c\|_{HS} = \frac{c^d}{2^d\Gamma(\frac{d}{2}+1)} + o(c^d). \tag{3.30}$$

接下来，我们注意到

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_c) \geq \sum_{k=0}^{M_c(\delta)} \lambda_k \geq \delta M_c(\delta), \tag{3.31}$$

并利用 Marzo公式（见 [13]），可得

$$M_c(\delta) \geq \mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_c) - \frac{1}{1-\delta}\Big(\mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_c) - \|\mathcal{Q}_c\|_{HS} \Big). \tag{3.32}$$

令 $M_+(\delta) := \limsup_{c\to\infty} \frac{M_c(\delta)}{c^d}$ 和 $M_-(\delta) := \liminf_{c\to\infty} \frac{M_c(\delta)}{c^d}$。

结合 (3.28)、(3.30)、(3.31) 和 (3.32)，可得

$$\frac{1}{2^d}\frac{1}{\Gamma^2(\frac{d}{2}+1)} \leq M_-(\delta) \leq M_+(\delta) \leq \frac{1}{2^d}\frac{1}{\delta\Gamma^2(\frac{d}{2}+1)} \quad \forall 0<\delta<1. \tag{3.33}$$

下一步是证明，对于所有 $0<\delta<1$，M_+ 和 M_- 均与 δ 无关。为证明这一点，我们首先注意到，通过考察，既不接近 0 也不接近 1 的特征值个数为 $o(c^d)$

$$J_c := \sum_{k=0}^\infty \lambda_k(c)(1-\lambda_k(c)) = \mathrm{Tr}(\mathcal{Q}_c) - \|\mathcal{Q}_c\|_{HS} = o(c^d).$$

现在设 δ 和 γ 为两个固定实数，使得 $0<\delta<\gamma<1$。考虑到每个特征值 $\delta < \lambda_k(c) < \gamma$ 对 J_c 的贡献至少为 $\delta(1-\gamma)$，可得

$$\delta(1-\gamma)\left[M_c(\delta) - Mc(\gamma)\right] \leq J_c = o(c^d)$$

因此， M_+ 和 M_- 都独立于 δ。为完成证明，只需在 (3.33) 右侧取接近 1 的 δ 。□

3.3. 其他基本性质。这里我们研究球 prolate 球面波函数的一些其他基本性质。

首先，我们给出与斯图姆-刘维尔算子对应的特征值的界。这个引理已在 [25] 中给出。这里我们用另一种方法证明它。

引理 3.6. 对于任意正实数 c，我们有

$$(m+2k)(m+2k+d) \leq \chi_k^{(m)}(c) \leq (m+2k)(m+2k+d)+c^2; \qquad k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

证明。为得到所需的上界，我们将微分算子 $\mathcal{L}_{c,\ \mathbf{x}}$ 写作

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{c,\mathbf{x}}.u(x) &= -\nabla(1-\|\mathbf{x}\|^2)\nabla.u(x) - \Delta_0.u(x) + c^2\|\mathbf{x}\|^2 u(x) \\ &= \mathcal{L}_{0,\mathbf{x}}.u(x) + c^2\|\mathbf{x}\|^2 u(x) \end{aligned}$$

然后，利用自伴算子 $\mathcal{L}_{c,\ \mathbf{x}}$的特征值所满足的 Courant-Fischer极小极大定理，可得

$$\begin{aligned} \chi_k^{(m)}(c) &= \min_{\dim H=k} \max_{u\in H;\|u\|=1} < \mathcal{L}_{c,\mathbf{x}}.u, u > \\ &\leq \min_{\dim H=k} \max_{u\in H;\|u\|=1} < \mathcal{L}_{0,\mathbf{x}}.u, u > + c^2\|u\|^2 \\ &\leq \chi_k^{(m)}(0) + c^2. \end{aligned}$$

另一方面，下界来自 $\mathcal{L}_{c,\mathbf{x}} - \mathcal{L}_{0,\mathbf{x}} = c^2\|\mathbf{x}\|^2$ 是一个正算子这一事实。最后，为了完成这个引理的证明，只需使用由 (2.13) 给出的 $\chi_k(0)$。□

下一个命题使我们能够保留经典情形中已见到的双重正交性这一基本性质。为此，我们计算球域长球波函数的傅里叶变换。

引理 3.7。球面 PSWF 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}.\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(x) = \frac{(2\pi)^d}{c^d\sqrt{\lambda_k^{(m)}(c)}}\psi_{k,\ell}^{(m,c)}\Big(\frac{-x}{c}\Big)\chi_{(\mathbb{B}^d)}\Big(\frac{x}{c}\Big).$$

证明。根据傅里叶逆变换，对于 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，有

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,z>}\mathcal{F}.f(z)d\mathbf{z} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i<x,z>}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<z,y>}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i<\mathbf{z},(\mathbf{y}-\mathbf{x})>}f(\mathbf{y})d\mathbf{y}d\mathbf{z}. \qquad (3.34) \end{aligned}$$

另一方面，由

$$\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_k^{(m)}(c)}\int_{\mathbb{B}^d} e^{-ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>}\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

可得

$$\begin{aligned}\mathcal{F}.\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_k^{(m)}(c)}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{B}^d} e^{-ic<\mathbf{z},\mathbf{y}>}\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{y})dy e^{-i<\mathbf{z},\mathbf{x}>}d\mathbf{x}\\ &= \frac{1}{\mu_k^{(m)}(c)}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ic<\mathbf{z},\mathbf{y}-\mathbf{x}>}\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\text{-}\mathbf{y}/c)\chi_{(\mathbb{B}^d)}(\mathbf{y}/c)d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}. \qquad (3.35)\end{aligned}$$

为完成证明，只需使用最后一个方程以及 (3.34)。 □

3.4. 特征函数的一些显式估计和界。本段旨在给出球面长旋转椭球波函数的一个显式上界。为此，我们首先证明，在某些条件下，这些函数在单位球面上达到最大值 $\mathbb{S}^{d-1}$。令 $c>0$，我们回顾

$$\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) = r^m\phi_k^{(m,c)}(\eta)Y_\ell^{(m)}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{x}=r\hat{\mathbf{x}}, \quad r=\|\mathbf{x}\|, \quad \eta := 2r^2-1.$$

引理 3.8. 设 $\alpha_k^{(m)}(c) := \frac{1}{4}\left(\chi_k^{(m)}(c) - m(m+d)\right)$ 且 c 为正实数。若$\alpha_k^{(m)}(c) > \frac{c^2}{4}$，则有

$$\sup_{\eta\in[a_{m,d},1]}|\phi_k^{(m)}(\eta)| = |\phi_k^{(m)}(1)| \qquad a_{m,d}=\frac{2m+d-2}{2m+d}. \qquad (3.36)$$

证明。为清晰起见，在本节的证明中，我们始终用 ϕ_k 和 α_k分别代替 $\phi_k^{(m,c)}$ 和 $\alpha_k^{(m)}(c)$。因此，(3.25) 可以写成如下形式 3.37

$$\left(p(\eta)\phi_k'(\eta)\right)'+q_k(\eta)\phi_k(\eta)=0; \quad p(\eta)=(1-\eta)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}},\ q_k(\eta)=\alpha_k\left(1-\frac{c^2(1+\eta)}{8\alpha_k}\right)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}. \qquad (\quad)$$

直接计算可知，辅助函数 $Z_k(\eta) := \phi_k^2(\eta) + {}^{p}{}_{(\eta)\ q_k(\eta)}\phi_k'^2(\eta)$ 仅在 $\phi_k'^2$ 上存在一阶导数，其表达式为

$$Z_k'(\eta) = -\frac{1}{q_k^2(\eta)}\left(p(\eta)q_k(\eta)\right)'\phi_k'^2(\eta).$$

那么，在我们的情形下

$$Z_k'(\eta) = -\frac{1}{q_k^2(\eta)}(1+\eta)^{2m+d-2}\left[\left(\alpha_k-\frac{c^2(1+\eta)}{8}\right)\Big(2m+d-2-t(2m+d)\Big)-\frac{c^2}{8}(1-\eta^2)\right]\phi_k'^2(\eta).$$

最后，为完成证明，只需注意到在条件 $\alpha_k^{(m)}(c) > \frac{c^2}{4}$ 下， Z_k 在 $[a_{m,d},1]$ 上递增，并且

$$\Big|\phi_k^2(\eta)\Big| \le Z_k(1) \le \Big|\phi_k^2(1)\Big|.$$

□

引理 3.9。在前一个引理的条件下，我们有

$$\sup_{\eta\in[a_{m,d},1]}\sqrt{(1-\eta)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}}}\big|\phi_k(\eta)\big| \le \sqrt{2^{m+\frac{d}{2}+1}(m+\frac{d}{2}-1)}. \qquad (3.38)$$

证明。该引理的证明基于斯图姆–刘维尔理论中一种相当著名的技巧，即使用由 $K_k(\eta) = p(\eta)Z_k(\eta)$ 定义的辅助函数。直接计算可得

$$K_k'(\eta) = p'(\eta)\phi_k^2(\eta) - \frac{p^2(\eta)q'(\eta)}{q^2(\eta)}(\phi_k')^2(\eta).$$

那么，由于 $\alpha_k > \frac{c^2}{4}$ 和 $\eta \geq \frac{2m+d-2}{2m+d}$，可得

$$K_k'(\eta) \geq (1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}\Big[\big(m+\frac{d}{2}-1\big) - \big(m+\frac{d}{2}+1\big)\eta\Big]\phi_k^2(\eta).$$

因此，考虑到 $\eta < 1$ 以及 ϕ_k的归一化，

$$K_k(\eta) = K_k(\eta) - K_k(1) \leq 2\int_{-1}^{1}(1+t)^{m+\frac{d}{2}-1}\phi_k^2(t)dt = 2^{m+\frac{d}{2}+1}(m+\frac{d}{2}-1).$$

最后，可得

$$(1-\eta)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}}\left|\phi_k(\eta)\right|^2 \leq K_k(\eta) \leq 2^{m+\frac{d}{2}+1}(m+\frac{d}{2}-1).$$

□

命题 3.10. 设 c 为一个正实数。若 $\alpha_k^{(m)}(c) > \frac{c^2}{4}$，则

$$\sup_{\eta\in[a_{m,d},1]}\big|\phi_k(\eta)\big| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{2^{m+\frac{d}{2}+1}(m+\frac{d}{2}-1)}\big(\alpha_{k,m}^{(c)}\big)^{1/2} \tag{3.39}$$

证明。不失一般性，可假设 $\psi_{k\,\ell}^{(m,c)}(1) > 0$。由 (3.25) 可得 s

$$\Big((1-\eta^2)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}\phi_k'(\eta)\Big)' = -\alpha_{km}^{(c)}\Big(1-\frac{c^2(\eta+1)}{8\alpha_{km}^{(c)}}\Big)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}\phi_k(\eta).$$

然后，对 $[x,1]$积分可得

$$\phi_k'(\eta) = \frac{\alpha_k}{(1-\eta^2)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}}\int_{\eta}^{1}(1+t)^{m+\frac{d}{2}-1}\Big(1-\frac{c^2(t+1)}{8\alpha_k}\Big)\phi_k(t)dt.$$

经过直接计算可得

$$q_k'(\eta) = (1+\eta)^{m+\frac{d}{2}}\Big[\alpha_k(m+\frac{d}{2}-1) - \frac{c^2}{8}(m+\frac{d}{2}) - \frac{c^2}{8}(m+\frac{d}{2})\eta\Big]$$

因此，对于 $\alpha_k > \frac{c^2}{4}$， q 在 $[a_{m,d},1]$ 上递减，且

$$\phi_k'(\eta) \leq \frac{\alpha_k}{1-\eta^2}\Big(1-\frac{c^2(\eta+1)}{8\alpha_k}\Big)(1-\eta)\phi(1) = \alpha_k\Big(1-\frac{c^2(\eta+1)}{8\alpha_k}\Big)\phi_k(1).$$

那么，

$$\phi_k(1) - \phi_k(\eta) \leq \alpha_k\phi_k(1)\Big(1-\frac{c^2(\eta+1)}{8\alpha_k}\Big)(1-\eta).$$

设 x_k 在 1 的某个邻域内，使得 $\left(1-\frac{c^2}{8\alpha_k}(x_k+1)\right)(1-x_k)=\frac{A}{\alpha_k}$。因此，

$$\phi_k(1)\leq \frac{1}{1-A}\frac{\sqrt{2^{m+\frac{d}{2}+1}\left(m+\frac{d}{2}-1\right)}}{\sqrt{(1-x_n)(1+x_n)^{m+d/2}}}\leq \frac{\sqrt{2^{m+\frac{d}{2}+1}\left(m+\frac{d}{2}-1\right)}}{(1-A)A^{1/2}}(\alpha_k)^{1/2}.$$

通过注意到 $\min_{A}\frac{1}{A^{1/2}}(1-A)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即可得出证明。 □

定理 3.11. 设 $c>0$和 $\alpha_k^{(m)}(c)>\max\{\frac{c^2+8}{4}(2m+d), (2/3)^6\left(\frac{\pi}{m+\frac{d}{2}-1}\right)^2+C_{m,d}(c)\}$. 则

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{B}^d}\left|\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\boldsymbol{x})\right|\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{2^{m+\frac{d}{2}+1}(m+\frac{d}{2}-1)}\sqrt{\frac{N(d,m)}{\Omega_{d-1}}}\cdot\sqrt{\chi_k^{(m)}(c)},$$

其中 $C_{m,d}(c)=\frac{c^2}{4}+(m+\frac{d}{2})(m+\frac{d}{2}-1)-1$.

证明。我们先回顾关于二阶微分方程解的局部极值行为的 Butlowski 定理（见 [1] p238）：
若 ϕ 是微分方程的一个解

$$(p(t)y'(t))'+q(t)y(t)=0\qquad t\in(a,b)\qquad p,q>0 \text{ and } p,q\in C^1(a,b),$$

那么，如果 pq 递增（分别递减）， $|\phi|$ 的局部最大值序列递减（分别递增）。

在我们的情形中，我们回顾一下

$$\Big(p(\eta)q_k(\eta)\Big)'=(1+\eta)^{2m+d-2}\left[\Big(\alpha_k-\frac{c^2(1+\eta)}{8}\Big)\Big(2m+d-2-\eta(2m+d)\Big)-\frac{c^2}{8}(1-\eta^2)\right]=(1+\eta)^{2m+d-2}F_k(\eta).$$

于是，容易看出， F_k 在 $[0,1]$中有唯一的零点。因此，存在唯一的实数 η_n，使得 pq 在 $[0,\eta_n]$ 上递增，在 $[\eta_n,1]$上递减。由此， ϕ_k的局部极大值在 $[0,\eta_n]$ 上递减，在 $[\eta_n,1]$上递增。令$\eta'_{1,n}$表示 ϕ'_k的第一个零点。下一步是确定$\eta'_{1,n}$。为证明这一点，我们先通过函数变换$U(\eta):=p^{1/2}(\eta)\phi_k(\eta)$，将（3.37）变换为 U上的下列方程，

$$U''+\Big[\frac{p'(\eta)^2-2p''(\eta)p(\eta)}{4p^2(\eta)}+\frac{q_k(\eta)}{p(\eta)}\Big]U=0,\qquad \eta\in(0,1).$$

我们应当指出， U 和 ϕ_k 在(0, 1)上有相同的零点。
直接计算可得

$$\frac{p'(\eta)^2-2p''(\eta)p(\eta)}{p^2(\eta)}=\frac{1-\left(m+\frac{d}{2}\right)^2}{(1+\eta)^2}+\frac{4\left(m+\frac{d}{2}-1\right)}{(1+\eta)^2(1-\eta)}+\frac{4}{(1-\eta^2)^2}\geq (m+\frac{d}{2})(1-m-\frac{d}{2})+1.$$

由于 $\frac{q_k(\eta)}{1+\eta}\geq \alpha_k-\frac{c^2}{8}$，因此

$$\frac{p'(\eta)^2-2p''(\eta)p(\eta)}{4p^2(\eta)}+\frac{q_k(\eta)}{p(\eta)}\geq \alpha_k-C_{m,d}(c);\qquad C_{m,d}(c)=\frac{c^2}{4}+(m+\frac{d}{2})(m+\frac{d}{2}-1)-1.$$

因此，根据斯图姆比较定理，将 $\sin(\sqrt{\alpha_k - \frac{c^2}{4}}\eta)$ 视为 $V'' + \left(\alpha_k - \frac{c^2}{4}\right)V = 0$ 的解时，在其两个零点之间存在 U 的一个零点。于是，$\eta_{k,1} \le \dfrac{\pi}{\sqrt{\alpha_k - \frac{c^2}{4}}}$且

$$\eta'_{k,1} \le \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_k - \frac{c^2}{4}}} = b_k.$$

令 $\eta \in (0, \eta'_{n,\,1})$，并回忆

$$\Big((1-\eta^2)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}\phi'_k(\eta)\Big)' = -\alpha_k\Big(1 - \frac{c^2(\eta+1)}{8\alpha_k}\Big)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}\phi_k(\eta).$$

然后对 $[\eta, \eta'_{n,1}]$ 积分，可得

$$\phi'_k(\eta) = -\frac{\alpha_k}{(1-\eta^2)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}}\int_\eta^{\eta'_{n,1}} (1+t)^{m+\frac{d}{2}-1}\Big(1 - \frac{c^2(t+1)}{8\alpha_{km}^{(c)}}\Big)\phi(t)dt.$$

利用 H¨older 不等式以及 ϕ_k 的归一化，可得

$$\begin{aligned} |\phi'_k(\eta)| &\le \frac{\alpha_k}{(1-\eta^2)(1+\eta)^{m+\frac{d}{2}-1}}\sqrt{2^{m+\frac{d}{2}-1}}\left|\int_\eta^{\eta'_{n,1}} (1+t)^{\frac{m+\frac{d}{2}-1}{2}}\phi(t)dt\right| \\ &\le \sqrt{2^{m+\frac{d}{2}-1}}\frac{\sqrt{\eta'_{k,1}}}{1-\eta'_{k,1}}\alpha_k \le \sqrt{2^{m+\frac{d}{2}-1}}\frac{\sqrt{b_k}}{1-b_k}\alpha_k \end{aligned} \tag{3.40}$$

于是，

$$|\phi_k(\eta'_{n,1})| \le \sqrt{2^{m+\frac{d}{2}-1}}\frac{(b_k)^{3/2}}{1-b_k}\alpha_k \le \frac{3\sqrt{3(m+\frac{d}{2}-1)}}{\left(\frac{\pi}{m+\frac{d}{2}-1}\right)^2 + \frac{c^2}{4}}(\alpha_k)^{1/2}.$$

值得注意的是，最后一个不等式由 $\alpha_k \ge (2/3)^6\left(\dfrac{\pi}{m+\frac{d}{2}-1}\right)^2 + \dfrac{c^2}{4}$ 这一事实推出。上述讨论可概括如下:

$$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{B}^d}\left|\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x})\right| \le \max_{\eta\in[-1,1]}\left|\phi_k^{(m,c)}(\eta)\right| \max_{\hat{\mathbf{x}}\in\mathbb{S}^{d-1}}\left|Y_\ell^{(m)}(\hat{\mathbf{x}})\right|$$

$\left|\phi_k^{(m,c)}\right|$ 的最大值在 1 或某个 $\eta \in [a_{m,d}, 1]$ 中取得。在这两种情况下，

$$\max_{\eta\in[-1,1]}\left|\phi_k^{(m,c)}(\eta)\right| \le \frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{2^{m+\frac{d}{2}+1}(m+\frac{d}{2}-1)}\big(\alpha_{k,m}^{(c)}\big)^{1/2}$$

最后，要完成证明，只需将前面的不等式与 (2.10) 结合起来。 □

3.5. 球形旋转椭球波函数的计算。注意，$\psi_k^{(m,c)}$，$\ell \in L^2(\mathbb{B}^d)$，因此可以根据球多项式基将其展开为

$$\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) = \sum_j \beta_j^{(k,m)} P_{j,l}^{(m)}(\mathbf{x}).$$

在 [25], 中，作者采用 Bouwkamp 方法计算球面 PSWF，并指出，计算这些函数及其特征值归结为确定一个三对角矩阵的特征向量及其对应的特征值。接下来，研究球面 PSWF 展开系数（$\beta_j^{(k,m)}$ ）$_j$的谱衰减率很有意义。为此，我们回顾式（3.19）给出的球多项式的有限傅里叶变换。

$$\int_{\mathbb{B}^d} e^{-ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} P_{j,\ell}^{(m)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{(2\pi)^{d/2}(-i)^m(-1)^j}{2(c\tau)^{\frac{d-1}{2}}} \frac{J_{2j+m+d/2(c\tau)}}{\sqrt{c\tau}} Y_\ell^{(m)}(\hat{\mathbf{y}}).$$

于是,

$$\begin{aligned}\beta_j^{(k,m)} &= \int_{\mathbb{B}^d} \psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) P_{j,\ell}^{(m)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \frac{1}{\mu_k^{(m)}(c)} \int_{\mathbb{B}^d} \left(\int_{\mathbb{B}^d} e^{-ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} P_{j,\ell}^{(m)}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right) \psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{y})d\mathbf{y} \\ &= \frac{(2\pi)^{d/2}(-i)^m(-1)^j}{\mu_k^{(m)}(c).c^{\frac{d-1}{2}}} \int_0^1 \tau^{m+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} \phi_k^{(m,c)}(2\tau^2-1) \frac{J_{2j+m+d/2(c\tau)}}{\sqrt{c\tau}} d\tau.\end{aligned}$$

因此，利用柯西-施瓦茨不等式以及球形旋转椭球波函数径向部分的归一化，可得

$$|\beta_j^{(k,m)}| \leq \frac{(2\pi)^{d/2} \times c^{4j+2m+\frac{d-1}{2}}}{2^{4j+2m+d}(4j+2m+d)|\mu_k^{(m)}(c)|} \frac{1}{\Gamma^2(2j+m+\frac{d}{2}+1)}.$$

回想一下，由 [2], 可知

$$\sqrt{2e}\Big(\frac{x+1/2}{e}\Big)^{1/2} \leq \Gamma(x+1) \leq \sqrt{2\pi}\Big(\frac{x+1/2}{e}\Big)^{1/2}. \tag{3.41}$$

于是，结合前两个不等式，可得

$$|\beta_j^{(k,m)}| \leq \frac{(2\pi)^{d/2} \times c^{2j+m}}{2^{4j+2m+d}(4j+2m+d)|\mu_k^{(m)}(c)|} \left[\frac{ec}{2j+m+\frac{d+1}{2}} \right]^{2j+m+\frac{d+1}{2}}. \tag{3.42}$$

因此，我们可以将这些计算总结为以下命题 :

命题 3.12. 给定实数 $c>0$，令

$$\beta_j^{(k,m)} = \int_{\mathbb{B}^d} \psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\boldsymbol{x}) P_{j,\ell}^{(m)}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

则有

$$|\beta_j^{(k,m)}| \leq \frac{(2\pi)^{d/2} \times c^{2j+m}}{2^{4j+2m+d}(4j+2m+d)|\mu_k^{(m)}(c)|} \left[\frac{ec}{2j+m+\frac{d+1}{2}} \right]^{2j+m+\frac{d+1}{2}}.$$

4. Approximation of almost band-limited functions over the d-dimensionalunit ball

本节旨在研究在 d 维球面长旋转椭球波函数框架和球多项式级数展开下的逼近质量。

4.1. 利用球面长旋转椭球波函数进行逼近。本段将说明，球面长旋转椭球波函数非常适合逼近近似带限函数。为证明这一点，我们首先证明，球面 PSWF 也非常适合逼近 Paley-Wiener 空间中的函数

$$\mathcal{B}_c = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{F}.f(u) = 0 \quad \forall u \notin \mathbb{B}^d(0,c)\}.$$

$M \quad N(d,\ m) \quad N$我们将 $S_N^{(M)}.f := \sum \sum \sum < f, \psi_k^{(m,c)}\ ,\ \ell \quad > \psi_{k\,\ell}^{(m,c)}$, (x) 记为函数 $f \in L^2(\mathbb{B}^d)$ 在前几个球 prolate 函数张成空间上的正交投影。现在可以陈述我们的第一个逼近定理:

定理 4.1. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个 ϵ_c-带限函数，且 $\Omega = \mathbb{B}(0,c)$。那么，对于任意正整数 $N \geq ec/2$, 我们有

$$\left\| f - S_N^{(M)} f \right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \left(2\epsilon_c + C_M (\chi_N^{(M)}(c))^{1/2} |\lambda_N^{(M)}(c)| \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{4.43}$$

where $C_M = \dfrac{\pi^{d/4}}{\sqrt{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}} \dfrac{3\sqrt{3(M+\frac{d}{2}-1)}}{2} \sqrt{\dfrac{N(d,M)}{\Omega_{d-1}}}$..

注意，定理 3.11 中描述的 $\lambda_k^{(M)}$ 的超指数衰减率表明， C_M 和 $\chi_N^{(M)}$ 对 M 的依赖可以忽略不计。因此，球域长球波函数非常适合用于近似带限函数的逼近。

证明。首先研究 $f \in \mathcal{B}_c$ 的情形。根据帕塞瓦尔不等式,

$$\left\| f - S_N^{(M)}.f \right\|_2^2 = \sum_{m>M} \sum_{k>N} \sum_{\ell=1}^{N(d,m)} | < f, \psi_{k,\ell}^{(m,c)} > |^2. \tag{4.44}$$

接下来，证明中的关键步骤是如何估计 $\left| < f, \psi_k^{(m,c)}{}_{,\ell} \quad > \right|$。
回顾傅里叶反演公式，可得 $f(\mathbf{x}) = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{B}^d} e^{ic<\mathbf{x},\ \mathbf{y}>} \hat{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$。因此，对于任意正整数 k, 有

$$\begin{aligned}
< f, \psi_{k,\ell}^{(m,c)} > &= \int_{\mathbb{B}^d} f(\mathbf{x}) \psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{B}^d} \psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) \int_{\mathbb{B}^d} e^{ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} \hat{f}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} \\
&= \left(\frac{c}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{B}^d} \hat{f}(\mathbf{y}) \int_{\mathbb{B}^d} e^{ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} \psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\
&= \left(\frac{c}{2\pi}\right)^d |\mu_k^{(m)}(c)| \int_{\mathbb{B}^d} \hat{f}(\mathbf{y}) \psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\
&\leq \left(\frac{c}{2\pi}\right)^d \frac{\pi^{d/4}}{\sqrt{\Gamma(d/2+1)}} |\mu_k^{(m)}(c)| \sup_{y \in \mathbb{B}^d} |\psi_{k,\ell}^{(m,c)}(\mathbf{y})| \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq C_m \left(\frac{c}{2\pi}\right)^d \frac{\pi^{d/4}}{\sqrt{\Gamma(d/2+1)}} |\mu_k^{(m)}(c)| (\chi_k^{(m)})^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

注意，最后一个不等式由定理 3.11 得出。最后，将最后一个不等式与 (4.44)、(4.45) 以及 $\lambda_k^{(m)}$ 的超指数衰减率结合起来，可得

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \left(C|\mu_N(c)|(\chi_N(c))^{1/2}\right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

现在，设 f 是一个 ϵ_c-带限函数。
我们有

$$\|f - S_N f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \|f - B_c f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} + \|B_c f - S_N B_c f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} + \|S_N[B_c f - f]\|_{L^2(\mathbb{B}^d)}.$$

另一方面，由于 f 是 ϵ_c-带限的，因此$\|B_c f - f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \epsilon_c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$。利用 S_N 是压缩映射这一事实，可得

$$\|S_N[B_c f - f]\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \|B_c f - f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \epsilon_c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

最后，注意到 $B_c f$ 是一个带限函数，我们将前一个命题应用于第二项。□

4.2. 用球多项式逼近几乎带限函数。本节研究通过几乎带限函数在球多项式基上的展开来逼近它们的效果。为此，我们首先给出以下技术引理，用以控制相关投影级数的一般项。

引理 4.2。设 $c > 0$。那么，对于任意 $f \in B_c$ 和任意 $k \geq \frac{ec}{2}$

$$\left| < f, P_{k,\ell}^{(m)} >_{L^2(\mathbb{B}^d)} \right| \leq \frac{1}{2^{2k+m+\frac{d}{2}+1}\sqrt{2ec(4k+3m+d)}} \left(\frac{ec}{2k+m+\frac{d+1}{2}}\right)^{2k+m+\frac{d+1}{2}}. \tag{4.46}$$

证明。设 $f \in B_c$ 为带限函数。根据傅里叶反演公式，有

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{B}^d(0,c)} \hat{f}(\mathbf{y}) e^{i<\mathbf{x},\mathbf{y}>} d\mathbf{y} = \left(\frac{c^2}{2\pi}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{B}^d} \hat{f}(c\mathbf{y}) e^{ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} d\mathbf{y}.$$

回顾一下，球多项式的有限傅里叶变换为

$$\int_{\mathbb{B}^d} e^{ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = (2\pi)^{d/2} \frac{(-i)^m (-1)^j}{2} \frac{J_{2k+m+d/2}(c\rho)}{(c\rho)^{d/2}} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) \qquad \mathbf{x} = \rho\hat{\mathbf{x}}.$$

于是，根据上述最后两个关系式，

$$\begin{aligned} < f, P_{k,\ell}^{(m)} > &= \int_{\mathbb{B}^d} f(\mathbf{x}) P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \left(\frac{c^2}{2\pi}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{B}^d} \int_{\mathbb{B}^d} \hat{f}(cy) e^{ic<\mathbf{x},\mathbf{y}>} d\mathbf{y} P_{k,\ell}^{(m)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= c^d \frac{(-i)^m (-1)^j}{2} \int_0^1 \rho^{m+d-1} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \hat{f}(c\rho\hat{\mathbf{y}}) \frac{J_{2k+m+d/2}(c\rho)}{(c\rho)^{d/2}} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{x}}) d\sigma(\hat{\mathbf{y}}) d\rho. \end{aligned} \tag{4.47}$$

由（2.1）可得

$$\left| \frac{J_{2k+m+d/2}(c\rho)}{(c\rho)^{d/2}} \right| \leq \frac{(c\rho)^{2k+m}}{2^{2k+m+\frac{d}{2}}\Gamma(2k+m+\frac{d}{2}+1)},$$

Then,
(4.48)
$$\left|< f, P_{k,\ell}^{(m)} >\right| \leq \frac{c^{2k+2m+d-1}}{2^{2k+m+1+d/2}\Gamma(2k+m+1+d/2)} \int_0^1 \rho^{2k+2m+d-1} \left| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \hat{f}(c\rho\hat{\mathbf{y}}) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{y}}) d\sigma(\hat{\mathbf{y}}) \right| d\rho.$$

另一方面

$$\left| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \hat{f}(c\rho\hat{\mathbf{y}}) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{y}}) d\sigma(\hat{\mathbf{y}}) \right| \leq \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| \hat{f}(c\rho\hat{\mathbf{y}}) \right|^2 d\sigma(\hat{\mathbf{y}}) \right)^{1/2}$$

现在令 $g(\rho) := \rho^{\frac{m+d-1}{2}} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| \hat{f}(c\rho\hat{\mathbf{y}}) \right|^2 d\sigma(\hat{\mathbf{y}}) \right)^{1/2}$。我们注意到

$$\int_0^1 |g(\rho)|^2 \, d\rho = \int_{\mathbb{B}^d} \left| \hat{f}(c\mathbf{y}) \right|^2 d\mathbf{y} = \frac{1}{c^d} \|f\|_2^2. \tag{4.49}$$

因此,

$$\left|< f, P_{k,\ell}^{(m)} >\right| \leq \frac{c^{2k+m+d/2}}{2^{2k+m+1+\frac{d}{2}}\sqrt{4k+3m+d}\Gamma(2k+m+1+\frac{d}{2})} \|f\|_2.$$

为完成此引理的证明，还需利用 Batir不等式 (3.41) 估计 $\Gamma(2k+m+1+\frac{d}{2})$。□

$M \quad N(d, \ m) \quad N$与前一种情况类似，我们定义 $\Pi_N^{(M)}.f := \sum \sum \sum < f, P_{(m)\,k,\ell} > P_{k\,\ell}^{(m)}$, $m=0 \quad \ell=1 \quad k=0$为投影到前几个球多项式张成空间上的正交投影。至此，我们已具备陈述第二个逼近定理所需的全部要素。

定理4.3. 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个 ϵ_c-带限函数。那么，对于任意正整数$N \geq \frac{ec-\frac{d+1}{2}}{2}$，我们有
4.50
$$\left\| f - \Pi_N^{(M)} f \right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \left(2\epsilon_c + C_N \left(\frac{ec}{2(N+1)+(M+1)+\frac{d+1}{2}} \right)^{2(N+1)+(M+1)+\frac{d+1}{2}} \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Here $C_N := \frac{1}{2^{2N+M+\frac{d}{2}+3}\sqrt{ec(4N+3M+d+4)}} \left[1 + \frac{1}{4\ln\left(\frac{ec}{2N+M+2+\frac{d+1}{2}}\right)} \right]^{1/2}$.

证明。设 $f \in \mathcal{B}_c$。注意，对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{B}^d$,

$$f(x) - \Pi_N.f(x) = \sum_{m>M} \sum_{k>N} \sum_{\ell=1}^{N(d,m)} < f, P_{k,\ell}^{(m)} > P_{k,\ell}^{(m)}(x).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\|f-\Pi_N.f\|^2_{L^2(\mathbb{B}^d)} &= \sum_{m>M}\sum_{k>N}\sum_{\ell=1}^{N(d,m)} |<f,P^{(m)}_{k,\ell}>|^2 \\
&\leq \sum_{m>M}\sum_{k>N}\sum_{\ell=1}^{N(d,m)} \frac{1}{2^{4k+2m+d+2}ec(4k+3m+d)}\left(\frac{ec}{2k+m+\frac{d+1}{2}}\right)^{4k+2m+d+1} \\
&\leq \frac{1}{2^{4N+2M+d+6}ec(4N+3M+d+4)}\sum_{m>M}\sum_{k>N}\sum_{\ell=1}^{N(d,m)}\left(\frac{ec}{2k+m+\frac{d+1}{2}}\right)^{4k+2m+d+1} \qquad (4.51)
\end{aligned}$$

注意， k 和 m 在主衰减因子中的表现相同。为简化证明并使其更加清晰，我们只考察 k 的情况，而关于 m 的证明几乎完全相同。我们将主因子单独处理,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{ec}{2k+m+\frac{d+1}{2}}\right)^{4k+2m+d+1} \\
=\ &\left(\frac{ec}{2N+m+2+\frac{d+1}{2}}\right)^{4N+2m+d+5} + \sum_{k=N+2}^{\infty}\left(\frac{ec}{2k+m+\frac{d+1}{2}}\right)^{4k+2m+d+1} \\
\leq\ &\left(\frac{ec}{2N+m+2+\frac{d+1}{2}}\right)^{4N+2m+d+5} + \int_{N+1}^{\infty}\left(\frac{ec}{2(N+2)+m+\frac{d+1}{2}}\right)^{4x+2m+d+1} dx \\
=\ &\left(\frac{ec}{2N+m+2+\frac{d+1}{2}}\right)^{4N+2m+d+5} + \\
&\exp\left[(2m+d+1)\ln\left(\frac{ec}{2N+m+2+\frac{d+1}{2}}\right)\right]\int_{N+1}^{\infty}\exp\left[4x\ln\left(\frac{ec}{2N+m+2+\frac{d+1}{2}}\right)\right]dx \\
\leq\ &\left[1+\frac{1}{4\ln\left(\frac{ec}{2N+m+2+\frac{d+1}{2}}\right)}\right]\left(\frac{ec}{2N+m+2+\frac{d+1}{2}}\right)^{4N+2m+d+5}.
\end{aligned}$$

因此，对所有 $f\in\mathcal{B}_c$

(4.52)

$$\left\|f-\Pi^{(M)}_N f\right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq C_{N,M}\left(\frac{ec}{2(N+1)+(M+1)+\frac{d+1}{2}}\right)^{2(N+1)+(M+1)+\frac{d+1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

现在，设 f 是一个 ϵ_c带限函数。

$$\left\|f-\Pi^{(M)}_N f\right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \|f-B_cf\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} + \left\|B_cf-\Pi^{(M)}_N B_cf\right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} + \left\|\Pi^{(M)}_N[B_cf-f]\right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)}.$$

另一方面，由于 f是 ϵ_c带限的，因此$\|B_c f - f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \epsilon_c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$。利用 $\Pi_N^{(M)}$ 是一个压缩映射这一事实，可得

$$\left\|\Pi_N^{(M)}[B_c f - f]\right\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \|B_c f - f\|_{L^2(\mathbb{B}^d)} \leq \epsilon_c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

根据前面的分析和（4.52），（4.50）立即得出。 □

References

[1] G. E. Andrews, R. Asqey and R. Roy. 特殊函数。剑桥大学出版社，剑桥、纽约，1999年。
[2] N.Batir. 伽马函数的不等式。Arch.91, (2008年), 554–563。[3] G.Beylkin, C.Kurcz, L.Monzn. 圆盘上带限函数的网格变换。Inverse Probl., 23(05),(2007年), 2059-2088。[4] M.Boulsane. 有限汉克尔变换算子的非渐近行为及其谱分布。积分变换与特殊函数，32(12),(2021年), 948-968。
[5] M. Boulsane and A. Karoui. 有限汉克尔变换算子：特征函数和特征值衰减率的一些显式局部估计。J. Four. Anal. Appl, 24, (2018年), 1554-1578。[6] A.Elbert and A.Laforgia. $J_\mu(\mu)$的一个下界。Appl.Anal, 19, (1985年), 137-145。[7] J.A.Hogan and J.D.Lackey. 长旋转椭球函数的时长与带宽限制、采样及其应用。应用与数值调和分析丛书，Birkh¨aser，Springer，纽约、伦敦（2013年）。[8] P.Jaming, A.Karoui, S.Spektor. 通过在某些正交多项式基上的展开来逼近几乎时限且带限的函数。JAT, 212, (2016年), 41–65。[9] Z.Khalid,R.A.Kennedy and J.D.McEwen. 球体上的 Slepian 空间-频谱集中。应用计算调和分析，40(3) , (2016年), 470–504。[10] H.J.Landau 关于 Szeg¨o 的特征值分布定理及非厄米核。J. Anal. Math, 28(1) , (1975年), 335-357。[11] H.J. Landau and H.O.Pollak. 长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性。II. Bell System Tech. J. 40 (1961年) 65–84。[12] H.J. Landau and H.O.Pollak. 长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性。III：本质上时限且带限的信号空间的维数。Bell System Tech. J. 41 (1962年) 1295–1336。
[13] J.Marzo. Marcinkiewicz-Zygmund 不等式与球谐函数插值。J. Func. Anal., 250(2) , (2005年), 559-587。[14] T. Moumni and A. Karoui. 有限汉克尔变换算子的谱分析与圆形长旋转椭球波函数。J. Comput. Appl. Math, 233 (2), (2009年), 315-333。[15] F.Dai and Y.Xu. 球面与球体上的逼近论和调和分析。数学专著丛书 Springer，(2013年)。[16] A. YA. Olenko. $\sqrt{x}J_\mu(x)$的上界及其应用。积分变换与特殊函数。17 (2006年), 455–467。[17] F. W. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, and Charles W.Clark. NIST 数学函数手册，剑桥大学出版社，纽约，纽约州，美国，第1版（2010年）。[18] R.B. Paris. 贝塞尔函数 $J_\nu(\nu x)$的一个不等式。SIAM J.Math.Anal 15 1 (1984年) 203–205。[19] Y.Shkolnisky. 圆盘上的长椭球波函数：二维带限函数的积分与逼近。应用计算调和分析，22(2) , (2007年), 235–256。[20] F.J.Simons, F.A.Dahlen and M.A.Wieczorek. 球面上的时空-频谱集中。SIAM Rev, 48(3) , (2006年), 504–536。
[21] D. Slepian. 长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性。IV. 向多维情形的推广；广义长旋转椭球函数。Bell System Tech. J. 43 (1964年) 3009–3057。[22] D.Slepian and H.O.Pollak. 长椭球波函数、傅里叶分析与不确定性。I. Bell System Tech. J. 43 (1964年) 3009–3058。

[23] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions.second edition.* 剑桥大学出版社。1966年。[24] M.A Taylor and B.A Wingate. 一种推广的长椭球波函数，其在三角形上的分辨率更加均匀。工程数学杂志 56 (3)(2006年) 221–235。[25] J.Zhang, H.Li, L.L.Wang and Z.Zhang. 任意维数下的球面长旋转椭球波函数。应用计算调和分析。1276 (2018年)。

Ahmed Souabni Address: University of Carthage Department of Mathematics Faculty of , , Sciences of Bizerte Bizerte Tunisia.
„*Email address*: souabniahmed@yahoo.fr