延长赌徒破产问题的持续时间与布朗运动的离开时间

Steven Evans, Erol A. Peköz, and Rhonda Righter

加州大学伯克利分校统计系、波士顿大学奎斯特罗姆商学院，以及加州大学伯克利分校工业工程与运筹学系

arXiv:2301.08328v1 [math.PR] 19 Jan 2023

摘要

在赌徒破产问题中，当双方以相同金额开始时，我们证明，随着游戏变得更加公平，游戏时长在随机意义上会增加。我们针对这一事实给出了两种不同的论证，拓展了 Pek¨oz 和 Ross（2021）的研究结果。随后，我们利用这一结论证明，带漂移的布朗运动离开对称区间的离开时间会随着漂移趋近于零而在随机意义上增加；这一结果难以从现有的密度显式公式中直接得到。

1 INTRODUCTION

对于简单随机游走 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，其中每个 X_i 以概率 p $+1$，以概率 $1-p$–1，我们关注的是 $T^{|k|}$，即随机游走到达 k 或 $-k$所需的时间，其中 k 是指定的正整数。需要注意的是，当两位玩家起初都拥有 k. 时， $T^{|k|}$ 就是赌徒破产问题的持续时间。Pek¨oz 与 Ross（2021）最近证明，对于任意 k，当 $p = 1/2$时， $T^{|k|}$ 在随机序意义下达到最大；此前 Zhang 与 Ross（2021）证明了较弱的期望意义下的结果。本文通过两种截然不同的方法，证明了更强的结果：当 p 趋近于 1/2 时， $T^{|k|}$ 在随机序意义下递增。随后，我们利用这一结果证明，带漂移的布朗运动离开对称区间的离开时间会随着漂移趋近于零而在随机序意义下递增；这似乎也是一个新结果，而且很难从现有的离开时间概率密度函数公式中推导出来。我们还证明，对于所有 p 和 k，无论哪位玩家赢得游戏， $T^{|k|}$ 都与之无关。需要注意的是，相关技术难点使得关于两名以上玩家的赌徒破产问题的研究成果十分有限，参见 Diaconis 与 Ethier（2021）及其中的参考文献。

赌徒破产问题是概率学中最古老的问题之一。正如 Song 与 Song（2013）所述，计算每位玩家获胜概率的问题由帕斯卡和费马解决，并与另外四个问题一同刊载于最早出版的概率论著作中（惠更斯（1657年））。对游戏时长分布的研究始于棣莫弗（1711年），现代研究则由 Feller（1968年）在第 14 章中继续推进[，他推导出了如下公式5],

$$\mathbb{P}(T^{|k|} = n) = k^{-1} 2^{n+1} [p^{(n+k)/2}(1-p)^{(n-k)/2} + p^{(n-k)/2}(1-p)^{(n+k)/2}] \times \sum_{j=1}^{k-1} \cos^{n-1}\left(\frac{\pi j}{2k}\right) \sin\left(\frac{\pi j}{2k}\right) \sin\left(\frac{\pi j}{2}\right)$$

当 $n-k$ 为偶数时的点概率公式；Karni（1977年）则推导出了

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(T^{|k|}=n)\\&=\left[\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-k)}-\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-3k)}-\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+k)}+\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n-5k)}+\binom{n-1}{\frac{1}{2}(n+3k)}\right]\\&\quad\times\left[p^{(n+k)/2}(1-p)^{(n-k)/2}+p^{(n-k)/2}(1-p)^{(n+k)/2}\right]\end{aligned}$$

在 $n\geqslant 5k$ 的情况下，并对 $k\leqslant n<5k.$ 作出调整

然而，上述两个表达式似乎都不便于证明，随着 p 向 $1/2$ 移动，尾概率 $\mathbb{P}(T^{|k|}>n)$ 会增加（即 $T^{|k|}$ 在随机意义下增加）。当 n 足够大时，很容易看出，随着 p 向 1/2 移动，这些表达式会增大（任一表达式对 p 的导数与 $n(1-2p)(p^k+(1-p)^k)+k(p^k-(1-p)^k)$ 的符号相同），因此相应的尾概率也会增加。然而，当 n 较小时，上述点概率表达式可能会随着 p 向 1/2 移动而减小，因此通常很难对尾概率作出明确判断。由此很难从这些表达式中得到随机不等式。我们的主要结果如下，它避开了这些表达式的使用，并证明 p 向 1/2 移动会使游戏时长在随机意义下增加。

定理 1.1. $\mathbb{P}(T^{|k|}>n)$ 随 p 增大而增大（当 $0\leqslant p\leqslant 1/2$ 时），并随 p 增大而减小（当 $1/2\leqslant p\leqslant 1$ 时）。

我们将在接下来的章节中通过两种不同的方法证明这一点。

2 A DECOMPOSITION ARGUMENT

令 T_0 为随机游走（在时间 0 之后）首次重新到达状态 0 的时刻。与 Pek¨oz 和 Ross（2021）所采用的方法一样，我们可以使用如下分解

$$T^{|k|}=Z+\sum_{i=1}^{N-1}Y_i$$

其中，$N\sim$ 服从 Geometric($\mathbb{P}(T_0>T^{|k|})$) 分布；$N-1$ 表示随机游走首次到达 $\pm k$ 之前返回状态 0 的次数；$Z\sim(T^{|k|}|T_0>T^{|k|})$ 表示在随机游走不返回状态 0 的条件下，从 0 到达 $\pm k$ 所需的时间；而 $Y_i\sim(T_0|T_0<T^{|k|})$、$i=1$、2、.....是独立同分布随机变量，表示在随机游走首次到达 $\pm k$ 之前返回状态 0 的条件下，每次返回状态 0 所需的时间。所有这些分量随机变量彼此独立。我们将证明以下引理，由此可立即推出定理 1.1。

引理 2.1. Y_i、Z和 N 关于 $0\leqslant p\leqslant 1/2$ （$1/2\leqslant p\leqslant 1$）均随 p 随机递增（递减）。

为证明此引理，设 $u_i(p)$ 表示随机游走处于层级 i时，已知其在到达 $+k$或 $-k$之前返回 0，下一步向上的概率，其中 $i=-k+1,-k+2,...,k-1$。注意，由对称性，$u_i(p)=1-u_{-i}(1-p)$ 表示随机游走从层级 $-i$ 出发，已知其在到达 $\pm k$之前返回 0，下一步向下的概率，此时随机游走向上的概率为 $1-p$。我们将在引理 2.2 (2) 中证明 $u_i(p)=u_i(1-p)$，进而可知，已知随机游走在到达$\pm k$ 之前返回 0 时，其远离 0 的概率仅取决于玩家实力差 $|p-(1-p)|=2|p-1/2|$，而与实力差的方向无关。此外，根据引理 2.2 (3)，该概率随玩家实力差增大而递减。

引理 2.2。以下结论对 $0 \leqslant p \leqslant 1$成立：

1. $\mathbb{P}(T_0 < T^{|k|})$ 关于 p 严格递增（递减），当 $p < 1/2$ （当 $p > 1/2$）时。
2. 对于 $-k+1 \leqslant i \leqslant k-1$， $u_i(p) = u_i(1-p)$。
3. 当 $1 \leqslant i \leqslant k-2$ 时， $u_i(p)$ 关于 p 严格递增（递减），当 $p < 1/2$（当 $p > 1/2$）时。

引理 2.2 的证明。对于第 1 部分，注意，任何一条长度为 $2n$ 、从 0 出发并在到达 k 或 $-k$ 之前回到 0 的路径，都必须包含 n 个向上步和 n 个向下步，因此其概率等于 $(p(1-p))^n$；当 $p < 1/2$ 时，该概率关于 p 严格递增；当 $p > 1/2$ 时，则关于 p 严格递减。 $\mathbb{P}(T_0 < T^{|k|})$ 的结论随之成立，因为它是许多此类路径的概率之和。这就证明了第 1 部分。

对于第 2 部分和第 3 部分，我们用记号 $\mathbb{P}_i$ 表示以层级 i 为随机游走起点的条件测度。根据我们对 $u_i(p)$ 对称性的观察，不失一般性，取 $i > 0$，并令 $T^j(p)$ 表示到达层级 $j \geqslant 0$ 所需的时间。我们有

$$\begin{aligned} u_i(p) &= \frac{p\mathbb{P}_{i+1}(T_0 < T^k)}{\mathbb{P}_i(T_0 < T^k)} = \frac{p\mathbb{P}_{i+1}(T^i < T^k)\mathbb{P}_i(T_0 < T^k)}{\mathbb{P}_i(T_0 < T^k)} \\ &= p\mathbb{P}_{i+1}(T^i < T^k), \end{aligned}$$

将其与

$$\mathbb{P}_{i+1}(T^i < T^k) = 1 - p + p\mathbb{P}_{i+2}(T^{i+1} < T^k)\mathbb{P}_{i+1}(T^i < T^k),$$

结合可得

$$u_i(p) = p(1-p) + u_{i+1}(p)u_i(p). \tag{2.1}$$

对于第 2 部分，我们使用反向归纳。首先注意边界情形 $u_{k-1}(p) = u_{k-1}(1-p) = 0$。在下方第二个等式中使用归纳假设 $u_{i+1}(p) = u_{i+1}(1-p)$，并在第一个等式中使用 (2.1)，可得

$$u_i(p) = \frac{p(1-p)}{1-u_{i+1}(p)} = \frac{p(1-p)}{1-u_{i+1}(1-p)} = u_i(1-p)$$

因此，第 2 部分对所有 $i > 0$ 均成立；再考察关于原点反射的随机游走，可知它对所有 i 也成立。

对于第 3 部分，我们再次使用反向归纳。首先注意， $u_{k-1}(p) = 0$ ，而将 $i = k-2$ 代入 (2.1) 可得 $u_{k-2}(p) = p(1-p)$；它关于 p 在 $p < 1/2$ 时递增，在 $p > 1/2$ 时递减。求导后，由方程 (2.1) 可得

$$u_i'(p) = 1 - 2p + u_i'(p)u_{i+1}(p) + u_i(p)u_{i+1}'(p) = \frac{1 - 2p + u_i(p)u_{i+1}'(p)}{1 - u_{i+1}(p)}$$

当 $p < 1/2$ 时为正，当 $p > 1/2$ 时为负，这里使用了归纳假设：$u_{i+1}'(p) > 0$ 对于 $p < 1/2$ ，以及 $u_{i+1}'(p) < 0$ 对于 $p > 1/2$. 。因此，命题 3 成立。

□

引理 2.1 的证明。令 $Y_i(p)$ 表示在随机游走先到达 0、再到达 $\pm k$ 的条件下，随机游走从层级 i 到 0 所需的时间，其中 p 、 $0 < i < k$ 固定。令 $Z_i(p)$ 表示随机游走所需的时间

从层级 i 到 $\pm k$，条件是随机游走先到达 $\pm k$、再到达 0，且 p、$0 < i < k$ 固定。于是，根据随机游走的结构，且 $I(p) \sim$ 服从伯努利分布(p)，

$$\begin{aligned} Y(j) &=_{st} I(p)Y_1(p) + (1 - I(p))Y_{-1}(p) \\ Z(j) &=_{st} I(p)Z_1(p) + (1 - I(p))Z_{-1}(p) \\ Y_i(p) &=_{st} Y_{-i}(1 - p) \\ Z_i(p) &=_{st} Y_{-(k-i)}(1 - p). \end{aligned}$$

一旦我们证明，对于 $0 \leqslant p \leqslant p' \leqslant 1/2$ 和 $0 < i < k$，$Y_i(p) \leqslant_{st} Y_i(p')$；并且对所有 p，$Y_1(p) =_{st} Y_{-1}(p)$，以及 $Z_1(p) =_{st} Z_{-1}(p)$，那么关于 $Y(j)$ 和 Z 的结果便随之得出。根据引理 2.2 的第 2 部分以及上面的最后两个方程，可得 $Y_1(p) =_{st} Y_{-1}(p)$ 和 $Z_1(p) =_{st} Z_{-1}(p)$。我们将通过耦合从状态 i 出发的随机游走，证明 $Y_i(p) \leqslant_{st} Y_i(p')$，使得 $Y_i(p) \leqslant Y_i(p')$ 以概率 1 成立。当两个随机游走处于不同层级时，我们让它们独立地移动；由于它们从同一层级出发，因此两者相隔的步数始终为偶数，故经过这一步后它们可以相遇，但不会交叉。当两个随机游走处于同一层级时，根据引理 2.2 的第 3 部分，第二个随机游走向上走一步的概率至少与第一个一样大，因此我们可以耦合它们的步伐，使第二个随机游走始终不会比第一个更靠近原点。这意味着我们将有 $Y_i \leqslant Y_i(p')$，从而有 $Y_i \leqslant_{st} Y_i(p')$。关于 N 的结果由引理 2.2 的第 1 部分得出。 □

定理 1.1 的证明。我们可以类似地在同一个概率空间上将 $T^{|k|}(p')$ 与 $T^{|k|}(p)$ 耦合（在记号中明确表示对 p 的依赖），利用我们的分解和引理 2.2，使得 $T^{|k|}(p') \geqslant T^{|k|}$ 几乎必然成立，从而定理得证。 □

3 AN INDUCTIVE ARGUMENT

在定理 1 的第二个证明中，我们将对 k 使用归纳法。考虑以下另一种分解：当边界为 $\pm k$ 时，进行一场游戏所需的时间（称为规模为 k 的游戏）是若干场较小规模游戏所需时间的随机和。具体来说，我们先进行一场规模为 1 的游戏，此时随机游走以相应的概率 p 和 $1-p$ 位于 ± 1。然后进行一场规模为 $k-1$ 的游戏；游戏结束时，随机游走的位置将根据第一场游戏结束时它位于 $+1$ 还是 -1，以及此后它向上或向下移动了 $k-1$ 步，而落在集合 $\{-k, -(k-2)\ k-2, k\}$ 中。如果第二场游戏结束时的位置为 $\pm(k-2)$，我们就进行第三场规模为 2 的游戏，依此类推，直到最终到达 $\pm k$ 并停止。令 N 为这类游戏的总场数，并令 $r(n) = \mathrm{P}\{N = n | N \geqslant n\}$ 为其风险率。令 $y(i)$ 满足：第 i 场游戏结束时，随机游走可能处于 $\pm k$ 和 $\pm y(i) \neq \pm k$；令 $d(i)$ 为第 i 场游戏的规模。也就是说，令 $y(1) = d(1) = 1$；对于 $i = 2, 3...$，若 $y(i-1) > 0$，则令 $d(i) = k - y(i-1)$，且令 $y(i) = |y(i-1) - d(i)|$；若 $y(i-1) = 0$，则令 $d(i) = y(i) = 1$。注意，对于固定的 k，$y(i)$ 和 $d(i)$ 是确定性序列。因此，根据构造以及随机游走的马尔可夫性质，我们得到如下结论。

引理 3.1. 对于 $k > 1$,

$$T^{|k|} = \sum_{i=1}^{N} T^{|d(i)|}$$

其中各个 $T^{|d(i)|}$ 相互独立。

我们注意到，$y(i)$、$d(i)$、$r(n)$（以及 N）都取决于 k，但在记号中省略了这一依赖关系。

设 $\pi_k^+(p) = \mathbb{P}(T^k < T^{-k})$ 表示随机游走 $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$（其中 $S_0 = 0$）在到达 $-k$之前先到达 $+k$的概率。根据经典的赌徒破产公式（Feller（1968））， $\pi_1^+(p) = p$且 $\pi_k^+(p) = p^k/(p^k+(1-p)^k)$。设 $\tau(j) = \sum_{i=1}^{j} T^{|d_{(i)}|} | N > j$为进行$j$ 个子博弈所需的时间，条件是 S 在前 j 场游戏中尚未到达 $\pm k$ （因此 $S_{\tau(j)} = \pm y(j)$）。

引理 3.2. 对任意 j， $\tau(j)$ 与事件 $\{S_{\tau(j)} = +y(j)\}$ 相互独立，且

$$\mathbb{P}(S_{\tau(j)} = +y(j)) = \frac{p^{y(j)}}{p^{y(j)} + (1-p)^{y(j)}} = \pi_{y(j)}^+(p).$$

证明。固定 j，在给定 $N > j$ 和 $\tau(j) = t$的条件下，为了简化记号，令 $y = y(j)$。令 ρ^+ 为一条任意的 S 路径，该路径在时刻 t 到达 $+y$，且在时刻t之前未经过 $\pm k$。于是，在路径 ρ^+上， S 总共走了$(t-y)/2+y$ 个向上步和$(t-y)/2$ 个向下步，因此路径 ρ^+ 的概率为 $p^{(t-y)/2}(1-p)^{(t-y)/2}p^y$。令 ρ^- 为路径 ρ^- 关于原点的镜像（将向上步与向下步互换），那么路径 ρ^- 也会在时刻 t到达 $-y$，且在时刻 t之前未经过 $\pm k$。路径 ρ^- 的概率为 $p^{(t-y)/2}(1-p)^{(t-y)/2}(1-p)^y$。令 $A(\rho^{\pm})$ 表示事件： S 在经过 $\pm k$之前走路径 ρ^+ 或 ρ^-。于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{\tau(j)} &= +y, A(\rho^{\pm})|\tau(j) = t) \\
&= \mathbb{P}(S_{\tau(j)} = +y|A(\rho^{\pm}), \tau(j) = t)\mathbb{P}(A(\rho^{\pm})|\tau(j) = t) \\
&= \frac{p^{(t-y)/2}(1-p)^{(t-y)/2}p^y}{p^{(t-y)/2}(1-p)^{(t-y)/2}p^y + p^{(t-y)/2}(1-p)^{(t-y)/2}(1-p)^y}\mathbb{P}(A(\rho^{\pm})|\tau(j) = t) \\
&= \frac{p^y}{p^y + (1-p)^y}\mathbb{P}(A(\rho^{\pm})|\tau(j) = t).
\end{aligned}$$

Su对所有这类长度为 t 的反射路径对 ρ^+ 和 ρ^- 求和，我们对每个 t,

$$\mathbb{P}(S_{\tau(j)} = +y|\tau(j) = t) = \frac{p^y}{p^y + (1-p)^y} = \pi_y^+(p).$$

因此，事件 $S_{\tau(j)} = +y$ 与 $\tau(j)$ 独立，并且 $\mathbb{P}(S_{\tau(j)} = +y) = \pi_y^+(p)$。 □

类似的论证可得以下推论。

推论 3.3. 对所有 p 以及任意 k，随机变量 $T^{|k|}(p)$ 与随机游走首次到达 $+k$ 还是 $-k$ 无关。

以下也是引理 3.2 的推论。

推论 3.4. 对于 $0 \leqslant p \leqslant 1/2$， $\pi_k^+(p)$ 随 p 增大；从 $\pi_k^+(0) = 0$ 到 $\pi_k^+(1/2) = 1/2$。

推论 3.5。在引理 3.1 的分解中，对于固定的 $k > 1$， N 与 $T^{|d(i)|}$无关；对于 $n = 1, 2, \ldots$ ...

$$r(n) = \left\{ \begin{array}{cc} \pi_{y(n-1)}^+(p)\pi_{d(n)}^+(p) + (1-\pi_{y(n-1)}^+(p))(1-\pi_{d(n)}^+(p)) & \text{if } y(n-1) > 0 \\ 0 & \text{if } y(n-1) = 0 \end{array} \right\}.$$

证明。根据推论 3.3， N 与 $T^{|d(i)|}$相互独立，因为对于每一场子博弈，它成为最后一场比赛的概率与进行这场比赛所需的时间无关。若 $y(n-1) = 0$，则 $r(n) = 0$ 显然成立，因为此时 $y(n) = d(n) = 1$。根据引理 3.2，对于 $y(n-1) > 0$ 且给定 $N \geqslant n$ 时，随机游走处于 $y(n-1)$ 的概率

（分别为 $-y(n-1)$）在第 $n-1$场游戏结束时，即在时刻 $\tau(n-1)$，为$\pi^+_{y\ (n-1)}(p)$（分别为$1-\pi^+_{y\ (n-1)}(p)$）。在尚未到达 $\pm k$的条件下，随机游走在第 n场游戏结束时到达 $\pm k$ 的概率，等于从 $y(n-1)$向上移动 $d(n)$的概率，或从 $-y(n-1)$向下移动 $d(n)$的概率，即

$$r(n) = \mathbb{P}\{N = n | N \geqslant n\} = \pi^+_{y(n-1)}(p)\pi^+_{d(n)}(p) + (1-\pi^+_{y(n-1)}(p))(1-\pi^+_{d(n)}(p)).$$

□

定理 1.1 的证明。我们对 k 使用归纳法；对于 $T^{|1|} \equiv 1$，结论显然成立。固定 k，并假设结论对所有 $j = 1, ..., k-1$ 都成立，因此对每个子博弈 i 也成立，因为 $d(i) < k$。也就是说，假设 $T^{|d(i)|}$ 关于 p 随机递增（对于 $0 \leqslant p \leqslant 1/2$）。那么，只要 N 关于 p 随机递增，由引理 3.1 和归纳假设可知，结论对 k 也成立，即 $T^{|k|}$ 关于 p 随机递增。我们将证明更强的结论：随着 p 增大， N 在风险率意义下增大，也就是说，对于所有 n，其风险率 $r(n)$ 关于 p 非严格递减。若 $y(n-1) = 0$，则 $r(n) = 0$ 关于 p 显然递减。对于固定的 n（满足 $y(n-1) \neq 0$），定义

$$g_n(p) = 1 - r(n) = \pi^+_{y(n-1)}(p)(1-\pi^+_{d(n)}(p)) + (1-\pi^+_{y(n-1)}(p))\pi^+_{d(n)}(p).$$

T然后，对 p 求导，并对 $0 \leqslant p \leqslant 1/2$ 使用推论 3.4 ，

$$\begin{aligned} g_n'(p) &= \pi^{+\prime}_{y(n-1)}(p) + \pi^{+\prime}_{d(n)}(p) - 2\pi^{+\prime}_{y(n-1)}(p)\pi^+_{d(n)}(p) - 2\pi^+_{y(n-1)}(p)\pi^{+\prime}_{d(n)}(p) \\ &\geqslant \pi^{+\prime}_{y(n-1)}(p) + \pi^{+\prime}_{d(n)}(p) - \pi^{+\prime}_{y(n-1)}(p) - \pi^{+\prime}_{d(n)}(p) = 0. \end{aligned}$$

□

注 3.6. 注意，当 k 为偶数时，通过选择 $y(1) = k/2$ 而不是 $y(1) = 1$，可以简化分解：

$$T^{|k|}(p) = \sum_{i=1}^{N} \left(T_i^{|k/2|} + \tilde{T}_i^{|k/2|} \right)$$

其中 $T_i^{|k/2|} =_{st} \tilde{T}_i^{|k/2|} =_{st} T^{|k/2|}$，以及 N、 $T_i^{|k/2|}$ 和 $\tilde{T}_i^{|k/2|}$ 对所有 i 都相互独立，并且

$$N \sim \text{ Geometric}((\pi^+_{k/2}(p))^2 + (1-\pi^+_{k/2}(p))^2).$$

4 A COROLLARY FOR BROWNIAN MOTION WITH DRIFT

令 $B(t)$ 表示时刻 t 的标准布朗运动，对于 $k > 0$，考虑时间

$$T_\mu = \inf\{t \geqslant 0 : \mu t + B(t) \notin [-k, k]\}$$

带漂移 μ 的布朗运动首次离开区间 $[-k, k]$. 。Borodin, A. & Salminen, P. (2002年)[第 309 页的方程 (3.0.2) 以及第 641] 页给出了T_μ 的概率密度函数：

$$\mathbb{P}(T_\mu \in dt) = (e^{-\mu k} + e^{\mu k}) e^{-\mu^2 t/2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{k + 4ik}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} e^{-(k+4ik)^2/(2t)} dt. \tag{4.1}$$

利用非对称简单随机游走的路径弱收敛到带漂移的布朗运动，我们立即得到定理 1.1 的以下推论。

推论 4.1。根据上述定义，若 $0 \leqslant \mu \leqslant \mu'$，则 $T_\mu \geqslant_{st} T_{\mu'}$。

这一结果表明，带漂移的布朗运动离开对称区间的离开时间会随着漂移趋近于零而在随机序意义下增大。特别是，当漂移为零时，该离开时间在随机序意义下达到最大。据我们所知，这一结果是新的，而且似乎难以从密度的显式形式 (4.1) 中直接推出。

5 ACKNOWLEDGEMENTS

我们非常感谢审稿人的反馈，这些意见改进了本文的表达。

REFERENCES

Andrei N. Borodin & Paavo Salminen。《布朗运动手册——事实与公式》，第二版，施普林格，2002年。P. Diaconis & S. N. Ethier。《赌徒破产问题与国际数学家大会》，预印本，https://arxiv.org/abs/2011.07610。Feller, W.（1968年）。《概率论及其应用导论》。第I卷。纽约：约翰·威立父子公司。Huygens, C.（1657年）。《论骰子游戏中的推理》，收录于 F. van Schooten 所著《数学练习》，Elsevirii，莱顿。后重印于《全集》第14卷（1920年）。Karni, E.（1977年）。《经典破产问题中游戏时长的概率分布》。《应用概率学杂志》，14(2)，416–420。Moivre, A. de（1711年）。《论机会的测量，或论取决于偶然机会的游戏中事件的概率》。《哲学汇刊》，27，213–264。Pek¨oz, E. & Ross, S.，《公平赌徒破产问题随机地使游戏时长最大化》。已获接收，即将在《应用概率进展》发表（2022年）。Ross, Sheldon M.（2019年）。《概率模型导论》，第12版。阿姆斯特丹：学术出版社。印刷版。Song, Seongjoo, & Song, Jongwoo。（2013年）。《赌徒破产问题史札记》。《统计应用与方法通讯》，20(2)，157–168。Zhang, Z., and Ross, S.（2021年）。《寻找最佳决斗者》，预印本。