arXiv:2301.08342v1 [math.FA] 19 Jan 2023

具有正差的函数的 Hornich-Hlawka 函数不等式

CONSTANTIN P. NICULESCU 和 SUVRIT SRA

Version 2

Abstract. 我们分析 n-凸性对于满足一系列线性函数不等式所起的作用，这些不等式扩展了 Hornich-Hlawka 函数不等式，$f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z)\geq f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)+f(0)$，其中包括对正算子情形的推广。

1. 引言 Introduction

许多值得注意的不等式都与以下问题有关：

问题 1. 设 $\mathcal{S}$ 是一个带幺元0的阿贝尔加法半群，f 是定义在 $\mathcal{S}$ 上、取值于有序向量空间 E (或其正锥 E_+)中的函数。对于 $n\geq 2$，求出以下各项之间的线性不等式

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} f(x_i),\ \sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n} f(x_i+x_j),\ldots,\ f(\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i)$$

对所有 $x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{S}$.

由于这一问题有诸多延伸，至今仍受到广泛关注。本文在 Hornich-Hlawka 泛函不等式的框架下，报告了这方面的一些新结果。具体而言，我们旨在研究连续函数 $f\colon \mathcal{S}\to\mathbb{R}_+$ 满足下列条件的情形

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z)\geq f(x+y)+f(y+z)+f(z+x) \tag{1.1}$$

对所有 x，y，$z\in\mathcal{S}$。当 f是实值函数时，通常将 (1.1) 替换为

$$f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z)\geq f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)+f(0). \tag{1.2}$$

要理解 Hornich-Hlawka 泛函不等式，一个很好的起点是以下这个初等（但有力的）不等式：

$$|x|+|y|+|z|+|x+y+z|\geq |x+y|+|y+z|+|z+x| \quad \text{for all } x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{1.3}$$

正如 Levi 所指出的 [17], ，任何类似于（1.3）的分段线性不等式，在将实变量 x、y、z替换为 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$中的任意向量 $\mathbb{R}^N$，并将绝对值函数替换为欧几里得范数后，仍然成立。

$$\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{z}\|+\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\|\geq\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\|+\|\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}\|. \tag{1.4}$$

Date：2023年1月19日。2000 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 26B25；次分类号 26B35、26D15、26A48、26A51。*Key words and phrases.* Hornich-Hlawka 泛函不等式、完全单调函数、具有正差分的函数、高阶凸性、正（半）定矩阵。

不等式（1.4）就是如今所称的*Hornich-Hlawka* 不等式。参见 Hornich 的论文 [14], ，该文收录了 Hlawka 基于三角不等式以及一个刻画内积空间的恒等式（归功于 Fr´echet [10]）所给出的精彩论证。

利用标准技巧，可以轻易从（1.3）推得，Hornich-Hlawka 不等式（1.4）对所有勒贝格空间 $L^1(\mu)$ 也成立，因此对所有可线性等距嵌入到一个 $L^1(\mu)$ 中的空间也成立。后者包括所有满足 $L^p(\mu)$ 且 $p \in [1,2]$）的勒贝格空间——参见 Lindenstrauss 和 Pe-lczy´nski [19]。

1946年，Popoviciu [32] 证明，每个在原点处取零值，且在 $(0,\infty)$ 上具有非递减二阶导数的连续函数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$，都满足 Hornich-Hlawka 泛函不等式（1.1）。通过证明在有序巴拿赫空间 $\mathbb{R}_+$ 上取值的所有连续 3-凸函数都满足不等式（1.2），即可将 Popoviciu 的结果轻易推广到一般情形。这个结论及其在连续 n-凸函数情形下的类似结论，

$$f\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)-\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-1}\le n} f(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{n-1}})$$
$$+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-2}\le n} f(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{n-2}})-\cdots+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n f(x_i)\ge f(0),$$

将在第 3 节讨论。

与上述不等式密切相关的是通过差分刻画 n-凸性（$\Delta_h f$）（x）$=f$（$x+h$）$-f$（x），而非通常采用的差商。参见定理 5，该定理表明，连续 n-凸函数类与具有 n 阶正差分的连续函数类相同，即 $\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\cdots\Delta_{x_n}f$（$x$）$\ge 0$. 当 n 为奇整数时，与波波维丘不等式的联系显而易见，因为条件 $\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\cdots\Delta_{x_n}f$（$x$）$\ge 0$, 仅仅意味着在波波维丘不等式中引入一个新变量，如下所示:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i+x)-\sum_{1\le i<j\le n} f(x_i+x_j+x)$$
$$+\sum_{1\le i<j<k\le n} f(x_i+x_j+x_k+x)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}f(x_1+\cdots+x_n+x)\ge f(x).$$

值得注意的是，具有任意阶正差分的函数 $f:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$，正是 Bernstein [4] 术语中所说的绝对单调函数。离开区间上的分析这一优雅框架后，很容易发现 n-凸性与具有 n 阶正差分的性质是不同的概念。第 3 节末将详细阐述这一观点。

两类重要的函数兼具一系列关于 n 凸性的性质，它们分别是完全单调函数和伯恩斯坦函数。其定义及一些例子见第 2 节。Sendov 和 Zitikis [36]证明，这些函数满足如下形式的不等式

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)-\sum_{1\le i<j\le n} f(x_i+x_j)+\cdots+(-1)^{n-1}f\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\ge 0, \tag{1.5}$$

对所有 $x_1,\dots,x_n$ 属于 $\mathbb{R}_+$ 和 $n\ge 1$。他们的证明将经典积分表示定理（分别为伯恩斯坦定理和 L´évy–Khintchine 表示定理）与一些概率论考量结合起来。在第4节，我们

将这一结果推广为一个适用于定义在锥上的完全单调函数的双重不等式。结合 [35, 定理 1.3（a）], ，我们进而证明函数 $f(X)$ =(行列式 $X)^{-\rho}$(定义在 $N \times N$-实对称正定矩阵上)也满足整组不等式（1.5），若$\rho \in \{0, 1/2, 1, 3/2, ...\} \cup [(N-1)/2, \infty)$。

第5 节讨论定义在锥上且具有某一阶正差分的函数 $n > 0$. 定理9给出了一个令人惊讶的结果：行列式函数具有任意阶的正差分（尽管它并非完全单调）。其他不可约特征标函数（如积和式）可能也具有同样的性质，但我们只能证明其三阶差分为正。 [待办 待办]。

为方便读者，第2节概述了高阶凸性和有序巴拿赫空间理论的背景。

2. Preliminaries

高阶凸性的研究由 Hopf [13] 和 Popoviciu[29, 31], 开创，他们用函数的差商来定义高阶凸性。设f 为定义在实区间上的实值函数 I，其 0 阶、1 阶，.....，n 差商对应于一组 x_0、 x_1.....， x_n 个 $n+1$ 互不相同的点，分别由下列公式定义

$$\begin{aligned}
[x_0; f] &= f(x_0) \\
[x_0, x_1; f] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\
&\cdots \\
[x_0, x_1, ..., x_n; f] &= \frac{[x_1, x_2, ..., x_n; f] - [x_0, x_1, ..., x_{n-1}; f]}{x_n - x_0} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}.
\end{aligned}$$

注意到，所有这些差商在点 x_0、 x_1、.....、 x_n. 的排列下均保持不变。因此，我们总可以假设 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

若函数 f 的所有差商 $[x_0, x_1, \ldots, x_n;\ f]$ 均非负（分别均非正），则称其为 n-凸 （分别称为 n-凹）函数。特别地，0-凸函数恰为非负函数，1-凸函数恰为非递减函数，而 2-凸函数就是通常意义下的凸函数。

若 f 可微 n 次，则反复应用拉格朗日中值定理可知，存在一点 $\xi \in$ （$\min_k x_k$, $\max_k x_k$），使得

$$[x_0, x_1, ..., x_n; f] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

由此可得到以下判断 n-凸性的实用准则。

引理 1. 设连续函数 f 定义在区间 I 上，且在 I 的内部可微 n 次。若 $f^{(n)} \geq 0$，则该函数为 n-凸函数。

高阶凸函数的一个重要来源是伯恩斯坦函数和完全单调函数。回想一下，函数 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ 是伯恩斯坦函数，当且仅当它无限可微并满足条件

$$(-1)^{n+1} f^{(n)}(x) \geq 0 \quad \text{for all } x > 0 \text{ and } n \geq 1;$$

而函数 f 是完全单调的，当且仅当

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0 \quad \text{for all } x > 0 \text{ and } n \geq 0.$$

根据定义，函数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ 若为连续函数，且其在 $(0, \infty)$ 上的限制具有相应性质，则称其为伯恩斯坦函数 （分别称为完全单调 函数）。

每个伯恩斯坦函数都是 $(2n + 1)$-凸的，而每个完全单调函数对于任意 $n \geq 0.$ 都是 $2n$-凸的。

若 $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ 是伯恩斯坦函数，则 $f - f(0)$ 也是；若 f 是完全单调函数，则 $f(0) - f$ 是伯恩斯坦函数。伯恩斯坦函数的一些简单例子如下：

$$x/(x + 1),\ 1 - e^{-\alpha x} \ (\text{for } \alpha > 0),$$
$$\log(1 + x),\ (x - 1)/\log x \text{ and } x^\alpha \ (\text{for } 0 < \alpha \leq 1).$$

Schilling、Song 和 Vondra˘cek 的权威专著对上述两类函数作了精彩介绍 [34]。

除了前面提到的五个例子外， $\mathbb{R}_+$ 上的其他一些 3-凸函数还有 x^α （对于 $\alpha \in (0, 1] \cup [2, \infty)$） $-x^2 + \sqrt{x}$， $-x\log x$，双曲正弦，双曲余弦，$-\log(\Gamma(x))$ 等。

函数 $1 - (x - 3) + (x-3)_6^{\ 3}$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上连续且为 3-凸，但对任何 $n \in \{0, 1, 2\}$.都不是n-凸函数

正系数多项式和指数函数对每个 $n \geq 0.$ 都是 n-凸的

所有次数小于或等于 2 的多项式既是 3-凸的，也是 3-凹的。

以下由 Popoviciu 提出的逼近定理 [30] （另见 [11, 定理 1.3.1（i），第 20] 页）使我们可以将对 n-凸函数的讨论简化为它们同时可微的情形。

定理 1 (Popoviciu 逼近定理)。 若连续函数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是 k-凸的，则与其对应的伯恩斯坦多项式也具有同样性质，

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

此外，根据函数及其导数可由伯恩斯坦多项式及其导数同时一致逼近这一众所周知的性质，可知 $B_n(f)$ 及其任意阶导数分别一致收敛于 f及其导数。

通过变量代换，很容易看出，逼近定理可推广到定义在紧区间 $[a, b]$ with $a < b.$ 上的函数

引理 2. (i) 两个递增、凹或 3-凸连续函数的复合函数仍具有相同性质。(ii) 若 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个连续的3-凸函数，且同时非递减且凹，则当 $\alpha \in (0, 1].$ 时， f^α 也具有相同性质

证明。 根据定理 1，我们可以将证明归结为所涉及的函数也属于 C^3 类的情形。在这种情况下，只需计算一阶、二阶和三阶导数的符号即可完成证明。 □

取值于有序巴拿赫空间的 n-凸函数，可以按照实值 n-凸函数的相同方式，利用差商来定义。下面回顾一些有用的定义。

回顾一下，有序巴拿赫空间 是指任意赋予序关系 $\leq$ 的巴拿赫空间 E，该序关系由闭凸锥 E_+ 通过以下公式定义

$$x \leq y \text{ if and only if } y - x \in E_+,$$

使得

$$E = E_+ - E_+, \quad (-E_+) \cap E_+ = \{0\},$$

and

$$0 \leq x \leq y \text{ in } E \text{ implies } \|x\| \leq \|y\|.$$

关于有序巴拿赫空间理论的基本事实，可参见 Schaefer 和 Wolff 的著作 [33]。另见 [25]，其中简要介绍了两个重要的特例： $\mathbb{R}^n$，即 n维欧几里得空间，赋予逐坐标序；以及 Sym($n, \mathbb{R}$)，即由所有$n \times n$ 实系数对称矩阵构成、赋予算子范数的有序巴拿赫空间

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ax, x \rangle|,$$

以及 L¨owner（部分）序，

$$A \leq B \text{ if and only if } \langle A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \leq \langle B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

这里的算子范数可以替换为任意 Schatten 范数，特别是弗罗贝尼乌斯范数，

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

弗罗贝尼乌斯范数与迹内积相对应

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{trace}(AB).$$

$\mathbb{R}^n$ 的正锥是第一象限 $\mathbb{R}^n_+$，而 Sym(n, $\mathbb{R}$) 的正锥是集合 Sym$^+$(n, $\mathbb{R}$)，它由所有半正定矩阵组成。我们分别用 $\mathbb{R}^n_{++}$ 和 Sym^{++}(n, $\mathbb{R}$) 表示 $\mathbb{R}^n_+$ 和 Sym$^+$(n, $\mathbb{R}$) 的内部。

注 1。对向量值凸函数的许多研究都可以归结为对实值函数的研究。事实上，在任意有序巴拿赫空间 E 中，任何形如 $u \leq v$ 的不等式都等价于对所有 $x^* \in E_+^*$， $x^*(u) \leq x^*(v)$ 。

因此，函数 $f : I \to E$ 是非递减、凸或 n-凸的，当且仅当 $x^* \in E^*$ 是正泛函时， $x^* \circ f$ 具有相应性质。对于 $E = \mathbb{R}^n$，该不等式可化为关于 f 的分量不等式。

结合注 1与引理 1 可得到以下检验向量值可微函数 3-凸性的实用方法：

定理 2. 假设 f 是定义在区间 I 上且取值于有序巴拿赫空间 E 的连续函数。若 f 在 I 的内部三次可微，且 $f''' \geq 0$，则 f 是一个3-凸函数。

定理2 的一个例子由以下函数给出：

$$f : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R}), \quad f(t) = -e^{-tA},$$

与半正定矩阵 $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ 相关联。该函数属于 C^∞ 类，其前三阶导数由以下公式给出：

$$f'(t) = Ae^{-tA}, \quad f''(t) = -A^2e^{-tA}, \quad f'''(t) = A^3e^{-tA}.$$

因此，f 是非递减、凹且 3-凸的（按照 $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ 的序）。矩阵 A^3e^{-tA} 是半正定的，因为对易的半正定矩阵之积也是半正定的。

3. The functional inequality of Popoviciu

Popoviciu [32] 于 1946年 发表了一篇关于函数不等式的短文，我们在此以稍微更一般的形式重述该不等式。

定理 3. 假设 E 是一个有序巴拿赫空间，且 $f: [0, A] \to E$ 是一个连续的 n-凸函数 $(n \geq 1)$。那么

$$f(\sum_{i=1}^n x_i) - \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n-1}\leq n} f(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{n-1}})$$

$$+\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n-2}\leq n} f(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{n-2}})-\cdots+(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n f(x_i) \geq (-1)^{n-1}f(0),$$

对于所有满足 $\sum_{i=1}^n x_i \leq A$. 的 $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

注意到，这个不等式可以改写为

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0,1\}} (-1)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)} f(\varepsilon_1x_1 + \cdots + \varepsilon_nx_n) \geq 0.$$

Popoviciu 仅在 $n = 3$ 的情形下给出了详细证明，其中函数 f 在原点处取值为零，且二阶导数存在并非递减。

定理 3 的证明采用归纳法，从 Hardy-Littlewood-P´olya 主序不等式的以下特例开始（见 [26, 定理 4.1.3，第 186]页）：

引理 3。 若 $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续凸函数，且 c 和 d 是 $[a, b]$ 中的两点，满足 $a + b = c + d$，则

$$g(c) + g(d) \leq g(a) + g(b).$$

定理 3 的证明。 情形 $n = 1$ 是显然的，因为 1-凸性等价于 f 非递减。对于 $n = 2$，所讨论的不等式为

$$f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2) + f(0),$$

这由引理 3 得出。因此，假设定理3的结论对所有连续的 n-凸函数以及所有 x_1，x_2，....., $x_n \geq 0$ 均成立，其中 $\sum_{i=1}^n x_i \leq A$.

令 f 为一个连续（$n + 1$）凸函数。根据注 1，我们可以假设 f 取实值；而 Popoviciu 逼近定理（定理 1）允许我们将讨论范围限制在 C^1. 类函数上。于是 f' 连续且 n凸；函数 $\varphi(x) = f'(x_1 + x)$也具有相同性质。根据归纳假设，若 x_1, ..., $x_n, x_{n+1} \geq 0$ 且 $x_1 + \cdots + x_{n+1} \leq A$，则有

$$f'(\sum_{i=1}^{n+1} x_i) - \sum_{2\leq i_1<\cdots<i_{n-1}\leq n+1} f'(x_1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{n-1}})$$

$$+\sum_{2\leq i_1<\cdots<i_{n-2}\leq n+1} f'(x_1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_{n-2}})$$

$$-\cdots+(-1)^{n-1}\sum_{2\leq j\leq n+1} f'(x_1 + x_j) \geq (-1)^{n-1}f'(x_1).$$

对变量进行置换，也可得到类似的不等式。

设 x_2，x_3，.....，x_{n+1} 固定，$[0,A]$ 中的 $x_1 \geq 0$ 为变量，且满足 $x_1+\cdots+x_{n+1} \leq A.$。由公式定义的函数 F

$$F(x_1) = f(\sum_{i=1}^{n+1} x_i) - \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_n\leq n+1} f(x_{i_1}+\cdots+x_{i_n}) + \cdots + \\ + (-1)^{n-1} \sum_{1\leq i<j\leq n+1} f(x_i+x_j) + (-1)^n \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) + (-1)^{n+1} f(0)$$

可微，并且根据归纳假设，

$$F'(x_1) = f'\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right) - \sum_{2\leq i_1<\cdots<i_{n+1}\leq n+1} f'(x_1+x_{i_1}+\cdots+x_{i_{n-1}}) + \\ + (-1)^{n-1} \sum_{2\leq j\leq n+1} f'(x_1+x_j) + (-1)^n f'(x_1) \geq 0.$$

因此，F 是一个非递减函数，故 $F(x_1) \geq F(0) = 0$。综上，F 是一个非负函数，证明完毕。□

值得注意的是，利用差分算子可以将波波维丘不等式转化为 n-凸性的刻画。

差分算子 Δ_h（步长为 $h \geq 0$）可在许多情况下引入，包括定义在 n维区间、凸锥、有序阿贝尔半群等上的函数。对于每个这样的函数 f，差分算子都将其关联到由下式定义的函数 $\Delta_h f$

$$(\Delta_h f)(x) = f(x+h) - f(x),$$

对于所有使右侧公式有意义的 x 和 h。

显然，差分算子是线性的，且彼此可交换，

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2} = \Delta_{h_2}\Delta_{h_1}.$$

它们还具有以下平移不变性：

$$\Delta_h(f\circ T_a) = (\Delta_h f)\circ T_a,$$

其中 T_a 是由公式 $T_a(x) = x+a.$ 定义的平移

引理 4. 如果 n 是正整数，则以下公式成立：

$$\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n} f(x) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0,1\}} (-1)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)} f(x+\varepsilon_1 h_1+\cdots+\varepsilon_n h_n).$$

证明由数学归纳法可立即得出。

连续函数 f 在区间 I上定义，其凸性可通过差分算子如下刻画：

定理 4. 连续函数 $f\colon\ I\to\mathbb{R}$ 是凸函数，当且仅当下列不等式成立，

$$\Delta_a\Delta_b f(x) = f(a+b+x) - f(a+x) - f(b+x) + f(x) \geq 0 \tag{3.1}$$

对所有内点 $x\in I$ 以及所有满足 $x+a+b\in I.$ 的 $a,b\geq 0$

换言之，对于定义在区间上的连续函数，凸性等价于具有二阶正差分这一性质。

证明。 凸性蕴含不等式 $\Delta_a\Delta_b f \geq 0$ 这一事实是 Hardy-Littlewood-P´olya 主序不等式的推论。参见引理 3。另一方面，对于 $u < v$ 任意固定于 I 的，取 $a = b = (v-u)/2$ 和 $x = u$，由（3.1）可得

$$\frac{f(u)+f(v)}{2} \geq f\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

这等价于凸性，因为 f 假设为连续函数。参见 [26,定理 1.1.8，第 5]。□

以下结果将定理4 推广到高阶凸性的情形，其源自 Boas 和 Widder 的一篇旧论文 [7]。

定理5。设 $f\colon [0,A] \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，且 $n \geq 1$ 是一个整数。那么以下条件等价：

(i) f 是 n-凸的；
(ii) f 具有 n 阶正差分，意义是

$$\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\cdots\Delta_{x_n} f(t) \geq 0$$

对于所有满足 $t + x_1 + \cdots + x_n \leq A$. 的点 $t, x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

将区间 $[0,A]$ 替换为 $\mathbb{R}_+$ 和 $\mathbb{R}$.，结论同样成立

证明。 蕴含关系 $(i) \Longrightarrow (ii)$ 可由定理 3应用于n-凸函数 $g(x) = f(x+t) - f(t)$ 得出。 Boas 和 Widder 的论文还提供了另一种证明 [7]。

逆向蕴含显然成立，其证明见 Kuczma 所著书籍中的 [16, 定理 15.3.1，第 430] 页。当 $n = 3$ 时，蕴含关系（ii）$\Longrightarrow$（i）的一个极简证明可见于 [2, 命题 1]。□

推论 1。 设 E 是一个有序巴拿赫空间，且 $f\colon [0,A] \to E$ 是一个连续函数。那么，当且仅当 f 满足以下不等式时，它是 n-凸的

$$\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\cdots\Delta_{x_n} f(x) = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\in\{0,1\}} (-1)^{n-(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n)} f\left(x+\varepsilon_1 x_1+\cdots+\varepsilon_n x_n\right) \geq 0$$

对于满足 $x + x_1 + \cdots + x_n \leq A$ 的所有点 x、x_1、.....、$x_n \in [0,A]$。

特别地，连续函数 $f\colon [0,A] \to E$ 是 3-凸的，当且仅当它满足以下不等式

$$f(x+t)+f(y+t)+f(z+t)+f(x+y+z+t) \geq f(x+y+t)+f(y+z+t)+f(z+x+t)+f(t)$$

对于满足 $x+y+z+t \leq A$ 的所有点 x、y、z、$t \in [0,A]$。

定理 3 和定理 5 都可以成功应用，以推导出 Bernstein 函数和定义在 $[0,\infty)$ 上的完全单调函数满足的若干有用不等式。 我们将在下一节回到这个问题。

在高维中，通常凸性与具有二阶正差分这一性质之间的等价关系不再成立。下面给出一些简单的例子。

例 1. 考虑无穷次可微函数

$$f(x,y) = -2\left(xy\right)^{1/2}, \quad x,y \in (0,\infty).$$

该函数是凸函数，其海森矩阵为半正定矩阵

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^{-3/2}y^{1/2} & -x^{-1/2}y^{-1/2} \\ -x^{-1/2}y^{-1/2} & x^{1/2}y^{-3/2} \end{pmatrix}.$$

然而， Φ 不满足该不等式

$$\Delta_A\Delta_B f(X) \geq 0 \quad for\ A,B,X \in (0,\infty)\times(0,\infty);$$

例如，取 $A = (1,2)$ $B = (2,1)$，并令 X 接近原点。

例 2。函数

$$M : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}, \quad M\left(x,y\right) = \min\left\{x,y\right\}$$

是连续凹函数。此外，它具有二阶正差分，如下所示

$$\begin{aligned}\min\left\{x+s+u, y+t+v\right\} - \min\left\{x+s, y+t\right\} \\ - \min\left\{x+u, y+v\right\} + \min\left\{x,y\right\} \geq 0,\end{aligned}$$

对于所有 $s,t,u,v > 0$. 函数 M 在统计学中可用作联合分布函数的 ***Fr´echet-Hoeffding*** 上界，适用于随机变量。参见 ***Nelsen*** [24]。

Popoviciu [29, 31]利用多重差商引入了多变量函数的高阶凸性概念。为了更深入地了解这一概念，我们考虑定义在区间乘积 $I \times J$ 上的函数 $f = f(x,\ y)$ 的情形。设 $x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_m$ 是 I 中互不相同的点，且 $y_0,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_n$ 是 J. 中互不相同的点。二重差商 由以下公式定义：

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad \left[\begin{matrix} x_0, & x_1, & \ldots & , x_m \\ y_0, & y_1, & \ldots & , y_n \end{matrix}; f\right] &= [x_0,x_2,\ldots,x_m;[y_0,y_1,\ldots,y_n;f((x,\cdot)]] \\ &= [y_0,y_1,\ldots,y_n;[x_0,x_1,\ldots,x_m;f((\cdot,y)]].\end{aligned}$$

注意，该公式在变量 x_k 的置换下保持不变（对变量 y_k 的置换也同样如此）。

类比一维情形，Popoviciu [29, 在第 78] 页将函数 f: $I \times J \to \mathbb{R}$ 称为 $(,\ n)$ 上的凸函数，若其差商

$$\left[\begin{matrix} x_0, & x_1, & \ldots & , x_m \\ y_0, & y_1, & \ldots & , y_n \end{matrix}; f\right]$$

对所有互不相同的点 $x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_m \in I$ 和 $y_0,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_n \in J$ 均为非负。

毋庸置疑，研究这一凸性概念需要一套艰深的形式体系，因此自 Popoviciu 时代以来进展甚微。近期唯一的相关成果是 [12]，研究了 $m = n = 1$ 和 $m = n = 2$. 两种情形。

4. The case of completely monotone functions on cones

利用凸分析，可以轻松地将完全单调函数理论推广到多变量情形。下文中， V 表示一个有限维实向量空间， $\mathcal{C}$ 表示 V 中的一个开凸锥，其闭包为$\mathcal{C}$。其对偶锥为 $\mathcal{C}^* = \{y \in E^* :$ 对于所有 $x \in \mathcal{C}\}$， $\langle y,x\rangle \geq 0$ 。 C^* 中的点是在线性泛函，且在 $\mathcal{C}$上非负。

定义 1. 若函数 $f:\ \mathcal{C}\to\mathbb{R}_+$ 满足：f 在$\mathcal{C}$ 上是 $\mathcal{C}^\infty$，并且对于所有整数 $k\geq 1$ 以及所有向量 v_1、.....、 $v_k\in\mathcal{C}$，都有

$$(-1)^k D_{v_1}\cdots D_{v_k}f(x)\geq 0 \quad for\ all\ x\in\mathcal{C}. \tag{4.1}$$

此处 D_v 表示沿向量 v的方向导数。

函数 $f:\mathcal{C}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ 称为完全单调函数，若它是定义在 $\mathcal{C}$.上的完全单调函数的连续延拓

当 $\mathcal{C}=(0,\infty)^n$时，条件 (4.1) 表示

$$(-1)^k\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x)\geq 0$$

对所有 $x\in(0,\infty)^n$ 以及任意长度 k.的所有指标集合 $1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k\leq n$

与单个实变量的完全单调函数情形一样，这些函数可以表示为对偶锥上博雷尔测度的拉普拉斯变换。

定理 6。（伯恩斯坦–豪斯多夫–魏德–肖凯定理）。设 f 是开凸锥 $\mathcal{C}$上的非负连续函数。那么，当且仅当 f 是支撑在对偶锥 $\mathcal{C}^*$上的唯一博雷尔测度 μ 的拉普拉斯变换时，f 才是完全单调的，即

$$f(x)=\int_{\mathcal{C}^*}e^{-\langle y,x\rangle}\mathrm{d}\mu(y)\quad for\ all\ x\in\mathcal{C}.$$

当 f 可以连续延拓到 $\mathcal{C}$时，最后一个等式对所有 $x\in\mathcal{C}$.都成立

详情请参见肖凯 [8]。

注 2。 找到使定理 μ 6 中的公式成立的正博雷尔测度，是检验 f完全单调性的一种实用方法。黎斯核的情形也一样：若 α_1，α_2，.....，$\alpha_N>0$，那么

$$x_1^{-\alpha_1}x_2^{-\alpha_2}\cdots x_N^{-\alpha_N}=\int_{\mathbb{R}^N_{++}}e^{-\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle}\frac{x_1^{-\alpha_1}x_2^{-\alpha_2}\cdots x_N^{-\alpha_N}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_N)}\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N_{++}$. 参见 [15, 命题 2。7]。更微妙的情形是行列式的负幂

$$f(X)=(\det X)^{-\rho},\quad X\in\mathrm{Sym}^{++}(N,\mathbb{R}),$$

对于这种情形，*Scott* 和 *Sokal* [35] 已经证明，当且仅当 $\rho\in\{0,1/2,1,3/2,...,(N-1)/2\}\cup((N-1)/2,\infty)$时，它是完全单调的。另见 [15, 定理 4。1]。值得注意的是，*Siegel* 在 *1929* 年建立了如下公式

$$(\det A)^{-\rho}=\int_{\mathrm{Sym}^{++}(N,\mathbb{R})}e^{-\operatorname{trace}AX}\frac{(\det X)^{\rho}\ \mathrm{d}X}{\pi^{n(n-1)/4}\Gamma(\rho)\Gamma(\rho-1/2)\cdots\Gamma(\rho-(n-1)/2))}$$

对所有 $A\in\mathrm{Sym}^{++}(N,\ \mathbb{R})$ 以及 $\rho\geq(N+1)/2$. 参见 [38, Hilfssatz 37，第 585] 页。

接下来，我们将推广（并改进）Sendov 和 Zitikis 的一个结果；参见 [36, 定理 4.1，第 76] 页。

定理 7。 每个完全单调函数 $f:\ \mathcal{C}\to\mathbb{R}_+$ 都满足

$$\sum\nolimits_{i=1}^n f(x_i)-\sum\nolimits_{1\leq i<j\leq n}f(x_i+x_j)+\cdots+(-1)^{n-1}f(\sum\nolimits_{i=1}^n x_i)\geq 0, \tag{4.2}$$

对于每个 x_1、…、$x_n \in \mathcal{C}$ 和 $n \geq 1.$，当 f 可连续延拓至 $\mathcal{C}$ 时，那么 f 满足双重不等式

$$f(0) \geq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} f(x_i+x_j) + \cdots + (-1)^{n-1} f(\sum_{i=1}^{n} x_i) \geq 0, \tag{4.3}$$

对任意 x_1、…、$x_n \in \overline{\mathcal{C}}$ 和 $n \geq 1.$

对于 $n = 3$，定理 7 的第一个结论可写为

$$\sum_{i=1}^{3} f(x_i) - \sum_{1\leq i<j\leq 3} f(x_i + x_j) + f(\sum_{i=1}^{3} x_i) \geq 0,$$

这正是 Hornich-Hlawka 型不等式。

定理 7 的证明需要以下辅助结果。

引理 5. 有

$$P = \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha_i} - \sum_{1\leq i<j\leq n} e^{-(\alpha_i+\alpha_j)} + \cdots + (-1)^{n+1} e^{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} \geq 0$$

and

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\alpha_i}\right) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(1 - e^{-(\alpha_i+\alpha_j)}\right) + \cdots + (-1)^{n+1} \left(1 - e^{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}\right) \geq 0,$$

只要 α_1、…、$\alpha_n \in \mathbb{R}_+$ 和 $n \geq 2.$

证明。事实上，

$$S = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - e^{-\alpha_i}\right) \text{ and } Q = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} - S = 1 - S.$$

□

定理 7 的证明。根据定理 6，f 具有如下积分表示

$$f(x) = \int_{\mathcal{C}^*} e^{-\langle y,x\rangle} \mathrm{d}\mu(y) \quad \text{for all } x \in \mathcal{C},$$

其中 μ 是定义在 $\mathcal{C}^*$. 上的博雷尔测度。那么，考虑到引理 5的第一个断言，我们得到不等式

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\mathcal{C}^*} \sum_{i=1}^{n} e^{-\langle x_i,y\rangle} - \sum_{1\leq i<j\leq n} e^{-\langle x_i+x_j,y\rangle} \\ + \cdots + (-1)^{n-1} e^{-\langle \sum_{i=1}^{n} x_i,y\rangle} \Big] \mathrm{d}\mu(y) \\ = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} f(x_i + x_j) + \cdots + (-1)^{n-1} f(\sum_{i=1}^{n} x_i). \end{aligned}$$

当 f 定义在 $\mathcal{C}$ 上时，可用同样的方法处理，并使用引理 5的两个断言。□

结合定理 7 与 Scott 和 Sokal 前述的结果（见注 2），可得到以下结果：

推论 2. 若 $\rho \in \{0, 1/2, 1, 3/2, ...\} \cup [(N-1)/2, \infty)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \det{}^{-\rho}(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \det{}^{-\rho}(A_i + A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \det{}^{-\rho}(\sum_{i=1}^{n} A_i) \geq 0,$$

对每个 $A_1, \ldots, A_n \in$ 对称$^{++}(N, \mathbb{R})$ 以及 $n \geq 1$.

根据推论2 ，人们可能会想知道定理7 是否也能推广到初等对称多项式。事实证明，情况更为微妙，下面的讨论将给出一个有条件的答案。回顾一下，对于任意$m = 0$，1，……，N，m次初等对称多项式 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$定义如下：

$$E_{m,N}(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq N} x_{i_1} \ldots x_{i_m}.$$

请注意，行列式以及函数$E_{m,\ N}$ 按照 G˚årding 的定义都是双曲多项式。有关这一概念的详细信息，请参阅 [26, 第4节.6]。Kozhasov、Michalek 和 Sturmfels 给出了一个构造性证明，说明任意初等对称多项式 $E_{m,\ n}$ 都存在实数指数 $\alpha' > 0$ ，使得 $E_m^{-\alpha}{}_{,\ n}$ 对所有 $\alpha \geq \alpha'$ 都在 $\mathbb{R}^N_{++}$ 上完全单调——参见 [15, 定理 6.4]。

注3。 e^{-x} 在 $\mathbb{R}_+$ 上的限制是一个完全单调函数，因此它满足不等式

$$e^{-x_1} + e^{-x_2} + e^{-x_3} + e^{-(x_1+x_2+x_3)} \geq e^{-(x_1+x_2)} + e^{-(x_2+x_3)} + e^{-(x_3+x_1)}.$$

然而，存在 x_1、x_2、$x_3 > 0$ 使得

$$e^{-x_1} + e^{-x_2} + e^{-x_3} + e^{-(x_1+x_2+x_3)} \ngeq e^{-(x_1+x_2)} + e^{-(x_2+x_3)} + e^{-(x_3+x_1)} + e^0.$$

这表明不等式

$$\sum_{i=1}^3 f(x_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} f(x_i + x_j) + f(\sum_{i=1}^3 x_i) \geq f(0),$$

不能刻画连续函数类中的3-凸性。

伯恩斯坦函数 $f\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 也满足不等式（4.2），这一事实 可由引理 ′和 Lévy-Khintchine 定理（定理3.2，第 15 页，见 [34]）得出。该定理断言，每个此类函数都具有如下积分表示

$$f(x) = a + bx + \int_0^\infty (1 - e^{-xt}) \mathrm{d}\mu(t)$$

对某些常数 a，$b \geq 0$ 以及定义在 $[0, \infty$上的正测度 μ，使得

$$\int_0^\infty \min\{1, t\}\, \mathrm{d}\mu(t) < \infty.$$

据我们所知，尚无人尝试将伯恩斯坦函数理论推广到定义在锥上的函数这一框架中。

5. Functions with positive differences on cones

差分算子 $\Delta_h f\colon\ x \to \Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x)$ 对定义在凸锥 $\mathcal{C}$ 上的函数 f 是良定义的。若函数满足以下条件，则称其为具有 $()$ 阶正差分的函数：

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \cdots \Delta_{h_n} f(x) \geq 0 \quad \text{for all } x, h_1, h_2, \ldots, h_n \in \mathcal{C}.$$

为方便起见，若 $f \geq 0.$，则称 f 具有0 阶正差分

在文献中，n-绝对单调性这一概念的含义是，所讨论的函数对所有 $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. 都具有阶数为 k 的正差分

定理 8. 若 $f : \mathcal{C} \to F_+$ 是一个完全单调函数，则 f 具有任意偶数阶 $k = 0,2,4,\ldots$ 的正差分；在相同假设下， $-f$ 具有任意奇数阶 $k = 1, 3, 5, \ldots$ 的正差分。

这可由 Gˆateaux 可微性意义下的单调性的刻画轻易得出（正如 Amann [1], 命题 3.2，第 184 页所证明的）：

引理 6. 设 E 和 F 是两个有序巴拿赫空间， $\mathcal{C}$ 是 E 的一个凸子集，且其内部非空 $\operatorname{int}\mathcal{C}$ ，并且 Φ ： $\mathcal{C} \to F$ 是一个函数，在 $\mathcal{C}$ 上连续且在 $\operatorname{int}\mathcal{C}$. 上 *Gˆateaux* 可微。那么， Φ 在 $\mathcal{C}$上单调不减，当且仅当

$$D\Phi(a)[v] = \frac{\Phi(a+tv) - \Phi(a)}{t} \geq 0$$

对所有点 $a \in \operatorname{int}\mathcal{C}$ 以及所有向量 $v \in E_+$.

例 3. 每个如下形式的函数

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = f\left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}\rangle\right), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N_+,$$

与一个连续的 n-凸函数 f： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 及一个向量 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^N_+$ 相关联，具有 n阶正差分。

证明显然，从 $n = 3$. 的情形即可看出。事实上，在这种情形下，对每个 $\boldsymbol{x}$、 $\boldsymbol{y}$、 $\boldsymbol{z}$、 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n_+$ ，我们有

$$\begin{aligned}
&\Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}) + \Phi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}) + \Phi(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}) + \Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}) \\
&\qquad - \Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}) - \Phi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}) - \Phi(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}) - \Phi(\boldsymbol{t}) \\
&\quad = f\left(\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) + f\left(\langle \boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) + f\left(\langle \boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) + f\left(\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) \\
&\quad - f\left(\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) - f\left(\langle \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) - f\left(\langle \boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) - f(\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle) \\
&\qquad = f\left(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) + f\left(\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) + f\left(\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) \\
&+ f\left(\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) - f\left(\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) - f\left(\langle \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}\rangle + \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) \\
&\qquad\qquad - f\left(\langle \boldsymbol{z}+\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\rangle + \langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle\right) - f(\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{v}\rangle) \geq 0.
\end{aligned}$$

这个例子的一个变体由以下映射给出

$$\Psi(A) = f\left(\operatorname{trace}(AW)\right), \quad A \in \operatorname{Sym}^+(n, \mathbb{R}),$$

它与连续的 n-凸函数 f： $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 以及算子 $W \in \mathbb{R}^N_+$. 相关联。在这种情况下，所在的希尔伯特空间是 $\operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$，并赋予弗罗贝尼乌斯范数和 *L ¨owner* 序。

线性代数中有许多函数的例子，它们具有任意阶的正差分 $n \geq 0$. 行列式函数 det 限制在 $\operatorname{Sym}^+(N, \mathbb{R})$ 上便是其中一例（不过 det 并非完全单调）。

显然， $\det(X) \geq 0$ 并且由于 det 在半正定矩阵上单调，

$$\left(\Delta_A \det\right)(X) = \det(X + A) - \det(X) \geq 0,$$

对所有 A， $X \in \operatorname{Sym}^+(N, \mathbb{R})$。 同样显而易见的是

$$\left(\Delta_A \left(\Delta_B \det\right)\right)(X) = \det\left(A + B + X\right) - \det\left(A + X\right) - \det(B + X) + \det(X) \geq 0$$

对所有 $A, B, X \in \operatorname{Sym}^+(N, \mathbb{R})$. 这一不等式见 [42, 问题 36, 第 215] 页。对于 $X = 0$ ，它可归结为行列式函数的超可加性这一性质，

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B).$$

我们的下一个目标是证明更具挑战性的三阶不等式

$$\Delta_A\left(\Delta_B(\Delta_C \det)\right) \geq 0.$$

在陈述证明之前，我们需要一些预备引理。

引理 7. 令 $A, B, C \in \mathrm{Sym}^+(N, \mathbb{R})$，并令 $e_k(X)$ 表示矩阵 X $(0 \leq k \leq N)$ 的 k 阶初等对称函数。那么，

$$e_k(A) + e_k(B) + e_k(C) + e_k(A+B+C) \geq e_k(A+B) + e_k(B+C) + e_k(C+A).$$

证明。回忆一下，对于一个 $N \times N$ 矩阵 X，有 $e_k(X) = \mathrm{tr}(\wedge^k X)$，其中 $\wedge$表示反对称张量积；此外，$\wedge^k(X) = P_k^*(\otimes^k X)P_k$ 对于一个适当的投影矩阵 P_k——例如参见 [5, 第 18] 页了解这些事实。将 P_k 应用于文献中的定理 2.1，[3],即可得到关于 e_k 所述的不等式。□

引理 8. 若 A，B，C，$X \in \mathrm{Sym}^+(N, \mathbb{R})$，则

$$\begin{aligned}\det(A+X) + \det(B+X) + \det(C+X) + \det(A+B+C+X)\\ \geq \det(A+B+X) + \det(B+C+X) + \det(C+A+X) + \det X.\end{aligned}$$

对于 $X = 0$，我们得到行列式型霍尼奇–赫劳卡不等式

$$\begin{aligned}\det A + \det B + \det C + \det(A+B+C)\\ \geq \det(A+B) + \det(B+C) + \det(C+A),\end{aligned}$$

最早由 Lin 注意到，[18], 他给出了一个基于特征值主序的证明。

证明。不失一般性，我们可以假设 X 可逆（例如，必要时将 X 替换为 $X + \varepsilon I$）。于是

$$\det(A+X) = \det(X)\det(X^{-1/2}AX^{-1/2} + I),$$

其中 I 是单位矩阵；所讨论的不等式等价于

$$\begin{aligned}\det(A+I) + \det(B+I) + \det(C+I) + \det(A+B+C+I)\\ \geq \det(A+B+I) + \det(B+C+I) + \det(C+A+I) + 1.\end{aligned}$$

考虑函数 $f(A) := \det(A+I) - 1$。于是上述不等式变为

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(A+B+C) \geq f(A+B) + f(B+C) + f(C+A). \tag{5.1}$$

现在回忆一下众所周知的展开式

$$\det(A+I) = \sum_{k=0}^{N} e_k(A),$$

其中 $e_k(\cdot)$ 表示 k 阶初等对称多项式（$e_0 = 1$，e_1 =迹 ……，e_N =行列式）——参见 [22, 定理 7.1.2，第 197] 因此，$f(A) = \sum_{k=1}^{N} e_k(A)$，不等式 (5.1) 变为

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\left[e_k(A) + e_k(B) + e_k(C) + e_k(A+B+C)\right]\\ \geq \sum_{k=1}^{N}\left[e_k(A+B) + e_k(B+C) + e_k(C+A)\right].\end{aligned}$$

证明最后对每个 7 应用引理 $k \in \{1, \ldots, N\}$。□

运用 [3, 推论 3。4] 可通过类似论证得出，函数 det 具有任意阶正差分。

定理 9。我们有

$$\begin{aligned}&\Delta_{A_1}\left(\Delta_{A_2}(\ldots(\Delta_{A_n}\det)))\right)(X)\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\det(A_{i_1}+\cdots+A_{i_k}+X)\geq 0,\end{aligned}$$

当 $A_1,\ldots,A_n,X\in\mathrm{Sym}^+(N,\mathbb{R})$ 且 $n\geq 1$. 时。换言之，将 行列式 函数限制在 $\mathrm{Sym}^+(N,\mathbb{R})$ 上，具有任意阶的正差分 $n\geq 0$.

引理 8 可推广到更大一类矩阵函数，即 immanant。与子群 d_χ^G 相关的 *immanant* 函数 G （它是对称群 $\mathcal{S}_N$ 中由 N 个字母组成的集合）以及不可约特征标 χ G，定义如下

$$d_\chi^G(A)=\sum\nolimits_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\prod\nolimits_{i=1}^{N}a_{i\ \sigma(i)},\ A\in\mathrm{Sym}^+(N,\mathbb{R}).$$

当 $G=\mathfrak{S}_m$ 且 $\chi(\sigma)=\operatorname{sgn}\sigma$ 时，我们有 $d_\chi^G(A)=$行列式 A，而对于 $\chi(\sigma)\equiv 1$，则得到 A. 的积和式

以下两个不等式

$$d_\chi^G(A+X)-d_\chi^G(X)\geq 0$$

$$d_\chi^G(A+B+X)-d_\chi^G(A+X)-d_\chi^G(B+X)+d_\chi^G(X)\geq 0$$

对所有 A， B， $X\in\mathrm{Sym}^+(N,\ \mathbb{R})$ 都成立。 分别参见 Merris [21], 第 228 页，以及 Paksoy、Turkmen 和 Zhang [27]。由于 d_χ^G 在 Sym 上具有三阶正差分$^+(N,\ \mathbb{R})$, 以下结果的目标是:

定理 10。若 A， B， C， $X\in\mathrm{Sym}^+(N,\ \mathbb{R})$，则

$$\begin{aligned}&d_\chi^G(A+X)+d_\chi^G(B+X)+d_\chi^G(C+X)+d_\chi^G(A+B+C+X)\\&\qquad\geq d_\chi^G(A+B+X)+d_\chi^G(B+C+X)+d_\chi^G(C+A+X)+d_\chi^G(X).\end{aligned}$$

利用多重线性代数中的论证，可以证明存在一个矩阵$Z_{G,\ \chi}$ 使得

$$d_\chi^G(X)=Z_{G,\chi}^*\left(\otimes^N X\right)Z_{G,\chi}.\tag{5.2}$$

参见 [20], 第 126 页。表示式（5.2）使定理10 中的断言直接成为以下一般结果的推论:

定理 11。（算子 *Hornich-Hlawka* 不等式）。若 $A,B,C,X\in\mathrm{Sym}^+(N,\mathbb{R})$且 $p\geq 1$ 为整数，则

(5.3)

$$\begin{aligned}&\otimes^p(A+X)+\otimes^p(B+X)+\otimes^p(C+X)+\otimes^p(A+B+C+X)\\&\qquad\geq\otimes^p(A+B+X)+\otimes^p(B+C+X)+\otimes^p(C+A+X)+\otimes^p X,\end{aligned}$$

按 L ¨序。此处 $\otimes$ 表示通常的张量积。

定理 11 的证明遵循 [3, 定理 2。1], 但由于多出了 X 项（5.3）， 证明变得更加复杂，需要做一些准备。我们先引入以下便于使用的记号:

$$X^j\equiv\otimes^j X=X^{\otimes j},\ \text{ for }\ j\geq 1,\quad\text{and } X^0=1\in\mathbb{N}.\tag{5.4}$$

稍微滥用一下记号 $X^0 = 1$ 将有助于简化表述。

引理 9。设 k、$l \geq 0$ 为整数，且 X、Y、Z、$V \in \mathrm{Sym}^+$（N、$\mathbb{R}$）。那么，

$$X^k \otimes V \otimes X^l + (X+Y+Z)^k \otimes V \otimes (X+Y+Z)^l \\ \geq (X+Y)^k \otimes V \otimes (X+Y)^l + (X+Z)^k \otimes V \otimes (X+Z)^l,$$

按 *L ¨owner* 序的意义下。

证明。证明采用关于 k 和 l 的归纳法；我们给出针对 k 的论证，而该论证对 l 本质上同样成立。此方法已足够，因为对任意固定的 $l \geq 0$，我们证明结论对所有 $k \geq 0$ 都成立；类似地，对任意固定的 $k \geq 0$，结论对所有 $l \geq 0$ 都成立。

在归纳法的基例中，假设 $k = 0$。此时，所讨论的不等式化简为以下不等式：

$$V \otimes X^l + V \otimes (X+Y+Z)^l \geq V \otimes (X+Y)^l + V \otimes (X+Z)^l. \tag{5.5}$$

由 [3,定理 2。1] 可知

$$X^l + (X+Y+Z)^l \geq (X+Y)^l + (X+Z)^l. \tag{5.6}$$

由于张量积保持不等式，在不等式（ V 的两边同时与5.6）取张量积，立即可得（5.5）。因此，假设引理9 陈述中的不等式对固定的 l 和某个 $k > 0$成立。接下来，考虑

$$\begin{aligned}(X+Y+Z)^{k+1} &\otimes V \otimes (X+Y+Z)^l \\ &= (X+Y+Z) \otimes \left[(X+Y+Z)^k \otimes V \otimes (X+Y+Z)^l\right] \\ &\geq (X+Y+Z) \otimes \Big[(X+Y)^k \otimes V \otimes (X+Y)^l \\ &\quad + (X+Z)^k \otimes V \otimes (X+Z)^l - X^k \otimes V \otimes X^l\Big], \\ = (X+Y)^{k+1} &\otimes V \otimes (X+Y)^l + (X+Z)^{k+1} \otimes V \otimes (X+Z)^l - X^{k+1} \otimes V \otimes X^l + \mathcal{T},\end{aligned}$$

这里的不等式由归纳假设以及张量积的基本单调性性质得出。接下来只需证明这一项

$$\mathcal{T} = Z \otimes (X+Y)^k \otimes V \otimes (X+Y)^l + Y \otimes (X+Z)^k \otimes V \otimes (X+Z)^l - (Y+Z) \otimes X^k \otimes V \otimes X^l$$

是一个非负算子。由于 X，Y，$Z \geq 0$，可知 $X+Y \geq X$ 且$X+Z \geq X$。因此，$\mathcal{T}$中与 Y和 Z 对应的正项显然分别大于负项，从而 $\mathcal{T} \geq 0$。通过归纳法可得，对于固定的 l，引理9 陈述中的不等式对所有 $k \geq 0$均成立。对 l采用类似论证，即可得出该不等式具有普遍性。□

现在我们可以详细说明定理11的证明。

定理*11*的证明。利用辅助函数

$$f_p(Z) = (Z+X)^p - X^p,$$

所关注的不等式（5.3）可改写为

$$f_p(A) + f_p(B) + f_p(C) + f_p(A+B+C) \geq f_p(A+B) + f_p(B+C) + f_p(C+A).$$

现在引入函数

$$g_p(Z) = f_p(Z)+f_p(B)+f_p(C)+f_p(Z+B+C)-f_p(Z+B)-f_p(Z+C)-f_p(B+C).$$

我们将证明 g_p 是单调的（作为一个从 $\mathrm{Sym}^+(N,\ \mathbb{R})$ 到自身的映射，依据 L¨owner 序）。一旦确立了这种单调性，我们便可得出

$$g_p(A) \geq g_p(0) = 0 \quad \text{for every } A \in \mathrm{Sym}^+(N,\mathbb{R}),$$

一个等价于定理11断言的事实。

由引理 g_p 6 可知， g_p 的单调性可通过考察其导数得出。为此，考察映射 $\Phi(Z) = Z^p$:

$$\begin{aligned} D(Z^p)[V] &= V\otimes Z\otimes\cdots\otimes Z + Z\otimes V\cdots\otimes Z+\cdots+Z\otimes\cdots\otimes Z\otimes V \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} Z^j\otimes V\otimes Z^{p-1-j}, \end{aligned}$$

当 $Z \in \mathrm{Sym}^{++}(N,\mathbb{R})$ 且 $V \in \mathrm{Sym}^+(N,\mathbb{R})$时。 参见 [6, 公式（2.13），第 44]页。事实上，将此公式应用于 $f_p(Z) = (Z+X)^p - X^p$ 可得

$$Df_p(Z)[V] = \sum_{j=0}^{p-1}(Z+V)^j\otimes V\otimes(Z+V)^{p-1-j},$$

这又导出了如下恒等式

$$\begin{aligned} &Dg_p(Z)[V] \\ &\quad = Df_p(Z)[V] + Df_p(Z+B+C)[V] - Df_p(Z+B)[V] - Df_p(Z+C)[V] \\ &= \sum_{j=0}^{p-1}\big[(Z+V)^j\otimes V\otimes(Z+V)^{p-1-j} + (Z+B+C+V)^j\otimes V\otimes(Z+B+C+V)^{p-1-j} \\ &-(Z+B+V)^j\otimes V\otimes(Z+B+V)^{p-1-j} - (Z+C+V)^j\otimes V\otimes(Z+C+V)^{p-1-j}\big]. \end{aligned}$$

但这个和是一个正量，由引理 9令 $k\leftarrow j,\, l\leftarrow p-1-j$ 和 $x\leftarrow x+j$即可得出。至此，证明完成。 □

6. Further comments and extensions

6.1. 正算子的多变量情形。 给定 $A_1,\ldots,A_n, X \in \mathrm{Sym}^+(N,\mathbb{R})$ 和 $p\in\mathbb{N}$，我们来考虑这些矩阵

$$S_0^p = \otimes^p X, \quad S_k^p = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \otimes^p(A_{i_1}+\cdots+A_{i_k}+X)\ (1\leq k\leq N). \tag{6.1}$$

由此可以证明算子 Hornich-Hlawka 不等式的以下推广（定理 11）：

$$S_n^p + S_{n-2}^p + \cdots \geq S_{n-1}^p + S_{n-3}^p + \cdots\ , \tag{6.2}$$

定理 3.3 [3]证明了不等式（6.2）在特殊情形 $X = 0$成立。按照第5节中的方法，通过适当的单调性论证即可证明一般情形。细节较为繁琐，因此我们略去，留作感兴趣读者的练习。

6.2. **关于行列式的两个不等式。** Serre [37]注意到，将 $\det^{1/2}$ 视为 $\mathrm{Sym}^+(2,\mathbb{R}$上的函数时，它满足与 Hornich-Hlawka 不等式相反的不等式，

$$\det{}^{1/2} A + \det{}^{1/2} B + \det{}^{1/2} C + \det{}^{1/2}(A+B+C) \leq \det{}^{1/2}(A+B) + \det{}^{1/2}(B+C) + \det{}^{1/2}(C+A). \tag{6.3}$$

在 [40], 中，第二位作者通过将其视为定义在 $\mathrm{Sym}^+(n,\ \mathbb{R})$ 上的函数，证明了关于 $\det^{\frac{1}{n}}$ 的下列类 Minkowski 不等式:

$$\det{}^{\frac{1}{n}}(A+B)\det{}^{\frac{1}{n}}(A+C) \geq \det{}^{\frac{1}{n}} B \det{}^{\frac{1}{n}} C + \det{}^{\frac{1}{n}} A \det{}^{\frac{1}{n}}(A+B+C). \tag{6.4}$$

不等式（6.4）比通常的关于 det 的对数超模不等式更强，因为其右侧多了 $\det^{\frac{1}{n}} B \det^{\frac{1}{n}} C$项。

6.3. **Vasić-Adamović 不等式。** 我们在论文结尾简要提及相关的一类 Vasić-Adamović 不等式。受 D. M. Smiley 和 M. F. Smiley 关于多边形不等式的研究启发 [39]，P. M. Vasi´c 和 D. D. Adamovi´c [41]提出了一种归纳方案，用于为任何满足函数型 Hornich-Hlawka 不等式的函数生成不等式。这里给出他们结果的一个略作修改的版本 [23, 定理 2，第 528]:

定理 12. 设 $\mathcal{S}$ 是一个带有 0 的交换加法半群，且 $\mathcal{G}$ 是一个有序阿贝尔群（即带有序关系 $\leq$的阿贝尔群），使得

$$x, y, z \in \mathcal{G} \text{ and } x \leq y \text{ implies } x+z \leq y+z.$$

若 $\varphi:\ \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ 是一个函数，对所有 x_1、x_2、$x_3 \in \mathcal{S}$，都有

$$\sum\nolimits_{1\leq i<j\leq 3} \varphi\left(x_i + x_j\right) \leq \sum\nolimits_{k=1}^{3} \varphi\left(x_k\right) + \varphi\Big(\sum\nolimits_{k=1}^{3} x_k\Big)$$

那么对于满足 $2 \leq k < n$ 的每一对整数 $\{k, n\}$，也有

$$\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \varphi\Big(\sum_{j=1}^{k} x_{i_j}\Big) \leq \binom{n-2}{k-1} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(x_k\right) + \binom{n-2}{k-2} \varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big),$$

只要 x_1，……，$x_n \in \mathcal{S}$.

这一论断适用于每个具有三阶正差分的函数 f（定义在凸锥 $\mathcal{C}$ 上，且取值于有序巴拿赫空间 E）。事实上，在这些情形下，

$$f(x+t) + f(y+t) + f(z+t) + f(x+y+z+t) \geq f(x+y+t) + f(y+z+t) + f(z+x+t) + f(t)$$

对所有点 x、y、z、$t \in \mathcal{C}$，并进行函数变换 $\varphi(v) = f(v+t) - f(t)$，我们得到一个满足 Hornich-Hlawka 不等式的函数

$$\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \varphi(x+y+z) \geq \varphi(x+y) + \varphi(y+z) + \varphi(z+x).$$

References

[1] Amann H.：渐近线性映射的多个正不动点。《函数分析杂志》17，174–213（1974）。[2] G. Bennett：主序的若干形式。《休斯敦数学杂志》36（2010），1037–1066。[3] Berndt, W., Sra, S.：正定张量上的 Hlawka–Popoviciu 不等式。《线性代数及其应用》486，317–327（2015）。[4] Bernstein, S.：论绝对单调函数，《数学学报》52，1–66（1929）。[5] Bhatia, R.：《矩阵分析》。施普林格（1997）。[6] Bhatia, R.：《正定矩阵》。普林斯顿大学出版社（2007）。[7] Boas, R.P., Jr., Widder, D.V.：正差函数。《杜克数学杂志》7，496–503（1940）。[8] G. Choquet：积分表示的两个经典例子，《数学教学》15，63–75（1969）。[9] Del Moral, P., Niclas, A.：矩阵平方根函数的泰勒展开。《数学分析与应用杂志》465(1)，259–266（2018）。[10] Fr´echet, M.：论一类向量空间的公理化定义，这些空间带有距离且可向量地映射到希尔伯特空间。《数学年刊》36，705–718（1935）。[11] Gal, S.G.：《用实多项式与复多项式进行保形逼近》。Birkh¨auser，波士顿（2008）。[12] Gal, S.G., Niculescu C.P.：重新审视 Popoviciu 的二元函数凸性概念。《数学分析与应用杂志》479(1)，903–925（2019）。[13] Hopf, E.：¨论实变函数的某些高阶差商与其可微性之间的关系。学位论文。柏林大学（1926）。[14] Hornich, H.：一个关于向量长度的不等式。《数学杂志》48，268–274（1942）。[15] Kozhasov K., Michalek M., Sturmfels B.：通过积分表示构造正性证书。伦敦数学学会讲义系列第二卷，第84–114页。剑桥大学出版社（2022）。[16] Kuczma, M.：《函数方程与不等式理论导论：柯西方程与詹森不等式》。施普林格科学与商业媒体（2009）。[17] Levi, F.W.：线性向量不等式的约化方法。《数学档案》2，24–26（1949）。[18] Lin, M.：半正定矩阵的一个行列式不等式。《电子线性代数杂志》27，821–826（2014）。[19] J. Lindenstrauss, A. Pe lczy´nski：$\mathcal{L}_p$空间中的绝对可加算子及其应用，《数学研究》29，275–326（1968）。[20] Marcus, M.：《有限维多重线性代数》，第I卷。Marcel Dekker（1973）。[21] Merris, R.：《多重线性代数》。Gordon & Breach，阿姆斯特丹（1997）。[22] Mirsky, L.：《线性代数导论》。牛津大学出版社（1961）。[23] Mitrinovi´c, D.S., Pe˘cari´c, J.E., Fink, A.M.：《分析中的经典与新不等式》。Kluwer Academic Publishers，Dordrecht（1993）。[24] Nelsen, R.B.：《联结函数导论》。施普林格科学与商业媒体（2006）。[25] Niculescu, C.P., Olteanu, O.：从 Hahn-Banach 延拓定理到凸函数的保序性与主序理论。《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报（RACSAM）》，A辑《数学》114(4)，1–19（2020）。[26] Niculescu, C.P., Persson, L.-E.：《凸函数及其应用：当代方法》，第2版，CMS数学丛书第23卷，施普林格出版社，纽约（2018）。[27] V. Paksoy, V., Turkmen, R., Zhang, F.：通过张量积研究广义矩阵函数的不等式。《电子线性代数杂志》27，332–341（2014）。[28] Pecaric, J.E., Proschan, F., Tong, Y.L.：《凸函数、偏序与统计应用》。科学与工程数学丛书第187卷。学术出版社，波士顿（1992）。[29] Popoviciu, T.：论高阶凸函数的逼近。《数学杂志》（克卢日）8，1–85（1934）。[30] Popoviciu, T.：论高阶凸函数的逼近。《数学杂志》（克卢日）10，49–54（1935）。[31] Popoviciu, T.：《凸函数》。Hermann出版公司，巴黎（1944）。

[32] Popoviciu, T.：论若干不等式。Gaz. Mat.，Bucure¸sti 51，81–85（1946年）。（罗马尼亚语）
[33] Schaefer, H.H.、Wolff, M.P.：《拓扑向量空间》。数学研究生教材第3卷，施普林格出版社，1966年。[34] Schilling, R.L.、Song, R.、Vondra˘cek, Z.：《伯恩斯坦函数：理论与应用》。德格鲁伊特出版社，柏林（2010年）。[35] Scott, A.D.、Sokal, A.D.：某些组合定义的多项式逆幂的完全单调性。《数学学报》213(2)，323-392（2014年）。[36] Sendov, H.S.、Zitikis, R.：由完全单调函数和伯恩斯坦函数生成的Borwein–Affleck–Girgensohn函数的形状。《优化理论与应用杂志》160(1)，67-89（2014年）。[37] Serre, D.：闵可夫斯基空间中的反向Hlawka不等式。《数学报告》353(7)，629-633（2015年）。[38] Siegel, C. L.：关于二次型的解析理论。Ann. of Math. 36，527 606 1935–（）。[39] Smiley, D.M.、Smiley, M.F.：多边形不等式。Am. Math. Mon. 71，755–760（1964年）。[40] Sra, S. 反向Minkowski（及相关）行列式不等式。MathOverflow。*https://mathoverflow.net/q/251684*（版本：10/10/2016）。[41] Vasi´c, P.M.、Adamovi´c D.D.：关于一个无穷函数不等式系统。Publ. Inst. Math. Nouv. S´er. 9 (23)，107–114（1969年）。[42] Zhang, F.：《矩阵理论：基本结果与技术》，第二版。施普林格，纽约（2011年）。

Department of Mathematics、 University of Craiova、 Craiova 200585、 Romania
Email address： constantin.p.niculescu@gmail.com

Massachusetts Institute of Technology、 Cambridge、 MA 02139、 USA
Email address： suvrit@mit.edu