arXiv:2301.08369v1 [math.SP] 20 Jan 2023

图拉普拉斯矩阵的特征向量：概览

Jean-Guy CAPUTO 和 Arnaud KNIPPEL

2023年1月23日

数学实验室，诺曼底鲁昂国立应用科学学院，诺曼底大学，
76801 鲁夫赖圣艾蒂安，法国 电子邮件：
caputo@insa-rouen.fr,arnaud.knippel@insa-rouen.fr

摘要

我们回顾图拉普拉斯矩阵特征向量的性质，旨在根据图的几何结构预测特定的特征值/特征向量。在考察谱已知的经典图之后，我们聚焦于含有零分量的特征向量，并将 Merris（1998）关于保持给定特征值 λ或以简单方式使其偏移的图变换的开创性结果加以拓展。这些变换使我们能够以组合方式而非数值方式求得特征值/特征向量；特别地，我们证明，具有特征值 $\lambda = 1$、2、.....、6 且顶点数不超过六个的图，可以从一小组图构造得到。对于逆问题，即图 λ 的子图 G 是图 G 的情形，我们证明了一些结果，并猜想 G 和 G 通过上述两种简单变换之一相连。

1 引言

无论从理论角度还是应用角度来看，图拉普拉斯矩阵都是一个重要的算子 [1]。作为其连续对应物，它自然源自守恒定律，并在物理学和工程学中有许多应用。图拉普拉斯矩阵的特征值都是实数，特征向量可以选为彼此正交。这由此为图上的演化问题提供了一种类似傅里叶分析的描述；例如，图波动方程是网络上弱可混流的一种自然模型，参见文章 [2], [3]。这种简单的形式体系在电网建模 [4] 或描述地理网络中的流行病 [5] 方面都证明十分有用。最后，图拉普拉斯矩阵的另一种应用是数据科学中的谱聚类，参见综述 [6]。

近六十年前，Mark Kac [7] 提出了这样一个问题：能否听出鼓的形状？换言之，拉普拉斯谱能否完全刻画一个图？如今我们知道，存在等谱图，因此无法得到唯一的刻画。不过，我们可以提出一个更简单的问题：能否根据图的几何结构预测特征值或特征向量？从现有文献来看，这似乎非常困难，大多数结果都是不等式，例见 Mohar [8] 撰写的精彩综述以及内容详尽的专著 [9]。

Mohar [8] 给出的许多结果都是关于 λ_2（即最小非零特征值）的不等式。这个特征值与图论中的重要问题——最大割问题——以及其他问题有关。Mohar [8] 还根据两个度之和的最大值，给出了关于 λ_n（即最大特征值）的一些不等式。另一个重要的不等式涉及两个具有相同顶点、仅相差一条边的图的谱交错。然而，对于谱的大部分内容，即 λ_2 与λ_n之间的特征值，人们所知甚少。在这一方向上，一个非常重要的进展是 Merris 的开创性文章 [10]。他在文中提出了“拉普拉斯特征向量原理”，可以用来预测图的谱如何受到收缩、添加或删除边以及合并顶点的影响。此外，Das [11] 证明，将一个额外的顶点连接到图的所有顶点，会使所有特征值（0 除外）增加 1。

继这些研究之后，在 [12] 中，我们刻画了具有分量特征向量 ± 1 （二价）和 0、± 1 （三价）的图。这一结果具有开创性，因为我们给出了精确结果，而非不等式。在本文中，我们沿着这一方向继续研究，并聚焦于含有一些零坐标的特征向量，我们称这些零坐标对应的位置为软节点；软节点十分重要，因为在这些位置上，无法对相关机械系统 [3]施加任何作用。本文利用具有软节点的图（我们称之为软图）的重要性质，凸显那些可通过组合方法（而非数值方法）获得的特征值/特征向量。我们首先证明，权重为 1 的图拉普拉斯矩阵的特征值是整数或无理数。然后介绍一些谱已知的经典图。我们描述五种保持给定特征值不变的图变换，以及两种以简单方式改变特征值的变换。在保持特征值不变的变换中，Merris 在一篇重要论文中明确提出了链接（连接原理） [10]。关节和焊接也见于同一篇论文，我们选择介绍这些变换的基本形式。我们发现了两种保持特征值不变的新变换：正则扩张，以及用正方形替换一个耦合。我们还介绍了能够以可预测方式改变特征值的变换：插入软节点、添加软节点、插入匹配。第一种是新的，第二种和第三种分别由 Das [11] 和 Merris [10] 提出。

在文章的最后一部分，我们列举了所有顶点数不超过六且具有给定特征值 λ 的小图，并使用

前文讨论的变换来解释它们之间的关系。值得注意的是，这些图都可以由一小组图构造出来。然而，对于更大的图，这个问题仍未解决。利用上述变换， λ 软图可以变得任意大。我们还考察了一个问题："图G的 λ 子图 G "的逆问题。我们证明，耦合两个图拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 和 $L(G')$ 的矩阵（其中 $G' = G$" $- G$）是一个图拉普拉斯矩阵。如果余图G' 是 λ，那么它是通过关节变换或链接变换构造而成的。只要余图 G' 与 G共享一个特征向量，它就可以不是 λ。此时，可以通过向 G'添加一个或多个软节点，使二者建立联系。最后，我们的论证表明，如果 G' 不是 λ，且与 G不共享特征向量，那么该问题无解。文章最后，我们考察了针对 $\lambda = 1$、2、.....、6 的 λ软图，并强调使用上述变换，以最小的 λ 软图作为这些族的生成元。

本文结构如下。第2节介绍主要定义。第3节讨论一些特殊图（链、环、团、二部图），它们的拉普拉斯谱已广为人知。第4节介绍保持特征值不变的图变换。第5节介绍会使特征值发生偏移的图变换。最后，第6节介绍 λ 软图，讨论 λ 子图，并对顶点数不超过六个的图进行分类。

2 图拉普拉斯矩阵：记号、定义和性质

我们考虑一个图 G（V， E），其顶点集 V 的基数为 n，边集E 的基数为 m，其中 n、m 均为有限集。假设该图是连通的，且没有自环和重边。图拉普拉斯矩阵 [9] 是一个（n， n）矩阵 L（G）或 L，满足

$$L_{ij} = -1 \text{ if edge i j exists}, 0 \text{ otherwise}, \quad L_{ii} = m_i, \text{ degree of i}, \tag{1}$$

其中， i 的度是与顶点 i相连的边的数量。

矩阵 L 是对称矩阵，因此其特征值均为实数，并且总能找到一组正交特征向量作为基。具体而言，我们将特征值λ_i 排列如下：

$$\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n. \tag{2}$$

我们将相应的特征向量记为 $v^1, v^2, \ldots, v^n$。

我们有以下性质

- $v^1 = \mathbf{1}$ 所有分量均为 1 的向量。
- 令 v_k^i 为特征向量 v^i 的 k 分量 $i > 1$。由于 v^i 与 v^1 正交，立即可得 $\sum_k v_k^i = 0$。

我们给出的许多结果在 $L_{ij} \neq -1$ 和 $L_{ii} = \sum_{j \sim i} L_{ij}$ 的情况下也成立，这就是广义拉普拉斯矩阵。我们会在介绍这些结果时说明具体适用情况。

正则图
图拉普拉斯矩阵可写为

$$L = D - A$$

其中， A 是邻接矩阵， D 是度的对角矩阵。我们回顾一下正则图的定义。

定义 2.1（正则图）若图中每个顶点的度都相同，均为 d，则称该图为 d-正则图。

对于正则图， $D = d\mathrm{Id}_n$，其中 Id_n 是阶数为 n 的单位矩阵。对于这些图，本文中关于 L 得出的所有性质都适用于 A。

我们将使用以下定义。

定义 2.2（软节点）图的顶点 s 是图拉普拉斯矩阵的特征值 λ 的软节点，若存在对应于该特征值的特征向量 x，使得 $x_s = 0$。

Merris [10] 给出了一个重要结果：

定理 2.3 设 G 是一个有 n 个顶点的图。如果 $0 \neq \lambda < n$ 是 $L(G)$ 的一个特征值，那么任何对应于 λ 的特征向量在每个度为 $n-1$ 的顶点上的分量均为 0。

定义 2.4（k 部图） k 部图是指其顶点可以划分为 k 个不同独立集的图，且同一集合内任意两个顶点均不相邻。

定义 2.5（环）环是所有顶点的度均为 2 的连通图。

定义 2.6（链）链是一个连通图，其中两个顶点的度为 1，其余顶点的度为 2。

定义 2.7（团）团或完全图 K_n 是一个任意两个顶点都相连的简单图。

在本文中，我们有时将构型称为顶点赋值图，其中各顶点的赋值对应于图拉普拉斯矩阵的一个特征向量。

2.1 特征值是整数或无理数

我们有如下结果

定理 2.8 如果特征值 λ 是整数，那么就存在整数特征向量。

为说明这一点，考虑线性方程组

$$(L - \lambda I)X = 0.$$

可以使用高斯消元法求解。这涉及代数运算，因此结果 X 是有理数。如果 X 是有理数，那么将其乘以各项分母的乘积，就能得到一个各项均为整数的特征向量。

现在我们证明，图拉普拉斯矩阵的特征值要么是整数，要么是无理数。关于整数系数多项式的根，我们有以下有理根引理，参见例如 [13]

引理 2.9 有理根
考虑多项式方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

其中系数 a_i 为整数。那么，任何有理数解 $x = p/q$，其中 p、q 互素，都满足 p 整除 a_0，且 q 整除 a_n。

由此可得

定理 2.10 图拉普拉斯矩阵的特征值要么是整数，要么是无理数。

证明。考虑与图拉普拉斯矩阵的特征多项式相对应的方程，其形式为

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x,$$

因为图是连通的，所以只有一个特征值 0。假设该特征值的形式为 $x = p/q$，其中 p、q 是互素整数。根据上面的引理， p 整除 a_0，且 q 整除 a_n。由于 $a_n = \pm 1$、$q = 1$，因此 $x = p$ 是整数。□

某些图具有整数谱这一事实由 Grone 和 Merris [14] 讨论过。他们的许多结果是关于 λ_2 和 λ_{n-1}的不等式。我们的结果补充了他们的方法。

3 特殊图

3.1 团与星图

团 K_n 的特征值为 n，重数为 $n-1$，另有特征值 0。特征值为 n 的特征向量可以选为 $v^k = e^1 - e^k$、 $k = 2$、$\ldots$、n。要说明这一点，请注意

$$L = nI_n - \mathbf{1},$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵，而 1 是一个 (n, n) 矩阵，其所有元素均为 1。

一个有 n 个顶点的星图 S_n 是一棵树，其中一个顶点（例如顶点 1）与其余所有顶点相连。对于星图 S_n，其特征值和特征向量为

- $\lambda = 1$ 重数为 $n-2$，特征向量为 $e^2 - e^k$， $k = 3, \ldots, n$
- $\lambda = n$ 重数为 1，特征向量为 $(n+1)e^1 - \sum_{k=2}^{n} e^{k\hat{}}$
- $\lambda = 0$ 重数为 1，特征向量为 1

3.2 二部图与多部图

考虑一个二部图 $K_{n_1,\ n_2}$。其拉普拉斯矩阵为

$$L = \begin{pmatrix} n_2 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & & -1 \\ 0 & n_2 & 0 & \ldots & -1 & \ldots & & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 0 & n_2 & -1 & \ldots & & -1 \\ -1 & \ldots & & -1 & n_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ldots & & -1 & 0 & n_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & \ldots & & -1 & 0 & 0 & \ldots & n_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中左上块的大小为 $n_1 \times n_1$，右下块为 $n_2 \times n_2$。以指数表示其重数的特征值为

$$0^1,\ \ n_1^{n_2-1},\ \ n_2^{n_1-1},\ \ (n1+n2)^1.$$

n_1 的特征向量可取为 $e^{n_1+1} - e^i\,(i = n_1+2, \ldots, n_1+n_2)$。 $n = n_1 + n_2$ 的特征向量为 $(1/n_1, \ldots, 1/n_1, -1/n_2, \ldots, -1/n_2)^T$。

类似地，多部图$K_{n_1,\ n_2,\ \ldots n_p}$ 的谱为

$$0^1,\ \ (n-n_1)^{n_1-1},\ \ (n-n_2)^{n_2-1}, \ldots,\ \ (n-n_p)^{n_p-1},\ \ n^p.$$

与 $n - n_1$ 相关的特征向量由 1 和 -1 组成，它们分别位于部分 1 的两个顶点上，其余位置补零。

3.3 环

对于一个环，其拉普拉斯矩阵是循环矩阵，因此其谱是众所周知的。特征值为

$$\mu_k = 4\sin^2\left[\frac{(k-1)\pi}{n}\right], \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

它们与复特征向量 v^k 相关，其分量为

$$v_j^k = \exp\left[\frac{i(j-1)(k-1)2\pi}{n}\right] \quad , j = 1, \ldots n. \tag{5}$$

实特征向量w^k、 x^k 为，

$$w^k = (0,\ \sin(a_k),\ \sin(2a_k),\ \ldots,\ \sin((n-1)a_k))^T, \tag{6}$$
$$x^k = (1,\ \cos(a_k),\ \cos(2a_k),\ \ldots,\ \cos((n-1)a_k))^T, \tag{7}$$
$$a_k = \frac{2(k-1)\pi}{n} \tag{8}$$

将特征值排序后，我们得到

$$\lambda_1 = \mu_1 = 0, \tag{9}$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = \mu_2, \tag{10}$$
$$\lambda_{2k} = \lambda_{2k+1} = \mu_{k+1}, \tag{11}$$
$$\ldots \tag{12}$$

对于 $n = 2p + 1$

$$\lambda_{2p} = \lambda_{2p+1} = \mu_{p+1}$$

对于 $n = 2p$

$$\lambda_{2p} = \mu_p = 4$$

是重数为 1 的特征值；一个特征向量是 $(1, -1, \ldots, 1, -1)^T$。在所有其他情况下，特征值的重数均为 2，因此所有顶点都是软节点。

注意，0 的最大个数是 $n/2$。要理解这一点，只需注意：如果两个相邻顶点的值为 0，那么它们在环上的邻居也必须为 0，而此时我们只有 0，但零向量不是特征向量。这意味着至多有 $n/2$ 0 个 0。对于偶数 n ，这个上界可以达到。

3.4 链

对于链 C_n，只有单特征值，它们是 [15]

$$\lambda_k = 4\sin^2(\frac{\pi(k-1)}{2n}) \quad , k = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

特征向量 v^k 的分量为

$$v_j^k = \cos\left(\frac{\pi(k-1)}{n}(j-\frac{1}{2})\right) \quad , j = 1, \dots n. \tag{14}$$

当且仅当余弦为零时，显然 :

$$(k-1)(2j-1) = n(1+2m), \tag{15}$$

其中 m 是一个整数。对于 α 为正整数的情况， $n = 2^\alpha$无解。除此之外，至少总有一个软节点。如果 n 是素数，那么中间顶点 $j = (n+1)/2$ 是唯一的软节点。当 k 为奇数时，所有满足 $2j-1$ 整除 n 的顶点 j 的值都为零，包括中间顶点。

当 n 为奇数时，链和环共享 $(n-1)/2$ 个特征值和特征向量。为此，考虑一个具有 $n = 2p+1$的链。所有 $k = 2q+1$ 都给出链的特征值$\lambda_k = 4\sin^2(\frac{\pi q}{2p+1})$, 这也是环的特征值。特征向量分量$v_j^q$ 满足 $v_1^q = v_{2p+1}^q$。

4 保持特征值不变的变换

本节介绍四种能够保持一个特征值不变的图变换：两个顶点之间的连接、割点操作、焊接以及收缩/扩张。前三种变换在文献中都有一般形式；我们选择以最基本的形式介绍它们。

此外，这些变换都是一元的，即作用于单个图。对于非连通图，二元变换可以化为一元变换。

利用这些变换，我们可以从含有软节点的极小图出发，生成含有软节点的新图。

4.1 两个相等顶点之间的连接

Merris 提出的一个重要定理 [10] 将相等分量中的顶点联系起来。

定理 4.1 两个顶点之间的连接：设 λ 是 $L(G)$ 的一个特征值，对应特征向量 x。若 $x_i = x_j$ ，则 λ 是 $L(G')$ 的一个特征值，对应 x ；其中，图 G' 由图 G 删除或添加边 $e = ij$得到。

此变换保留特征值和特征向量。它适用于多个图。图 1 展示了该变换的示例。

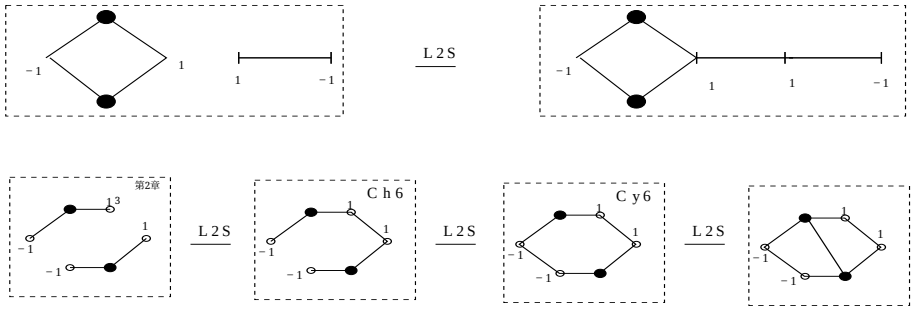

图1：变换示例：两个相等顶点之间的链接。

我们得到以下定理的推论。

定理4.2 设 λ 是两个图 G_1 和 G_2 的一个特征值，对应的特征向量分别为 x^1、x^2，且有两个顶点 i、j，满足 $x_i^1 \neq 0$ 或 $x_j^2 \neq 0$。那么，图 $G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup ij)$存在特征向量 $y = x_j^2 \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_i^1 \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$，对应于 λ。

由此可以生成更多具有特征值 λ的图。

4.2 关节

受 Merris 的约化与扩张原理 [10] 启发的一种初等变换，是在现有软节点上添加一个软节点。这不会改变特征值。我们有以下结果。

定理 4.3 割点 (A)：设图 $G(V, E)$ 有 n 个顶点，其中 x 是特征向量，满足 $x_i = 0$，对应特征值 λ。那么， x 的扩展 x' 满足 $x'_{1:n} = x_{1:n}$ 且 $x'_{n+1} = 0$，是拉普拉斯矩阵 $L(G')$ 的 λ 的特征向量，其中 $G'(V', E')$，满足 $V' = V \cup (n+1)$ 且 $E' = E \cup i(n+1)$。

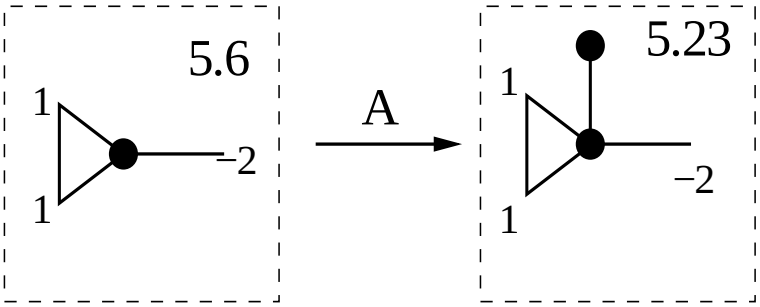

图2：割点性质的示例。大点对应一个软节点。

Merris 提出的通用情形 [10] 相当于多次应用这一初等变换。

该变换适用于权重任意的图，延伸边也可以具有任意权重。

图2以分类 [1] 中标记为 5.6 和 5.23 的两个图为例，说明了这一性质。这种初等变换的一个直接结果是，任何软节点都可以扩展为任意大的软节点图，同时保持特征值不变，并以简单的方式扩展特征向量。图3展示了两个具有相同特征值 $\lambda = 1$ 、并通过割点变换连接起来的图。

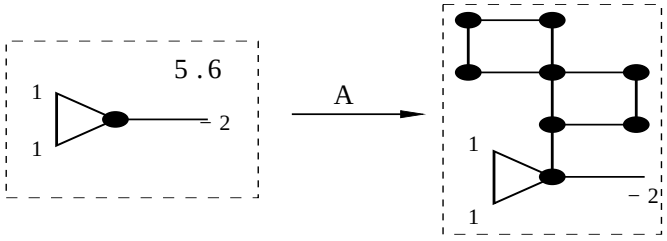

图3：通过割点变换连接的两个图。

4.3 焊接

Merris 收缩原理的一个推论 [10] 是，将图中的两个软节点合并不会改变特征值。这一点尤其重要，因为我们可以在一个软节点处“焊接”两个图。

定理 4.4 焊接：设 x 是图 G 的一个特征向量，对应于 λ。设 i 和 j 是两个没有共同邻居的软节点。设 G' 是将 G 中的 i 和 j 收缩后得到的图，x' 是通过删除 x 的第 j 个分量得到的向量。那么，对于 λ，x' 是 $L(G')$ 的一个特征向量。

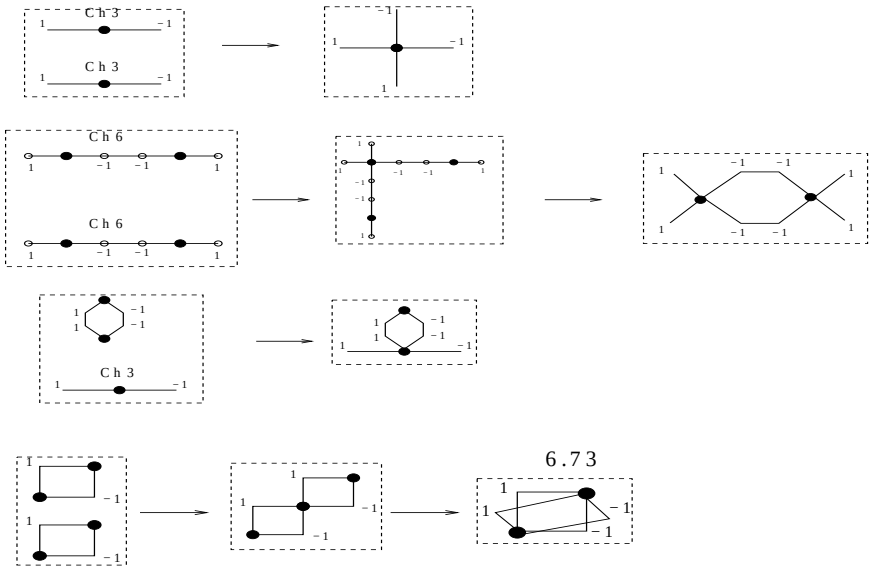

图 4：焊接变换示例。

这种变换适用于权重任意的图。

4.4 图的正则扩张

我们有如下定理。

定理 4.5 设 x 是图 G 关于 λ 的一个特征向量，设 i 是一个仅与 p 个软节点相连的顶点。设 G' 是将 G 中的 i 替换为一个 d-正则图后得到的图，该图的 k 个顶点均与 p 个软节点相连。那么，$\lambda = p$，并且通过为新顶点赋值 $x'_j = x_i/k$，可构造出 G' 的一个特征向量 x'。

证明。不失一般性，我们可以假设 $i = n$ 且该软

节点为 $n-p+1,\ldots,n-1$。我们有

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & -1 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

第 n行写作

$$px_n = \lambda x_n$$

因此 $\lambda = p$。第 $n-1$ 行写作

$$\alpha + (-1)x_n = px_{n-1} = 0$$

其中 α 是其余各项之和。

下面详细说明 G' 的拉普拉斯矩阵特征向量关系。考虑任意一个新顶点 j，它与 p 个软节点和 d 个新节点相连。对于 G'，特征向量关系中对应的一行写作

$$(d+p)x'_j + \sum_{i\sim j, i\geq n} (-1)x'_i = \lambda' x'_j.$$

这意味着

$$(d+p-\lambda')x'_j = \sum_{i\sim j, i\geq n} x'_i.$$

一个显而易见的解是

$$\lambda' = \lambda = p, \quad x'_i = x'_n \ \ \forall i \geq n+1.$$

通过考察第 $n-1$ 行可得 x'_n。我们有

$$\alpha + \sum_{i=n}^{n-k-1} (-1)x'_i = 0$$

因此

$$x'_n = \frac{x_n}{k}.$$

事实上，满足以下两个条件即可得到所有解

$$\forall j \geq n \ \ dx'_j = \sum_{i\sim j} x'_i, \quad x_n = \sum_{i\geq n} x'_i. \tag{16}$$

□

图5展示了不同 d 取值下，从单个软节点扩张的示例。此处特征值为 1。图6展示了从两个软节点扩张的示例。特征值为 2。对于 $d=2$，粗边上的边值之和等于 1。对于 $d=2$，这些值在

三角形中均等于 t；正方形中也同样如此，其值为 s。这些值验证了 $3t + 4s = 1$。

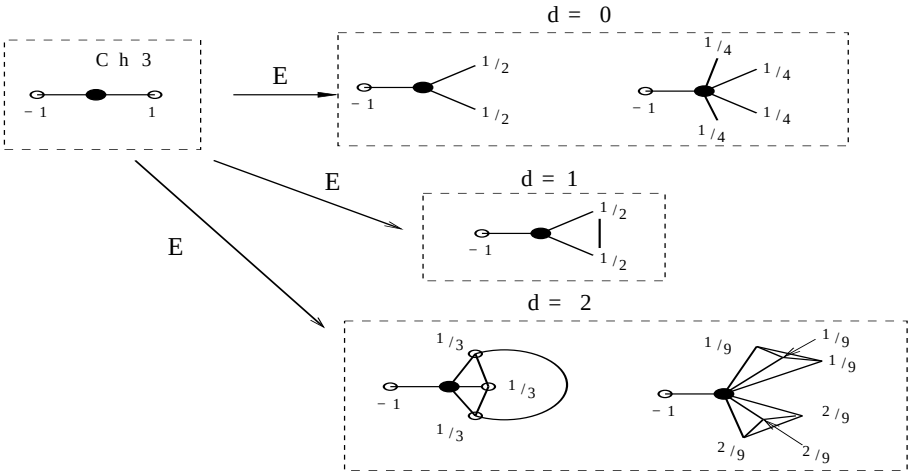

图5：从单个软节点扩张的示例。

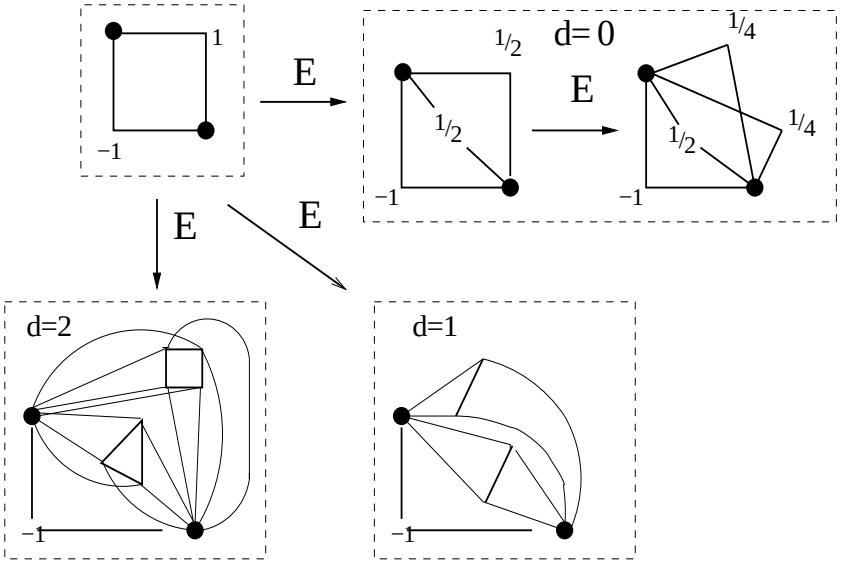

图6：从两个软节点扩张的示例。对于 $d = 2$，三角形上的值都等于 t；正方形上的值也同样如此，均为 s。这些值验证了 $3t + 4s = 1$。

4.5 用正方形替换耦合

我们有如下保持特征值不变的变换 [12]。

定理 4.6（用软方形替换一条边）
设 x 是图 G 的拉普拉斯矩阵对应特征值 λ 的一个特征向量。设 G' 是从 G 中删除连接边 ij（满足 $x_i = -x_j$）并添加两个软顶点 k、$l \in V$（G'）后得到的图，其中这两个软顶点用于扩展 x'（即 x 的 $x'_m = x_m$（$m \in V$ 的 G）和 $x'_k = x'_l = 0$），并添加四条边 ik、kj、il、lj。那么， x' 是图 G' 的拉普拉斯矩阵对应特征值 λ 的一个特征向量。

这一结果在 [12] 中针对权重为 1 的图得到了证明。这里我们将其推广到具有任意权重的图。

证明。
顶点 i 处的特征值关系为

$$(d_i - \lambda)x_i = \sum_{m \sim i, m \neq j} w_{i,m} x_m + w_{i,j} x_j$$

由于 $x_i = -x_j$，这意味着

$$(d_i + w_{i,j} - \lambda)x_i = \sum_{m \sim i, m \neq j} w_{i,m} x_m.$$

引入两个新顶点 k、l，使得 $x'_k = x'_l = 0$ 通过权重为 $w_{i,k} = \alpha w_{i,j}$、 $w_{i,l} = (1-\alpha) w_{i,j}$ 的边与 i 相连，上述关系导出

$$(d_i + w_{i,k} + w_{i,l} - \lambda)x'_i = \sum_{m \sim i} w_{i,m} x'_m + w_{i,k} x'_k + w_{i,l} x'_l,$$

这表明 x' 是新图的特征向量。

□

定理的示意图见图 7。

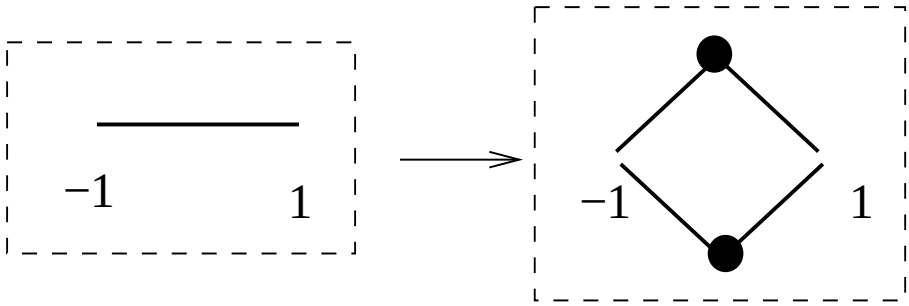

图 7：在两种情况下均以正方形替换耦合，特征值为$\lambda = 2$。

5 横截性：特征值的变化

这里我们介绍一些算子，它们能够以可预测的方式改变图拉普拉斯矩阵的特征值。前两个算子将特征值从 λ 移至 $\lambda+1$，第三个则将其移至 $\lambda+2$。本节最后，我们将介绍积图的特征值。

5.1 插入软节点

定理 5.1 设 x 是图 G 的一个特征向量，其中 λ的权重为 1。假设我们可以将 x 的非零分量配对为 $\{i,j\}$，其中 $x_i=-x_j$ 非零。令 G' 为在每对 $\{i,j\}$之间加入 k 个软节点后，由 G得到的图。由此得到的向量 x' 是G' 的拉普拉斯矩阵对应特征值 $\lambda+k$的特征向量。

证明。设 i、$j\in V$（G）是一对满足 $x_i=-x_j$的对象。特征向量方程为

$$d_i x_i-\sum_{m\sim i}x_m=\lambda x_i.$$

引入 k 个新顶点 $x'_p=0$、 $p=1$、$\ldots k$，可以将关系写为

$$(d_i+k)x'_i-\sum_{m\sim i}x'_m=(\lambda+k)x'_i.$$

这表明 x' 是新图的一个特征向量。 □

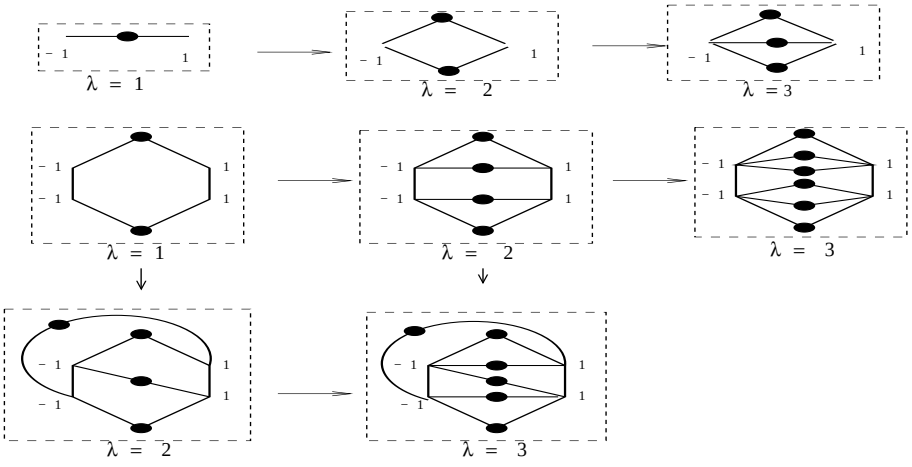

图 8：插入软节点的操作示例。

图 8 展示了插入软节点的操作示例。

当图带有权重时，结果仍然成立。考虑只添加一个软顶点，并通过权重 $w_{i,\ k}$将其连接到 i。新图的特征值为 $\lambda + w_{i,\ k}$。

这可以将具有整数特征值的图变换为具有无理数特征值的图。

5.2 添加软节点

将一个软节点连接到图的所有顶点上，会使所有非零特征值增加 1。该结果由 Das [11]发现。我们在此重新推导该结果，并为完整起见予以展示。

定理 5.2 添加软节点：设 $G(V, E)$ 是一个图，其特征向量 x对应的特征值为 $\lambda \neq 0$。那么，将一个节点添加到 G 并与其所有节点相连后，得到的新图 G' 的特征向量为将 x 扩展并添加一个零分量后得到的 x'，对应的特征值为 $\lambda + 1$。

示例见图 9。

证明。设图 G 的拉普拉斯矩阵 $L(G)$ 的特征值为 λ，对应的特征向量为 v，且该图有 n 个顶点。现在添加一个额外的顶点 $n+1$，并将其连接到 G 的所有顶点，从而构成 $L(G \cup \{n+1\})$。我们有以下恒等式

$$\left(\begin{array}{c|c} L(G) + I_n & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \\ \hline -1 - 1, \cdots -1 & n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} v \\ \hline 0 \end{array}\right) = (\lambda + 1) \left(\begin{array}{c} v \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

这就证明了该陈述。 □

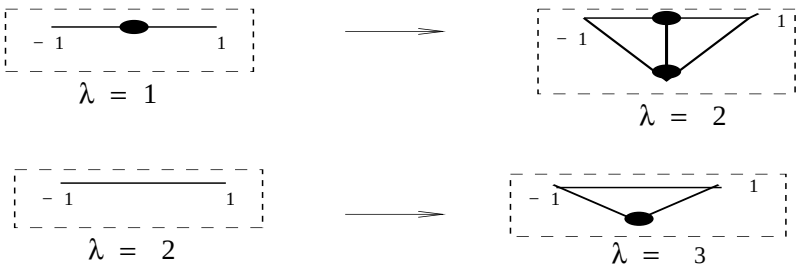

图 9：添加软节点的示例。

重要的例子是由上文讨论的特殊图构成的例子。在这些图中，向一个 $n-1$ 图添加一个顶点后，可以明确得知其 $n-1$特征向量和特征值。

Das 的定理 3.2 [11] 可以看作向一个图添加一个软节点和一个关节的直接结果。

5.3 插入匹配

首先定义完美匹配和交替完美匹配。

定义 5.3（完美匹配）图 G 的完美匹配是一个匹配（即独立边集），其中图的每个顶点恰好与该匹配中的一条边关联。

定义 5.4（交替完美匹配）图 G 的节点上的向量 v 的交替完美匹配，是非零节点的一个完美匹配，且该匹配的边 e_{ij} 满足 $v_i = -v_j$ ($\neq 0$)。

我们得到以下受 Merris 的交替原理 [10] 启发的结果 [12] 。

定理 5.5（添加/删除交替完美匹配）设 v 是 $L(G)$ 的一个特征向量，对应特征值 λ。设 G' 是通过为 v 添加（分别地，删除）一个交替完美匹配而从 G 得到的图。那么， v 是 $L(G')$ 的一个特征向量，对应特征值 $\lambda + 2$（分别地， $\lambda - 2$）。

这是第二个算子，它将特征值平移 ± 2。示例见图 10。

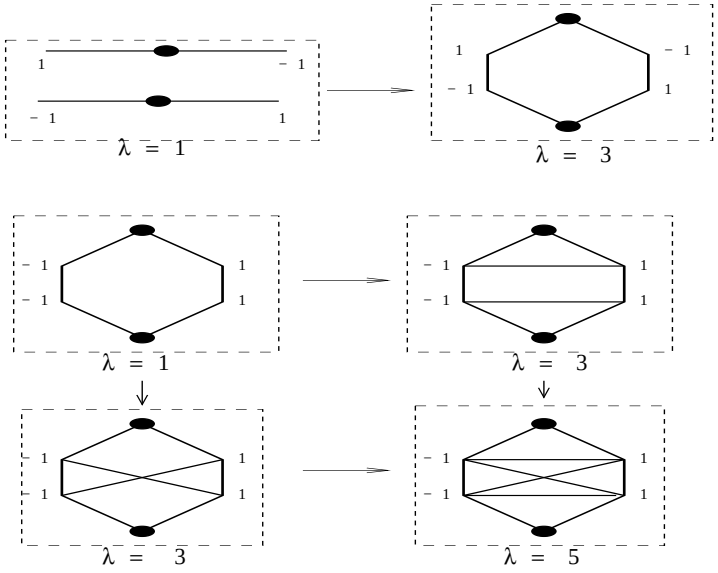

图10：插入匹配的示例。

5.4 笛卡尔积

两个图 $G = (V, E)$ 和 $H = (W, F)$ 的笛卡尔积 $G \square H$ 的顶点集合为 $V \times W = \{(v, w)\ v \in V,\ w \in W\}$。其边集合为$\{\{(v_1, w_1), (v_2, w_2)\}\}$，满足 $v_1\ v_2 \in V$ 和 $w_1 w_2 \in W$。我们有如下结果，见 Merris [10]。

定理5.6 若 x 是对应于 μ 的 G 的特征向量，且 y 是对应于 ν的 H的特征向量，则 x和y的克罗内克积 $x \otimes y$是 $G \square H$ 对应于特征值 $\mu + \nu$的特征向量。

图11阐释了该定理。

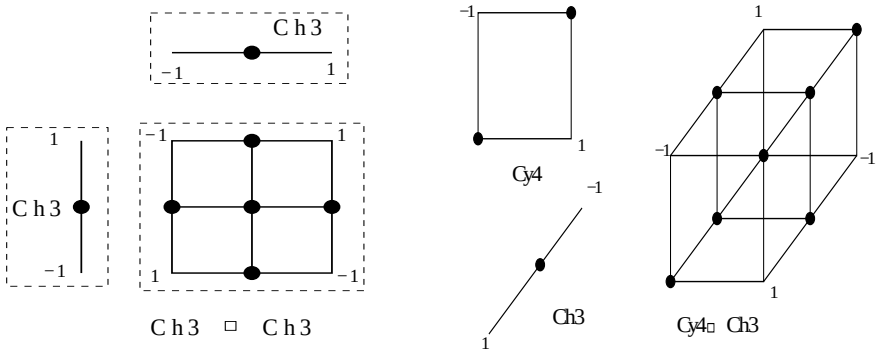

图11：两个链3的笛卡尔积（左）以及环4与链3的笛卡尔积（右）。

重要的例子包括由上文讨论的特殊图构成的图。在这些图中，特征向量和特征值都是明确已知的。例如，两个链 C_n 和 C_m 的笛卡尔积 $C_n \times C_m$，它们的节点数分别为 n 和 m，其特征值为

$$\lambda_{i,j} = \lambda_i + \lambda_j,$$

其中，λ_i（分别为 λ_j）是 C_n（分别为 C_m）的一个特征值。特征向量为

$$v^{i,j} = \cos[\frac{\pi(i-1)}{n}(p-\frac{1}{2})]\cos[\frac{\pi(j-1)}{m}(q-\frac{1}{2})],$$

其中 i、$p \in \{1,\ldots,n\}$、j、$q \in \{1,\ldots,m\}$。

5.5 图补

我们回顾图 G 的图的补图定义。

定义 5.7（图的补图）给定一个具有 n 个顶点的图 $G(V,E)$，其图补 G^c 是图 $G^c(V,E^c)$，其中 E^c 是完全图 K_n 的边集中的 E 的补图。

我们有以下性质，参见例如 [1]。

定理 5.8 如果 x 是一个图 G 的特征向量，该图具有 n 个顶点并对应于$\lambda \neq 0$，那么 x 是 G_c 的特征向量，对应于 $n-\lambda$。

图 12 展示了一个示例。特征值和特征向量列于表1中。

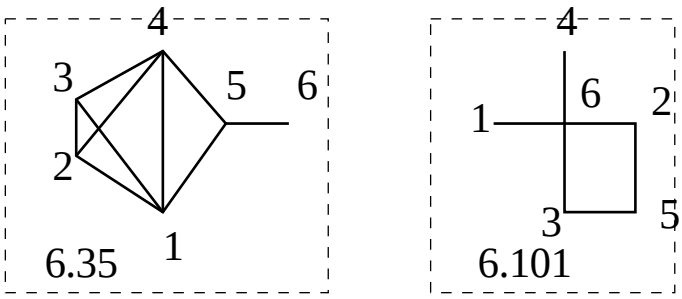

图12：分类 [1] 中的图6.35（左）及其补图 6.101（右）。

6.35	5.2361	5.	4	3	0.7639	0
6.101	0.7639	1	2	3	5.2361	0
	0.51167	0.70711	0.	0.18257	-0.19544	0.40825
	-0.31623	0.	0.70711	-0.36515	-0.31623	0.40825
	-0.31623	0.	-0.70711	-0.36515	-0.31623	0.40825
	0.51167	-0.70711	0.	0.18257	-0.19544	0.40825
	-0.51167	0.	0.	0.73030	0.19544	0.40825
	0.12079	0.	0.	-0.36515	0.82790	0.40825

表1： *Eigenvalues (top lines) and eigenvectors for the two complementary graphs 6.35 and 6.101 shown in Fig. 12*

很多时候， G_c 并不连通。一个 G_c 连通的示例是环 6.....

6 λ-软图

6.1 定义和性质

我们引入 λ、 λ 软极小图和 λ 软极小图的概念。上一节中的变换将使我们能够证明这两类图之间的关系。

定义 6.1 对特征值 λ ，存在特征向量 X 的图 G 是 λ。

定义 6.2 对特征值 λ，存在特征向量 X 的 λ 图 G，若 X 的某个分量为零，则称其为 λ 软图。

定义 6.3 若图 G 具有特征值 λ 对应的特征向量 X，则称其为 λ极小图，当且仅当它是 λ 且在包含关系意义下极小。

显然，对于给定的 λ，至少存在一个 λ 极小图。例如，下图展示了一个 1 软极小图。

C h 3 

6.2 λ子图

在下一节中，我们研究包含在图 λ"$(V"\ E")$ 中的 λ 子图 G 的性质。考虑两个图 $G(V,E)$，其具有 n 个顶点；以及图 $G'(V"-V,E')$，其中 E 仅连接 V的元素，而 E' 仅连接 V'的元素。假设两个图 $G(n)$ 和 $G'(n')$ 包含在一个大图 $G"$ 中，并且满足 $G(V,E)$。假设 G 的 p 个顶点与 G'的 p'个顶点相连。我们将 G的 p 个顶点标记为 $n-p+1$、. . .、n，将 G'的 p' 个顶点标记为 1、. . .、p'。于是有

$$LX = \lambda X, \tag{17}$$

$$L"X" = \lambda X", \tag{18}$$

其中，$L"$是大图 $G"$的图拉普拉斯矩阵；$L"$可写为

$$L" = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -b^T & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

首先有如下结果

定理6.4 方阵 $\delta = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b^T & c \end{pmatrix}$ 是一个图拉普拉斯矩阵。

证明。子矩阵 a、b、c的大小分别为 $a(p,p)$ $b(p,p')$ $c(p',p')$，a和 c 为对角矩阵，且满足

$$a_{ii} = \sum_{j=1}^{p'} b_{ij}, \quad c_{ii} = \sum_{j=1}^{p} b_{ji}. \tag{19}$$

换句话说

$$a\hat{1}_p = b\hat{1}_{p'}, \quad c\hat{1}_{p'} = b^T\hat{1}_p,$$

ˆ其中 1_p 是一个元素全为 1 的 p 列向量。 □

此时，我们并未假设 G 的 X 特征向量与 G" 的 X 之间存在任何关系。我们有如下

定理 6.5 特征值关系 (17,18) 蕴含 $X = X$"$(1:n)$ 或 $X(1:n-p) = 0$。

证明。对于 $p = 1$ 和 λ，若它们对应同一个特征值，则秩$(L - \lambda I) = n - 1$，因此 $X = X$"$(1:n)$ 或 $X(1:n-1) = 0$。
我们承认 $p > 1$ 的结果。 □

于是我们可以假设 L" 的特征向量具有如下形式

$$L" \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix},$$

其中 $LX = \lambda X$。代入 L"，得到

$$\lambda \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 \\ 0 & -b^T & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}.$$

利用关系式（17），我们得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} X' = 0, \tag{20}$$

$$L'X' - \begin{pmatrix} 0 & b^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X' = \lambda X'. \tag{21}$$

第一个矩阵方程中有 p 个非平凡方程，第二个方程中有 p' 个。使用数组表示法（如 Fortran 中的表示法），上面的系统可以写成

$$aX(n-p+1:n) - bX'(1:p') = 0, \tag{22}$$

$$-b^T X(n-p+1:n) + cX'(1:p') + (L'X')(1:p') = \lambda X'(1:p'), \tag{23}$$

$$(L'X')(p'+1:n') = \lambda X'(p'+1:n'), \tag{24}$$

从第一个方程中提取 X，我们得到

$$X(n-p+1:n) = a^{-1}bX'(1:p'), \tag{25}$$

代入第二个方程后，得到关于 X' 的闭合系统

$$(-b^T a^{-1} b + c)X'(1:p') + (L'X')(1:p') = \lambda X'(1:p'), \tag{26}$$

$$(L'X')(p'+1:n') = \lambda X'(p'+1:n'), \tag{27}$$

这里我们用到了如下事实：连接度矩阵 a 根据构造可知是可逆的。

定理 6.6 矩阵

$$\Delta \equiv -b^T a^{-1} b + c,$$

是一个广义图拉普拉斯矩阵：它是某个加权图的拉普拉斯矩阵。其元素为有理数，不一定是整数。

证明。为证明这一点，首先注意到 Δ 显然是对称的。我们有

$$\Delta \hat{1}_{p'} = -b^T a^{-1} b \hat{1}_{p'} + c\hat{1}_{p'} = -b^T a^{-1} a \hat{1}_p + b^T \hat{1}_p = 0.$$

这表明， Δ 的每个对角元素都等于其对应行的元素之和，因此 Δ 是一个图拉普拉斯矩阵。□ 根据
定理（2.10）， Δ 的特征值为整数或无理数，并且对应于分量为整数或无理数的特征向量。

于是我们将方程（26、27）写成

$$(\bar{\Delta} + L')X' = \lambda X', \tag{28}$$

其中

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¯这是图拉普拉斯矩阵（$\Delta + L'$）的一个特征值关系。共有四种情况。

(i) $\lambda = 0$ 那么 X' 是一个分量相等的向量，且 X 也如此。

(ii) $\lambda \neq 0$ 是 L'的一个特征值。于是有如下

定理 6.7 假设图 G" 是特征向量 $X" = (X, X')^T$的 λ，并且包含一个对应于特征向量 X 的图 λ G 。考虑具有顶点 $V(G") - V(G)$ 的图 G'，以及 G" 中对应的边。

如果 G' 是 λ，那么 G" 可通过关节或链接变换从 G 得到。

证明。由于 $\lambda \neq 0$ 是 L'的一个特征值，我们可以选取 X' 作为 λ 的一个特征向量，使得 $L'X' = \lambda X'$，于是 $\Delta X' = 0$。
第一种可能是 $X' = 0$，这对应于 G 和 G' 之间的一个关节。

如果 $X' \neq 0, L'X' = \lambda X'$，则意味着 X' 不是分量相等的向量，因此 $X' \notin$Null(Δ)。 $\Delta X' = 0$ 的唯一可能是 $\Delta = 0$，因此

$$c = b^T a^{-1} b.$$

术语 $(b^T a^{-1} b)_{ij}$ 是

$$(b^T a^{-1} b)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{ki} b_{kj}}{a_{kk}}.$$

由于矩阵 c 是对角矩阵，因此我们有

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{b_{ki} b_{kj}}{a_{kk}} = 0, \forall i \neq j$$

那么 $b_{ki} b_{kj} = 0$，使得来自 G 的一个顶点 k 只与来自 G' 的另一个顶点 i 或 j 相连。于是 $p = p'$。这意味着 $a_{ii} = c_{ii} = 1$，$\forall i \in \{1, , \ldots, p\}$。图 G 和 G' 随后通过若干条连接同值顶点的边相连。□

(iii) $\lambda \neq 0$ 不是 L' 的特征值，并且 L' 和 Δ 共享一个对应于特征值 λ' 和 $\lambda - \lambda' > 0$ 的特征向量X'。对于 $\lambda - \lambda' = 1$，一种可能性是将 G 的一个软节点与 G' 相连。对于 $\lambda - \lambda' = p$ 整数，一种可能性是将 G 的 p 个软节点与 G' 相连。我们推测不存在其他可能性。

(iv) $\lambda \neq 0$ 不是 L' 的特征值，并且 L' 和 Δ 有不同的特征向量。那么特征值问题 (28) 无解。

为此，假设 L' 和 Δ 的特征值及特征向量分别为 ν_i、V^i、μ_i、W^i，使得

$$L' V^i = \nu_i V^i, \quad \bar{\Delta} W^i = \mu_i W^i, \quad i = 1, 2, \ldots n$$

这些特征向量可以选为正交归一的，并且有

$$QV = WQ$$

其中 $Q = (q_k^j)$ 是一个正交矩阵，V和 W 是矩阵，其列分别为 V^i 和 W^i。记

$$W^j = \sum_k q_k^j V^k.$$

假设 X' 存在，我们可以将其扩张为 $X' = \sum_i \alpha_i V^i$ 将这个扩张代入关系式 $(\Delta + L') X' = \lambda X'$，得到

$$\sum_i \left(\alpha_i \nu_i V^i + \alpha_i \sum_j q_j^i \mu_j \sum_k q_k^j V^k \right) = \sum_i \lambda \alpha_i \nu_i V^i$$

投影到向量 V^m 上，我们得到

$$\alpha_m \nu_m + \alpha_m \sum_j q_j^m \mu_j q_m^j = \lambda \alpha_m \nu_m$$

一个初步解为 $\alpha_m = 0$、$\forall m$，因此 $X' = 0$，这是一个关节。若 $\alpha_m \neq 0$，则得到一组线性方程，将 ν_i 与 μ_i联系起来。

$$\sum_j q_j^m \mu_j q_m^j = (\lambda - 1) \nu_m, \quad m = 1, \ldots n$$

由于 Q 是一般的正交矩阵，项 q_j^m 通常是无理数。因此我们推测不存在解。

6.3 λ 子图示例

我们用简单的例子来说明上述讨论的不同情形。首先考虑定理（6.7），见图 13。

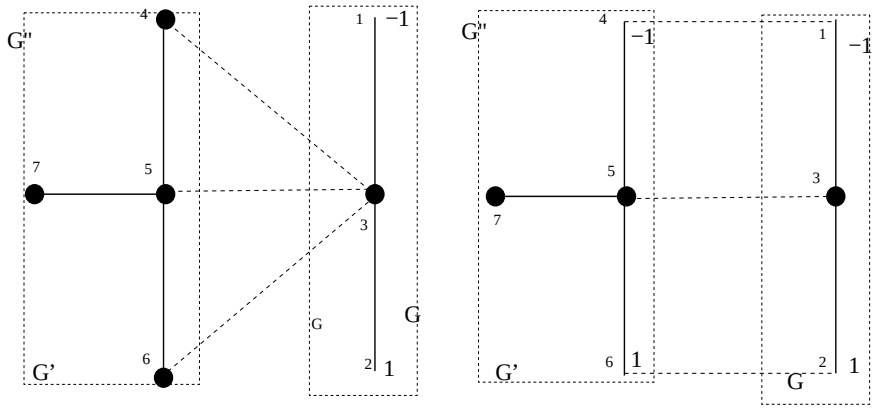

图 13：两种构型，其中图 G 包含在较大的图G"中，且特征值为 1。

考虑图 13 左侧的构型。我们有

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

注意， L 和 L' 的特征值均为 1。这里， $p = 1$、 $p' = 3$ 和

$$a = 3, b = (1,1,1)^T, c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因此

$$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

¯矩阵 Δ 和 L' 对于同一个特征值 1 有不同的特征向量。¯选择 X' L' 中对应特征值 1 的一个特征向量，得到 $\Delta X' = 0$。唯一的解是 $X' = 0$，这是一个关节。

对于图 13 右侧的构型，我们有 $p = p' = 3$。

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

使得 $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 我们有

$$LX = 1X, \tag{30}$$

$$L"(X, X')^T = 1(X, X')^T, \tag{31}$$

其中 $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ 在此构型中， X' 是 L' 的特征向量，对应特征值 1。并且， G 与 G'之间存在链接连接。

最后，我们展示一个情形（iii）的例子，其中 $G, G"$是 2 软的，而 G' 是 1 软的。

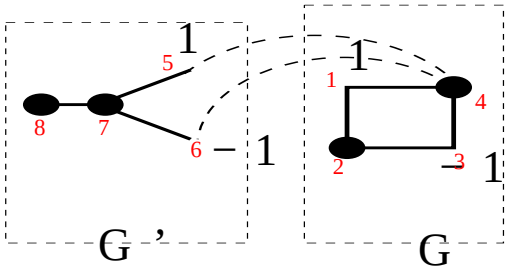

图 14：特征值 $\lambda = 2$对应的情形（iii）示例。

¯我们需要求解 $(\Delta + L')X' = 2X'$ 其中

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\Delta} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意，特征向量 $X' = (1, -1, 0, 0)^T$ 由 L' 和 $\bar{\Delta}$ 共享，因此¯$(\Delta + L')$ $X' = 2X'$。

前两节介绍的变换使我们能够将给定类别中的不同成员联系起来。总结如下:

- 关节：可以将任意图 G_2 连接到给定图 G_1 的软节点上，并保持特征值不变。新图 $G_1 \cup G_2$ 在 G_2中处处都有软节点。

- 链接：在相同节点之间引入一条链接，不会改变特征值和特征向量。

- 与软节点相连的 d-正则图的收缩。为了得到 Link 意义上的极小图，我们需要取 $d = 0$。
- 焊接：可以通过收缩每个图中的一个或多个软节点，将两个图连接起来。

在接下来的小节中，我们将介绍不同 λs 下小规模 λ 软图的分类。

6.4 1-软图

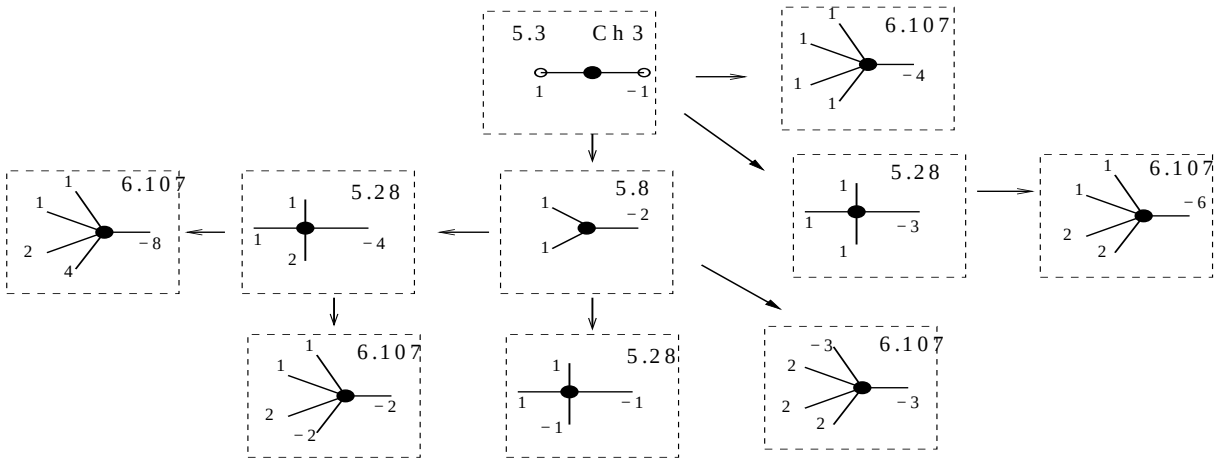

图15： 1_s 图：通过扩张生成的图。

图15展示了一些通过扩张生成的 1s图。请注意其可能性的多样性。

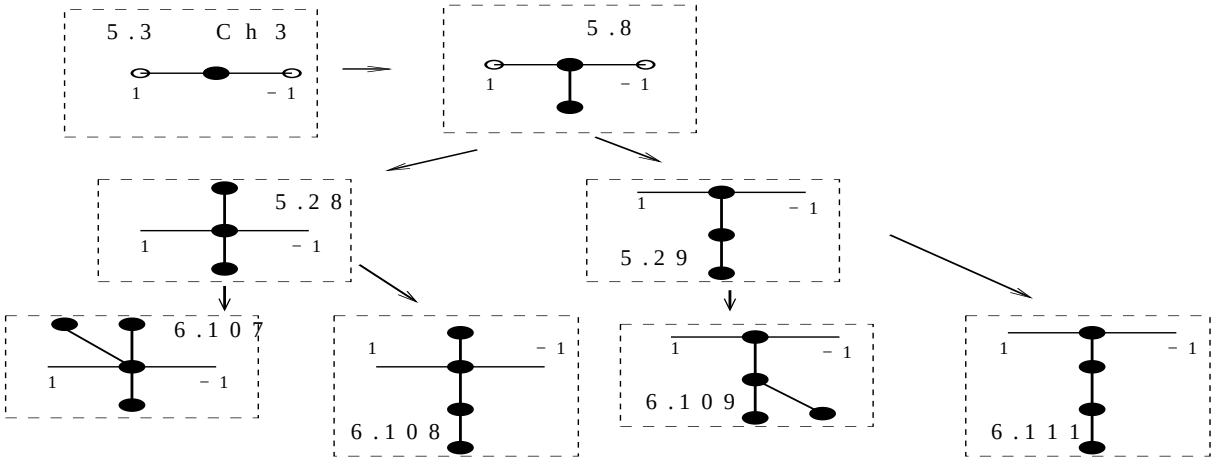

图16： 1_s 图：由关节生成的图

图16展示了一些由关节生成的1s图。1、0、 −1构型仍清晰可见。

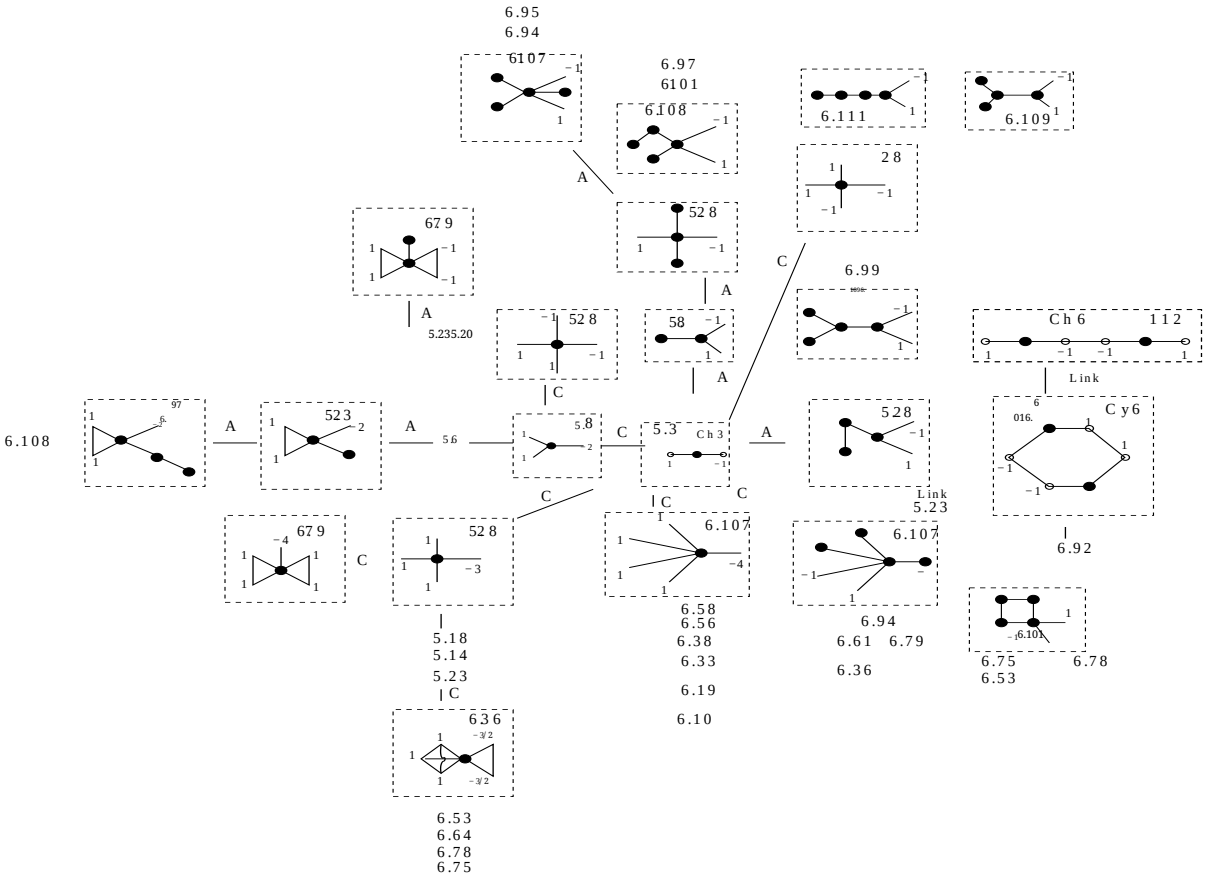

图17：1-软图。软节点以粗体显示。我们只展示对称扩张，以便能够进行链接。

图17展示了顶点数不超过6的1s图。请注意，它们通过关节（A）、扩张/收缩（C）和链接相连，并且都可以由图5.3（链3）得到。连接 $Ch3$ - 28是两个 $Ch3$ 链的收缩。将两个3链 $Ch3$ 通过链接变换连接起来，可以得到一条链 6 $Ch6$。也可以通过焊接两个软节点，从 $Ch6$ 到23。

6.5 2-软图

图18展示了通过扩张5.7图生成的一些2s 图。

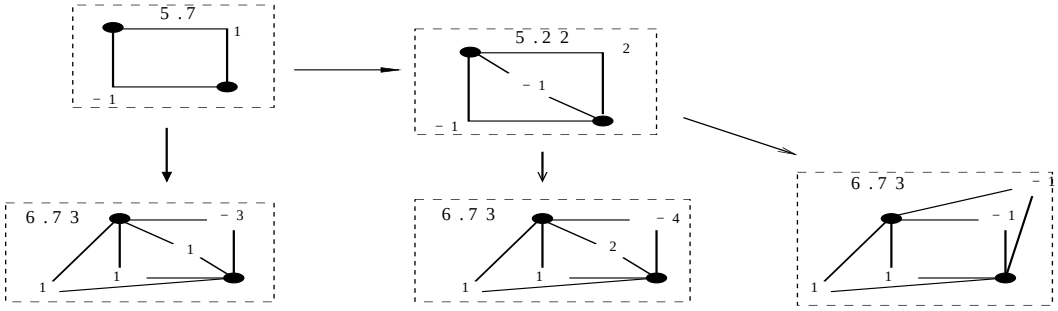

图18： 2_s 图：由扩张生成的图。

类似地，图19展示了通过对同一张图进行关节操作生成的一些2s 图。

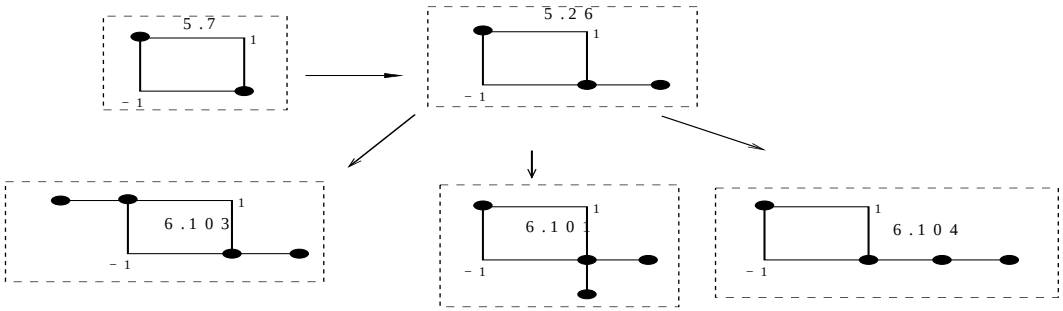

图19： 2_s 图：由关节生成的图

图20展示了顶点数不超过6的所有2s 图。我们纳入了图5.1，因为加上一个链接后，它可以得到构型6.104。请注意，所有图都可以由5.5和5.1生成。

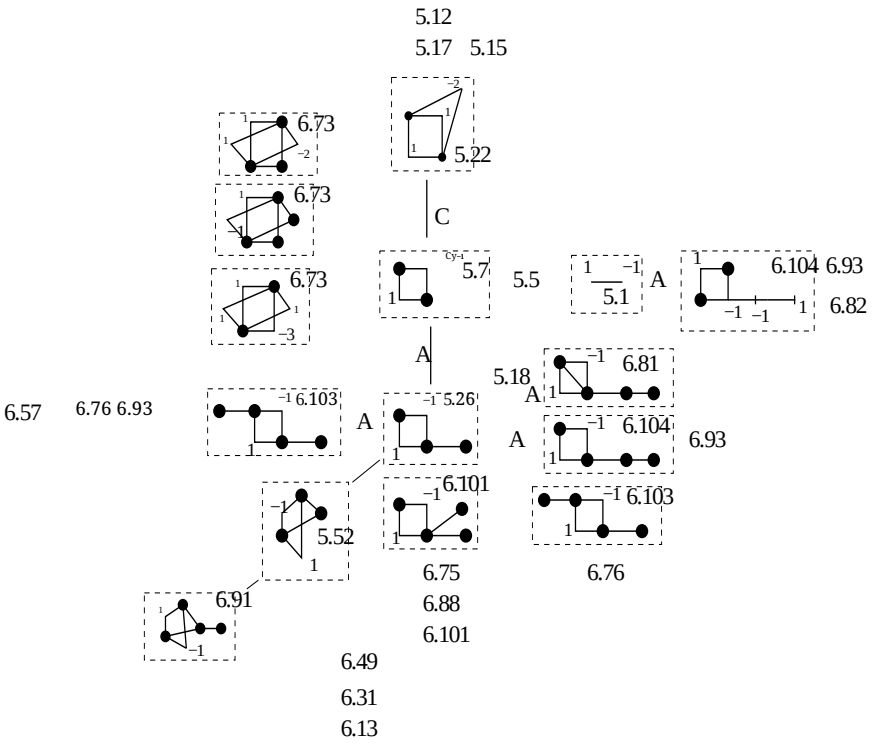

图20：2-软图

6.6 3-软图

图21展示了一个通过扩张图5.22生成的3s图。

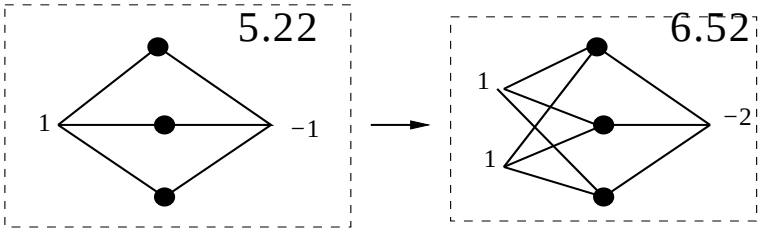

图21： 3_s 图：由扩张生成的图。

图 22 展示了一些通过对图 5.2 和图 5.22 进行关节操作生成的 3s 图。

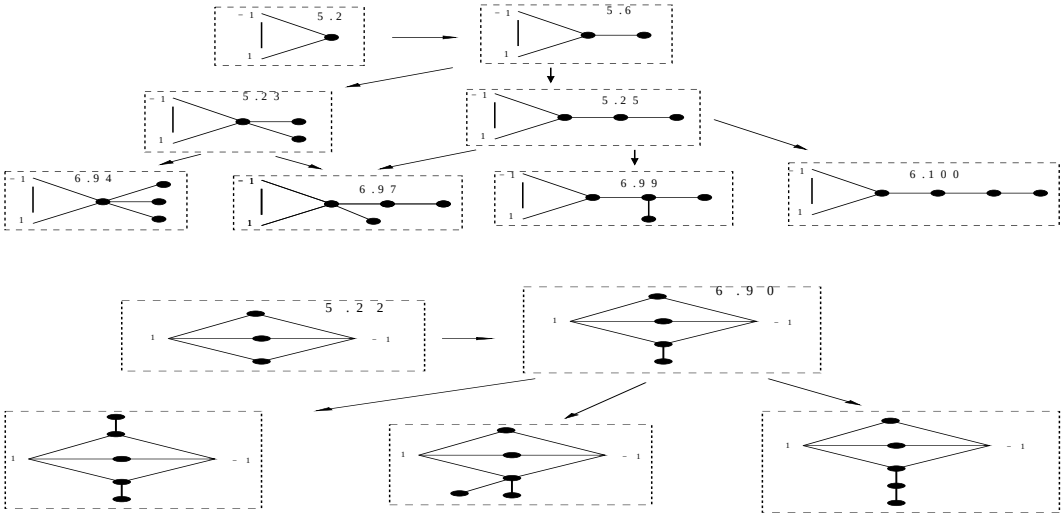

图 22： 3_s 图：通过关节操作生成的图

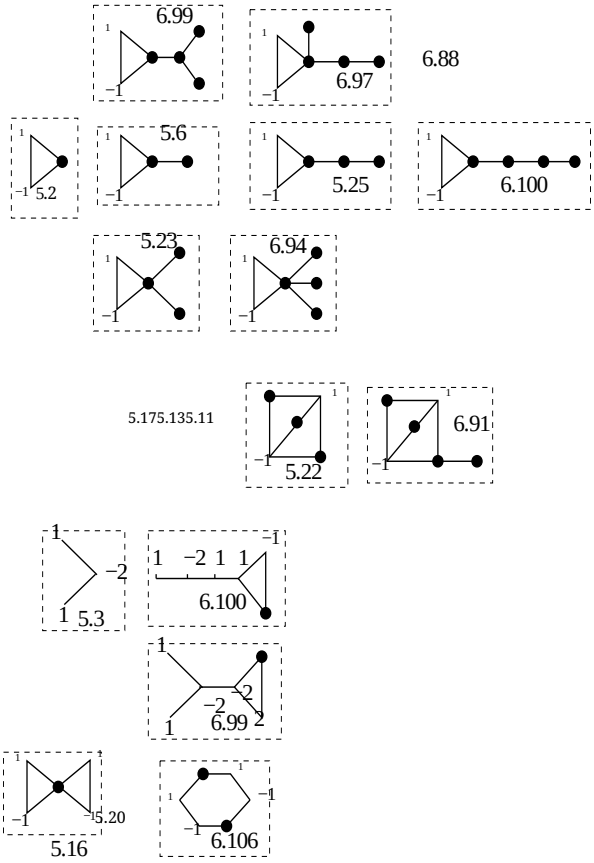

图23：3-软图。

图23展示了所有顶点数不超过6的3s图。请注意，它们由图5.2、5.22和5.3生成。图5.20是将两个图5.2焊接而成的。

6.7 4-软图

图24展示了在图5.3上通过关节生成的一些4s 图。

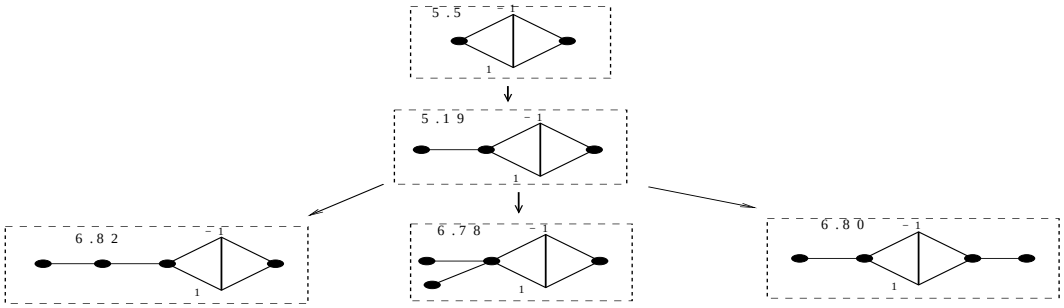

图24： 4_s 图：由关节生成的图

图25展示了至多包含6个顶点的4s 图。请注意，它们是如何由图5.5（2种构型）和图6.93生成的。图 5.7的列出是为了展示其与图6.93的连接（将一个匹配替换为一个正方形）。

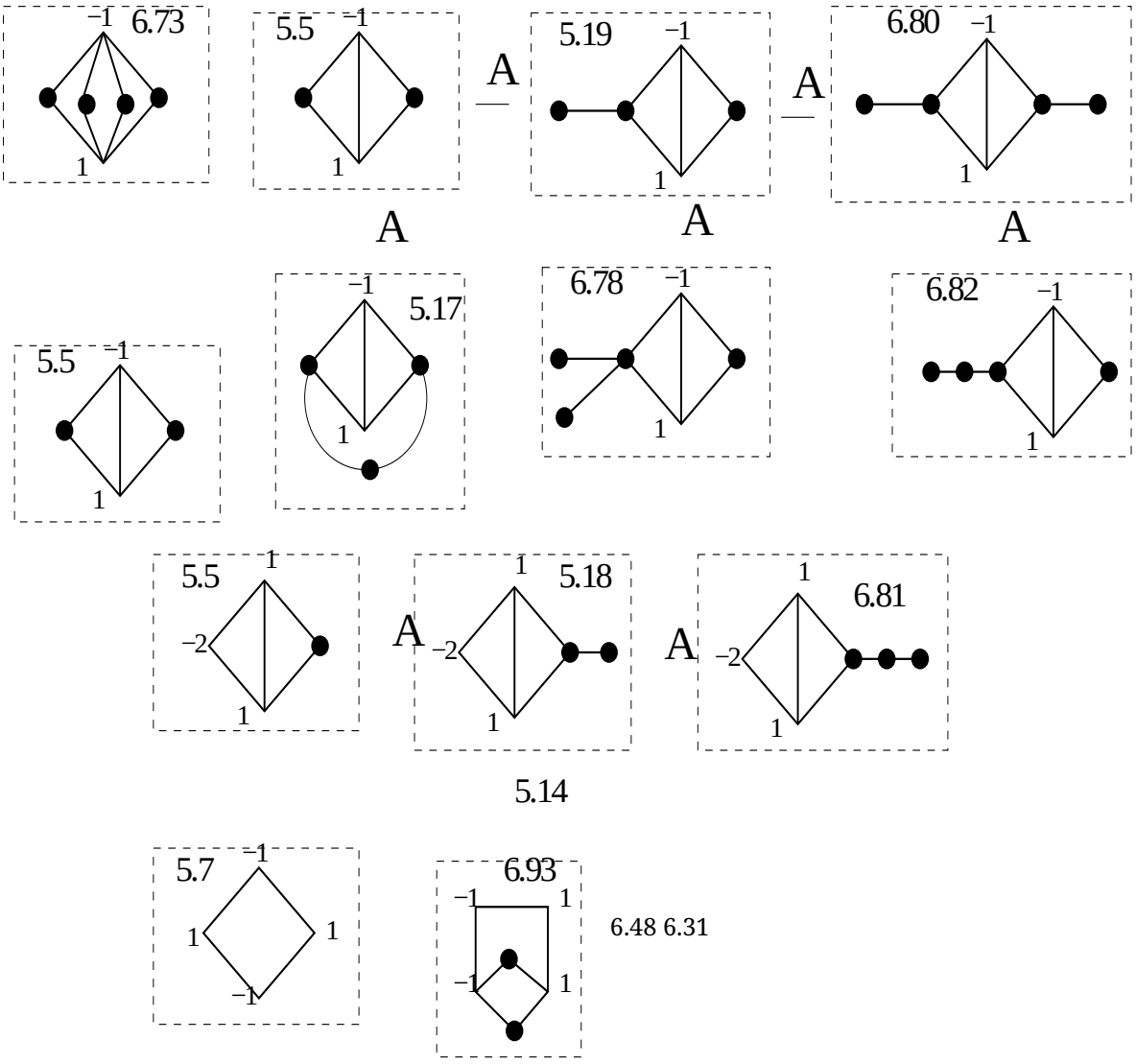

图25：4-软图。

6.8 5-软图

图26展示了顶点数不超过6的5s图。请注意，它们源自图6.70、5.13以及5.15的两种构型。

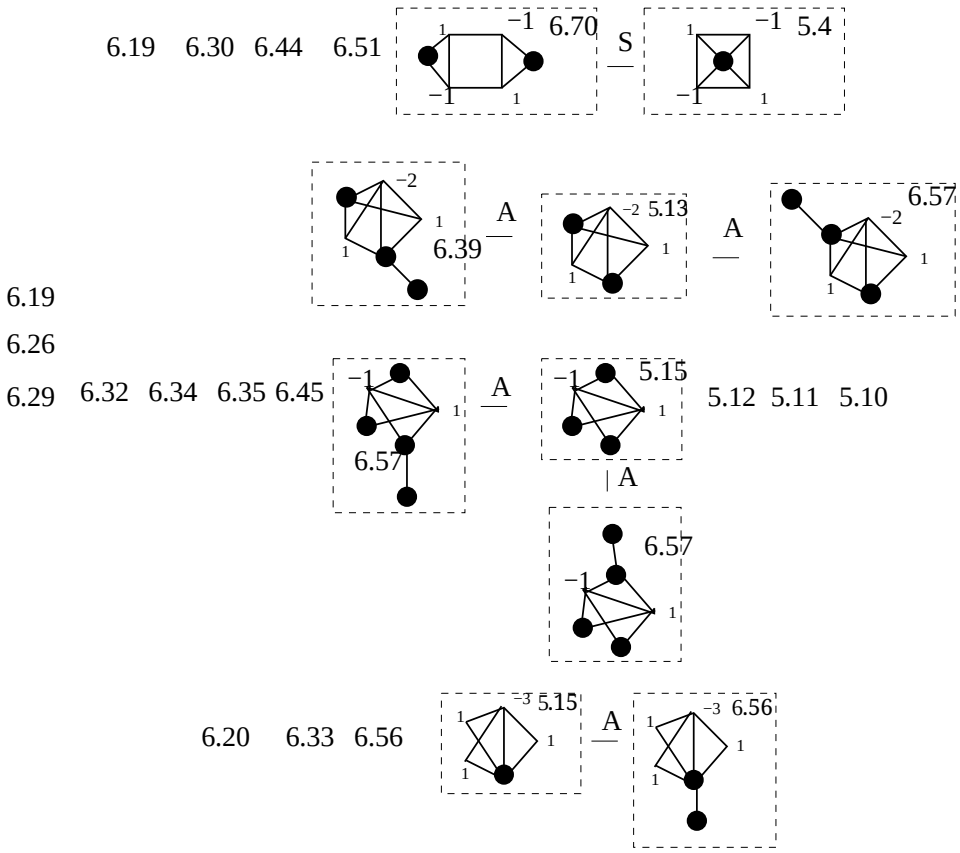

图26：5-软图。

6.9 6-软图

图27展示了顶点数不超过6的6s图。请注意，这些图源自图6.9、6.37、6.2（两种构型）和6.16。

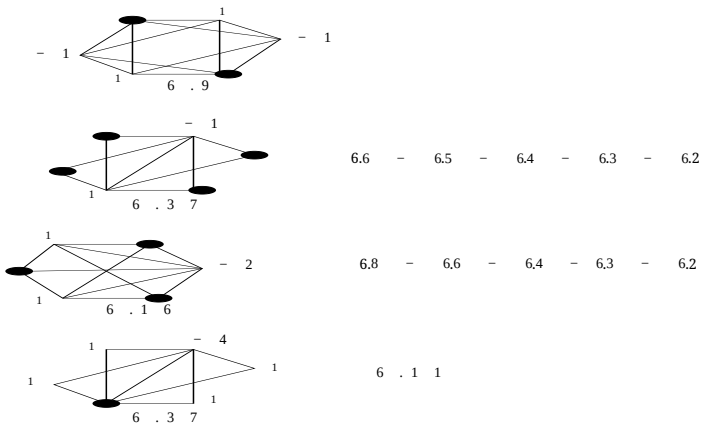

图27：6-软图。

6.10 x-软图，x为非整数

如上所证，唯一的非整数特征值都是无理数。对于这些特征值，可能存在软节点。在5节点图中，我们在5链和5圈中发现了无理特征值。此外，还有以下

nb. in 分类	特征值	特征向量
5.16	$\lambda_2 = 3 - \sqrt{2}$	$(-0.27, -0.65, 0, 0.65, 0.27)^T$
5.16	$\lambda_4 = 3 + \sqrt{2}$	$(0.65, -0.27, 0, 0.27, -0.65)^T$
5.21	$\lambda_4 = (7 + \sqrt{5})/2$	$(-0.6, 0.6, 0.37, 0, -0.37)^T$
5.21	$\lambda_5 = (7 - \sqrt{5})/2$	$(-0.37, 0.37, -0.6, 0, 0.6)^T$
5.24	$\lambda_2 = (5 - \sqrt{13})/2$	$(-0.67, -0.2, 0.2, 0.67, 0)^T$
5.24	$\lambda_5 = (5 + \sqrt{13})/2$	$(-0.2, 0.67, -0.67, 0.2, 0)^T$
5.30（5链）	$\lambda_4 = (3 + \sqrt{5})/2$	$(-0.6, 0.6, 0.37, 0, -0.37)^T$
5.30（5链）	$\lambda_5 = (3 - \sqrt{5})/2$	$(-0.37, 0.37, -0.6, 0, 0.6)^T$

表2： *Non trivial graphs with soft nodes and non integer eigenvalues.*

备注
图5.16是3软。图5.21和图5.24不属于整数软类。它们是

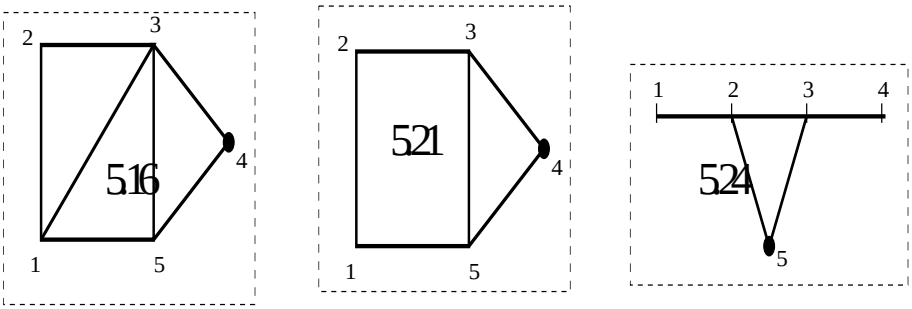

图28：图5.16、5.21和5.24及其软节点

- 图5.16是添加了一个软节点的链4。
- 图5.21是通过在链5（图5.30）中插入一个软节点得到的。

6.11 最小 λ 软图

我们计算了 $\lambda = 1$、.....、6对应的最小 λ 软图。结果如图29所示。

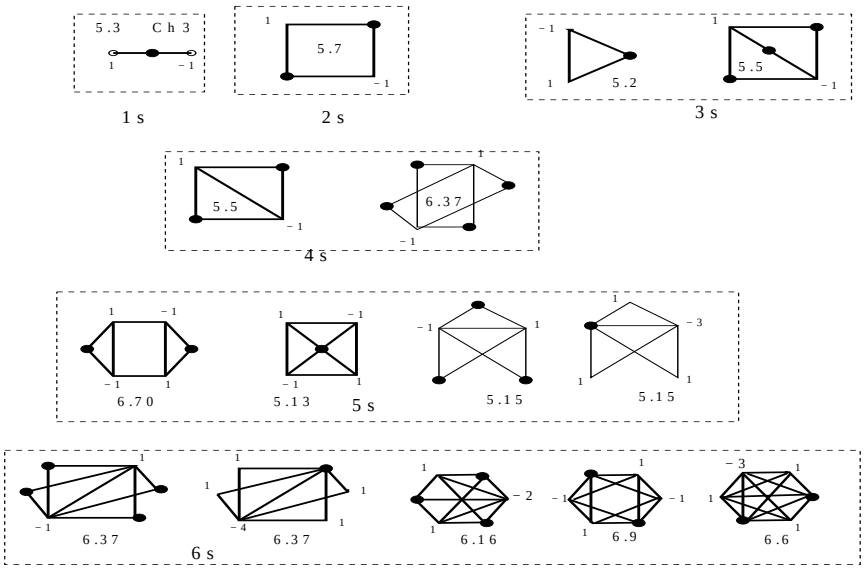

图29： $\lambda = 1$、2、3、4、5和6对应的最小 λ 软图。

注意，对于 $\lambda = 1$ 和 2，存在唯一的最小 λ-软图。那里

有两个最小的 3-软图和 4-软图。最小的 5-软图有四个。前两个分别通过在最小的 4-软图中插入一个软节点，以及向其中添加一个软节点生成。第三个和第四个分别通过向 2-团添加三个软节点，以及向 4 星添加一个软节点得到。

系统地生成最小 $\lambda+1$-软图有三种方法：（i）在 λ-软图中插入一个零；（ii）在 aλ-软图中添加一个零；（iii）在 $\lambda-1$-软图中添加一个匹配。因此，可以系统地生成最小的 7-软图、8-软图……

7 结论

我们回顾了谱已知的图族，并介绍了保持特征值不变的变换。Merris [10] 提出了链接、关节和焊接，而我们发现了两种新的变换：正则扩张和以方形替换耦合。我们还展示了能使特征值偏移的变换：插入软节点（$+1$）、添加软节点（$+1$）、插入匹配（$+2$）。第一种是新的，第二种和第三种分别由 Das [11] 和 Merris [10] 发现。

由此呈现出一幅图景：由 λ-图族构成的图通过这些变换彼此连接。这些结构仍有待理解。我们介绍了至多含六个顶点的小图之间的连接。能否通过一系列初等变换得到所有的 λ 图？或者只能得到其中一部分？

我们部分回答了这个问题：能否根据图的几何结构预测特征值/特征向量？为此，我们考察了图 G 的 λ 子图 λG 的情况。我们证明，如果余图 G' 是 λ，那么它就是 G 的一个关节或链接。否则，如果 G 和 G' 共享一个特征向量，那么两者可能通过向 G' 添加一个或多个软节点而产生关联。

我们研究的许多图都具有无理数特征值；由于这些变换同样适用，我们也可以为它们定义 λ 图。然而，如果 λ 是整数而 μ 是无理数，我们并未发现 λ 图与 μ 图之间存在任何连接。

参考文献

[1] D. Cvetkovic、P. Rowlinson 和 S. Simic，《图谱理论导论》，伦敦数学会学生教材（第 75 册），（2001）。

[2] C. Maas，图中的传输与导纳谱，《离散应用数学》16（1987）31-49 [3] J.-G. Caputo、A. Knippel 和 E. Simo，《简单网络的振荡：软节点的作用》，物理学杂志 A：数学与理论 46，035100（2013）[4] J.-G. Caputo、A. Knippel 和 N. Retiere，潮流方程的谱解，《工程研究快报》，025007，（2019）。[5] F. Bustamante-Casta˜neda、J.-G. Caputo、G. Cruz-Pacheco、A. Knippel 和 F. Mouatamide，《网络上的流行病模型：分析及其在新冠肺炎中的应用》，物理学 A，564，125520，（2021）。[6]U. Von Luxburg，谱聚类教程，《统计计算》17：395–416，（2007）。[7] Mark Kac，能否听出鼓的形状？，《美国数学月刊》73，4P2，1-23，（1966）。[8] B. Mohar，图的拉普拉斯谱，载于：Y. Alavi、G. Chartrand、O.R. Oellermann、A.J. Schwenk（编），Wiley，《图论、组合学及其应用》第 2 卷，1991，871–898，（1991）。[9] T. Biyikoglu、J. Leydold 和 P. F. Stadler，《图的拉普拉斯特征向量》，施普林格（2007）。[10] R. Merris，《图的拉普拉斯特征向量》，《线性代数及其应用》278，22l-236，（1998）。[11] K. Ch. Das，图的拉普拉斯谱，《计算机与数学及其应用》48，715-724，（2004）。[12] J. G. Caputo、I. Khames、A. Knippel，《关于分量取值为 1、-1、0 的图拉普拉斯矩阵特征向量》，《离散应用数学》269，120-129，（2019）。[13] https://en.wikipedia.org/wiki/Rational root theorem[14] R. Grone 和 R. Merris，图的拉普拉斯谱，《SIAM 离散数学杂志》（C）1994 年第 7 卷第 2 期，第 221-229 页，1994 年 5 月[15] Thomas Edwards，《矩形网格的离散拉普拉斯算子》，网络文档，（2013）。

- -

8 附录A：图分类

下表列出了我们使用的图分类。“连接”列中的每一行都是相应图的连接列表。

分类 [1]	节点	链接	连接
1	2	1	12
2	3	3	12 13 23
3	3	2	12 23
4	4	6	12 13 14 23 24 34
5	4	5	12 13 14 23 34
6	4	4	12 13 23 34
7	4	4	12 14 23 34
8	4	3	12 23 24
9	4	3	12 23 34
10	5	10	12 13 14 15 23 24 25 34 35 45
11	5	9	12 13 14 15 23 24 34 35 45
12	5	8	12 14 15 23 42 25 34 45
13	5	8	12 13 15 23 24 34 35 45
14	5	7	12 13 14 23 24 34 35
15	5	7	13 15 23 25 34 35 45
16	5	7	12 13 15 23 34 35 45
17	5	7	12 14 15 23 25 34 45
18	5	6	12 13 14 23 34 35
19	5	6	12 14 23 24 34 35
20	5	6	12 13 23 34 35 45
21	5	6	12 15 23 34 35 45
22	5	6	13 15 23 25 34 45
23	5	5	12 13 23 34 35
24	5	5	12 23 25 35 34
25	5	5	12 13 23 34 45
26	5	5	12 14 23 34 35
27	5	5	12 15 23 34 45
28	5	4	13 23 34 35
29	5	4	12 13 14 45
30	5	4	12 23 34 45

表3: *Graphs of less than 5 nodes labelled* 1 *to* 30 *in classification [1].*

分类 [1]	节点	链接	连接
1	6	15	12 13 14 15 16 23 24 25 26 34 35 36 45 46 56
2	6	14	12 13 15 16 23 24 25 26 34 35 36 45 46 56
3	6	13	12 14 15 16 23 24 25 26 34 35 45 46 56
4	6	13	12 13 15 16 23 24 25 26 34 35 45 46 56
5	6	12	12 13 15 16 23 25 26 34 35 36 45 56
6	6	12	12 13 14 15 16 23 25 34 35 36 45 56
7	6	12	12 13 15 16 23 24 25 26 34 35 45 56
8	6	12	12 13 15 16 23 24 34 35 36 45 46 56
9	6	12	12 13 15 16 23 24 26 34 35 45 46 56
10	6	11	12 13 14 15 23 24 25 34 35 45 56
11	6	11	12 14 16 23 24 26 34 36 45 46 56
12	6	11	12 13 15 16 23 25 26 34 35 45 56
13	6	11	12 15 16 23 24 25 26 34 35 45 56
14	6	11	12 13 15 16 23 25 26 34 36 45 56
15	6	11	12 14 15 16 23 24 34 35 45 46 56
16	6	11	12 14 15 16 23 25 34 35 36 45 56
17	6	11	12 14 15 16 23 26 34 35 45 46 56
18	6	11	12 15 16 23 24 26 34 35 45 46 56
19	6	10	12 13 15 23 24 25 34 35 45 56
20	6	10	12 13 14 15 23 24 34 35 45 56
21	6	10	12 15 16 23 24 25 26 35 45 56
22	6	10	12 13 15 16 23 34 35 36 45 56
23	6	10	12 16 23 25 26 34 35 36 45 56
24	6	10	12 15 16 23 25 26 34 35 45 56
25	6	10	12 13 14 15 16 23 34 36 45 56
26	6	10	12 14 16 23 34 35 36 45 46 56
27	6	10	12 15 16 23 26 34 35 36 45 56
28	6	10	12 14 16 23 24 34 35 45 46 56
29	6	10	12 14 16 23 24 26 34 36 45 56
30	6	10	12 15 61 23 24 25 34 36 45 56

表4: *6 node graphs labelled* 1 *to* 30 *in classification [1].*

分类 [1]	节点	链接	连接
31	6	10	12 15 16 23 24 26 34 35 45 56
32	6	10	12 14 16 23 25 26 34 36 45 56
33	6	9	12 15 23 24 25 34 35 45 56
34	6	9	12 14 15 23 24 25 34 45 56
35	6	9	12 13 14 15 23 24 34 45 56
36	6	9	12 13 14 23 24 34 45 46 56
37	6	9	12 13 14 15 16 24 34 45 46
38	6	9	12 14 15 23 25 34 35 45 56
39	6	9	12 13 15 23 24 25 34 45 56
40	6	9	12 13 16 23 34 35 36 46 56
41	6	9	12 16 23 34 35 36 45 46 56
42	6	9	12 16 23 24 26 34 45 46 56
43	6	9	12 13 16 23 34 35 36 45 56
44	6	9	12 13 16 23 34 36 45 46 56
45	6	9	12 16 23 25 34 35 36 45 56
46	6	9	12 13 15 16 23 34 36 45 56
47	6	9	12 13 16 23 25 26 34 45 56
48	6	9	12 15 16 23 26 34 35 45 56
49	6	9	12 15 16 23 24 26 35 45 56
50	6	9	12 14 15 16 23 34 36 45 56
51	6	9	12 15 24 16 23 34 36 45 56
52	6	9	12 14 16 23 25 34 36 45 56
53	6	8	12 13 14 23 24 34 45 46
54	6	8	12 13 14 23 24 25 34 36
55	6	8	12 13 14 23 24 34 45 56
56	6	8	13 15 23 25 34 35 45 56
57	6	8	12 14 23 24 25 34 45 56
58	6	8	12 15 23 25 34 35 45 56
59	6	8	12 13 15 23 34 35 45 56
60	6	8	12 14 15 23 24 34 45 56

表5： *6 node graphs labelled* 31 *to* 60 *in classification [1].*

分类 [1]	节点	链接	连接
61	6	8	12 13 14 15 16 23 45 46
62	6	8	12 14 23 42 34 35 36 56
63	6	8	12 14 15 23 25 34 45 56
64	6	8	12 13 15 23 25 34 45 56
65	6	8	12 13 15 23 24 34 45 56
66	6	8	12 16 24 34 36 45 56 46
67	6	8	12 13 16 23 34 36 45 56
68	6	8	12 13 16 23 34 35 45 56
69	6	8	12 15 16 23 26 34 45 56
70	6	8	12 13 16 23 34 45 46 56
71	6	8	12 13 16 23 34 35 46 56
72	6	8	12 15 16 23 34 36 45 56
73	6	8	12 15 23 24 26 35 45 56
74	6	8	12 14 16 23 25 34 45 56
75	6	7	12 13 14 23 34 35 36
76	6	7	12 23 24 25 34 45 46
77	6	7	12 14 23 24 25 34 36
78	6	7	12 14 23 24 34 35 36
79	6	7	12 13 23 34 36 35 45
80	6	7	12 23 25 34 35 45 46
81	6	7	12 13 14 23 34 35 56
82	6	7	12 14 23 24 34 35 56
83	6	7	12 13 23 34 35 45 46
84	6	7	12 13 23 34 45 46 56
85	6	7	12 15 23 24 34 45 46
86	6	7	12 13 15 23 34 45 46
87	6	7	12 13 15 23 34 45 46
87B	6	7	12 13 15 24 34 45 56
88	6	7	12 14 23 34 35 36 56
89	6	7	12 15 16 23 34 45 56
90	6	7	13 15 23 25 34 45 56

表 6 *6 node graphs labelled* 61 *to* 90 *in classification [1]. Note that 87B is absent from [1].*

分类 [1]	节点	链接	连接
91	6	7	12 14 23 25 34 45 56
92	6	7	12 16 23 34 36 45 56
93	6	7	12 15 23 34 36 45 56
94	6	6	12 13 23 34 35 36
95	6	6	13 23 34 35 45 56
96	6	6	12 23 25 34 35 56
97	6	6	12 13 23 34 35 56
98	6	6	12 23 35 34 45 56
99	6	6	12 23 24 45 46 56
100	6	6	12 23 34 45 46 56
101	6	6	12 14 23 34 35 36
102	6	6	12 14 23 25 34 36
103	6	6	12 23 42 35 45 56
103	6	6	12 14 23 34 35 56
105	6	6	12 15 23 34 45 46
106	6	6	12 16 23 34 45 56
107	6	5	16 26 36 46 56
108	6	5	14 24 34 45 56
109	6	5	13 23 34 45 46
110	6	5	12 23 34 36 45
111	6	5	12 23 34 45 46
112	6	5	12 23 34 45 56

表7: *6 node graphs labelled* 91 *to* 112 *in classification [1].*

9 附录B: 1_s、 2_s、 3_s、 4_s 和 5_s

这里给出了5节点图和6节点图的1s、2s、3s、4s和5s集合的表。图的编号分别遵循Cvetkovic[1] 对5个及以下节点的图和6节点图所给出的编号。

9.1 1s

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
3	2	3	$(-1, 0, 1)$	
4	3	8	$(0, 0, -1, 1)$	
4	4	6	$(1, 1, 0, -2)$	5.3 上的扩张
5	4	28	$(1, 1, 0, -1, -1)$	
5	4	28	$(1, 0, 0, 0, -1)$	5.3 上的关节
5	4	28	$(1, 1, 1, 0, -3)$	星图 4
5	4	29	$(0, 1, -1, 0, 0)$	5.3 上的关节
5	5	23	$(0, 0, 0, 1, -1)$	5.3 上的关节
5	5	23	$(1, 1, 0, -2, 0)$	5.3 上的扩张
5	6	18	$(1, 1, 0, 1, -3)$	
5	6	20	$(1, 1, 0, -1, -1)$	5.28 上的关节
5	7	14	$(1, 1, 0, 1, -3)$	

表 8: *Five node graphs with soft nodes and eigenvalue* 1.

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
6	11	10	$(1, 1, 1, 1, 0, -4)$	第 19 页的链接
6	10	19	$(1, 1, 1, 1, 0, -4)$	第 33 页的链接
6	9	33	$(1, 1, 1, 1, 0, -4)$	第 38 页的链接
6	9	36	$(2, 2, 2, 0, -3, -3)$	第 61 页的链接
6	9	38	$(1, 1, 1, 1, 0, -4)$	链接 58
6	9	53	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	链接 75
6	9	53	$(1, 1, 1, 0, -3, 0)$	链接 75
6	8	56	$(1, 1, 1, 1, 0, -4)$	5.3 上的扩张
6	8	58	$(1, 1, 1, 1, 0, -4)$	5.3 上的扩张
6	8	61	$(2, 2, 2, 0, -3, -3)$	第 94 页的链接
6	7	75	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	第 5.3 节的关节
6	7	75	$(1, 1, 0, 1, -3, 0)$	第 101 页的链接
6	7	78	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	第 101 页的链接
6	7	79	$(1, 1, 0, 0, 0, -2)$	第 5.3 节的扩张
6	7	79	$(1, 1, 0, -1, -1, 0)$	第 94 页的链接
6	7	92	$(1, 1, 0, -1, -1, 0)$	第 106 页的链接
6	6	94	$(1, 1, 0, -2, 0, 0)$	第 107 页的链接
6	6	94	$(3, 3, 0, -2, -2, -2)$	第 107 页的链接
6	6	94	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	第 95 页的链接
6	6	95	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	第 5.3 节的关节
6	6	97	$(1, 1, 0, -2, 0, 0)$	第 108 页的链接
6	6	99	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	5.3 上的关节
6	6	101	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	5.3 上的关节
6	6	106	$(0, 1, 1, 0, -1, -1)$	两个 5.3 之间的链接
6	5	107	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	5.3 上的关节
6	5	107	$(1, 1, -1, -1, 0, 0)$	焊接两个 5.3 和关节
6	5	107	$(1, 1, 0, -2, 0, 0)$	5.3 上的关节
6	5	108	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	5.3 上的关节
6	5	108	$(-1, 0, 1, 0, 0, 0)$	5.3 上的关节
6	5	109	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	5.3 上的关节
6	5	109	$(0, 0, 0, 0, -1, 1)$	第5.3节中的关节
6	5	111	$(0, 0, 0, 0, -1, 1)$	第5.3节中的关节

表9： *Six node graphs with soft nodes and eigenvalue* 1.

9.2 2秒

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
4	5	5	(1, 0, −1, 0)	5.7 上的链接
4	4	7	(1, 0, −1, 0)	
4	4	7	(0, 1, 0, −1)	
5	8	12	(1, 0, −2, 0, 1)	5.17 上的链接
5	7	15	(1, 0, −1, 0, 0)	位于 5.7 的关节
5	7	15	(1, 01, 0, −2)	5.17 上的链接
5	7	17	(1, 0, −2, 0, 1)	
5	6	18	(0, 1, 0, −1, 0)	关节 5.7
5	6	22	(0, 1, 0, −1, 0)	在 5.3 和关节中添加一个零
5	6	22	(1, 0, 0, −1, 0)	在 5.3 和关节中添加一个零
5	5	26	(0, 1, 0, −1, 0)	关节 5.7

表10: *Five node graphs with soft nodes and eigenvalue* 2.

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
6	12	5	$(1, 1, 0, -3, 0, 1)$	
6	11	11	$(1, 1, 1, 0, -3, 0)$	
6	11	13	$(1, 0, -1, -1, 0, 1)$	
6	11	14	$(1, 1, 0, -3, 0, 1)$	
6	10	21	$(1, 0, -1, -1, 0, 1)$	
6	10	21	$(0, 0, 1, -1, 0, 0)$	
6	10	29	$(1, 1, 1, 0, -3, 0)$	
6	10	31	$(1, 0, -1, -1, 0, 1)$	第 37 页的链接
6	9	33	$(-2, 0, 1, 1, 0, 0)$	第 56 页的链接
6	9	37	$(1, 0, 0, 0, 0, -1)$	第 73 页的链接
6	9	37	$(0, 0, 0, -1, 0, 1)$	第 73 页的链接
6	9	37	$(1, 0, 1, -1, 0, -1)$	第 73 页的链接
6	9	40	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	在 5.3 中添加一个 0，关节
6	9	49	$(0, 0, 1, -1, 0, 0)$	将 0 加到 5.3，关节
6	9	49	$(1, 0, -1, -1, 0, 1)$	第 69 页上的链接
6	8	56	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	将 0 加到 5.3，关节
6	8	56	$(1, 1, 0, -2, 0, 0)$	64 上的链接
6	8	57	$(-1, 0, 1, 0, 0, 0)$	链接 93
6	8	61	$(0, 0, 0, 0, -1, 1)$	将 0 加到 5.3，关节
6	8	64	$(1, 1, 0, -2, 0, 0)$	5.7 的扩张
6	8	66	$(0, 0, 1, 0, -1, 0)$	将一个 0 加法到 5.3
6	8	69	$(0, 1, 1, -1, -1, 0)$	链接 5.7 和 5.3
6	8	71	$(0, 0, 0, 1, -1, 0)$	将 0 加到 5.3 上
6	8	73	$(1, 0, 0, 0, 0, -1)$	将 0 加到 5.3 上
6	8	73	$(0, 0, 0, -1, 0, 1)$	将 0 加到 5.3 上
6	8	73	$(1, 0, 1, -1, 0, -1)$	焊接两个 5.7
6	8	74	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	连杆与关节 5.7
6	7	75	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	连杆 101
6	7	76	$(0, 0, -1, 0, 1, 0)$	连杆 103
6	7	81	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	连杆与关节 5.7
6	7	82	$(1, 0, -1, 0, -1, 1)$	连杆 104
6	7	88	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	位于 5.7 的关节
6	7	90	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	位于 5.7 的关节
6	7	90	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	位于 5.7 的关节
6	7	91	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	向 5.3 加上一个 0
6	7	92	$(-1, 1, 1, 1, -1, -1)$	5.1 上的链接
6	7	93	$(0, 0, 0, 1, 0, -1)$	向 5.3 加上一个 0，关节
6	7	93	$(1, -1, -1, 0, 1, 0)$	
6	6	101	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	将 0 加到 5.3，关节
6	6	103	$(0, 0, 1, -1, 0, 0)$	将 0 加到 5.3，关节
6	6	104	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	向 5.3 添加一个 0，关节
6	6	104	$(1, 0, -1, 0, -1, 1)$	位于 5.7 的关节

表11： *Six node graphs with soft nodes and eigenvalue* 2.

9.3 3s

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
3	3	2	$(-1, 1, 0)$	
4	4	6	$(-1, 1, 0, 0)$	关节 5.3
5	7	11	$(0, -1, 0, 0, 1)$	关节 5.3
5	6	13	$(-1, 0, 0, -1, 0)$	关节 5.3
5	8	13	$(0, 1, 0, 0, -1)$	关节 5.3
5	7	16	$(-1, 1, 0, -1, 1)$	加法 零到链4
5	7	17	$(0, 1, 0, -1, 0)$	关节 5.3
5	6	20	$(-1, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.3
5	6	20	$(0, 0, 0, -1, 1)$	关节 5.3
5	6	22	$(0, 0, -1, 0, 1)$	关节 5.3
5	5	23	$(-1, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.3
5	5	25	$(-1, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.3

表12: *Five node graphs with soft nodes and eigenvalue* 3.

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
6	13	3	$(-1, 0, 2, 0, 0, -1)$	链接 8
6	12	6	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	链接 11
6	12	6	$(0, -1, 0, -1, 0, 2)$	链接 8
6	12	8	$(0, -2, 0, 0, 1, 1)$	链接 11
6	11	11	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	链接 16
6	11	16	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	链接 25
6	11	16	$(0, -1, 0, -1, 0, 2)$	链接 17
6	11	17	$(0, 2, 0, -1, -1, 0)$	链接 52
6	11	17	$(1, 0, -2, 0, 0, 1)$	链接 52
6	10	19	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	链接 39
6	10	25	$(0, 0, 0, -1, 0, 1)$	
6	10	29	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	
6	10	32	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	链接 52
6	10	32	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	链接 52
6	9	36	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	关节 5.2
6	9	38	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	关节 5.13
6	9	38	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	链接63
6	9	39	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	链接63
6	9	51	$(1, 1, 0, -1, -1, 0)$	链接106
6	9	51	$(0, 0, 1, -1, 1, -1)$	链接106
6	9	52	$(0, 1, 0, 1, 0, -2)$	
6	9	52	$(1, 0, 1, 0, -2, 0)$	
6	9	52	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	链接106
6	9	52	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	链接106
6	8	58	$(-1, 1, 1, -1, 0, 0)$	链接79
6	8	61	$(0, -1, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.2
6	8	62	$(0, 0, 0, 0, -1, 1)$	关节 5.2
6	8	63	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	链接 91
6	8	70	$(0, -1, 1, 1, -1, 0)$	链接106
6	8	70	$(-1, 0, 1, 1, 0, -1)$	链接106
6	8	74	$(-1, 0, 1, -1, 0, 1)$	链接106
6	8	74	$(0, 0, 0, -1, 0, 1)$	链接106
6	8	74	$(-1, 0, 1, 0, 0, 0)$	链接106
6	7	79	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	关节 5.2
6	7	79	$(0, 0, 0, -1, 1, 0)$	关节 5.2
6	7	83	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	关节 5.2
6	7	84	$(-1, 0, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.2
6	7	84	$(0, 0, 0, -1, 0, 1)$	关节 5.2
6	7	88	$(0, 0, 0, 0, -1, 1)$	关节 5.2
6	7	91	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	
6	7	92	$(1, -1, 0, 1, -1, 0)$	链接106
6	7	92	$(0, 1, -1, 0, 1, -1)$	链接106
6	6	94	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	关节 5.2
6	6	97	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	关节 5.2
6	6	99	$(1, -2, 1, 2, -2, 0)$	焊接 P3 和 C3
6	6	99	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	关节 5.2
6	6	100	$(1, -2, 1, 1, -1, 0)$	焊接 P3 和 C3
6	6	100	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	关节 5.2
6	6	106	$(-1, 0, 1, -1, 0, 1)$	环 6
6	6	106	$(-1, 1, 0, -1, 1, 0)$	环 6

表13： *Six node graphs with soft nodes and eigenvalue* 3.

9.4 4s

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
4	5	5	$(1, -2, 1, 0)$	
5	8	12	$(1, 0, 0, 0, -1)$	17 上的链接
5	7	14	$(0, 1, 0, -1, 0)$	
5	7	14	$(-1, 0, 0, 1, 0)$	19 上的链接
5	7	17	$(-1, 0, 0, 0, 1)$	
5	7	18	$(-2, 1, 0, 1, 0)$	在5处的关节
5	7	19	$(0, 1, 0, -1, 0)$	

表14: *Five node graphs with soft nodes and eigenvalue* 4.

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
6	10	9	$(0, 0, -1, 1, 0, 0)$	
6	10	9	$(0, 0, -1, 1, 0, 0)$	
6	10	9	$(0, 0, -1, 1, 0, 0)$	
6	10	13	$(0, 0, -1, 1, 0, 0)$	
6	10	13	$(-1, 0, 0, 0, 0, 1)$	
6	10	14	$(0, 0, -1, 0, 1, 0)$	
6	10	16	$(-1, 0, 1, 0, 0, 0)$	
6	10	18	$(-1, 0, -1, 1, 0, 1)$	链环 6.31
6	10	18	$(1, 0, 0, 0, 0, -1)$	链环 6.31
6	10	21	$(1, 0, 0, 0, 0, -1)$	链环 6.31
6	10	24	$(1, 0, 0, 0, 0, -1)$	链环 6.31
6	10	29	$(0, 0, 0, 1, 0, -1)$	链环 6.41
6	9	31	$(-1, 0, -1, 1, 0, 1)$	链环 6.31
6	9	31	$(0, -0.6586, -0.2574, 0.2574, 0.6586, 0)$	
6	9	31	$(1, 0, 0, 0, 0, -1)$	
6	9	33	$(0, 0, -1, 1, 0, 0)$	
6	9	35	$(0, -1, 1, 0, 0, 0)$	
6	9	36	$(0, -1, 1, 0, 0, 0)$	链环 6.53
6	9	36	$(0, 1, -1, 0, 0, 0)$	链环 6.53
6	9	41	$(0, 0, 0, 1, 0, -1)$	链环 6.48
6	9	48	$(1, -1, 1, 0, -1, 0)$	链环 6.93
6	9	48	$(0, 0, 0, 1, 0, -1)$	链环 6.49
6	9	49	$(0, -1, 0, 0, 1, 0)$	链接 6.78
6	9	49	$(-1, 0, 0, 0, 0, -1)$	链接 6.78
6	8	53	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	链接 6.78
6	8	53	$(0, 1, -1, 0, 0, 0)$	链接 6.78
6	8	53	$(0, -1, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.5
6	8	55	$(-1, 0, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.5
6	8	55	$(0, -1, 1, 0, 0, 0)$	关节 5.5
6	8	61	$(0, 0, 0 - 2, 1, 1)$	
6	8	62	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	链接 6.78
6	8	64	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	关节 5.17
6	8	65	$(0, -1, 1, 0, 0, 0)$	
6	8	69	1 个任意零点	链环 6.93
6	8	71	$(1, -1, 1, 0, -1, 0)$	链环 6.93
6	8	73	$(0, 1, 0, 0, -1, 0)$	焊接 5.7
6	7	75	$(-2, 1, 0, 1, 0, 0)$	关节 5.18
6	7	78	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	关节 5.5
6	7	80	$(0, 0, -1, 0, 1, 0)$	关节 5.5
6	7	81	$(-2, 1, 0, 1, 0, 0)$	关节 5.18
6	7	82	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	关节 5.19
6	7	93	$(1, -1, 1, 0, -1, 0)$	

表 15: *Six node graphs with soft nodes and eigenvalue 4.*

9.5 5秒

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
5	10	10	(1, −1, 0, 0, 0)	
5	10	10	(0, 1, −1, 0, 0)	
5	10	10	(0, 0, 1, −1, 0)	
5	10	10	(0, 0, 0, 1, −1)	5.11 上的链接
5	9	11	(1, 0, −1, 0, 0)	链接 5.12
5	9	11	(0, 0, 1, −1, 0)	
5	8	12	(0, 1, 0, −1, 0)	连接 5.15
5	8	13	(1, 0, −2, 1, 0)	向 5.3 添加 2 个软节点
5	7	15	(1, 1, −3, 1, 0)	向 4 星图添加软节点
5	7	15	(0, 0, −1, 1, 0)	向 5.1 添加 3 个软节点

表 16: *Five node graphs with soft nodes and eigenvalue* 5.

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
6	13	3	$(1, 0, 0, 0, 0, -1)$	
6	12	5	$(-1, 1, 0, 0, 0, 0)$	链环 6.12
6	12	5	$(1, 1, 0, 0, 0, -2)$	链接 6.14
6	12	8	$(0, 0, 0, 0, 1, -1)$	链环 6.12
6	12	8	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	
6	11	10	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	链接 6.19
6	11	10	$(-1, 1, -1, 1, 0, 0)$	链接 6.19
6	11	10	$(1, -1, -1, 1, 0, 0)$	
6	11	11	$(1, 1, 0, 0, 0, -2)$	链接 6.14
6	11	12	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	链接 6.14
6	11	14	$(1, 1, 0, 0, 0, -2)$	链接 6.29
6	11	14	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	
6	11	17	$(-1, 0, 0, 1, -1, 1)$	在两个 5.2 之间插入一组匹配
6	11	17	$(0, 0, 0, 1, -1, 0)$	向 5.1 添加 3 个软节点
6	10	19	$(-1, 1, 1, -1, 0, 0)$	6.30 的链接
6	10	19	$(0, 1, -1, 0, 0, 0)$	6.19 的链接
6	10	20	$(1, 0, -2, 1, 0, 0)$	6.33 的链接
6	10	20	$(0, 0, -1, 1, 0, 0)$	6.35 上的链接
6	10	23	$(0, 1, 0, 0, -1, 0)$	6.32 上的链接
6	10	23	$(-1, 0, -1, 1, 0, 1)$	6.30 上的链接
6	10	26	$(0, 0, 0, 1, 0, -1)$	6.32 上的链接
6	10	29	$(1, -2, 1, 0, 0, 0)$	6.32 上的链接
6	10	30	$(1, -1, 0, 1, -1, 0)$	6.70 上的链接
6	10	32	$(0, 1, 0, 0, 0, -1)$	6.32 上的链接
6	9	33	$(1, -3, 1, 1, 0, 0)$	6.56 上的链接
6	9	34	$(0, 1, 0, -1, 0, 0)$	6.45 上的链接
6	9	35	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	6.45 处的链接
6	9	38	$(1, -1, 1, -1, 0, 0)$	5.13 处的关节
6	9	39	$(1, -2, 0, 1, 0, 0)$	5.13 处的关节
6	9	44	$(-1, 0, 1, -1, 0, 1)$	6.70 上的链接
6	9	45	$(0, 0, 1, -1, 0, 0)$	6.57 上的链接
6	9	51	$(0, 0, 1, -1, 1, -1)$	6.70 上的链接
6	8	56	$(1, 1, -3, 1, 0, 0)$	在 5.15 上的关节
6	8	57	$(0, -1, 0, 1, 0, 0)$	在 5.15 上的关节
6	8	70	$(-1, 0, 1, -1, 0, 1)$	在环 3 上插入匹配

表17: *Six node graphs with soft nodes and eigenvalue* 5.

9.6 6秒

节点	链接	分类 [1]	特征向量	连接
6	13	1	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	
6	13	1	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	
6	13	1	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	
6	13	1	$(1, 1, -2, 0, 0, 0)$	链接 6.3
6	13	2	$(1, -1, 0, 0, 0, 0)$	
6	13	2	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	
6	13	2	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	
6	13	3	$(1, -2, 0, 1, 0, 0)$	链接 6.4
6	12	3	$(0, 1, 0, 0, -1, 0)$	链接 6.4
6	12	4	$(1, -2, 0, 1, 0, 0)$	
6	12	4	$(0, 1, 0, 0, -1, 0)$	链接 6.6
6	12	5	$(0, 0, 1, 0, -1, 0)$	链接 6.7
6	12	6	$(1, 1, 0, 0, 0, -2)$	链接 6.16
6	12	6	$(1, 0, -1, 0, 0, 0)$	链接 6.7
6	12	7	$(0, 1, 0, 0, -1, 0)$	向 5.1 添加四个软节点
6	12	8	1 任意放置 0	
6	11	9	$(1, 1, 0, -1, 1, 0)$	向 5.7 添加两个软节点
6	11	11	$(1, 1, 1, -4, 1, 0)$	向 5.28 添加一个软节点
6	11	13	1 任意放置 0	
6	11	16	$(1, 0, 1, 0, -2, 0)$	向 5.2 添加 3 个软节点
6	9	37	$(1, 0, 0, -1, 0, 0)$	向 5.1 添加 4 个软节点

表18: *Six node graphs with soft nodes and eigenvalue* 6.