广义李对称性与几乎正则拉格朗日量：对称性与动力学之间的联系

Achilles D. Speliotopoulos

物理系，加州大学伯克利分校，加利福尼亚州 *94720*，美国*

（日期：2023年1月23日）

arXiv:2301.08396v1 [math-ph] 20 Jan 2023

摘要

本文研究了几乎正则拉格朗日量的广义李对称性，并确定了它们对动力系统演化的影响。研究发现，如果作用量具有广义李对称性，那么拉格朗日量必然是奇异的；反之则不成立，本文通过一个具体例子对此进行了说明。研究还发现，作用量的广义李对称性是欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性的李子群。反之同样不成立：有些系统的欧拉-拉格朗日运动方程具有广义李对称性，而作用量却没有，本文再次通过一个具体例子对此进行了说明。最重要的是，本文证明，作用量的每一种广义李对称性都会为动力系统的演化贡献一个任意函数。这类对称性的数量为拉格朗日相空间中从任意一组允许的初始数据出发的曲线族的维数提供了一个下界。此外，如果在应用拉格朗日约束算法时引入了二阶或更高阶的拉格朗日约束，那么这些附加约束不可能源自作用量的广义李对称性。

一、引言

欧拉-拉格朗日运动方程的对称性最近被用于研究奇异拉格朗日量的受约束动力学 [1]。研究重点是近正则拉格朗日函数 [2–5], ，研究发现，这些拉格朗日函数的欧拉-拉格朗日运动方程具有广义李对称性（亦称局部规范对称性）。在拉格朗日力学的拉格朗日相空间方法中，确定了该对称群 Gr$s$ym 的生成元 $\mathcal{S}$ym，并发现它们属于拉格朗日二形式 $\mathbf{\Omega}_L$ 的核。众所周知，能量方程的解 $\mathbf{X}_E$ ，

$$0 = \mathbf{d}E - i_{\mathbf{X}_E}\mathbf{\Omega}_L, \tag{1}$$

对于几乎正则拉格朗日量而言并不唯一； [1] 已证明， $\mathcal{S}$ym 对该方程一般解——特别是对**二阶拉格朗日**

* 也任职于物理科学与工程部、迪亚布洛谷学院，美国加利福尼亚州普莱森特希尔，邮编 94523；

ads@berkeley.edu

向量场（SOLVF）施加作用后，将得到一个不再是公式（1）解的向量场。因此，并非能量方程的所有解都以 Gr$\mathcal{S}$ym 为对称群。不过，可以构造公式（1）的解，使得 $\mathcal{S}$ym 确实生成一个对称变换群 [1]。这些向量场称为**二阶欧拉-拉格朗日向量场**（SOELVF）。由于奇异拉格朗日量对应的动力系统演化必须位于拉格朗日约束曲面上， [5], 中也为 SOELVF 引入了一种拉格朗日约束算法，以构造此类能量方程的解。随后证明，这些 SOELVF 以及描述和确定动力系统运动所需的拉格朗日相空间中的动力学结构，都可以投影到哈密顿相空间。特别是，初级哈密顿约束可以由位于 Ω_L核中的向量构造；SOELVF 的拉格朗日约束算法等价于对总哈密顿量进行稳定性分析（我们沿用 [6]中的术语；另见 [7–9]），该总哈密顿量是利用受约束哈密顿力学得到的。重要的是，这一稳定性分析最终给出的哈密顿向量场，正是由拉格朗日约束算法得到的 SOELVF 的投影。由此证明，对于几乎正则拉格朗日量，力学的拉格朗日表述与哈密顿表述是等价的。

虽然 [1] 关注的是欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性，以及在拉格朗日相空间中构造的动力学结构能否投影到哈密顿相空间，但本文关注的是作用量本身的对称性，以及这些对称性对动力系统演化的影响。研究发现，这种影响的范围相当广，限制性出人意料地强，且微妙之处超乎预期。事实上，即便是这样一个看似合理的预期——欧拉-拉格朗日运动方程的任何广义李对称性都应是作用量本身对称性的体现——也并不成立。

我们发现，如果作用量具有广义李对称性，那么其拉格朗日量必然是奇异的；反之则不一定成立，这一点我们通过一个具体例子加以说明。我们还发现，作用量的广义李对称性的生成元构成了欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性生成元的一个李子代数；反之同样不成立。我们给出了一个动力系统的例子，其中欧拉-拉格朗日运动方程具有广义李对称性，而其作用量却没有。最重要的是，对于拉格朗日量几乎正则

且二形式 Ω_L 秩为常数的系统，我们证明，作用量的每个广义李对称性都会为 SOELVF 贡献一个任意常数。因此，以 Gr$s$ym 为对称群的能量方程解空间的维数至少与作用量的广义李对称性数量相同。此外，如果在应用拉格朗日约束算法的过程中引入了二阶或更高阶的拉格朗日约束，那么这些附加约束不可能由作用量的广义李对称性导致。

此前已有关于拉格朗日系统对称性的研究。然而，这些分析主要关注时变拉格朗日量 [10–17]、一阶演化方程系统 [18–22]，或公式（ 1 ）的通解 [23] （另见 [24]）。值得注意的是，这些研究绝大多数采用一阶射流丛上的一阶延拓，重点考察一阶演化方程的李对称性。我们关注的是作用量的对称性，因此自然会考虑广义李对称性和二阶延拓。据我们所知，此前尚未对作用量进行过此类对称性分析。（关于 k阶射流丛上的k阶延拓的框架此前已有介绍 [16, 17, 23, 25, 26], ，但并未将其应用于作用量或欧拉-拉格朗日运动方程。）

本文其余部分安排如下。在**第二节** 中，确定动力系统的作用量具有广义李对称性所需满足的条件，以及该作用量对应的欧拉-拉格朗日运动方程具有广义李对称性所需满足的条件。为比较两者的条件，我们分别进行分析，且各自内容完整。在**第三节** 中，回顾拉格朗日相空间的性质，并确立本文所用的记号。文献 [1], 中已确定欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称群的生成元，本文也概述其中与本研究相关的结果。在**第四节**中，采用拉格朗日相空间方法求出作用量的广义李对称群的生成元，并确定它们与欧拉-拉格朗日运动方程对称群生成元之间的关系。随后，通过将文献[1] 中引入的拉格朗日约束算法应用于这些 SOELVF，分析作用量的对称性对 SOELVF 的影响。接着，在**第五节**中将本文所得结果应用于三个不同的动力系统。具体而言，文中给出了一个不具有广义李对称性但仍然是奇异系统的例子，以及另一个作用量不具有对称性、但其

欧拉-拉格朗日运动方程具有对称性的例子。**第六节**给出了结论。

II. 广义李对称性与拉格朗日力学

本节将确定动力系统的作用量具有广义李对称性的条件，以及该系统的欧拉-拉格朗日运动方程具有广义李对称性的条件。尽管这两项判定都在拉格朗日力学的框架内进行，但对作用量的分析与对运动方程的分析是分别完成的——二者各自独立完整——以便比较这两个条件。我们稍后将证明，作用量的广义李对称性的每个生成元，都是欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性的生成元。有趣的是，反过来却不成立。

A. 作用量的对称性

我们从拉格朗日力学入手，分析动力系统的作用量的广义李对称性[27]

$$S := \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \dot{q}(t)\right) dt,$$

对于定义在 D 维构型空间 $\mathbb{Q}$ 上的动力系统。这里， $L(q(t)\ \dot{q}(t))$ 是沿路径 $q(t) = \left(q^1(t)\ldots, q^D(t)\right)$ 的拉格朗日量，该路径位于 $\mathbb{Q}$ 上，端点为 $Q_1 := q(t_1)$ $Q_2 := q(t_2)$。这些点在选择 S 时同时选定，并且保持固定。

由于 $L(q(t)\ \dot{q}(t))$ 同时依赖于路径的位置 $q(t)$ 和速度 $\dot{q}(t)$，我们考虑由下式生成的广义李对称性

$$\mathbf{g}_L := \rho_L(q, \dot{q}) \cdot \frac{\partial}{\partial q},$$

其中 $\rho_L(q, \dot{q})$ 不显式依赖于时间。沿路径演化得到全时间导数

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} := \dot{q} \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \ddot{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}}. \tag{2}$$

由此得到 $\dot{\rho}_L := \mathbf{d}\rho_L/\mathbf{d}t$，以及二阶延拓向量 [27],

$$\mathbf{pr}\ \mathbf{g}_L := \rho_L \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \dot{\rho}_L \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \ddot{\rho}_L \cdot \frac{\partial}{\partial \ddot{q}}, \tag{3}$$

在二阶射流空间 $\mathbb{M}^{(2)} = \{(t, q, \dot{q}, \ddot{q})\}$ 上，其中 **延拓** $\mathbf{g}_L \in \mathbf{T}\mathbb{M}^{(2)}$。

在这种广义李对称性下，作用量的变化为

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{pr}\ \mathbf{g}_L \Big[L(q(t), \dot{q}(t)) \Big] dt,$$

要求 $\rho_L(q(t_1)\ \dot{q}(t_1)) = 0 = \rho_L(q(t_2)\ \dot{q}(t_2))$ 。然后经过分部积分，

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \rho_L \cdot \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] dt. \tag{4}$$

需要注意的是，作用量可以沿着 $\mathbb{Q}$ 上的任意路径求值。因此，如果 $\mathbf{g}_L$ 生成了作用量的对称性，那么式（4）必须对 $\mathbb{Q}$ 上所有 路径 $q(t)$ 都成立，而不仅仅是对使作用量取极值的路径成立。

为了与本文其余部分采用的拉格朗日相空间方法建立联系，我们利用

$$E\left(q, \dot{q}\right) := \dot{q}^a \frac{\partial L\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}^a} - L\left(q, \dot{q}\right),$$

以及

$$M_{ab}\left(q, \dot{q}\right) := \frac{\partial^2 L\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}, \quad \text{and} \quad F_{ab}\left(q, \dot{q}\right) := \frac{\partial^2 L\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} - \frac{\partial^2 L\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}^b \partial q^a},$$

将式（4）表示为

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \rho_L^a \left(\frac{\partial E}{\partial q^a} + F_{ab}(q, \dot{q}) \dot{q}^b + M_{ab}(q, \dot{q}) \ddot{q}^b \right) dt. \tag{5}$$

这里，拉丁指标的取值范围为 1 到 D，并使用爱因斯坦求和约定。由此我们得到第一个结果。

引理 1 动力系统的作用量 S 具有由$\mathbf{g}_L$ 生成的广义李对称性，当且仅当存在一个 $\rho_L \in$ ***ker*** M_{ab}，使得

$$0 = \rho_L^a(q, \dot{q}) \left(\frac{\partial E}{\partial q^a} + F_{ab}(q, \dot{q}) \dot{q}^b \right), \tag{6}$$

在 $\mathbf{T}\mathbb{Q}$ 上。

证明。 如果$\mathbf{g}_L$ 生成了 S 的广义李对称性，那么对于 $\mathbb{Q}$ 上的所有路径，方程 (5) 都必须为零。然而，对于 $\mathbb{Q}$ 上的任意路径，路径 $\ddot{q}$ 的曲率不会依赖于该路径的 $q(t)$ 或 $\dot{q}$ (t) 。因此，对于 $\delta S = 0$，任取 $\ddot{q}$ 都必须有 $\rho_L^a M_{ab} \ddot{q}^b = 0$，从而 $\rho_L^a \in$ ***ker*** M_{ab}。方程 (5) 中的其余项给出条件方程(6)。

■

所有满足**引理 1** 的向量场 g_L 构成的集合记为 $\mathfrak{g}_L$，而 $\mathbf{pr}\ \mathfrak{g}_L := \{\mathbf{pr}\ \mathsf{g}_L \mid \mathsf{g}_L \in \mathfrak{g}_L\}$ 是它们的延拓集合。该$\mathbf{pr}\ \mathfrak{g}_L$ 是对合的 [27], ，且$\mathbf{pr}\ \mathfrak{g}_L$ 生成广义李对称群的条件见 [27]。

我们从**引理 1** 可以看出，如果作用量具有广义李对称性，那么拉格朗日量必然是奇异的，因此拉格朗日二形式 Ω_L 将不具有最大秩。同样需要注意的是，尽管形如 Eq. (6) 的方程经常出现在力学的拉格朗日相空间描述中 [1], ，但它们表现为拉格朗日约束，即为了使欧拉-拉格朗日方程下的演化定义良好而必须施加的条件。在这里，Eq. (6) 并不是一个约束。相反，由于对于 $\mathbb{Q}$ 上的所有可能路径，作用量都必须具有这种对称性，并且所有可能路径的集合覆盖了 $\mathbb{Q}$，因此，Eq. (6) 是关于 ρ_L 的一个必须在所有 $\mathrm{T}\mathbb{Q}$ 上恒等满足的条件——也就是说，在拉格朗日相空间上，g_L 才能成为对称群的生成元。我们将看到，$\ker\ M_{ab}$ 中的向量并非都满足恒等式 Eq. (6)，因此这些向量也并非都能生成作用量的广义李对称性。

B. 欧拉-拉格朗日运动方程的对称性

第二节 A 着重讨论构型空间 $\mathbb{Q}$ 上的任意路径及作用量的对称性；本节则着重讨论使作用量取极小值的轨迹及其广义李对称性。这些轨迹是欧拉-拉格朗日运动方程的解，而对于几乎正则拉格朗日量，这些解构成一个曲线族。事实上，正是这一曲线族的存在产生了广义李对称性。本文的处理方式与 [1]中的处理方式十分接近。

对于几乎正则拉格朗日量，欧拉-拉格朗日运动方程的解

$$M_{ab}(q,\dot{q})\ddot{q}^b = -\frac{\partial E}{\partial q^a} - F_{ab}(q,\dot{q})\dot{q}^b, \tag{7}$$

并不唯一。对于这些拉格朗日函数，$M_{ab}(q,\dot{q}) = D - N_0$的秩（其中 $N_0 = \dim(\ker\ M_{ab}(q,\dot{q}))$）是常数，但该秩并非最大，因此，方程（7）对 $\ddot{q}$ 没有唯一解。相反，对于一组给定的初始数据（$q_0 = q(t_0)$ $\dot{q}_0 = \dot{q}(t_0)$），方程（7）的解会产生一族从该（$q_0, \dot{q}_0$）演化而来的解。与**第二节 A**中的路径一样，这些解通过广义李对称性 [27] 彼此关联。

沿着函数集合

$$\Delta_a(q,\dot{q},\ddot{q}) := \frac{\partial E(q,\dot{q})}{\partial q^a} + F_{ab}(q,\dot{q})\dot{q}^b + M_{ab}(q,\dot{q})\ddot{q}^b, \tag{8}$$

定义一组位于 $\mathbb{M}^{(2)}$ 上的曲面 $\Delta_a(q,\dot{q},\ddot{q}) = 0$，而方程（7）的解族

$$\mathcal{O}(q_0,\dot{q}_0) := \left\{ q(t) \mid \Delta_a(q,\dot{q},\ddot{q}) = 0 \text{ with } q(t_0) = q_0,\ \dot{q}(t_0) = \dot{q}_0 \right\},$$

从相同的初始数据 $(q_0,\dot{q}_0)$ 演化而来，构成了位于这些曲面上的轨迹集合。事实上，对于任意两个这样的解 $q^a(t)$ 和 $Q^a(t)$，都存在一个 $\mathfrak{z}(q,\dot{q}) \in \ddot{\ker}\ M_{ab}(q,\dot{q})$，使得 $Q^a - \ddot{q}^a = \mathfrak{z}^a$。重要的是，由于 $\mathfrak{z}^a$ 同时依赖于 q 和 $\dot{q}$，将一个解族 $\mathcal{O}$ 中的一个成员映射到另一个成员的对称群必定是广义李对称性。因此，我们取该对称群的生成元为

$$\mathbf{g} := \rho(q,\dot{q}) \cdot \frac{\partial}{\partial q},$$

相应地，$\mathbf{g}$ 的二阶延拓向量为，

$$\mathbf{pr}\ \mathbf{g} := \rho \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \dot{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \ddot{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \ddot{q}},$$

其对应的 $\mathbf{pr}\ \mathbf{g} \in \mathrm{T}\mathbb{M}^{(2)}$。与上文一样，全时间导数由方程（2）给出，但与 **IIA节** 中的分析不同，这里的路径演化——实际上，$\mathcal{O}(q_0,\dot{q}_0)$ 中所有轨迹的演化——由欧拉-拉格朗日运动方程给出。

该延拓对 Δ_a 在 $\Delta_a = 0$ 曲面上的作用给出：

$$\mathbf{pr}\ \mathbf{g}\left[\Delta_a(q,\dot{q},\ddot{q})\right] = -\frac{\partial \ddot{q}^b}{\partial q^a} M_{bc}(q,\dot{q})\rho^c + \frac{d}{dt}\left[F_{ab}(q,\dot{q})\rho^b + M_{ab}(q,\dot{q})\dot{\rho}^b\right].$$

由于 $N_0 > 0$ 在该曲面上并不唯一，而 $\mathbf{g}$ 必须为 $\mathcal{O}(q_0,\dot{q}_0)$ 中的所有轨迹生成相同的对称群，因此必有 $\rho(q,\dot{q}) \in \ker\ M_{ab}(q,\dot{q})$。由此可得，$\mathbf{pr}\ \mathbf{g}[\Delta_a(q,\dot{q},\ddot{q})] = 0$ 当且仅当存在常数 b_a 使得 $b_a = F_{ab}\rho^b + M_{ab}\dot{\rho}^b$。然而，$\mathcal{O}(q_0,\dot{q}_0)$ 中的解都具有相同的初始数据，因此必有 $\rho(q_0,\dot{q}_0) = 0 = \dot{\rho}(q_0,\dot{q}_0)$。我们由此得出 $b_a = 0$。接下来便可得到这一结果，该结果最初由 [1], 证明。

引理 2 若$\mathbf{g}$ 是 Δ_a 的广义无穷小对称性，则 $\rho^a(q,\dot{q}) \in \ker\ M_{ab}(q,\dot{q})$，且 $\dot{\rho}^a(q,\dot{q})$ 是以下方程的解

$$0 = F_{ab}(q,\dot{q})\rho^b(q,\dot{q}) + M_{ab}(q,\dot{q})\dot{\rho}^b(q,\dot{q}). \tag{9}$$

与前文一样，我们用 $\mathfrak{g}$ 表示满足**引理 2** 的所有向量场 g 的集合，而$\mathbf{pr}\ \mathfrak{g} := \{\mathbf{pr}\ \mathsf{g} \mid \mathsf{g} \in \mathfrak{g}\}$ 表示它们的延拓集合。再次，$\mathbf{pr}\ \mathfrak{g}$ 是对合的，且$\mathbf{pr}\ \mathfrak{g}$ 生成广义李对称群的条件见[27]。不过请注意，虽然对于任意 $\mathfrak{z} \in \ker\ M_{ab}(q,\dot{q})$，$\rho = 0$ 和 $\dot{\rho} = \mathfrak{z}$ 都是方程 (9) 的解，但我们要求 $\dot{\rho} = \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$；这些解不能作为广义李对称性的生成元。接下来，若 $\dot{\rho}$ 是方程 (9) 的解，则 $\dot{\rho}^a + \mathfrak{z}$ 也是方程 (9) 的解，因此这些解并不唯一。这一点连同前述观察，促使我们从延拓的等价类构造生成元。最后，由方程 (8) 可得，对于任意 $\mathfrak{z} \in \ker\ M_{ab}(q,\dot{q})$，

$$0 = \mathfrak{z}^a \left(\frac{\partial E}{\partial q^a} + F_{ab}(q,\dot{q})\dot{q}^b \right), \tag{10}$$

在解曲面 $\Delta_a(q,\dot{q},\ddot{q}) = 0$ 上。如果方程（10）不恒成立，就必须施加该条件，从而得到拉格朗日约束 [5]。更重要的是，由于每个 $q(t) \in \mathcal{O}(\mathfrak{u}_0)$ 都必须位于拉格朗日约束子流形上，因此，$\mathbf{pr}\ \mathsf{g}$ 生成的 $q(t)$ 的任何对称变换都必须给出一条同样位于约束子流形上的路径 $Q(t)$。

$\mathbf{pr}\ \mathfrak{g}$ 中并非所有向量都是 $\mathcal{O}(\mathfrak{u}_0)$ 的广义李对称群的生成元。要确定其中哪些向量是生成元，以及欧拉-拉格朗日运动方程的对称性生成元与作用量的对称性生成元之间的关系，最好采用拉格朗日相空间框架。为此，我们需要对**引理 2**作如下推广。

考虑向量

$$\mathbf{k} := c \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \dot{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}},$$

其中有一个沿着 $c \in \ker\ M_{ab}(q,\dot{q})$ 的量，并且还有如下量

$$l_a := F_{ab}c^b(q,\dot{q}) + M_{ab}\dot{c}^b(q,\dot{q}).$$

分部积分后，

$$\begin{aligned} l_a &= c^b(q,\dot{q}) \left\{ F_{ab}(q,\dot{q}) - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right\}, \\ &= c^b(q,\dot{q}) \left\{ F_{ab}(q,\dot{q}) - \left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \right] \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \right) \right\}. \end{aligned}$$

利用式 (2)，我们得到

$$\left[\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \right] \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} - \frac{\partial \ddot{q}^c}{\partial \dot{q}^a} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^c \partial \dot{q}^b}.$$

As $q(t)$ 是欧拉-拉格朗日运动方程的一个解，我们发现

$$l_a = c^b(q,\dot{q})\left\{F_{ab}(q,\dot{q}) + \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q_b} + \frac{\partial \ddot{q}^c}{\partial \dot{q}^a}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^c \partial \dot{q}^b}\right\}.$$

使用 $F_{ab}(q,\dot{q})$ 的定义，并要求 $c \in \ker M_{ab}(q,\dot{q})$ 后，这个最后的表达式便为零。因此我们得到以下结果。

引理 3 对于任意向量

$$\mathbf{k} = c \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \dot{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}},$$

使得 $c \in \ker M_{ab}$,

$$0 = F_{ab}c^b(q,\dot{q}) + M_{ab}\dot{c}^b(q,\dot{q}).$$

.

III. 欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性的生成元

采用力学的拉格朗日相空间方法，可以更好地求得欧拉-拉格朗日运动方程及作用量的广义李对称性的生成元。该相空间及其相应的数学结构提供了必要工具，可用于确定对称性的生成元，以及这些生成元所作用的能量方程的解。关于欧拉-拉格朗日运动方程，这一确定过程已在 [1] 中完成。本节将回顾拉格朗日相空间方法，确立本文使用的符号，并概述 [1] 中所得、且为本文所需的结果。（我们也将借此机会更正 [1] 中的排印错误。）本节列出的多数论断不再给出证明；读者可参阅 [1]，其中提供了证明及其推导背景。

A. 拉格朗日量相空间

对于构型空间 $\mathbb{Q}$，**拉格朗日相空间** $\mathbb{P}_L$ 是切空间$\mathbb{P}_L = \mathrm{T}\mathbb{Q}$，其上的坐标记作 $\mathfrak{u} = (q^1, \ldots, q^D, v^1, \ldots v^D)$。对于一组初始数据 $\mathfrak{u}_0 = (q_0, v_0)$，$\mathbb{P}_L$, $t \in [t_0, \infty) \to \mathfrak{u}(t) \in \mathbb{P}_L$ [28]上的积分流由以下方程的解给出：

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} := \mathbf{X}(\mathfrak{u}),$$

其中，X 是 T$\mathbb{P}_L$ =T(T$\mathbb{Q}$) 上的光滑向量场。两个切空间 T$\mathbb{Q}$ 和 T$\mathbb{P}_L$具有丛投影： $\tau_{\mathbb{Q}}$: T $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 和 $\tau_{\mathbf{T}\mathbb{Q}}$: T(T$\mathbb{Q}$) →T$\mathbb{Q}$。它们可用于构造另外两个投影映射： $\tau_{\mathbb{Q}} \circ \tau_{\mathbf{T}\mathbb{Q}}$: T(T$\mathbb{Q}$) $\to \mathbb{Q}$ ，以及将$\tau_{\mathbf{T}\mathbb{Q}}$ 延拓到 T(T$\mathbb{Q}$)（见 [3] 和 [28]）。这个延拓是映射 T$\tau_{\mathbb{Q}}$: T(T$\mathbb{Q}$) $\to$ T$\mathbb{Q}$, 其定义要求映射 $\tau_{\mathbb{Q}} \circ \tau_{\mathbf{T}\mathbb{Q}}$ 和 $\tau_{\mathbb{Q}}$ ∘T$\tau_{\mathbb{Q}}$ 将 T(T$\mathbb{Q}$) 中的任意点映射到 $\mathbb{Q}$中的同一点。T(T$\mathbb{Q}$) 的垂直子丛 [T$\mathbb{P}_L$]^v 是 [T$\mathbb{P}_L$]^v =ker T$\tau_{\mathbb{Q}}$ [3]；位于点 $\mathfrak{u} \in \mathbb{P}_L$ 上方的 X^v $\in$ [T$_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$]^v 称为垂直向量场。T(T$\mathbb{Q}$) 的水平子丛 [T$\mathbb{P}_L$]^q 是 [T$\mathbb{P}_L$]^q = Image T$\tau_{\mathbb{Q}}$；X^q $\in$ [T$_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$]^q 称为水平向量场。因此，每个 X $\in$T$_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$ 都由一个 X^q $\in$ [T$_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$]^q 和一个 X^v $\in$ [T$_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$]^{v}构成，其中 X = X^q +X^v。用局部坐标表示,

$$\mathbf{X}^q := X^{qa}\frac{\partial}{\partial q^a}, \quad \text{and} \quad \mathbf{X}^v := X^{va}\frac{\partial}{\partial v^a}.$$

特别值得关注的是二阶拉格朗日向量场 X$_L$。该向量场是公式（1）的特定解，其中 T$\tau_{\mathbb{Q}}$ ∘ X$_L$ 在 T$\mathbb{Q}$ 上为恒等映射（见 [28]）。用局部坐标表示

$$\mathbf{X}_L = v^a\frac{\partial}{\partial q^a} + X^{va}\frac{\partial}{\partial v^a}.$$

$\mathbb{P}_L$ 上的一形式空间是余切空间 T$^*\mathbb{P}_L$。对于一形式 α $\in$T$^*_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$以及向量场 X $\in$ T$_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$, 对偶延拓映射 T$^*\tau_{\mathbb{Q}}$ 定义为

$$\langle \alpha | \mathbf{T}\tau_{\mathbb{Q}}\mathbf{X} \rangle = \langle \mathbf{T}^*\tau_{\mathbb{Q}}\alpha | \mathbf{X} \rangle,$$

这是对狄拉克左矢与右矢记号进行有益改编后的写法。此外，对于 k-形式丛 $\mathbf{\Lambda}^k$($\mathbb{P}_L$) 中的一般 k-形式ω ,

$$\omega(x) : \mathbf{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{Y}_k \to \langle \omega(x) | \mathbf{Y}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{Y}_k \rangle \in \mathbb{R},$$

其中 Y$_j$ $\in$ T$_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$，对应 $j = 1$、.....、 k。**垂直1-形式子丛** [T$^*\mathbb{P}_L$]^v 是 T$^*\mathbb{P}_L$ 的子丛，定义为 [T$^*\mathbb{P}_L$]^v := ker T$^*\tau_{\mathbb{Q}}$； $\alpha_v \in$ [T$^*_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$]^v 称为**垂直1-形式**。**水平1-形式子丛** [T$^*\mathbb{P}_L$]^q 是 T$^*\mathbb{P}_L$ 的子丛，定义为 [T$^*\mathbb{P}_L$]^q = Image T$^*\mathbb{P}_L$； $\alpha_q \in$ [T$^*_{\mathfrak{u}}\mathbb{Q}$]^q 称为**水平1-形式**。每个一形式 $\varphi \in$ T$^*_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$ 由一个 $\varphi_q \in$ [T$^*_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$]^q 和一个$\varphi_v \in$ [T$^*_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L$]^q 组成，使得 $\varphi = \varphi_q + \varphi_v$。用局部坐标表示， $\varphi_q := \varphi_{qa}$ dq^a 和$\varphi_v := \varphi_{va}dv^a$。

根据 [3, 4], 拉格朗日二形式定义为 $\Omega_L := -$dd$_J L$，其中 d$_J$ 是垂直导数（见 [3]）。该二形式可以表示为 $\Omega_L := \Omega_F + \Omega_M$ ，使得

对于任意 X、$\mathsf{Y} \in \mathsf{T}_{\mathsf{u}}\mathbb{P}_L$。

$$\mathbf{\Omega}_F(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := \mathbf{\Omega}_L(\mathbf{T}\tau_{\mathbb{Q}}\mathbf{X},\mathbf{T}\tau_{\mathbb{Q}}\mathbf{Y}),$$

因此，它是 Ω_L的**水平二形式**。由于 $\Omega_M(\mathsf{X},\mathsf{Y}) = \Omega_L(\mathsf{X},\mathsf{Y}) - \Omega_F(\mathsf{X},\mathsf{Y})$，$\Omega_M$于是是 Ω_L的**混合二形式**。用局部坐标表示，

$$\mathbf{\Omega}_L = -\mathbf{d}\theta_L, \quad \text{where} \quad \theta_L := \frac{\partial L}{\partial v^a}\mathbf{d}q^a,$$

而

$$\mathbf{\Omega}_F := \frac{1}{2}F_{ab}\mathbf{d}q^a \wedge \mathbf{d}q^b, \text{ and } \mathbf{\Omega}_M := M_{ab}\mathbf{d}q^a \wedge \mathbf{d}v^b.$$

对于正则拉格朗日量，X_L 是公式（1）的唯一解。另一方面，对于几乎正则拉格朗日量，这个解并不唯一，而是取决于

$$\ker\ \mathbf{\Omega}_L(\mathfrak{u}) := \{\mathbf{K} \in \mathbf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L \mid\ i_{\mathbf{K}}\mathbf{\Omega}_L = 0\}.$$

根据**第二节**，我们预期这个核在确定欧拉-拉格朗日运动方程和作用量的广义李对称性的生成元时会发挥作用。事实上，考虑自然同构 $iso : (t,q,\dot{q},\ddot{q}) \in \mathbb{M}^{(2)} \to (t,q,v,X_L^{va})$，它在[1], 中定义；再考虑生成元 $\mathsf{g} \in \mathfrak{g}$ 的延拓**pr**g，其中 g 是欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性的生成元。这个**pr** g包含向量

$$\mathbf{k} = \rho \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \dot{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}}.$$

所有这类向量的集合已被证明是对合的（见 [1]）。该同构映射为 $iso : \mathsf{k} \to \mathsf{k}'$ 其中

$$\mathbf{k}' = \rho \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \dot{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial v}.$$

于是 $\mathsf{k}' \in \mathsf{T}\mathbb{P}_L$，并且由**引理 2**可知，$\mathsf{k}' \in \ker\ \Omega_L(\mathfrak{u})$ 也成立。在使用**引理 1** 和**引理 3** 之后，$\mathfrak{g}_L$ 中的生成元也有类似结果。

二形式 Ω_L 给出降指标映射 $\Omega_L^\flat : \mathsf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L \to \mathsf{T}_{\mathfrak{u}}^*\mathbb{P}_L$，其中 $\Omega_L^\flat\mathsf{X} := i_{\mathbf{X}}\Omega_L$。该映射由 $\Omega_L^\flat = \Omega_F^\flat + \Omega_M^{v\flat} + \Omega_M^{q\flat}$构成，其中 $\Omega_F^\flat : \mathsf{X} \in \mathsf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L \to [\mathsf{T}_{\mathfrak{u}}^*\mathbb{P}_L]^q$；$\Omega_M^{q\flat} : \mathsf{X} \in \mathsf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L \to [\mathsf{T}_{\mathfrak{u}}^*\mathbb{P}_L]^q$；以及 $\Omega_M^{v\flat} : \mathsf{X} \in \mathsf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L \to [\mathsf{T}_{\mathfrak{u}}^*\mathbb{P}_L]^v$。用局部坐标表示，$\Omega_F^\flat\mathsf{X} = F_{ab}X^{qa}\mathbf{d}q^b$，$\Omega_M^{q\flat}\mathsf{X} = -M_{ab}X^{va}\mathbf{d}q^b$，且 $\Omega_M^{v\flat}\mathsf{X} = M_{ab}X^{qa}\mathbf{d}v^b$。

对于几乎正则拉格朗日量，$\ker\ \Omega_M^{v\flat} = \mathcal{C} \oplus [\mathsf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L]^v$，而 $\ker\ \Omega_M^{q\flat} = [\mathsf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L]^q \oplus \mathcal{G}$。这里

$$\mathcal{C} := \{\mathbf{C} \in [\mathbf{T}_q\mathbb{P}_L]^q \mid i_{\mathbf{C}}\mathbf{\Omega}_M = 0\},$$

and

$$\mathcal{G} := \{\mathbf{G} \in [\mathbf{T}_q \mathbb{P}_L]^v \mid i_{\mathbf{G}} \mathbf{\Omega}_M = 0\}.$$

由于 $M_{ab}(\mathfrak{u})$ 在 $\mathbb{P}_L$ 上的秩为常数，因此存在一个基，

$$\left\{ \mathfrak{z}_{(n)}(\mathfrak{u}) = \left(\mathfrak{z}^1_{(n)}(\mathfrak{u}), \ldots, \mathfrak{z}^D_{(n)}(\mathfrak{u}) \right) \mid M_{ab}(\mathfrak{u}) \mathfrak{z}^b_{(n)}(\mathfrak{u}) = 0, n = 1, \ldots, N_0 \right\},$$

在每个 $\mathfrak{u} \in \mathbb{P}_L$ 处，$\ker M_{ab}(\mathfrak{u})$ 的张成空间。两者的张成空间

$$\mathcal{C} = \text{span} \left\{ \mathbf{U}^q_{(n)} = \mathfrak{z}_{(n)} \cdot \frac{\partial}{\partial q}, n = 1, \ldots, N_0 \right\}, \text{and}$$
$$\mathcal{G} = \text{span} \left\{ \mathbf{U}^v_{(n)} = \mathfrak{z}_{(n)} \cdot \frac{\partial}{\partial v}, n = 1, \ldots, N_0 \right\},$$

随后即可构造。重要的是， $\mathcal{G}$ 是对合的 [5], ，并且当 $\Omega_L(\mathfrak{u})$ 的秩在 $\mathbb{P}_L$ 上为常数时，$\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 也是对合的。

与 $\mathbf{U}^q{}_{(n)}$ 和 $\mathbf{U}^v_{(n)}$ 相对应的分别是 1-形式 $\mathbf{\Theta}^{(m)}_q$和 $\mathbf{\Theta}^{(m)}_v$，其中 $\langle \mathbf{\Theta}^{(m)}_q | \mathbf{U}^q{}_{(n)} \rangle = \delta^{(m)}{}_{(n)}$，而 $\langle \mathbf{\Theta}^{(m)}_v | \mathbf{U}^v_{(n)} \rangle = \delta^{(m)}_n{}()$。于是 $[\mathbf{T}_{\mathfrak{u}} \mathbb{P}_L]^q = \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}_\perp$ 和 $[\mathbf{T}_{\mathfrak{u}} \mathbb{P}_L]^v = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}_\perp$，其中

$$\mathcal{C}_\perp := \left\{ \mathbf{X} \in [\mathbf{T}_{\mathfrak{u}} \mathbb{P}_L]^q \mid \left\langle \mathbf{\Theta}^{(n)}_q \middle| \mathbf{X} \right\rangle = 0, \ n = 1, \ldots, N_0 \right\}, \text{and}$$
$$\mathcal{G}_\perp := \left\{ \mathbf{X} \in [\mathbf{T}_{\mathfrak{u}} \mathbb{P}_L]^v \mid \left\langle \mathbf{\Theta}^{(n)}_v \middle| \mathbf{X} \right\rangle = 0, \ n = 1, \ldots, N_0 \right\}.$$

属于 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 的向量可通过约化矩阵 F_{nm} 确定：$= \mathfrak{z}^a_{(n)} F_{ab} \mathfrak{z}^b_{(m)}$ 以定义

$$\overline{\mathcal{C}} := \left\{ \overline{\mathbf{C}} \in \mathcal{C} \ \middle| \ \sum_{m=1}^{N_0} \bar{F}_{nm} \overline{C}^{(m)} = 0 \right\} \subset \mathcal{C}.$$

于是，

定理 4 向量 $\mathbf{K} = \mathbf{K}^q + \mathbf{K}^v \in \ker \mathbf{\Omega}_L$ 由下式给出，

$$\mathbf{K}^q = \overline{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{K}^v = \mathbf{G} + \widehat{\mathbf{C}},$$

其中，$\overline{\mathbf{C}} \in \overline{\mathcal{C}}$、$\mathbf{G} \in \mathcal{G}$ 和 $\widehat{\mathbf{C}} \in \mathcal{G}_\perp$ 是 $M_{ab} \widehat{C}^b = -F_{ab} \overline{C}^b$ 的唯一解。

我们在 [1] 中发现，$\dim(\ker \Omega_L(\mathfrak{u})) = N_0 + D$，其中 $D := \dim \overline{\mathcal{C}} \leq N_0$（证明见 [1]）。然而，**引理 3** 的结果表明，我们可以从任意向量 $\mathbf{U}^q \in \mathcal{C}$ 构造一个属于 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 的向量；又由于 $\dim(\mathcal{C}) = N_0$，因此 $\dim(\ker \Omega_L(\mathfrak{u})) = 2N_0$。

B. 一阶拉格朗日约束

对于奇异拉格朗日量，能量方程 $\mathbf{X}_E$ 的解并不唯一。众所周知，这些解通常也无法在整个 $\mathbb{P}_L$上存在，而是局限于由拉格朗日约束确定的空间的一个子流形上。

取 $\mathbf{X}_E = \mathbf{X}_E^q + \mathbf{X}_E^v$ 时，使用一形式 $\mathbf{\Psi}$ 会很方便

$$\Omega_M^{q\flat}\mathbf{X}_E^v = \mathbf{\Psi}.$$

由能量方程构造而成。于是**一阶约束函数** 为$\gamma_n^{[1]} := \left\langle \mathbf{\Psi} | \mathbf{U}^q{}_{(n)} \right\rangle = 0$，其中 $n = 1, \ldots, N_0$。用局部坐标表示,

$$\gamma_n^{[1]} = U_{(n)}^{qa}\left(\frac{\partial E}{\partial q^a} + F_{ab}v^b\right).$$

它们也可以表示为 [3, 4] as $\gamma_n^{[1]} = \langle \mathbf{d}E | \mathbf{P}_{(n)} \rangle = \mathbf{P}_{(n)}E$，其中 $\{\mathbf{P}_{(n)}\}$ 是 $\ker \mathbf{\Omega}_L(\mathfrak{u})$ 的任意一组基，且满足 $\langle \mathbf{\Theta}_q^{(m)} | \mathbf{P}_{(n)} \rangle = \delta_n^{(m)}{}_{()}$。一般而言，$\gamma_n^{[1]} \neq 0$ 在 $\mathbb{P}_L$ 上并不成立。相反，必须施加条件 $\gamma_n^{[1]} = 0$，这进而定义了由集合 $\mathbf{C}_L^{[1]} := \left\{\gamma_1^{[1]}, \ldots, \gamma_{N_0}^{[1]}\right\}$ 给出的 $\mathbb{P}_L$ 的一组子流形。这些曲面构成的集合 $\mathbb{P}_L^{[1]} := \left\{ \mathfrak{u} \in \mathbb{P}_L \mid \gamma_n^{[1]}(\mathfrak{u}) = 0, n = 1, \ldots, N_0 \right\}$ 称为**一阶拉格朗日约束子流形**，其维数为 $\dim \mathbb{P}_L^{[1]} = 2D - I_{[1]}$。这里，$I_{[1]}$是 $\mathbf{C}_L^{[1]}$ 中独立函数的个数，且 $I_{[1]} =$的秩为 $\operatorname{rank} \left\{\mathbf{d}\gamma_n^{[1]}\right\} \leq N_0$。

该**约束1-形式**

$$\beta[\mathbf{X}_E] := \mathbf{d}E - i_{\mathbf{X}_E}\mathbf{\Omega}_L,$$

在 [1] 中引入，并满足条件 $\beta[\mathbf{X}_E] = 0$，从而同时给出能量方程的解和子流形 $\mathbb{P}_L^{[1]}$。由于 $\langle \beta | \mathbf{U}^q{}_{(n)} \rangle = \gamma_n^{[1]}$，因此该 $\beta[\mathbf{X}_E]$ 也可以表示为

$$\beta[\mathbf{X}_E] = \sum_{n=1}^{N_0} \gamma_n^{[1]} \mathbf{\Theta}_q^{(n)}. \tag{11}$$

C. 欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称群

运动

$\mathcal{O}(\mathfrak{u}_0)$ 的广义李对称群通过以下方式确定

$$\overline{\ker\, \mathbf{\Omega}_L(\mathfrak{u})} := \{\mathbf{P} \in \ker\, \mathbf{\Omega}_L(\mathfrak{u}) \mid [\mathbf{G}, \mathbf{P}] \in [\mathbf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L]^v \ \forall\ \mathbf{G} \in \mathcal{G}\}, \tag{12}$$

以及定义在 $\mathbb{P}_L$ 上的以下函数集合,

$$\overline{\mathcal{F}} := \{f \in C^\infty \text{on } \mathbb{P}_L \mid \ \mathbf{G}f = 0 \ \forall \ \mathbf{G} \in \mathcal{G}\}.$$

这个 $\overline{\ker \Omega_L(\mathfrak{u})}$ 也是对合的。

以下结果已在 [1]中证明。

引理 5 设 $\mathbf{X} \in \mathbf{T}_\mathfrak{u}\mathbb{P}_L$ 和 $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$ 满足 $[\mathbf{G},\mathbf{X}] \in ker\ \Omega_L(\mathfrak{u})$。那么 $[\mathbf{G},\mathbf{X}] \in [\mathbf{T}_\mathfrak{u}\mathbb{P}_L]^v$当且仅当 $[\mathbf{G},\mathbf{X}] \in \mathcal{G}$。

由此可得，对于所有 $\mathrm{P} \in \ker \Omega_L(\mathfrak{u})$，$[\mathrm{G}, \mathrm{P}] \in \mathcal{G}$。由于 $\mathcal{G}$ 是对合的，且 $\mathcal{G} \subset \ker \Omega_L(\mathfrak{u})$，$\mathcal{G} \subset \ker \Omega_L(\mathfrak{u})$也成立，因此 $\mathcal{G}$ 是 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 的一个理想。

引理 6 存在一组 $ker\ \Omega_L(\mathfrak{u})$ 的基，同时也是 $ker\ \Omega_L(\mathfrak{u})$的基。

由于 $\mathcal{G}$ 是 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 的一个理想，对于任意 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2 \in \ker \Omega_L(\mathfrak{u})$，我们可以定义如下等价关系：$\mathrm{P}_1 \sim \mathrm{P}_2$ 当且仅当 $\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 \in \mathcal{G}$。该等价类,

$$[\mathbf{P}] := \{\mathbf{Y} \in \overline{\ker\ \boldsymbol{\Omega}_L(\mathfrak{u})} \mid \mathbf{Y} \sim \mathbf{P}\}, \tag{13}$$

可与商空间 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})/\mathcal{G}$一同构造。（为使记号清晰，在不会造成混淆时，我们将省略等价类的方括号。）这个空间由 Ω_L核中的向量构成，但去除了 $\mathcal{G}$ 中的向量；因此，$\ker \Omega_L(\mathfrak{u})/\mathcal{G}$ 回应了**第二节 B**末尾列出的前两项观察。

现在我们转而关注第三项观察。由于能量方程任一解 X 的积分流 $\mathfrak{u}_\mathbf{X}(t)$ 必须位于 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上，$\mathfrak{u}_\mathbf{X}(t)$ 的对称变换必然产生另一个能量方程解 Y 的积分流 $\mathfrak{u}_\mathbf{Y}(t)$，而该积分流也必须位于 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上。通过 $\beta[\mathrm{X}_E]$ 来实现这一条件。

由于对所有位于 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上的 G，$\langle\beta[\mathrm{X}_E]|\mathrm{G}\rangle = \langle \mathrm{d}E|\mathrm{G}\rangle = \mathrm{G}E = 0 \in \mathcal{G}$，沿 G 的 β 李导数 $\mathfrak{L}_\mathbf{G}$ 为:

$$\mathfrak{L}_\mathbf{G}\beta[\mathbf{X}_E] = \sum_{n=1}^{N_0} \left(\mathbf{G}\gamma_n^{[1]}\right) \boldsymbol{\Theta}_q^{(n)}.$$

给定一个 $\mathrm{P}_{(n)} \in \overline{\ker\ \Omega_L(\mathfrak{u})}$，使得 $\mathrm{P}^{(n)} = \mathrm{U}^q{}_{(n)} + \widehat{\ }\mathrm{U}_{(n)} + \mathrm{G}'$ 且 $\mathrm{G}' \in \mathcal{G}$，$\mathrm{G}\gamma_n^{[1]} = [\mathrm{G}, \mathrm{P}_{(n)}]E + \mathrm{P}^{(n)}\mathrm{G}E$。但是，$\mathcal{G}$ 是 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 的一个理想，因此 $\mathrm{G}\gamma_n^{[1]} = 0$ 在一阶约束流形上。由此可得，$\mathfrak{L}_\mathbf{G}\beta = 0$ 在 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上。向量的集合,

$$\mathcal{S}\mathrm{ym} := \left\{\mathbf{P} \in \overline{\ker\ \boldsymbol{\Omega}_L(\mathfrak{u})}/\mathcal{G} \mid \ \mathfrak{L}_\mathbf{P}\beta[\mathbf{X}_E] = \mathbf{d}\langle\beta[\mathbf{X}_E]|\mathbf{P}\rangle \text{ on } \mathbb{P}_L^{[1]}\right\},$$

因此定义良好，且是对合的。由此可得，$\mathrm{P} \in \mathcal{S}\mathrm{ym}$ 当且仅当对所有 $\mathrm{X} \in \mathrm{T}\mathcal{P}_L$，$\langle \mathbf{d}\beta[\mathrm{X}_E] | \mathrm{P} \otimes \mathrm{X} \rangle = 0$。于是，我们能够从每个 $\mathrm{P} \in \mathcal{S}\mathrm{ym}$ 构造一个单参数子群 $\sigma_{\mathbf{P}}(\epsilon, x)$，其定义为以下方程的解

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{P}}}{d\epsilon} := \mathbf{P}\left(\sigma_{\mathbf{P}}\right),$$

其中 $\sigma_{\mathbf{P}}(0, \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$ 对于 $\mathfrak{u} \in \mathbb{P}_L$。这些子群的集合构成李群 $\mathrm{Gr}\mathcal{s}\mathrm{ym}$。

D. 能量方程的欧拉-拉格朗日解

我们将能量方程的**通解**集合记为

$$\mathcal{S}\mathrm{ol} := \{\mathbf{X}_E \in \mathbf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L \mid i_{\mathbf{X}_E}\mathbf{\Omega}_L = \mathbf{d}E \text{ on } \mathbb{P}_L^{[1]}\}.$$

如果 $\mathfrak{u}(t)$ 是 $\mathcal{S}\mathrm{ol}$ 中某个向量的积分流，且其在 $\mathbb{Q}$ 上的投影对应于欧拉-拉格朗日运动方程的一个解，那么 $\mathrm{Gr}\mathcal{s}\mathrm{ym}$ 必须将这样的流映射为另一个流。然而，尽管 $\mathfrak{L}_{\mathbf{G}}\mathrm{X}_L = [\mathrm{G}, \mathrm{X}_L] \in \ker \Omega_L(\mathfrak{u})$，一般而言 $\mathfrak{L}_{\mathbf{G}}\mathrm{X}_L \notin \mathcal{G}$。$\sigma_{\mathbf{P}}$ 对流 $\mathfrak{u}_{\mathbf{X}_L}$ 的作用通常会产生由 Y 生成的流 $\mathfrak{u}_{\mathbf{Y}}$，而 Y不是 SOLVF。它甚至不一定是能量方程的解。因此，必须考虑能量方程的通解，这引出我们对解集的考察

$$\overline{\mathcal{S}\mathrm{ol}} := \{\overline{\mathbf{X}}_{EL} \in \mathcal{S}\mathrm{ol} \mid [\mathbf{G}, \overline{\mathbf{X}}_{EL}] \in [\mathbf{T}_{\mathfrak{u}}\mathbb{P}_L]^v \quad \forall \mathbf{G} \in \mathcal{G}\}.$$

该集合生成积分流族

$$\mathcal{O}_{EL}(\mathfrak{u}_0) := \left\{\mathfrak{u}(t) \;\middle|\; \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \overline{\mathbf{X}}_{EL}(\mathfrak{u}), \overline{\mathbf{X}}_{EL} \in \overline{\mathcal{S}\mathrm{ol}}, \text{ and } \mathfrak{u}(t_0) = \mathfrak{u}_0\right\}.$$

重要的是，如果 $\mathrm{P} \in \mathcal{S}\mathrm{ym}$，那么

$$i_{[\mathbf{X}_E, \mathbf{P}]}\mathbf{\Omega}_L = i_{\mathbf{P}}\mathbf{d}\beta[\mathbf{X}_E] = 0.$$

因此，我们发现

引理 7 $[\mathbf{X}_{EL}, \overline{\mathbf{P}}] \in \overline{\ker \Omega_L(\mathfrak{u})}$ 对所有 $\mathbf{P} \in \mathcal{S}ym$。

由此可得

定理 8 *Grsym* 构成 $\mathcal{O}_{EL}$（$\mathfrak{u}_0$）的对称变换群。

这两个断言的证明均可见 [1]。

$\mathcal{O}_{EL}(\mathfrak{u}_0)$ 的广义李对称性的生成元因此由 $\mathcal{S}\mathrm{ym}$ 给出。具有这一对称性的欧拉-拉格朗日方程的相应解由 $\mathcal{S}\mathrm{ol}$ 给出，而向量 $\mathrm{X}_{EL} \in \mathcal{S}\mathrm{ol}$ 称为 **二阶欧拉-拉格朗日向量场（SOELVF）**。它的一般形式为，

$$\overline{\mathbf{X}}_{EL} = \overline{\mathbf{X}}_L + \sum_{m=1}^{N_0} u^m(\mathfrak{u}) \left[\mathbf{P}_{(m)}\right], \tag{14}$$

其中 $u^m(\mathfrak{u}) \in \overline{\mathcal{F}}$ and $\{[\mathrm{P}_{(n)}], n = 1, \ldots, N_0\}$ 是 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})/\mathcal{G}$ 的一组基的选取。向量场 X_L 由二阶拉格朗日向量场 X_L 以及 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 中的向量构造而成，要求满足 $\mathrm{X}_L \in \mathcal{S}\mathrm{ol}$。该构造见 [1]；本文只需知道这样的向量场存在。

IV. 作用量的广义李对称性及其对动力学的影响

现在我们将注意力转向作用量的广义李对称性的生成元，以及这种对称性对动力系统演化的影响。

A. 作用量的广义李对称性

在确定作用量满足广义李对称性的条件（如**引理 1**所列）时，认为作用量必须对 $\mathbb{Q}$ 上所有可能的路径都具有这种对称性，这一点起到了关键作用。必然地，这些条件只能施加于 ρ_L，而不能施加于 $\dot{\rho}_L$；不同于 ρ_L，$\dot{\rho}_L$ 显式地依赖于特定路径的演化，而对称性则必须对所有路径成立。然而，我们注意到，由欧拉-拉格朗日运动方程确定的轨迹族 $\mathcal{O}_{EL}$ 也由 $\mathbb{Q}$ 上的路径组成，因此，作用量的广义李对称性也是 $\mathcal{O}_{EL}$的对称性。重要的是，这些轨迹随时间如何演化是已知的，因此，对于这些轨迹，给定 ρ_L 的 $\dot{\rho}_L$ 也是已知的。基于这一认识，并将**引理 1** 和**引理 3** 的结果与**引理 2**进行比较后，我们得出结论：生成元

作用量的广义李对称性的生成元也必定是欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性的生成元。这促使我们考察以下向量集合。

$$\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L} = \{\mathbf{P} \in \overline{\ker\, \mathbf{\Omega}_L(\mathfrak{u})}/\mathcal{G} \mid \gamma^{[1]}_{\mathbf{P}} = \langle \beta | \mathbf{P} \rangle = 0 \text{ on } \mathbb{P}_L\}.$$

以下还需要用到 $N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$ =dim ($\mathcal{S}$ym$\mathcal{L}$)。

引理 9 $\mathcal{S}ym\mathcal{L} \subset \mathcal{S}ym.$

证明。 设 $\{\mathbf{P}^{(l)}, l = 1, \ldots, N_0\}$ 是 $ker\ \Omega_L(\mathfrak{u})/\mathcal{G}$ 的一组基，使得 $\mathbf{P}_{(l)} \in \mathcal{S}ym\mathcal{L}\ for l = 1, \ldots, N_{\mathcal{S}}sym_{\mathcal{L}}$。我们可以选取 $\mathcal{C}$ 的基，使得 $\langle \mathbf{\Theta}^{(m)}_q | \mathbf{P}_{(l)} \rangle = \delta^{(m)}_{l\ ()}$。那么对于任意$\mathbf{P}_{(n)} \in \mathcal{S}ym$，由式 (11) 可知，

$$\langle \mathbf{d}\beta | \mathbf{P}_{(n)} \otimes \mathbf{Y} \rangle = \sum_{m=1}^{N_0} \left(\langle \mathbf{d}\gamma^{[1]}_m | \mathbf{P}_{(n)} \rangle \langle \mathbf{\Theta}^{(m)}_q | \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{d}\gamma^{[1]}_m | \mathbf{Y} \rangle \langle \mathbf{\Theta}^{(m)}_q | \mathbf{P}_{(n)} \rangle + \gamma^{[1]}_m \langle \mathbf{d}\mathbf{\Theta}^{(m)}_q | \mathbf{P}_{(n)} \otimes \mathbf{Y} \rangle \right),$$

对于任意 $Y \in T\mathbb{P}_L$。最后一项在一阶约束流形 $\mathbb{P}^{[1]}_L$ 上消失；对于第二项，$\langle d\gamma^{[1]}_m | Y \rangle \langle \mathbf{\Theta}^{(m)}_q | P_{(n)} \rangle = \langle d\gamma^{[1]}_n | Y \rangle \delta^{(m)}_{\ (n)}$。但是，由于 $P_{(n)} \in \mathcal{S}ym\mathcal{L}$, $\gamma^{[1]}_n = 0$ $on \mathbb{P}_L$，这一项也消失。最后，对于第一项，$\langle d\gamma^{[1]}_m | P_{(n)} \rangle = P_{(n)} P_{(m)} E = [P_{(n)}, P_{(m)}] E + P_{(m)} P_{(n)} E$。但是，$\gamma^{[1]}_n = P_{(n)} E = 0$ 在 $\mathbb{P}_L$ 上，而 $ker\ \Omega(\mathfrak{u})$ 是对合的。因此存在一个 $P_{(nm)} \in ker\ \Omega(\mathfrak{u})$，使得 $P_{(nm)} = [P_{(n)}, P_{(m)}]$。由于 $P_{(nm)} E := \gamma^{[1]}_{(nm)}$，这个$\gamma^{[1]}_{(nm)}$必定是一阶约束函数的线性组合，并且它们在 $\mathbb{P}^{[1]}_L$ 上也为零。由此可得，$\langle d\beta | P_{(n)} \otimes Y \rangle = 0$ 在 $\mathbb{P}^{[1]}_L$ 上成立，且 $P_{(n)} \in \mathcal{S}ym$。

■

如果 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$，那么 $\gamma^{[1]}_{[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2]} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 E - \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 E = \mathrm{P}_1 \gamma_{\mathbf{P}_2} - \mathrm{P}_2 \gamma_{\mathbf{P}_1} = 0$，因此 $\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$ 是对合的。于是，对于每个 $\mathrm{P} \in \mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$，我们再次得到单参数子群 $\sigma^{\mathcal{S}}\mathrm{ym}^{\mathcal{L}}\ \mathrm{P}\ (\epsilon, \mathfrak{u})$，其定义为以下对象的积分流

$$\frac{\mathbf{d}\sigma^{\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}}_{\mathbf{P}}}{\mathbf{d}\epsilon} := \mathbf{P},$$

其中 $\sigma^{\mathcal{S}}\mathrm{ym}^{\mathcal{L}}\ \mathrm{P}\ (0, \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$ 对于 $\mathfrak{u} \in \mathbb{P}_L$。此类子群的集合构成李群 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}ym\mathcal{L}}$。由于 $\mathcal{S}ym\mathcal{L} \subset \mathcal{S}ym$，$\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}ym\mathcal{L}}$ 是 $\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}ym}$的李子群。由**定理 8** 可知，$\mathrm{Gr}_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$ 也构成 $\mathcal{O}_{EL}(\mathfrak{u}_0)$ 的对称变换群。由于轨迹族 $\mathcal{O}_{EL}(\mathfrak{u}_0)$ 是 $\mathbb{Q}$上的路径，而且作用量的对称变换必须对 $\mathbb{Q}$上的所有路径都相同，因此还可推出，

定理 10 $Gr_{\mathcal{S}}ym_{\mathcal{L}}$ 构成作用量 S的对称变换群。

B. 对称性与动力学

虽然 $\mathcal{O}_{EL}(\mathfrak{u}_0)$给出了 Gr$\mathcal{s}$ym 和 Gr$\mathcal{s}ym\mathcal{L}$ 共同作用的积分流族，但 $\mathcal{O}_{EL}(\mathfrak{u}_0)$中的一般流未必局限于 $\mathbb{P}_L^{[1]}$，然而能量方程的解 $\mathbf{X}_{EL} \in mathcal S$ol 正是存在于这个子流形上。在这种情况下，必须联合选取一个 SOELVF $\mathbf{X}_{EL}$ 和 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 的一个子流形，使所得流 $\mathfrak{u}_{\overline{\mathbf{X}}_{EL}}$局限于该子流形。这是通过实施约束算法来完成的，其中一种算法见文献 [1]。在那篇论文中，该算法的结果已是关于具有位于 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上的积分流场的 SOELVF 一般结构所能作出的最充分论述。而在这里，借助 **IV A 节**中得到的结果，我们能够作出更多论述；我们将看到，作用量的广义李对称性会极大地限制这类系统可能具有的 SOELVF 结构。

按照 [1], ，我们为 $\mathbf{X}_{EL} \in \mathcal{S}$ol 引入以下记号

$$\overline{\mathbf{X}}_{EL}^{[1]} := \overline{\mathbf{X}}_{EL},\ \overline{\mathbf{X}}_{L}^{[1]} := \overline{\mathbf{X}}_{L},\ \mathbf{P}_{(n)}^{[1]} := \mathbf{P}_{(n)},\ u_{[1]}^{m} := u^{m},\ N_0^{[1]} := N_0,$$

当实施约束算法时，上标 [1] 表示该算法的第一次迭代。（此记号仅在本节中使用。）此外，对于 $n = 1, \ldots, N_{\mathcal{S}}ym_{\mathcal{L}}$，我们取 $\mathbf{P}^{[1]}{}_{(n)} \in \mathcal{S}ym\mathcal{L}$。

为了使 $\mathbf{X}_{EL}$ 的积分流场位于 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上，

$$\mathfrak{L}_{\overline{\mathbf{X}}_{EL}} \beta = 0, \tag{15}$$

这在 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上化简为 $\mathfrak{L}_{\overline{\mathbf{X}}_{EL}} \gamma_n^{[1]} = 0$。这称为**约束条件**。由于 $u_{[1]}^n, \gamma_n^{[1]} \in \overline{\mathcal{F}}$, $\left[\mathbf{P}^{[1]}{}_{(n)}\right] \gamma_m^{[1]} = \mathbf{P}_{(n)} \gamma_m^{[1]}$，并且利用式（14）给出的 SOELVF 一般形式后，式（15）化简为

$$\sum_{m=1}^{N_0} \Gamma_{nm}^{[1]} u_{[1]}^{m} = -\left\langle \mathbf{d}\gamma_n^{[1]} \middle| \overline{\mathbf{X}}_{L}^{[1]} \right\rangle, \text{ with } \Gamma_{nm}^{[1]} := \left\langle \mathbf{d}\gamma_n^{[1]} \middle| \mathbf{P}_{(m)}^{[1]} \right\rangle. \tag{16}$$

由于 $\left\langle \mathbf{d}\gamma_n^{[1]} \middle| \mathbf{P}^{[1]}{}_{(m)} \right\rangle = \mathbf{P}^{[1]}{}_{(m)} \mathbf{P}^{[1]}{}_{(n)} E = [\mathbf{P}^{[1]}{}_{(m)}, \mathbf{P}^{[1]}{}_{(n)}] E + \Gamma_{mn}^{[1]}$。但 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})$ 是对合的，因此 $[\mathbf{P}^{[1]}{}_{(m)}, \mathbf{P}^{[1]}{}_{(n)}] E$ 是若干一阶拉格朗日约束的线性组合。由于这些约束在 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上消失，$\Gamma_{nm}^{[1]} = \Gamma_{mn}^{[1]}$ 在一阶约束流形上。

接下来，当 $n = 1, \ldots, N_{\mathcal{S}}ym_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{P}^{[1]}{}_{(n)} \in \mathcal{S}ym\mathcal{L}$，且 $\gamma_n^{[1]} = 0$ 时。因此，当 $\Gamma_{nm}^{[1]} = 0$ when$n = 1, \ldots, N_{\mathcal{S}}ym_{\mathcal{L}}$ 时，并且由于 $\Gamma_{nm}^{[1]}$ 是定义在 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上的对称矩阵，$\Gamma_{mn}^{[1]} = 0$ 对这些取值也成立。因此，尽管 $\Gamma_{nm}^{[1]}$ 是一个 $N_0 \times N_0$ 矩阵，该矩阵唯一非零的分量

位于 $(N_0 - N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}) \times (N_0 - N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}})$ 子矩阵 $\bar{\Gamma}^{[1]}_{\overline{n}\,\overline{m}} := \left\langle \mathbf{d}\gamma^{[1]}_{\overline{n}+N_{\mathcal{S}}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}} \middle| \mathbf{P}^{[1]}_{\overline{m}+N_{\mathcal{S}}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}} \right\rangle$ 中，其中 $\overline{n}, \overline{m} = 1, \ldots, N_0 - N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$。由于当 $n = \underline{1}, \ldots, N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$ 时，$\left\langle \mathbf{d}\gamma^{[1]}_{n} \middle| \mathbf{X}^{[1]}_{L} \right\rangle = 0$ 也成立，式 (16) 可简化为

$$\sum_{\overline{m}=1}^{N_0 - N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}} \bar{\Gamma}^{[1]}_{\overline{n}\overline{m}} u^{\overline{m}+N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}}_{[1]} = -\left\langle \mathbf{d}\gamma^{[1]}_{\overline{n}+N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}} \middle| \overline{\mathbf{X}}^{[1]}_{L} \right\rangle. \tag{17}$$

因此很容易看出，在这次迭代中，$N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$ 任意函数 $u^m_{[1]}$ for $m = 1, \ldots, N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$尚未确定，而 $r^{[1]} =$ 秩 $\bar{\Gamma}^{[1]}_{\overline{n}\,\overline{m}}$ of the $u^m_{[1]}$ for $m > N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$ 则已确定。因此有 $N_0^{[2]} := N_0^{[1]} - r^{[1]}$**二阶拉格朗日约束函数**

$$\gamma^{[2]}_{n_{[2]}} := \left\langle \mathbf{d}\gamma^{[1]}_{n_{[2]}} \middle| \overline{\mathbf{X}}^{[1]}_{L} \right\rangle, n_{[2]} = 1, \cdots, N_0^{[2]},$$

必要时施加条件 $\gamma^{[2]}_{n_{[2]}} = 0$ 。一般而言，将有 $I_{[2]} :=$秩 $\left\{ \mathbf{d}\gamma^{[1]}_{n_{[1]}}, \mathbf{d}\gamma^{[2]}_{n_{[2]}} \right\}$个独立函数属于 $\mathbf{C}^{[2]}_L := \mathbf{C}^{[1]} \cup \left\{ \gamma^{[2]}_{n_{[2]}} \mid n_{[2]} = 1, \ldots, N_0^{[2]} \right\}$，而 $\mathbb{P}^{[1]}_L$ 缩减为<样式 id='12'>二阶约束子流形，

$$\mathbb{P}^{[2]}_L := \left\{ \mathfrak{u} \in \mathbb{P}^{[1]}_L \;\middle|\; \gamma^{[2]}_{[n_2]}(\mathfrak{u}) = 0, n_{[2]} = 1, \ldots, N_0^{[2]} \right\},$$

其中 dim $\mathbb{P}^{[2]}_L = 2D - I_{[2]}$。此时有两种可能。如果 $I_{[2]} = I_{[1]}$ 或 $I_{[2]} = 2D$，迭代过程便停止，不会引入新的拉格朗日约束。否则，过程将继续。

在约束算法的第二次迭代中，我们为 $\ker \Omega_L(\mathfrak{u})/\mathcal{G}$ 选择一组基 $\left\{ \mathbf{P}^{[2]}{}_{(n)} \right\}$ ，并选择~~任意函数~~ $\left\{ u^m_{[2]} \right\}$，使得对于 $m = 1, \ldots, N_0^{[2]}$， $u^m_{[2]}$ 是 $u^m_{[1]}$ 的线性组合，且属于核 $\Gamma^{[1]}_{nm}$。我们再次要求，对于$n = 1, \ldots, N_{\mathcal{S}}$， $\mathbf{P}^{[2]}{}_{(n)} \in \mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$ 。于是

$$\overline{\mathbf{X}}^{[2]}_{EL} = \overline{\mathbf{X}}^{[2]}_{L} + \sum_{m=1}^{N_0^{[2]}} u^m_{[2]} \left[\mathbf{P}^{[2]}_{(m)} \right],$$

with

$$\overline{\mathbf{X}}^{[2]}_{L} = \overline{\mathbf{X}}^{[1]}_{L} + \sum_{m=N_0^{[2]}+1}^{N_0^{[1]}} u^m_{[2]} \left[\mathbf{P}^{[2]}_{(m)} \right].$$

这里，对于 $m = N_0^{[2]} + 1, \ldots, N_0^{[1]}$， 函数 $u^m_{[2]}$ 已通过对 $\gamma^{[1]}_n$的约束分析确定。

如 [1], $\mathbf{G}u^m_{[1]} = 0$所示。类似地，$\mathbf{G}\gamma^{[2]}_n = \mathfrak{L}_{[\mathbf{G}, \overline{\mathbf{X}}_{EL}]}\mathbf{d}\gamma^{[2]}_n = 0$。显然 $\gamma^{[2]}_n \in \overline{\mathcal{F}}$，我们也可以要求 $u^m_{[2]} \in \overline{\mathcal{F}}$。于是可得 $\left[\mathbf{P}^{[2]}{}_{(n)} \right] \gamma^{[2]}_m = \mathbf{P}^{[2]}{}_{(n)}\gamma^{[2]}_m$，并施加

将式（15）代入 $\gamma_n^{[2]}$，得

$$\sum_{m=1}^{N_0^{[2]}} \Gamma_{nm}^{[2]} u_{[2]}^m = -\left\langle \mathbf{d}\gamma_n^{[2]} \middle| \overline{\mathbf{X}}_L^{[2]} \right\rangle, \text{ where } \Gamma_{nm}^{[2]} := \left\langle \mathbf{d}\gamma_n^{[2]} \middle| \mathbf{P}_{(m)}^{[2]} \right\rangle, \ n = 1, \ldots, N_0^{[2]}. \tag{18}$$

再次得到 $\Gamma_{nm}^{[2]} = \Gamma_{mn}^{[2]}$，但现在是在约束流形 $\mathbb{P}_L^{[2]}$ 上。此外，由于对于 $n = 1$， $\gamma_n^{[2]} = \gamma_n^{[1]} = 0$，....., $N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$， $\Gamma_{nm}^{[2]} = 0 = \Gamma_{mn}^{[2]}$，且 $\left\langle \mathbf{d}\gamma_n^{[2]} \middle| \mathbf{X}_L^{[2]} \right\rangle = 0$。方程 (18) 再次得到了约化，我们剩下

$$\sum_{\overline{m}=1}^{N_0^{[2]}-N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}} \overline{\Gamma}_{\overline{n}\,\overline{m}}^{[2]} u_{[2]}^{\overline{m}+N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}} = -\langle \mathbf{d}\gamma_{\overline{n}+N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}}^{[2]} | \overline{\mathbf{X}}_L^{[2]} \rangle.$$

其中 $\bar{\Gamma}_{\overline{n}\,\overline{m}}^{[2]} := \left\langle \mathbf{d}\gamma_{\overline{n}+N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}}^{[2]} \middle| \mathbf{P}^{[2]}{}_{(\overline{m}+N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}})} \right\rangle$。与前面一样，$N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$ 任意函数 $u_{[2]}^m$ 并未确定，而剩余的 $u_{[2]}^m$ （对于 $m > N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}_{\mathcal{L}}$ ）的秩为 $r^{[2]} := \mathsf{rank}\ \bar{\Gamma}_{\overline{n}\,\overline{m}}^{[2]}$。现在有 $N_0^{[3]} = N_0^{[2]} - r^{[2]}$ **三阶拉格朗日约束函数**，

$$\gamma_{n_{[3]}}^{[3]} = \left\langle \mathbf{d}\gamma_{n_{[3]}}^{[2]} \middle| \overline{\mathbf{X}}_L^{[2]} \right\rangle, \ n_{[3]} = 1, \ldots, N_0^{[3]},$$

必要时施加条件 $\gamma_{n_{[3]}}^{[3]} = 0$。在

$$I_{[3]} := \mathrm{rank} \left\{ \mathbf{d}\gamma_{n_{[1]}}^{[1]}, \mathbf{d}\gamma_{n_{[2]}}^{[2]}, \mathbf{d}\gamma_{n_{[3]}}^{[3]} \right\},$$

$\mathsf{C}_L^{[3]} := \mathsf{C}_L^{[2]} \cup \left\{ \gamma_{n_{[3]}}^{[3]}, n_{[3]} = 1, \ldots, N_0^{[3]} \right\}$ 中的独立函数，现在我们有了**三阶约束子流形**，

$$\mathbb{P}_L^{[3]} := \left\{ \mathfrak{u} \in \mathbb{P}_L^{[2]} \ \middle|\ \gamma_{n_{[3]}}^{[3]}(\mathfrak{u}) = 0, n_{[3]} = 1, \ldots, N_0^{[3]} \right\}.$$

再一次，当 $I_{[3]} = I_{[2]}$ 或 $I_{[3]} = 2D$ 时，过程便会停止。然而，如果 $I_{[2]} < I_{[3]} < 2D$，过程将继续，直到第 n_F 次迭代时出现 $I_{[n_F]} = I_{[n_F]-1}$ 或 $I_{[n_F]} = 2D$。

按照 [1], ，该算法的最终结果是

1. 一个子流形 $\mathbb{P}_L^{[n_F]} \subset \mathbb{P}_L$，动力学在其上发生。

2. 一组 $\mathsf{C}_L^{[n_F]} \subset \overline{\mathcal{F}}$ 约束函数，阶数从 1 到 n_F。

3. 二阶欧拉-拉格朗日向量场

$$\overline{\mathbf{X}}_{EL}^{[n_F]} = \overline{\mathbf{X}}_L^{[n_F]} + \sum_{m=1}^{N_0^{[n_F]}} u_{[n_F]}^m(\mathfrak{u}) \left[\mathbf{P}_{(m)}^{[n_F]} \right],$$

其中 $N_0^{[n_F]} \geq N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}\mathcal{L}$任意函数 $u_{[n_F]}^m(\mathfrak{u}) \in \overline{\mathcal{F}}$适用于 $m = 1$、.....、 $N_0^{[n_F]}$，并且

$$\overline{\mathbf{X}}_L^{[n_F]} = \overline{\mathbf{X}}_L^{[1]} + \sum_{m=N_0^{[n_F]}+1}^{N_0^{[1]}} u_{[n_F]}^m(\mathfrak{u}) \left[\mathbf{P}_{(m)}^{[n_F]}\right],$$

其中，函数 $N_0^{[1]} - N_0^{[n_F]}(\mathfrak{u}) \in \overline{\mathcal{F}}$, $m = N_0^{[n_F]} + 1, \ldots, N_0^{[1]}$ 已通过约束算法唯一确定。

我们假设，对于每个 $l = 1, \ldots, n_F$， $\Gamma_{nm}^{[l]}$ 在 $\mathbb{P}_L$ 上的秩为常数，且 $\mathbb{P}_L^{[n_F]}$ 非空。

约束算法的最终结果 $\mathbf{X}_{EL}^{[n_F]}$ 仍是一个 SOEŁVF，我们将这类向量场的集合定义为

$$\overline{\mathcal{S}\mathrm{ol}}_{\mathbb{P}_L^{[n_F]}} := \{\overline{\mathbf{X}}_{EL} \in \overline{\mathcal{S}\mathrm{ol}} \mid \mathfrak{L}_{\overline{\mathbf{X}}_{EL}}\beta = 0\}.$$

重要的是，$\dim \overline{\mathcal{S}\mathrm{ol}}_{\mathbb{P}_L^{[n_F]}} \geq N_{\mathcal{S}}\mathrm{ym}\mathcal{L}$。

V. 三个动力系统的广义李对称性

文献 [1] 介绍了三个具有几乎正则拉格朗日量的动力系统示例。该文着重于显式构造描述和预测拉格朗日相空间中运动所需的动力学结构，并展示这些结构可投影到哈密顿相空间。我们在此重新讨论这些示例，但现在着重研究各系统的广义李对称性，并应用本文所得结果。具体而言，我们关注各系统的对称群维数与其各自 $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathbb{P}_L^{[n_F]}}$ 的维数之间的比较。我们的结果汇总见表 I

A. 具有和不具有广义李对称性的拉格朗日量

作用量是否

$$S_1 := \int \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\widehat{q}}{dt}\right)^2 - V(q^a)\right] dt,$$

具有 $|q| = \sqrt{q^a q_a}$和 $\widehat{q}^a := q^a/|q|, a = 1, \ldots, D$ 的广义李对称性，取决于势 $V(q)$ 的选择。采用一种选择时，拉格朗日量和欧拉-拉格朗日运动方程都具有广义规范对称性；采用第二种选择时，运动方程具有广义李对称性，而拉格朗日量没有；采用第三种选择时，作用量和运动方程都不具有对称性。然而，无论如何选择 $V(q)$， L 都是奇异的。这表明，虽然所有具有广义李对称性的作用量都对应奇异拉格朗日量，但并非所有奇异拉格朗日量都具有广义李对称性。

定义 $\Pi_{ab}(q) := \delta_{ab} - \widehat{q}_a \widehat{q}_b$，我们得到

$$\mathbf{\Omega}_M = \frac{m}{|q|^2}\Pi_{ab}(q)\mathbf{d}q^a \wedge \mathbf{d}v^b, \qquad \mathbf{\Omega}_F = \frac{m}{|q|^3}\left(\widehat{q}\cdot\mathbf{d}q\right)\wedge\left(v\cdot\Pi(q)\cdot\mathbf{d}q\right).$$

于是， $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{G}$ 分别由 $\mathbf{U}^q{}_{(1)} = \widehat{q}\cdot\partial/\partial q$ 和 $\mathbf{U}^v_{(1)} = \widehat{q}\cdot\partial/\partial v$张成，而 $\ker \mathbf{\Omega}_L(\mathfrak{u})$ 由 $\mathbf{U}^v_{(1)}$ 和

$$P_{(1)} = \widehat{q}\cdot\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{|q|}v\cdot\frac{\partial}{\partial v}.$$

由此可得 $\overline{\dim\left(\ker \mathbf{\Omega}_L(\mathfrak{u})/\mathcal{G}\right)} = 1$ 。

能量为

$$E = \frac{1}{2}\frac{m}{|q|^2}v\cdot\Pi(q)\cdot v + V(q),$$

并且只有一个一阶拉格朗日约束，

$$\gamma^{[1]} = \mathbf{U}^q_{(1)}V, \tag{19}$$

因此 $\beta[\mathbf{X}_{EL}] = \gamma^{[1]}\mathbf{\Theta}^{(1)}_q$，其中 $\mathbf{\Theta}^{(1)}_q = \widehat{q}\cdot\mathbf{d}q$。利用公式（19），

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{P}_{(1)}}\beta = \mathbf{d}\left[\mathbf{U}^q_{(1)}V\right] - \frac{1}{|q|^2}\widehat{q}\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(\Pi_a{}^b(q)\frac{\partial V}{\partial \widehat{q}^b}\right)\mathbf{d}q^a. \tag{20}$$

$\mathcal{S}\mathrm{ym}$ 或 $\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$ 是否为空，因此取决于 $V(q)$ 的对称性，这正如我们所预期的那样。

在 [1] 中发现

$$\overline{\mathbf{X}}_L = v\cdot\Pi(q)\cdot\frac{\partial}{\partial q} + \frac{(\widehat{q}\cdot v)}{|q|}v\cdot\frac{\partial}{\partial v} - \frac{|q|^2}{m}\frac{\partial V}{\partial q}\cdot\Pi(q)\cdot\frac{\partial}{\partial v},$$

而一般的 SOELVF 表示为 $\mathbf{X}_{EL} = \mathbf{X}_L \overline{+}\ u(\mathfrak{u})\ \overline{[\mathbf{P}_{(1)}]}$，其中 $u(\mathfrak{u}) \in \overline{\mathcal{F}}$。由于约束算法给出

$$\mathfrak{L}_{\overline{\mathbf{X}}_{EL}}\gamma^{[1]} = v\cdot\Pi\cdot\frac{\partial\gamma^{[1]}}{\partial q} + u(\mathfrak{u})\mathbf{U}^q_{(1)}\gamma^{[1]}, \tag{21}$$

是否满足 $u(\mathfrak{u})$（这又决定了 $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathbb{P}_L^{[nf]}}$ 的维数）由约束条件决定，也取决于 $V(q)$ 的对称性。

需要考虑三种情况。

对称势

要使 $\mathbf{P}^{(1)}$ 产生欧拉-拉格朗日运动方程的广义李对称性，

$$0 = \frac{1}{|q|^2}\widehat{q}\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(\Pi_a{}^b(q)\frac{\partial V}{\partial \widehat{q}^b}\right),$$

因此势必须满足

$$\frac{\partial V}{\partial \widehat{q}^a} = \frac{\partial V_{AS}(\widehat{q}^a)}{\partial \widehat{q}^a},$$

其中 V_{AS} 仅是 $\widehat{q}^a$ 的函数。由此可知，当且仅当 $V(q^a) = V_{Sph}(|q|) + V_{AS}(\widehat{q}^a)$ 时，$\mathbf{P}^{(1)}$ 才生成广义李对称性，其中 V_{Sph} 仅是 $|q|$ 的函数。对于此势，$\mathcal{S}\mathrm{ym}$ 是一维的，由 $\mathbf{P}^{(1)}$张成。

此势的方程（21）约束条件可化简为

$$0 = u(\mathfrak{u})\frac{d^2V_{Sph}(q)}{d|q|^2},$$

必须在 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 上满足。有两种可能。

Case 1: $\frac{d^2V_{Sph}}{d|q|^2} = 0.$

那么 $V_{Sph}(|q|) = a|q| + b$，但由于

$$\gamma^{[1]} = \frac{dV_{Sph}}{d|q|} = a,$$

条件 $\gamma^{[1]} = 0$ 要求 $a = 0$。由此可得 $\gamma^{[1]} = 0$ 在 $\mathbb{P}_L$上，因此 $\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$ 是一维的；它也由 $\mathbf{P}^{(1)}$张成。因此，势为 $V(q) = b + V_{AS}(\widehat{q}^a)$，拉格朗日量在变换 $q^a \to \alpha q^a$下保持不变，其中 α 是定义在 $\mathbb{P}_L$上的任意非零函数。因此，该拉格朗日量具有局部共形对称性。重要的是，函数 $u(\mathfrak{u})$并未确定，因此粒子动力学只确定到一个任意函数。于是，$\dim\left(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathbb{P}_L^{[nF]}}\right) = 1$ 同样成立，且也由 $\mathbf{P}^{(1)}$张成。

Case 2: $\frac{d^2V_{Sph}}{d|q|^2} \neq 0.$

在这种情况下，$u(\mathfrak{u}) = 0$，粒子动力学由其初始数据完全确定；$\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{P}_L^{[n_F]}} = \{\mathbf{X}_L\}$。一阶拉格朗日约束 $\overline{\gamma}^{[1]}$ 不会自动消失，而是在 $\mathbf{P}_L$ 上定义一个曲面，由此可得 $\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L} = \emptyset$。事实上，在这种情况下，作用量缺乏局部规范对称性，这一点可以明确看出。

方程（19）化简为

$$0 = \widehat{q} \cdot \frac{\partial V_{sph}}{\partial q},$$

要使动力学成为可能，解集

$$\left\{ R_i \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left. \frac{dV_{Sph}}{d|q|} \right|_{R_i} = 0 \right\},$$

必须非空。动力学发生在这些曲面上 $|q| - R_i = 0$，此时势化简为 $V(q) = V_{Sph}(R_i) + V_{AS}(\widehat{q}^a)$。这个约化势与情形 *1* 中的势 $V_{AS}(\widehat{q}^a)$ 具有相同的对称性，正因如此，这两种情形下的欧拉-拉格朗日运动方程具有相同的广义李对称性。附录对此作了明确说明。

在情形 *1* 中，作用量具有局部共形对称性，而在情形 *2* 中则没有。（在[1] 中曾错误地指出，在这种情形下作用量具有全局旋转对称性。）这两种情形的拉格朗日量具有不同的不变性，因此，一种情形下的动力学只能确定到任意 $u(\mathfrak{u})$，而另一种情形下则具有 $u(\mathfrak{u}) = 0$，其动力学反而完全由初始数据的选择决定。

非对称势

对于一般的 V，方程（20）中的第二项不为零，$\mathbf{P}_{(1)}$ 不会生成运动方程的对称性，且 $\mathcal{S}\mathrm{ym} = \{\emptyset\}$。与之前一样，$\gamma^{[1]}$ 不为零，因此 $\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L} = \{\emptyset\}$ 也如此。此外，由于方程（21）得出

$$\overline{\mathbf{X}}_E = \overline{\mathbf{X}}_L - \frac{v \cdot \Pi \cdot \frac{\partial \gamma^{[1]}}{\partial q}}{q^2 \mathbf{U}^q_{(1)} \gamma^{[1]}} [\mathbf{P}_{(1)}],$$

粒子动力学由其初始数据唯一确定，而 $\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{P}_L^{[n_F]}} = \{\overline{X}_{EL}\}$ 再次只包含一个点。

B. 具有局部共形对称性的拉格朗日量

作用量,

$$S_2 := \int \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{d\widehat{q}_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{d\widehat{q}_2}{dt} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} \left[\frac{q_1^a}{|q_2|} \frac{d}{dt} \left(\frac{q_{2a}}{|q_1|} \right) - \frac{q_2^a}{|q_1|} \frac{d}{dt} \left(\frac{q_{1a}}{|q_2|} \right) \right] \right\} dt,$$

其中 $a = 1$、.....、 d、 $D = 2d$ 描述了一个在局部共形变换 $q_1^a \to \alpha(\mathfrak{u}) q_1^a$ 和 $q_2^a \to \alpha(\mathfrak{u}) q_2^a$ 下保持不变的相互作用双粒子系统。

With

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Omega}_M &= \frac{m}{|q_1|^2} \Pi_{ab}(q_1) \mathbf{d}q_1^a \wedge \mathbf{d}v_1^b + \frac{m}{|q_2|^2} \Pi_{ab}(q_2) \mathbf{d}q_2^a \wedge \mathbf{d}v_2^b, \text{ and} \\
\mathbf{\Omega}_F &= \frac{m}{|q_1|^3} \left(\widehat{q}_1 \cdot \mathbf{d}q_1 \right) \wedge \left(v_1 \cdot \Pi(q_1) \cdot \mathbf{d}q_1 \right) + \frac{m}{|q_2|^3} \left(\widehat{q}_2 \cdot \mathbf{d}q_2 \right) \wedge \left(v_2 \cdot \Pi(q_2) \cdot \mathbf{d}q_2 \right) - \\
&\quad \frac{\lambda}{|q_1||q_2|} \left[\mathbf{d}q_1^a \wedge \left(\Pi(q_2) \cdot \mathbf{d}q_2 \right)_a + \left(\Pi(q_1) \cdot \mathbf{d}q_1 \right)_a \wedge \mathbf{d}q_2^a - \left(\Pi(q_1) \cdot \mathbf{d}q_1 \right)^a \wedge \left(\Pi(q_2) \cdot \mathbf{d}q_2 \right)_a \right] - \\
&\quad \frac{\lambda}{|q_1|^2} \left(\widehat{q}_1 \cdot \mathbf{d}q_1 \right) \wedge \left(\widehat{q}_2 \cdot \Pi(q_1) \cdot \mathbf{d}q_1 \right) + \frac{\lambda}{|q_2|^2} \left(\widehat{q}_2 \cdot \mathbf{d}q_2 \right) \wedge \left(\widehat{q}_1 \cdot \Pi(q_2) \cdot \mathbf{d}q_2 \right),
\end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{G}$ 是二维的，并由以下向量张成

$$\mathbf{U}_{(1)}^q = \widehat{q}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \mathbf{U}_{(2)}^q = \widehat{q}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad \text{and} \quad \mathbf{U}_{(1)}^v = \widehat{q}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial v_1}, \quad \mathbf{U}_{(2)}^v = \widehat{q}_2 \cdot \frac{\partial}{\partial v_2},$$

$\bar{}$ 和 $F = 0$ 分别如此。约化后的 $F = \overline{0,}$ 以及 $\overline{\ker}\, \Omega_L(\mathfrak{u})$ 由 $\mathbf{U}_{(1)}^v$、$\mathbf{U}_{(2)}^v$ 张成,

$$\mathbf{P}_{(+)} = q_1 \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} + q_2 \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} + v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial v_1} + v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial v_2},$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(-)} = q_1 \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} - q_2 \cdot \frac{\partial}{\partial q_2} + v_1 \cdot \frac{\partial}{\partial v_1} - v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial v_2} - \\
2 \frac{\lambda}{m} \left[\frac{|q_1|}{|q_2|} q_2 \cdot \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{|q_2|}{|q_1|} q_1 \cdot \frac{\partial}{\partial v_2} \right].
\end{aligned}$$

因此，$\dim\, (\overline{\ker\, \Omega_L})/\mathcal{G} = 2$。

能量为

$$E = \frac{1}{2} \frac{m}{|q_1|^2} v_1 \cdot \Pi(q_1) \cdot v_1 + \frac{1}{2} \frac{m}{|q_2|^2} v_2 \cdot \Pi(q_2) \cdot v_2.$$

我们发现 $\gamma^{[1]}{}_{(+)} = 0$ 而

$$\gamma_{(-)}^{[1]} = -\frac{2\lambda}{|q_1||q_2|} \left(q_2 \cdot \Pi(q_1) \cdot v_1 + q_1 \cdot \Pi(q_2) \cdot v_2 \right),$$

得到,

$$\beta[\mathbf{X}_{EL}]=\frac{1}{2}\gamma_{(-)}^{[1]}\left(\frac{\mathbf{\Theta}_q^{(1)}}{|q_1|}-\frac{\mathbf{\Theta}_q^{(2)}}{|q_2|}\right).$$

那么 $\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$ 是一维的，并由 $\mathbf{P}_{(+)}$ 张成。正如预期， $\mathfrak{L}_{\mathbf{P}_{(+)}}\beta=0$。因为

$$\mathfrak{L}_{\mathbf{P}_{(-)}}\beta=-\frac{4\lambda}{m}\left[1-(\widehat{q}_1\cdot\widehat{q}_2)^2\right]\left(\frac{\mathbf{\Theta}_q^{(1)}}{|q_1|}-\frac{\mathbf{\Theta}_q^{(2)}}{|q_2|}\right),$$

$\mathcal{S}\mathrm{ym}$ 也是一维的，同样由 $\mathbf{P}_{(+)}$ 张成。

一般的 SOELVF 为

$$\overline{\mathbf{X}}_{EL}=\overline{\mathbf{X}}_L-\frac{m}{8\lambda^2}\frac{\overline{\mathbf{X}}_L\gamma_{(-)}^{[1]}}{[1-(\widehat{q}_1\cdot\widehat{q}_2)]}\left[\mathbf{P}_{(-)}\right]+u^{(+)}(\mathfrak{u})\left[\mathbf{P}_{(+)}\right], \tag{22}$$

其中 $u^{(+)}(\mathfrak{u})\in\overline{\mathcal{F}}$，且根据 [1],

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{X}}_L=&v_1\cdot\Pi(q_1)\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}+v_2\cdot\Pi(q_2)\cdot\frac{\partial}{\partial q_2}+\\&\left(\frac{\widehat{q}_1\cdot v_1}{|q_1|}\right)v_1\cdot\Pi(q_1)\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}+\left(\frac{\widehat{q}_2\cdot v_2}{|q_2|}\right)v_2\cdot\Pi(q_2)\cdot\frac{\partial}{\partial v_2}+\\&\frac{\lambda}{m}\left(\frac{|q_1|}{|q_2|}v_2\cdot\Pi(q_2)\cdot\Pi(q_1)\cdot\frac{\partial}{\partial v_1}-\frac{|q_2|}{|q_1|}v_1\cdot\Pi(q_1)\cdot\Pi(q_2)\cdot\frac{\partial}{\partial v_2}\right),\end{aligned}$$

应用约束算法后。方程（22）是恒等式$\langle\mathbf{d}\gamma^{[1]}{}_{(+)}|\overline{\mathbf{X}}_L\rangle=0$ 的推论，且

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\lambda}\langle\mathbf{d}\gamma_{(-)}^{[1]}|\overline{\mathbf{X}}_L\rangle=&-2(\widehat{q}_1\cdot\widehat{q}_2)\frac{E}{m}+\frac{2}{|q_1||q_2|}v_1\cdot\Pi(q_1)\cdot\Pi(q_2)\cdot v_2-\\&\frac{\lambda}{m}(\widehat{q}_1\cdot\widehat{q}_2)\left[v_2\cdot\Pi(q_2)\cdot\widehat{q}_1-v_1\cdot\Pi(q_1)\cdot\widehat{q}_2\right].\end{aligned}$$

我们看到， $\overline{\mathcal{S}\mathrm{ol}}^{\mathbb{P}_L^{[n_F]}}$ 也是一维的，同样由 $\mathbf{P}_{(+)}$ 张成。

C. 一个拉格朗日量，具有局部共形与时间重参数化不变性

作用量

$$S_3:=sm\int\left[s\left(\frac{d\widehat{q}}{dt}\right)^2\right]^{1/2}dt,$$

其中 $s=\pm1$ 在局部共形变换 $q^a\to\alpha(\mathfrak{u})q^a$ 和时间重参数化 $t\to\tau(t)$ 下均保持不变，其中 τ 是一个关于.....单调递增的函数

t。然后

$$\mathbf{\Omega}_L=\frac{m}{|q|}\frac{P_{ab}(u)}{\sqrt{sv\cdot\Pi(q)\cdot v}}\mathbf{d}q^a\wedge\mathbf{d}v^b,$$

作用量	势	$\overline{\ker \Omega_L}/\mathcal{G}$	$\mathcal{S}\mathrm{ym}$	$\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$	$I_{[1]}$	$\overline{\mathcal{S}\mathrm{ol}}^{\mathbb{P}_L^{[n_F]}}$
S_1	$V_{AS}(\hat{q}^a)$	1	1	1	0	1
	$V_{sph}(\lvert q\rvert) + V_{AS}(\hat{q}^a)$	1	1	0	1	0
	$V(q^a)$	1	0	0	1	0
S_2	$\frac{\lambda}{2}\left[\frac{q_1^a}{\lvert q_2\rvert}\frac{d}{dt}\left(\frac{q_{2a}}{\lvert q_1\rvert}\right) - \frac{q_2^a}{\lvert q_1\rvert}\frac{d}{dt}\left(\frac{q_{1a}}{\lvert q_2\rvert}\right)\right]$	2	1	1	1	1
S_3	0	2	2	2	0	2

表 I. 本文讨论的三个示例的对称性汇总。除 $I_{[1]}$ 列外，数值均为首行所列向量空间的维数。请注意，欧拉-拉格朗日运动方程具有广义李对称性，而作用量本身却没有这种对称性。在所有三个示例中，$\dim(\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}) = \dim(\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathbb{P}_L^{[n_f]}})$。

以及 $\Omega_F = 0$。这里，$a = 1\ldots, D$,

$$u_a = \frac{\Pi_{ab}(q)v^b}{\sqrt{sv\cdot\Pi(q)\cdot v}},$$

因此 $u^2 = s$，而 $P_{ab}(u) = \Pi_{ab}(q) - su_a u_b$。因此，$\ker\Omega_L(\mathfrak{u}) = \ker\Omega_M(\mathfrak{u})$。$\mathcal{C}$和 $\mathcal{G}$ 均为二维，由以下向量张成：

$$\mathbf{U}^q_{(1)} = \widehat{q}\cdot\frac{\partial}{\partial q},\quad \mathbf{U}^q_{(2)} = u\cdot\frac{\partial}{\partial q},\quad \text{and}\quad \mathbf{U}^v_{(1)} = \widehat{q}\cdot\frac{\partial}{\partial v},\quad \mathbf{U}^v_{(2)} = u\cdot\frac{\partial}{\partial v},$$

分别。因此，$\dim(\ker\Omega_L/\mathcal{G}) = \overline{2}$。

由于该系统完全受约束，$E = 0$。由于 $\Omega_F = 0$ 也成立，因此不存在拉格朗日约束。由此可知，$\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$ 为二维空间，由 $\mathbf{U}^q{}_{(1)}$ 和 $\mathbf{U}^q{}_{(2)}$张成。由于 $\beta = 0$ 也成立，$\mathcal{S}$ym 同样是二维空间，也由 $\mathbf{U}^q{}_{(1)}$ 和 $\mathbf{U}^q{}_{(2)}$张成。

我们在 [1] 中发现 $\mathbf{X}_L = 0$。因此，一般的 SOELVF 为 $\mathbf{X}_{EL} = u^1(\mathfrak{u})\left[\mathbf{U}^q{}_{(1)}\right] + u^2(\mathfrak{u})\left[\mathbf{U}^q{}_{(2)}\right]$，其中 $u^n(\mathfrak{u}) \in \overline{\mathcal{F}}$ 适用于 $n = 1, 2$。由此可知，$\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathbb{P}_L^{[n_F]}}$ 也是二维的，并且同样由 $\mathbf{U}^q{}_{(1)}$ 和 $\mathbf{U}^q{}_{(2)}$ 张成。

VI. 结论

每个作用量的广义李对称性都会为动力系统的 SOELVF 带来一个任意函数，这一点虽只是经验所知，却也是基于物理原理所预期的结果。对于几乎正则拉格朗日量，物理学中出现广义

李对称性，是因为动力系统具有局部规范对称性，因而系统的某种动力学性质缺少一种规范自由度——局部共形不变性中向量的长度，或时间重参数化不变性中的时间度量。由于几乎正则拉格朗日量的作用量的广义李对称性会有$N_{\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}}$个这类规范自由度，因此，缺少这些规范自由度会导致 SOELVF 中出现数量相同的任意函数，这一推断是合理的。要唯一确定系统的动力学，就需要数量相同的项来固定这些规范自由度。尽管这些预期合乎情理，但迄今为止，它们只在个别案例中得到验证。这在很大程度上是因为，传统上对具有局部规范对称性的动力系统的分析一直采用受约束哈密顿力学。然而，这类分析依赖于正则哈密顿量，而正则哈密顿量与拉格朗日量对称性之间的联系至多是间接的，这与此处采用的拉格朗日方法形成对比。此外，确定系统总哈密顿量的过程往往遵循既定步骤，所得结果也因具体系统而异。通过聚焦于拉格朗日量和拉格朗日相空间，我们得以证明，对于所有具有几乎正则拉格朗日量且其拉格朗日二形式秩为常数的系统，局部规范对称性与其动力学之间存在直接联系。具体而言，这一结果确立了作用量的规范对称性数量与此类动力系统演化中自然出现的任意函数数量之间的联系。

由于对 $\gamma^{[1]}\ \mathbf{P}=0$ 任意选择 $\mathbf{P}\in\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$，$\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}$ 中的向量不会对一阶约束流形 $\mathbb{P}_L^{[1]}$ 产生贡献，因此在此阶或任何更高阶上，都不会对拉格朗日约束算法产生贡献。正因如此，算法无法确定 $N_{\mathcal{S}\mathrm{ym}\mathcal{L}}$ 任意函数 $u^m_{[1]}$，而且即使算法已经完成，这些函数仍会对 $\mathbf{X}_{EL}$ 产生贡献。这也意味着，如果引入二阶及更高阶的拉格朗日约束，它们就是偶然出现的，并非源自作用量的局部规范对称性。有趣的是，我们尚未发现这样的动力系统：其拉格朗日量既几乎正则，又具有秩为常数的拉格朗日二形式，同时还引入了二阶或更高阶的拉格朗日约束。

广义李对称性对粒子动力学的影响，体现了分析正则拉格朗日量的对称性与分析

几乎正则拉格朗日量的对称性之间存在的内在差异。对于正则拉格朗日量，广义李对称性的生成元（有时称为全局对称性）会产生一个延拓向量，而该延拓作用于拉格朗日量时，便给出此对称性下作用量 δS 的变化。随后施加欧拉-拉格朗日运动方程，即可得到沿着这些运动方程的解所给出的路径、与此对称性对应的守恒量。对于几乎正则拉格朗日量，广义李对称性的生成元 g_L 确实会产生一个延拓向量 $\mathbf{pr}\ \mathsf{g}_L$，如式（3）所示；并且 $\mathbf{pr}\ \mathsf{g}_L$ 作用于 L 时确实会给出 δS，但将欧拉-拉格朗日运动方程应用于式（4）中的 δS，得到的却是无意义的陈述 $\delta S = 0$。相反，要求 $\delta S = 0$ 对 $\mathbb{Q}$ 上的所有路径都成立，便会得到对称性生成元必须满足的条件。这进而表明，这些生成元之所以存在，完全是因为拉格朗日量是奇异的。随后，这些条件通过 $\gamma^{[1]}\,\mathbf{P} = 0$ 影响系统的动力学，并由此为 $\mathcal{S}\mathrm{ol}^{\mathbb{P}_L^{[n_f]}}$ 的维数设定下界。

我们发现，要构造出不止一个这样的动力系统相当困难：它具有几乎正则拉格朗日量、广义李对称性，并且其拉格朗日二形式在 $\mathbb{P}_L$ 上秩为常数。另一方面，我们发现，构造具有几乎正则拉格朗日量和广义李对称性、且拉格朗日二形式的秩在 $\mathbb{P}_L$ 上变化的动力系统实例却相当容易。事实上，后一种情况更为普遍，然而本文的大部分结果以及我们上一篇论文 [1] 中相当一部分结果，都依赖于拉格朗日二形式在 $\mathbb{P}_L$ 上秩为常数这一条件。意识到这些更为普遍的系统按其性质应当具有丰富得多的动力学和数学结构（事实上，我们发现这类系统往往需要引入二阶或更高阶的拉格朗日约束），却仍不清楚那些已证明适用于拉格朗日二形式秩为常数的系统的结果，哪些在秩于 $\mathbb{P}_L$ 上变化时仍然成立，这就更加令人担忧。确定这些系统的广义李对称性，证明从拉格朗日相空间到哈密顿相空间的转变是可行的，并找出对称性与动力学之间的联系，都是未来研究的必要工作。

致谢

本文的完成离不开 John Garrison 的贡献；他为**IIA节**中所用作用量的对称性分析提供了大量基础工作，并为**第三节**提供了大部分关键数学内容。本文的出版部分得益于伯克利研究影响倡议（BRII）的支持，该倡议由加州大学伯克利分校图书馆赞助。

附录

作用量 S_1 的欧拉-拉格朗日运动方程为

$$0 = \frac{m}{|q|^3}\Pi_{ab}(q)\ddot{q}^b - \frac{2m}{|q|^3}(\widehat{q}\cdot\dot{q})\Pi_{ab}(q)\dot{q}^b + \frac{\partial V}{\partial q^a}. \tag{A.1}$$

将该方程两边与 $\widehat{q}$ 进行缩并，可得到一阶拉格朗日约束公式（19）；显然，动力学只能在该约束面上实现。用 $\Pi_{ab}(q)$作用于公式（$A.1$），得到

$$0 = \frac{m}{|q|^3}\Pi_{ab}(q)\ddot{q}^b - \frac{2m}{|q|^3}(\widehat{q}\cdot\dot{q})\Pi_{ab}(q)\dot{q}^b + \Pi^b_a(q)\frac{\partial V}{\partial q^b}, \tag{A.2}$$

因为 $\Pi_{ac}(q)\Pi^c_b(q) = \Pi_{ab}(q)$。但在此情况下，$V(q^a) = V_{sph}(|q|) + V_{AS}(\hat{q})$，并且由于

$$\Pi^b_a(q)\frac{\partial V_{Sph}}{\partial q^b} = \Pi^b_a(q)\frac{\partial |q|}{\partial q^b}V'_{Sph}(|q|) = 0,$$

而恒等式

$$\frac{\partial \hat{q}^a}{\partial q^b} = \Pi^a_b(q),$$

确保

$$\Pi^b_a(q)\frac{\partial V_{AS}}{\partial q^b} = \frac{\partial V_{AS}}{\partial q^a},$$

因此，式（$A.2$）化简为与情形 1 中系统相同的运动方程。正因如此，这两种情形具有相同的广义李对称性。

[1]A. D. Speliotopoulos，受约束动力学：广义李对称性、奇异拉格朗日量以及向哈密顿力学的过渡，《物理通讯》，4 065002（2020）。

[2] M. J. Gotay, J. M. Nest尔安 d G. Hinds, P重对称lecti克曼 ifolds and the Dirac-B伯格曼约束理论，《数学物理学杂志》，19，2388–2399（1978）10.1063/1.523597.[3] M. J. Gotay 和 J. M. Nester，《预辛拉格朗日系统 I：约束算法与等价定理》，《亨利·庞加莱研究所年刊》A辑，30(2)，129–142（1979）[4] M. J. Gotay 和 J. M. Nester，《预辛拉格朗日系统 II：二阶问题》，《亨利·庞加莱研究所年刊》A辑，32(1)，1–13（1980）。[5] J. F. Cariñena，《奇异拉格朗日理论》，《物理学进展》，38(9)，641–679（1990）10.1002/prop.2190380902.[6] M. Henneaux 和 C. Teitelboim，《规范系统量子化》，（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1992）。[7] P. A. M. Dirac，《广义哈密顿动力学》，《加拿大数学杂志》，2，129–148（1950）10.4153/CJM-1950-012-1.[8] M. C. Muñoz-Lecanda，《带约束的哈密顿系统：几何方法》，《国际理论物理学杂志》，28(11)，1405–1417（1989）10.1007/BF00671858.[9] L. Lusanna，《物理学中的狄拉克–伯格曼约束：奇异拉格朗日量、哈密顿约束与第二诺特定理》，《现代物理学几何方法国际期刊》，15(10)，1830004（2018），10.1142/S0219887818300040.[10] G. Prince，《经典力学中动力学对称性的分类初探》，《澳大利亚数学学会通报》，27，53–71（1983）10.1017/S0004972700011485.[11] G. Prince，《经典力学中动力学对称性的完整分类》，《澳大利亚数学学会通报》，32，299–308（1985）10.1017/S0004972700009977.[12] M. Crampin，《拉格朗日动力学的切丛几何》，《物理学杂志 A：数学与一般物理学》，16，3755–3772（1983）10.1088/0305-4470/16/16/014.[13] J. F. Cariñena、J. Fernández-Núñez 和 E. Martínez，《时变拉格朗日力学中诺特第二定理的几何方法》，《数学物理学通讯》，23，51–63（1991）10.1007/BF01811294.[14] J. F. Cariñena 和 M. F. Rañada，《奇异拉格朗日量的诺特定理》，《数学物理学书信》，15，305–311（1988）10.1007/BF00419588.[15] J. F. Cariñena、E. Martínez 和 J. Fernández-Núñez，《时变拉格朗日力学中的诺特定理》，《数学物理学报告》，31，189–203（1992）10.1016/0034-

4877(92)90014 -
R.[16] J. F. Cariñena、J. Fernández-Núñez 和 M. F. Rañada，速度仿射奇异拉格朗日量，《物理学杂志 *A*：数学与普通物理》，**36**3789–3807（2003）10.1088/0305- 4470/36/13/311.
[17] J. F. Cariñena 和 J. Fernández-Núñez，时变奇异拉格朗日量的几何理论，《物理学进展》，**41(6)** 517–552（1993）。[18] J. F. Cariñnena 和 E. Martinez，载于《物理学中的对称性与代数结构》第二部分：积分系统、固体物理学与相变理论，V. V. Dodonov 和 V. I. Man'ko 编（Nova Science Publishers，纽约，1991），第 章：经典力学中的广义雅可比方程与逆问题，第 84–98 页。[19] G. Marmo、G. Mendella 和 W. M. Tulczyjew，隐式形式动力学的对称性与运动常数，《亨利·庞加莱研究所年刊》*A* 辑，**57(2)** 147–166（1992）。[20] X. Grácia 和 J. M. Pons，奇异微分方程的对称性与无穷小对称性，《物理学杂志 *A*：数学与普通物理》，**35**5059–5077（2002）10.1088/0305-4470/35/24/306.[21] X. Grácia 和 R. Martín，时变奇异微分方程的几何方面，《现代物理学几何方法国际期刊》，**2(4)** 597–618（2005）10.1142/S0219887805000697.[22] L. Popescu，李代数丛上二阶微分方程的对称性，《几何与物理学杂志》，**117** 84–98（2017）10.1016/j.geomphys.2017.03.006.[23] M. de León 和 D. M. de Diego，奇异拉格朗日系统的对称性与运动常数，《国际理论物理学杂志》，**35(5)** 975–1011（1996）10.1007/BF02302383.[24]N. Dimakis、P. A. Terzis 和 T. Christodoulakis，受约束二次拉格朗日量的接触对称性，《物理学杂志：会议系列》，**6701**–6（2016）10.1088/1742-6596/670/1/012021.[25] M. Popescu，全奇异拉格朗日量与仿射哈密顿量，《巴尔干几何及其应用杂志》，**14(1)** 60–71（2009）[26] M. Popescu 和 P. Popescu，高阶全奇异拉格朗日量与仿射哈密顿量，《巴尔干几何及其应用杂志》，**16(2)** 122–132（2011）。

[27] P. J. Olver，李群在微分方程中的应用，（Springer-Verlag，纽约，纽约，1993）。

[28] R. Abraham 和 J. E. Marsden，《力学基础，第 *2* 版》（Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1978 年）。