arXiv:2301.08402v1 [quant-ph] 20 Jan 2023

量子信道的熵不确定关系与强次可加性

LI GAO、MARIUS JUNGE 和 NICHOLAS LARACUENTE

Abstract. 我们证明了两个量子信道的熵不确定关系，将 Frank 和 Lieb 关于量子测量的工作推广到了量子信道。这一结果是通过量子熵的广义强超可加性（SSA）得到的。受 Petz 的代数型 SSA 不等式启发，我们还得到了量子相对熵的广义 SSA。作为一个特例，它给出了一个改进的数据处理不等式。

1. Introduction

不确定性原理是量子力学中的一个基本现象。著名的海森堡不确定性原理指出，量子粒子的位置和动量无法同时被精确确定，即

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{\hbar}{2}\,, \tag{1.1}$$

其中， $\sigma(Q)$ 和 $\sigma(P)$ 分别表示位置和动量的标准导数，而 $\hbar$ 是约化普朗克常数 [21, 35]。这类不确定性关系广泛存在于量子物理中，例如能量-。事实上，对于由厄米算子 X 和 Z 描述的两个可观测量，Robertson [33] 证明了

$$\sigma(X)\sigma(Z) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[X,Z]|\psi\rangle|\,, \tag{1.2}$$

其中， $|\psi\rangle$ 是量子系统的态， $[\cdot,\cdot]$ 表示对易子。因此，海森堡原理 (1.1) 是对易关系 $[Q,P] = -i\hbar I$ 的推论。Robertson 不等式表明，不确定性原理 (1.2) 是非对易性的体现，而非对易性是量子物理的一项基本特征。

在统计物理和信息论中，熵是衡量不确定性的自然度量。自 Hirschman 首次研究熵不确定关系以来 [16]，围绕熵量探讨不确定性原理的研究层出不穷（参见综述 [9] 及其中的参考文献）。其中一项值得关注的结果是，对于位置 Q 和动量 P，

$$h(Q) + h(P) \geq \log(e\pi\hbar)\,, \tag{1.3}$$

其中 $h(Q) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dQ}{dq} \log \frac{dQ}{dq} dq$ 是微分熵，而 $\frac{dQ}{dq}$ 是相对于勒贝格测度 dq的概率密度函数。该不等式由 Beckner [2], 证明，[1]

Bialynicki-Birula 和 Mycielski [6] 也利用锐豪斯多夫–杨不等式 [2]证明了这一点。此外，众所周知，它比标准差的海森堡原理 (1.1) 更强。对于两个具有有限谱的可观测量 X 和 Z，Maassen 和 Uffink [24] 发现

$$H(X) + H(Z) \geq \log \frac{1}{c}\,, \tag{1.4}$$

其中 $H(X) = -\sum_x P_X(x) \log P_X(x)$ 表示香农熵，而 $c = \max_{x,\ z} |\langle x|z\rangle|^2$ 是特征基 $\{|x\rangle\}_{x\in\mathcal{X}}$ 和 $\{|z\rangle\}_{z\in\mathcal{Z}}$ 之间的最大重叠，其中 X 和 Z 分别对应这两个特征基。Berta 等人近期取得了一项突破，将 Maassen-Uffink 关系推广到了混合量子态；更重要的是，该关系适用于存在量子存储器 [4] 的情形。

设 H_M 为一个希尔伯特空间，$\mathbb{B}(H_M)$ 为作用于 H_M 上的有界算子。H_M 上的混合量子态可用一个正且迹为 1 的元素 ρ 来建模，称为密度算子。其冯·诺依曼熵定义为

$$H(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \log \rho)\,,$$

其中 tr 表示矩阵迹。Berta 等人证明，$H_M \otimes H_C$ 上的任意联合量子态 ρ_{MC} 都满足以下不确定性关系：

$$H(X|C) + H(Z|C) \geq H(M|C) + \log \frac{1}{c}\,. \tag{1.5}$$

这里，C是一个量子参考系统，$H(M|C) = H(\rho_{MC}) - H(\rho_C)$是相对于系统 C 的 ρ_{MC} 条件熵（同理，$H(X|C)$和 $H(Z|C)$亦然）。值得注意的是，常数 c与系统 C无关。Frank 和 Lieb [12]进一步将这一结果推广到了任意测量。回顾一下，H_M 上的正算子值测量（POVM）是一族正算子$\{E_x\}$，满足$\sum_x E_x = I$。Frank 和 Lieb [12] 证明：给定两个 POVM $\{E_x\}$和 $\{F_z\}$，任意联合量子态 ρ_{MC} 都满足式（1.4），其中常数为 $c = \max_{x,\ z}\mathrm{tr}(E_x F_z)$，称为测量的最大重叠。

本文研究两个量子信道的熵不确定关系。从数学上说，量子信道是将密度算子映射为密度算子的完全正保迹映射。为简单起见，我们只考虑有限维情形。

定理（A）。设 H_A、H_B 和 H_M 为有限维希尔伯特空间，且 $\Phi_A : \mathbb{B}(H_M) \to \mathbb{B}(H_A)$ Φ_B: $\mathbb{B}(H_M) \to \mathbb{B}(H_B)$ 为两个量子信道。则对于任意希尔伯特空间 H_C 及任意双部量子态 $\rho \in \mathbb{B}(H_M \otimes H_C)$

$$H(A|C)_{\Phi_A(\rho)} + H(B|C)_{\Phi_B(\rho)} \geq H(M|C)_\rho + \log \frac{1}{c}\,.$$

常数 c 由完全有界范数给出

$$c = \| \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger : S_1(H_A) \to \mathbb{B}(H_B) \|_{cb} , \tag{1.6}$$

其中 $S_1(H_A)$ 是作用于 H_A 上的迹类算子，且 $\Phi_A^\dagger$ 是 Φ_A 的伴随映射 .

请注意，根据 Effros-Ruan 的同构 [11, 7], ，常数 c 等于 $\Phi_B \circ \Phi_A^\dagger$ 的 Choi 矩阵的算子范数，该范数总是有限的。当 Φ_A 和 Φ_B 的值域是经典（可交换）系统时，定理1还原为 Frank-Lieb 不确定性关系。从这个角度来看，定理1是 Frank-Lieb 关系的一种非交换推广，它允许 Φ_A 和 Φ_B 是从量子系统到量子系统的量子信道。另一个特殊情形是 $H_M = H_A \otimes H_B$ 和 $\Phi_A = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{tr}_B$、$\Phi_B = \mathrm{tr}_A \otimes \mathrm{id}$ 为偏迹时：这还原了 Lieb 和 Ruskai 证明的冯·诺依曼熵的强次可加性（SSA） [23],

$$H(AC) + H(BC) - H(ABC) - H(C) \geq 0 .$$

事实上，我们的定理 A 是由以下广义 SSA 不等式推导得出的 y.

定理（B）。设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{R}$ 是分别配备迹 $\tau_{\mathcal{A}}$、$\tau_{\mathcal{B}}$、$\tau_{\mathcal{M}}$ 和 $\tau_{\mathcal{R}}$ 的有限维冯·诺伊曼代数。假设 $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ 是一个子代数，并记 E_R 为包含映射的伴随。给定两个量子信道 $\Phi_A : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ 和 $\Phi_B : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$，对于任意密度算子 $\rho \in \mathcal{M}$,

$$H(\Phi_A(\rho)) + H(\Phi_B(\rho)) \geq H(\rho) + H(E_{\mathcal{R}} \circ \Phi_A(\rho)) + \log \frac{1}{c} , \tag{1.7}$$

其中常数 c 定义为

$$c = \sup\{\tau_{\mathcal{M}}(\Phi_A^\dagger(a)\Phi_B^\dagger(b)) \mid a \in \mathcal{A}_+, b \in \mathcal{B}_+ \ , E_{\mathcal{R}}(a) = 1 \, , \tau_{\mathcal{B}}(b) = 1\} ,$$

定理 B 推广了 Petz 的代数型 SSA [26]: 当 $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$、$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 是子代数, $\Phi_A = E_A$、$\Phi_B = E_B$ 是保迹条件期望，且 $E_A \circ E_B = E_B \circ E_A = E_R$ 时，有

$$H(E_A(\rho)) + H(E_B(\rho)) \geq H(\rho) + H(E_R \circ E_A(\rho)) .$$

条件 $E_{\mathcal{A}} \circ E_{\mathcal{B}} = E_{\mathcal{B}} \circ E_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{R}}$ 称为交换方块，最早由 Popa [32] , 引入，是研究子因子的重要工具。在此，我们的常数 $c = 1$ 当且仅当交换方块条件成立。从这个角度来看, 定理 B 给出了交换方块的熵刻画。

受 Petz 的代数型 SSA [26, 定理 12], 启发，我们的第三个结果是关于相对熵的广义 SSA。回顾一下，对于两个密度算子 ρ 和 σ，相对熵定义为 $D(\rho||\sigma) := \mathrm{tr}(\rho \log \rho - \rho \log \sigma)$。

定理（C）。设 $\Phi_A: \mathcal{M} \to \mathcal{A}, \Phi_B: \mathcal{M} \to \mathcal{B}$ 是两个量子信道，且 $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$是一个子代数。假设 $\sigma \in \mathcal{M}$ 是一个密度算子，并且存在一个条件期望 $E_R^\dagger: \mathcal{B} \to \mathcal{R}$ 保持态 $\Phi_B(\sigma)$。那么对于任意量子态 $\rho \in \mathcal{M}$，有

$$D(\rho||\sigma) + D(E_R \circ \Phi_B(\rho)||E_R \circ \Phi_B(\sigma)) \geq D(\Phi_A(\rho)||\Phi_A(\sigma)) + D(\Phi_B(\rho)||\Phi_B(\sigma)) - \kappa$$

常数 κ 由下式给出

$$\kappa = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \log c(t) dt \, , \alpha(t) = \frac{\pi}{2(\cosh(\pi t) + 1)}$$
$$c(t) = \sup_b \tau_{\mathcal{M}} \Big(\Phi_B^\dagger(b) \Phi_{\mathcal{A}}^\dagger \big(\Phi_{\mathcal{A}}(\rho)^{\frac{1+it}{2}} \Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}} \big) \sigma \Phi_{\mathcal{A}}^\dagger \big(\Phi_{\mathcal{A}}(\rho)^{\frac{1+it}{2}} \Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}} \big)^* \Big)$$

其中，上确界取遍所有满足 $E_R^\dagger(b) = 1$的 $b \in \mathcal{B}_+$。

特别地，上述定理表明，当 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ 和 $\mathcal{R} = \mathbb{C}$ 是平凡系统时，数据处理不等式可以得到改进。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论熵量与非交换 L_p-范数之间的联系。第 3 节利用 L_p-空间的复插值证明定理 B，这与 Frank 和 Lieb 针对测量不确定性关系所采用的方法不同。第 4 节回顾非交换 L_p-空间的算子空间结构，并推导定理 A。第 5 节讨论 Petz 相对熵强次可加性，并证明定理 C。

记号：我们用斜体字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{R} \cdots$ 表示冯·诺依曼代数，并用下标标记希尔伯特空间 $H_A, H_B, H_C \cdots$。我们通常用简记$H_{AB} = H_A \otimes H_B$表示张量积空间。给定有限维希尔伯特空间 H，我们将 $\mathbb{B}(H)$（分别将 $\mathbb{B}(H)_+$）记为有界算子（分别为正算子）的集合，并用 tr 表示标准矩阵迹。我们用 1 表示 $\mathbb{B}(H)$ 中的恒等算子，用 id 表示恒等映射。我们将算子 A 的伴随记为 A^*，将映射 Φ 关于迹内积的伴随记为 $\Phi^\dagger$。

致谢：LG 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2154903 项目的资助。NL 作为 IBM 博士后在芝加哥大学获得资助。MJ 部分获得了美国国家科学基金会 DMS 1800872 项目和美国国家科学基金会 RAISE-TAQS 1839177 项目的资助。

注：定理 A 已在 2018 年 IEEE 国际信息论研讨会的会议论文集中宣布 [13]。本文中的定理 B、定理 C 以及定理 A 的证明均为新内容。

2. Entropy and L_p-norm

2.1. 非交换 L_p-范数与冯·诺伊曼熵。我们简要回顾熵与 L_p-范数之间的联系。有关非交换 L_p-空间的更多信息，请参阅综述 [31]。为简单起见，本文始终将讨论范围限定在有限维冯·诺伊曼代数，即矩阵代数的 $*$-子代数。设 $\mathcal{M}$ 是一个有限维冯·诺伊曼代数，τ 是 $\mathcal{M}$ 上的忠实迹。对于 $0 < p < \infty$，非交换 L_p-范数定义为

$$\| a \|_{L_p(\mathcal{M},\tau)} = \tau(|a|^p)^{1/p} \, , \; a \in \mathcal{M} \, ,$$

我们将 $L_p(\mathcal{M},\tau)$ 记作，或对于 L_p-空间简记为 $L_p(\mathcal{M})$。特别地，$L_\infty(\mathcal{M}) := \mathcal{M}$。基本示例是 Schatten p-类 $S_p(H) = L_p(\mathbb{B}(H), \mathrm{tr})$，它是关于矩阵迹 tr 的 L_p-空间 $\mathbb{B}(H)$。与经典 L_p-空间一样，非交换L_p-空间构成一个复插值族，

$$L_{p_\theta}(\mathcal{M}) = [L_{p_0}(\mathcal{M}), L_{p_1}(\mathcal{M})]_\theta \, ,$$

其中 $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ 和 $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$。关于复插值的定义，请参见 [3] 。

$\mathcal{M}$ 上的（量子）态由密度算子给出，这些密度算子是正的且迹为 1。我们记作

$$D(\mathcal{M}) = \{\rho \in \mathcal{M} \mid \rho \ge 0 \, , \, \tau(\rho) = 1\} \, , \; D_+(\mathcal{M}) = \{\rho \in D(\mathcal{M}) | \rho > 0\}$$

分别作为态空间和忠实态空间。量子态 ρ 的冯·诺依曼熵定义为

$$H(\rho) = -\tau(\rho \log \rho) \, .$$

此定义自然地推广到所有正算子。一般而言，$H(\rho)$ 既可以为负，也可以为正。事实上，如果迹相差一个常数因子，

$$\tilde{\tau}_{\mathcal{M}} = \lambda \tau_{\mathcal{M}} \, , \; \tilde{\rho} = \lambda^{-1} \rho \, ,$$

冯·诺依曼熵相差一个整体常数

$$H_\tau(\rho) = H_{\tilde{\tau}}(\tilde{\rho}) + \log \lambda \, .$$

例 2.1. i) 对于矩阵迹 $(\mathbb{B}(H), \mathrm{tr})$，$H(\rho) \ge 0$。ii) 对于归一化迹 $\tau(1) = 1$，$H(\rho) \le 0$。
iii) 考虑赋予勒贝格测度的 $L_\infty(\mathbb{R}, dx)$，$h(f) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) dx$ 称为微分熵，它可以为正，也可以为负。

冯·诺依曼熵与 L_p-范数之间的关系如下 s:

引理 2.2。i) 对于 $\rho \in \mathcal{M}_+$,

$$\lim_{p\to 1} \frac{\tau(\rho^p) - \tau(\rho)}{p-1} = -H(\rho)$$
$$\lim_{p\to 1} \frac{\|\rho\|_p - \|\rho\|_1}{p-1} = -H(\rho) - \tau(\rho)\log\tau(\rho)\,,$$

且这两个极限在 $D(\mathcal{M})$ 上一致收敛。
ii) 若路径 $\rho: [1, 1+\varepsilon) \to D(\mathcal{M})$ 满足 $\lim_{p\to 1^+} \rho(p) = \rho$，则

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{\tau(\rho(p)^p) - 1}{p-1} = \lim_{p\to 1^+} \frac{\|\rho(p)\|_p - 1}{p-1} = -H(\rho)$$

证明。对于第一个极限，注意到对于正数 $x > 0$，$p \mapsto \frac{x^p-1}{p-1}$ 单调递增，且 $\lim_{p\to 1} \frac{x^p-1}{p-1} = x\log x$。由单调收敛定理,

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{\tau(\rho^p) - \tau(\rho)}{p-1} = \lim_{p\to 1^+} \frac{\tau(\rho^p - \rho)}{p-1} = \tau(\rho\log\rho)\,.$$

在有限维情形下，$D(\mathcal{M})$ 是紧集，因此由 Dini 定理，$D(\mathcal{M})$ 上的收敛是一致的。对于第二个极限，定义函数

$$f(p) = \tau(\rho^p)\,, p \in [1, \infty)$$

于是 f 连续可微，$f(1) = \tau(\rho)$，且 $f'(1^+) = -H(\rho)$。利用洛必达法则,

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{f(p)^{\frac{1}{p}} - f(1)}{p-1}$$
$$= f(1)\Big(-\log f(1) + \frac{f'(1^+)}{f(1)}\Big) = f'(1^+) - f(1)\log f(1) = -H(\rho) - \tau(\rho)\log\tau(\rho)$$

这证明了第二个极限。对于 $D(\mathcal{M})$ 上的一致收敛，我们注意到 t

$$\lim_{p\to 1} \frac{\tau(\rho^p)^{\frac{1}{p}} - \tau(\rho)}{p-1} = \lim_{p\to 1} \frac{\tau(\rho^p) - \tau(\rho)}{p-1} + \lim_{p\to 1} \frac{\tau(\rho^p)^{\frac{1}{p}} - \tau(\rho^p)}{p-1}$$

根据中值定理,

$$\frac{x^{\frac{1}{p}} - x}{p-1} = -\frac{1}{p_0^2} x^{\frac{1}{p_0}} \ln x$$

对于某个 $p_0 \in (1, p)$。注意，在 $D(\mathcal{M})$ 上，$\tau(\rho^p) \to 1$ 一致收敛。因此，当 $p \to 1$ 时,

$$\frac{\tau(\rho^p)^{\frac{1}{p}} - \tau(\rho^p)}{p-1} = -\frac{1}{p_0^2} \tau(\rho^p)^{\frac{1}{p_0}} \ln\tau(\rho^p) \to 0$$

一致收敛，这证明了第二个极限的一致收敛性。于是，ii) 可由 i) 的一致收敛性推出。

■

2.2. 拼接 L_p 范数与条件熵。Junge 和 Parcet [19]引入的拼接 L_p空间是我们分析中的一个重要工具。设 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$为一个子代数，$\tau_{\mathcal{N}}$ 为 $\mathcal{N}$上的迹，它可以不同于 $\mathcal{M}$上的迹 $\tau_{\mathcal{M}}$。对于 $1 \leq p$、$q \leq \infty$，固定$\frac{1}{r} = |\frac{1}{p} - \frac{1}{q}|$。给定 $x \in \mathcal{M}$，拼接 L_p^q范数定义如下：对于 $p \leq q$,

$$\| x \|_{L_p^q(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \inf_{x=ayb} \| a \|_{L_{2r}(\mathcal{N},\tau_{\mathcal{N}})} \| y \|_{L_q(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}})} \| b \|_{L_{2r}(\mathcal{N},\tau_{\mathcal{N}})} ;$$

其中，下确界取遍所有满足 a、$b \in \mathcal{N}$ 和 $y \in \mathcal{M}$的因子分解 $x = ayb$；对于$p \geq q$

$$\| x \|_{L_p^q(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \sup_{\| a \|_{L_{2r}(\mathcal{N})} = \| b \|_{L_{2r}(\mathcal{N})} = 1} \| axb \|_{L_p(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}})} ,$$

其中，上确界取遍所有满足$\| a \|_{L_{2r}(\mathcal{N},\ \tau_{\mathcal{N}})} = \| b \|_{L_{2r}(\mathcal{N},\ \tau_{\mathcal{N}})} = 1$的 a、$b \in \mathcal{N}$。当$p = q$时，这两个定义等价，并且 $L_p^p(\mathcal{N} \subset \mathcal{M})$与 $\cong L_p(\mathcal{M},\ \tau_{\mathcal{M}})$等距。

对于 $x \geq 0$，只需在上述下确界（上确界）中考虑 $a = b > 0$。那么对于 $p \leq q$,

$$\| x \|_{L_p^q(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \inf_{\sigma \in D_+(\mathcal{N})} \| \sigma^{-\frac{1}{2r}} y \sigma^{-\frac{1}{2r}} \|_{L_q(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}})} ;$$

对于 $q \leq p$,

$$\| x \|_{L_p^q(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \sup_{\sigma \in D_+(\mathcal{N})} \| \sigma^{\frac{1}{2r}} x \sigma^{\frac{1}{2r}} \|_{L_p(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}})} ,$$

特别地，对于 $p = 1$、$q = \infty$ 和 $p = \infty$、$q = 1$，分别在 $x \geq 0$ 时,

$$\| x \|_{L_1^\infty(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \inf\{\lambda \mid x \leq \lambda\sigma \text{ for some } \sigma \in D(\mathcal{N})\} \tag{2.1}$$

$$\| x \|_{L_\infty^1(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \| E_N(x) \|_\infty \tag{2.2}$$

这里，E_N $L_1(\mathcal{M}) \to L_1(\mathcal{N})$ 是包含映射 $\iota : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 的伴随映射，定义为

$$\tau_{\mathcal{M}}(x\rho) = \tau_{\mathcal{N}}(xE_N(\rho)) , \text{ for } x \in \mathcal{N} , \rho \in L_1(\mathcal{M})$$

由于是有限维，我们简单记作 $E_N : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$。Junge 和 Parcet 证明了以下关于融合 L_p 空间的对偶性

$$L_p^q(\mathcal{N} \subset \mathcal{M})^* = L_{p'}^{q'}(\mathcal{N} \subset \mathcal{M}) ,$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 和 $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$。此外，融合 L_p-空间满足复插值关系：对于 $0 \leq \theta \leq 1$,

$$L_{p_\theta}^{q_\theta}(\mathcal{N} \subset \mathcal{M}) = [L_{p_0}^{q_0}(\mathcal{N} \subset \mathcal{M}), L_{p_1}^{q_1}(\mathcal{N} \subset \mathcal{M})]_\theta,$$

其中 $1 \leq p_j \leq q_j \leq \infty$、$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ 和 $\frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$。下一个引理展示了融合 L_p-范数与熵之间的联系。

引理 2.3. 若 $\rho : [1, 1+\varepsilon) \in D(\mathcal{M})$ 满足 $\lim_{p\to 1^+} \rho(p) = \rho$,

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p-1}(\|\rho(p)\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} - 1) = H(E_N(\rho)) - H(\rho)\,. \tag{2.3}$$

证明。这是对 [10, 定理 17]的修改。不失一般性，我们假设对于 $\mathcal{N}$中的任意投影，都有 $\tau_{\mathcal{N}}(e) \geq 1$。事实上，若对于 $\lambda, \mu > 0$,

$$\tilde{\tau}_{\mathcal{M}} = \lambda\tau_{\mathcal{M}}\,, \tilde{\tau}_{\mathcal{N}} = \mu\tau_{\mathcal{N}}\,,\ \tilde{\rho} = \lambda^{-1}\rho\,,$$

熵和 L_p-范数只相差一个全局常数,

$$H_{\tilde{\tau}}(\tilde{\rho}) = H_{\tau}(\rho) - \log\lambda\,, H_{\tilde{\tau}_{\mathcal{N}}}(\tilde{E}_R(\tilde{\rho})) = H_{\tau_{\mathcal{N}}}(E_N(\rho)) - \log\mu$$
$$\|\tilde{\rho}\|_{L_p^q(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\tilde{\tau})} = \mu^{1-\frac{1}{p}}\lambda^{\frac{1}{p}-1}\,\|\rho\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\tau)}\,,$$

这与 (2.3) 一致。注意, $\|\rho(p)\|_{L_1^1(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \tau_{\mathcal{M}}(\rho(p)) = 1$, 并且

$$\|\rho(p)\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \inf_{\sigma\in D_+(\mathcal{N})} \|\sigma^{-\frac{1}{2p'}}\rho(p)\sigma^{-\frac{1}{2p'}}\|_p = \inf_{\sigma\in D_+(\mathcal{N})} \|\rho^{\frac{1}{2}}(p)\sigma^{-\frac{1}{p'}}\rho^{\frac{1}{2}}(p)\|_p\,.$$

记作

$$\rho(p,\sigma) = \rho(p)^{\frac{1}{2}}\sigma^{-\frac{1}{p'}}\rho(p)^{\frac{1}{2}}\,,\ \hat{\rho}(p,\sigma) = \frac{\rho(p,\sigma)}{\tau_{\mathcal{M}}(\rho(p,\sigma))} \in D(\mathcal{M})\,.$$

文献 [14]中证明了，存在唯一的 σ在 $\|\rho(p)\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})}$ 中取得下确界，我们将其记为 σ_p。也就是说,

$$\|\rho(p)\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} = \|\rho(p,\sigma_p)\|_p\ .$$

根据假设 $\inf_{e\text{ 投影}} \tau_{\mathcal{N}}(e) \geq 1$, 我们有 $\sigma^{-1} \geq 1$, $\forall\sigma \in D_+(\mathcal{N})$。于是

$$\rho(p) \leq \rho(p,\sigma_p)\,,\ \forall\, p > 1\,.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} 1 =& \tau_{\mathcal{M}}(\rho(p)) \leq \tau_{\mathcal{M}}(\rho(p,\sigma_p)) \leq \tau_{\mathcal{M}}(1)^{1-\frac{1}{p}}\,\|\rho(p,\sigma_p)\|_p \\ \leq& \tau_{\mathcal{M}}(1)^{1-\frac{1}{p}}\,\|\rho(p,\frac{1}{\tau_{\mathcal{N}}(1)})\|_p \leq \tau_{\mathcal{M}}(1)^{1-\frac{1}{p}}\tau_{\mathcal{N}}(1)^{1-\frac{1}{p}}\,\|\rho(p)\|_p \to 1 \end{aligned}$$

因此, $\lim_{p\to 1^+}{}^{\rho}(p,\sigma_p) = \lim_{p\to 1^+}\hat{}\rho(p,\sigma_p) = \rho$ 在 L_1-范数下收敛。因此,

$$\begin{aligned} &\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p-1}(\|\rho(p)\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} - 1) \\ =& \lim_{p\to 1^+} \frac{\|\rho(p,\sigma_p)\|_p - 1}{p-1} \\ =& \lim_{p\to 1^+} \frac{\|\rho(p,\sigma_p)\|_p - \|\rho(p,\sigma_p)\|_1}{p-1} + \frac{\tau_{\mathcal{M}}(\rho(p,\sigma_p)) - 1}{p-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\geq \lim_{p\to 1^+} \tau_{\mathcal{M}}(\rho(p,\sigma_p))\frac{\|\hat{\rho}(p,\sigma_p)\|_p - 1}{p-1} + \lim_{p\to 1^+} \inf_{\sigma} \frac{\tau_{\mathcal{M}}(\sigma^{-\frac{1}{p'}}\rho(p)) - 1}{p-1} . \tag{2.5}$$

利用引理 2.2 和 $\tau_{\mathcal{M}}(\rho(p,\sigma)) \to 1$，这里的第一个极限收敛到 $-H(\rho)$。根据 $p<1$ 的 H¨older 不等式，第二个极限中的下确界可以计算

$$\inf_{\sigma\in D_+(\mathcal{N})} \tau_{\mathcal{M}}(\sigma^{-\frac{1}{p'}}\rho(p)) = \inf_{\sigma\in D_+(\mathcal{N})} \tau_{\mathcal{N}}(\sigma^{-\frac{1}{p'}}E_N(\rho(p))) = \| E_N(\rho(p)) \|_{\frac{p}{2p-1}} .$$

由引理 2.2 和链式法则可知，第二部分收敛到 $H(E_N(\rho))$，当 $E_N(\rho(p)) \to E_N(\rho)$ 时。因此我们有

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p-1}(\|\rho(p)\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} - 1) \geq H(E_N(\rho)) - H(\rho) . \tag{2.6}$$

对于另一方向，

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p-1}(\|\rho\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} - 1) \\
\leq &\lim_{p\to 1^+} \frac{\|\rho(p, E_N(\rho(p)))\|_p - 1}{p-1} \\
= &\lim_{p\to 1^+} \tau_{\mathcal{M}}(\rho(p, E_N(\rho(p))))\frac{\|\hat{\rho}(p, E_N(\rho(p)))\|_p - 1}{p-1} + \lim_{p\to 1^+} \frac{\tau_{\mathcal{M}}(E_N(\rho(p))^{-\frac{1}{p'}}\rho(p)) - 1}{p-1}
\end{aligned}$$

对于第一个极限，注意到根据 [29], ，存在 $C>0$ ，使得对任意$\rho\in\mathcal{M}_+$，都有 $\rho \leq CE_N(\rho)$。那么

$$\begin{aligned}
\rho(p) \leq \rho(p, E_N(\rho(p))) = \rho(p)^{\frac{1}{2}} E_N(\rho(p))^{-\frac{1}{p'}} \rho(p)^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{p'}} \rho(p)^{\frac{1}{p}} \\
1 = \tau(\rho(p)) \leq \tau(\rho(p, E_N(\rho(p)))) \leq C^{\frac{1}{p'}} \tau(\rho(p)^{\frac{1}{p}}) \to 1
\end{aligned}$$

因此 $\rho(p, E_N(\rho(p)))$ 在 L_1 范数下 $\to \rho$，这意味着

$$\lim_{p\to 1^+} \tau_{\mathcal{M}}(\rho(p, E_N(\rho(p))))\frac{\|\hat{\rho}(p, E_N(\rho(p)))\|_p - 1}{p-1} = -H(\rho) .$$

对于第二个极限，我们注意到 $\lim_{p\to 1^+} \| E_N(\rho(p)) - E_N(\rho) \|_1 \leq \lim_{p\to 1^+} \| \rho(p) - \rho \|_1 = 0$。然后再次由引理 2.2 和链式法则可得，

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{\tau_{\mathcal{M}}(E_N(\rho(p))^{-\frac{1}{p'}}\rho(p)) - 1}{p-1} = \lim_{p\to 1^+} \frac{\tau_{\mathcal{M}}(E_N(\rho(p))^{\frac{1}{p}}) - 1}{p-1} = -H(E_N(\rho)) \qquad \blacksquare$$

例 2.4。考虑矩阵代数 $(\mathcal{M},\tau_{\mathcal{M}}) = (\mathbb{B}(H_A\otimes H_B), \mathrm{tr}_{AB})$, $(\mathcal{N},\tau_{\mathcal{N}}) = (\mathbb{B}(H_B), \mathrm{tr}_B)$, $\mathcal{N} \cong \mathbb{C}1\otimes\mathbb{B}H_B \subset \mathbb{B}(H_A\otimes H_B)$ 中正 $X_{AB}\in\mathbb{B}(H_A\otimes H_B)_+$ 的 L_1^p-范数为

$$\| X_{AB} \|_{S_1(H_B,S_p(H_A))} = \inf_{\sigma\in\mathbb{B}(H_B)} \mathrm{tr}(|(1\otimes\sigma^{-\frac{1}{2p'}})\rho_{AB}(1\otimes\sigma^{-\frac{1}{2p'}})|^p)^{\frac{1}{p}} , \tag{2.7}$$

其中，下确界取遍所有密度算子 $\sigma \in \mathbb{B}(H_B)$。这一情形由 Pisier [30] 引入。已在 [10, 定理 17]中证明，对于密度算子 ρ_{AB}，

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{1}{p-1}(\|\rho\|_{S_1(H_B,S_p(H_A))} - 1) \;=\; H(\rho_B) - H(\rho_{AB}) := -H(A|B)_\rho \,, \tag{2.8}$$

其中 $H(A|B)$ 称为条件熵。此外，

$$H_p(A|B)_\rho := \frac{p}{p-1} \log \| \rho_{AB} \|_{S_1(H_B,S_p(H_A))}$$

是 夹心型 R´enyi p-条件熵 [25]。特别地，(2.8) 意味着

$$\lim_{p\to 1^+} H(A|B)_\rho = -H(A|B)_\rho \,. \tag{2.9}$$

2.3. Kosaki L_p-范数与相对熵。给定一个可逆正算子 $\sigma \in \mathcal{M}_+$，Kosaki [22] 引入了以下加权 L_p-空间：

$$\| x \|_{\sigma,p} = \tau(|\sigma^{\frac{1}{2p}} x \sigma^{\frac{1}{2p}}|^p)^{\frac{1}{p}} \,.$$

我们将 $L_p(\mathcal{M},\sigma)$ 记作上述范数对应的空间。已知 Kosaki L_p-空间也满足复插值空间性质：对于 $0 \le \theta \le 1$，

$$L_{p_\theta}(\mathcal{M},\sigma) = [L_{p_0}(\mathcal{M},\sigma), L_{p_1}(\mathcal{M},\sigma)]_\theta \,,$$

其中 $1 \le p_0 \le q_1 \le \infty$，且 $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$。

给定密度算子 $\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$，相对于 σ 的相对熵定义为

$$D(\rho||\sigma) = \tau(\rho \log \rho - \rho \log \sigma) \,.$$

注意，上述定义与迹 τ无关，仅取决于态 ρ 和σ。它与 Kosaki L_p-范数的关系如下。

引理 2.5。给定 $\sigma \in \mathcal{M}_+$，对于 $\rho \in D(\mathcal{M})$，我们有一致收敛

$$\lim_{p\to 1} \frac{\| \sigma^{-\frac{1}{2}} \rho \sigma^{-\frac{1}{2}} \|_{\sigma,p}^p - 1}{p-1} = \lim_{p\to 1} \frac{\| \sigma^{-\frac{1}{2}} \rho \sigma^{-\frac{1}{2}} \|_{\sigma,p} - 1}{p-1} = D(\rho||\sigma)$$

若 $\rho : [1, 1+\varepsilon) \to D(\mathcal{M})$ 满足 $\lim_{p\to 1^+} \rho(p) = \rho$，则

$$\lim_{p\to 1} \frac{\| \sigma^{-\frac{1}{2}} \rho(p) \sigma^{-\frac{1}{2}} \|_{\sigma,p} - 1}{p-1} = D(\rho||\sigma)$$

证明。固定 $p' = \frac{p}{p-1}$。我们记

$$\rho_p = \sigma^{-\frac{1}{2p'}} \rho \sigma^{-\frac{1}{2p'}}, \hat{\rho}_p = \frac{\rho_p}{\tau_{\mathcal{M}}(\rho_p)} \in D(\mathcal{M}) \,.$$

由于 σ 可逆， $\rho(p)$ 关于 p 连续，且 $\rho(1) = \hat{\rho}(1) = \rho$。根据引理 2.2,

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 1^+}\frac{1}{p-1}(\|\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho\sigma^{-\frac{1}{2}}\|_{\sigma,p}^{p}-1) \qquad (2.10)\\
=&\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\rho_p\|_p^p-1}{p-1}\\
=&\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\rho_p\|_p^p-\|\rho_p\|_1}{p-1}+\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\rho_p\|_1-1}{p-1}\\
=&\lim_{p\to 1^+}\tau(\sigma^{-\frac{1}{p'}}\rho)\frac{\|\hat{\rho}_p\|_p-1}{p-1}+\lim_{p\to 1^+}\frac{\tau(\sigma^{-\frac{1}{p'}}\rho)-1}{p-1}\\
=&\tau(\rho\log\rho)-\tau(\rho\log\sigma)\\
=&D(\rho||\sigma)\,,
\end{aligned}$$

其中，上述计算中的两个极限都是一致的。第二个断言源于 $\rho\mapsto D(\rho||\sigma)$ 的一致连续性（σ 可逆且固定）。 ■

注 2.6。 $D_p(\rho||\sigma) = \frac{p}{p-1}\log\|\sigma^{-\frac{1}{2}}\rho\sigma^{-\frac{1}{2}}\|_{\sigma,p}$ 称为夹心 Rényi 相对熵 [25, 36]。上述论证表明

$$\lim_{p\to 1^+} D_p(\rho||\sigma) = D(\rho||\sigma)$$

我们还需要带权的拼接 L_p-空间。设 $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$ 为一个子代数。回顾一下，若映射 $E_N^\dagger$：$\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ 是条件期望，则称其为条件期望，当且仅当 $E_N^\dagger$ 是满足 $E_N^\dagger\circ E_N^\dagger = E_N^\dagger$ 的完全正映射。给定一个条件期望 $E_N^\dagger$， $\mathcal{N}$ 具有一个典范迹 $\tau_{\mathcal{N}} = \tau_{\mathcal{M}}|_{\mathcal{N}}$，其关于 $\tau_{\mathcal{M}}$ 的密度算子为 $\sigma_{\rm tr} = E_N(1)$，其中 E_N 是 $E_N^\dagger$ 的伴随。（$\sigma_{\rm tr}\in\mathcal{N}'$，见 [1, 15]。）我们有

$$E_N(\sigma_{\rm tr}^{\frac{1}{2}}x\sigma_{\rm tr}^{\frac{1}{2}}) = \sigma_{\rm tr}^{\frac{1}{2}}E_N^*(x)\sigma_{\rm tr}^{\frac{1}{2}}\,,$$

以及相对熵链式法则 [18],

$$D(\rho||E_N(\rho)) = D(\rho||\sigma) - D(E_N(\rho)||\sigma)\,, \qquad (2.11)$$

这对满足 $E_N(\sigma) = \sigma$ 的任意 σ 都成立。

对于 $1\le p\le\infty$、$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，我们定义范数

$$\|x\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\sigma_{\rm tr})} := \inf_{x=ayb}\|a\|_{L_{2p'}(\mathcal{N},\sigma_{\rm tr})}\|y\|_{L_p(\mathcal{M},\sigma_{\rm tr})}\|b\|_{L_{2p'}(\mathcal{N},\sigma_{\rm tr})}\,.$$

其中，下确界取遍所有满足 $a,b\in\mathcal{N}$ 的因子分解 $x=ayb$。该空间也满足复插值性质：对于 $\theta\in[0,1]$,

$$L_1^{p_\theta}(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\sigma_{\rm tr}) = [L_1^{p_0}(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\sigma_{\rm tr}), L_1^{p_1}(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\sigma_{\rm tr})]$$

其中 $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, 1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$。

Le理 2.7. 若 $\rho: [1, 1+\varepsilon) \to D(\mathcal{M})\ p \mapsto \rho(p)$ 满足 $\lim_{p\to 1^+} \rho(p) = \rho$，则 n

$$\lim_{p\to 1} \frac{\| \sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}} \rho(p) \sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\sigma_{tr})} - 1}{p-1} = D(\rho||\sigma_{tr}) - D(E_N(\rho)||\sigma_{tr}) \, .$$

证明。令 $\gamma \in \mathcal{N}_+$ 使得 $\tau_{\mathcal{M}}(\gamma\sigma_{\rm tr}) = \tau_{\mathcal{M}}(\gamma) = 1$。记

$$\rho(p,\gamma) = \rho(p)^{\frac{1}{2}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} \gamma^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} \rho(p)^{\frac{1}{2}} \, , \ \hat{\rho}(p,\gamma) = \frac{\rho(p,\gamma)}{\tau_{\mathcal{M}}(\rho(p,\gamma))}$$

根据定义

$$\begin{aligned} \| \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2}} \rho(p) \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M})} &= \inf_\gamma \| \gamma^{-\frac{1}{2p'}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2}} \rho(p) \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\frac{1}{2p'}} \|_{L_p(\mathcal{M},\sigma_{\rm tr})} \\ &= \inf_\gamma \| \gamma^{-\frac{1}{2p'}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} \rho(p) \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} \gamma^{-\frac{1}{2p'}} \|_p \\ &= \inf_\gamma \| \rho(p,\gamma) \|_p = \| \rho(p,\gamma_p) \|_p \end{aligned}$$

由于处于有限维情形，我们可以假设下确界由某个 $\gamma_p \in D(\mathcal{N})$ 取到。与引理 2.3 的证明类似，我们可以假设 $\inf_{e \text{ 投影} \tau_{\mathcal{M}}(e) \ge 1}$。于是，对于所有满足 $\tau_{\mathcal{M}}(\gamma\sigma_{\rm tr}) = \tau_{\mathcal{M}}(\gamma) = 1$ 的$\gamma \in \mathcal{N}_+$，都有 $\sigma_{\rm tr}^{-1}\gamma^{-1} \ge 1, \gamma^{-1} \ge 1$ ($\sigma_{\rm tr}$ 且 σ可交换)。于是

$$\rho(p) \le \rho(p)^{\frac{1}{2}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{p'}} \rho(p)^{\frac{1}{2}} \le \rho(p,\gamma_p) \, , \ \forall\, p > 1 \, .$$

另一方面,

$$\begin{aligned} 1 = \tau(\rho(p)) \le \tau(\rho(p,\gamma_p)) &\le \tau_{\mathcal{M}}(1)^{1-\frac{1}{p}} \| \rho(p,\gamma_p) \|_p \\ \le \tau_{\mathcal{M}}(1)^{1-\frac{1}{p}} \| \rho(p, \frac{1}{\tau_{\mathcal{M}}(1)}) \|_p &\le \tau_{\mathcal{M}}(1)^{2-\frac{2}{p}} \| \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} \rho(p) \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} \|_p \to 1 \end{aligned}$$

Then

$$\lim_{p\to 1^+} \rho(p,\gamma_p) = \lim_{p\to 1^+} \hat{\rho}(p,\gamma_p) = \lim_{p\to 1^+} \rho^{\frac{1}{2}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{p'}} \rho^{\frac{1}{2}} = \rho$$

在 L_1范数中。这意味着

$$\begin{aligned} \| \rho^{\frac{1}{2}}(p) \gamma_p^{-\frac{1}{2p'}} - \rho^{1/2}(p) \|_2 &\le \| \sigma_{\rm tr}^{\frac{1}{2p'}} \|_\infty \| \rho^{\frac{1}{2}}(p) \gamma_p^{-\frac{1}{2p'}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} - \rho^{1/2}(p) \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{2p'}} \|_2 \\ &\le \| \sigma_{\rm tr}^{\frac{1}{2p'}} \|_\infty \, \tau(\rho(p) \gamma_p^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{p'}} - 2\rho(p) \gamma_p^{-\frac{1}{2p'}} \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{p'}} + \rho(p) \sigma_{\rm tr}^{-\frac{1}{p'}}) \to 0 \end{aligned}$$

因此，$\lim_{p\to 1^+} \gamma_p^{\frac{1}{2p'}} \rho(p) \gamma_p^{\frac{1}{2p'}} = \rho(p)$。记作

$$\rho_p(\gamma) = \gamma^{-\frac{1}{2p'}} \rho(\rho) \gamma^{-\frac{1}{2p'}} \, , \ \tilde{\rho}_p(\gamma) = \frac{\rho_p(\gamma)}{\tau_{\mathcal{M}}(\rho_p(\gamma))} \, .$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 1^+}\frac{1}{p-1}(\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\rho(p)\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\sigma_{\mathrm{tr}})}-1)\\
=&\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\rho_p(\gamma_p)\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{p,\sigma_{\mathrm{tr}}}-1}{p-1}\\
=&\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\rho_p(\gamma_p)\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{p}-\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\rho_p(\gamma_p)\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{1,\sigma_{\mathrm{tr}}}}{p-1}+\frac{\tau_{\mathcal{M}}(\rho_p(\gamma_p))-1}{p-1}\\
\geq&\lim_{p\to 1^+}\tau_{\mathcal{M}}(\rho_p(\gamma_p))\frac{\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\rho_p(\gamma_p)\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{p}-1}{p-1}+\lim_{p\to 1^+}\inf_{\gamma}\frac{\tau_{\mathcal{M}}(\gamma^{-\frac{1}{p'}}\rho(p))-1}{p-1}\,.
\end{aligned}\tag{2.12}$$

此处，第一个极限根据引理 2.5 收敛到 $D(\rho||\sigma_{\mathrm{tr}})$。第二个极限中的下确界可以计算

$$\begin{aligned}
\inf_{\gamma}\tau_{\mathcal{M}}(\gamma^{-\frac{1}{p'}}\rho(p))=&\inf_{\gamma}\tau_{\mathcal{M}}(\gamma^{-\frac{1}{p'}}E_N(\rho(p)))\\
=&\inf_{\gamma}\tau_{\mathcal{M}}(\gamma^{-\frac{1}{p'}}\sigma_{tr}^{\frac{1}{2}}E_N^*(\sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}}\rho(p)\sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}}))\sigma_{tr}^{\frac{1}{2}})\\
=&\inf_{\gamma}\sigma_{tr}(\gamma^{-\frac{1}{p'}}E_N^*(\sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}}\rho(p)\sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}}))=\|\sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}}E_N(\rho(p))\sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}}\|_{\frac{p}{2p-1},\sigma_{tr}}
\end{aligned}$$

注意，σ_{tr}是 $\mathcal{N}$上的迹，且 $\lim_{p\to 1^+}E_N(\rho(p))=E_N(\rho)$。然后根据引理 2.5

$$\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}E_N(\rho(p))\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{\frac{p}{2p-1},\sigma_{\mathrm{tr}}}-1}{p-1}=-\sigma_{\mathrm{tr}}(E_N(\rho)\log E_N(\rho))=-D(E_N(\rho)||\sigma_{\mathrm{tr}})\,,$$

这里我们利用了 $D(\rho||\sigma)$与迹无关这一事实。对于另一个方向，我们记

$$\rho_N(p)=E_N(\rho(p))\text{ and take }\hat{\gamma}_p=\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}E_N(\rho(p))\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}},\rho_p=\frac{\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}}\rho(p)\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}}}{\tau_{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}}\rho(p)\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}})},$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 1^+}\frac{1}{p-1}(\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\rho(p)\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{L_1^p(\mathcal{N}\subset\mathcal{M},\sigma_{\mathrm{tr}})}-1)\\
\leq&\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}}\rho(p)\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}}\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{p,\sigma_{\mathrm{tr}}}-1}{p-1}\\
=&\lim_{p\to 1^+}\tau_{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}}\rho(p)\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}})\frac{\|\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\rho_p\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}\|_{p,\sigma_{\mathrm{tr}}}-1}{p-1}+\lim_{p\to 1^+}\frac{\tau_{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}}\rho(p))-1}{p-1}\\
=&D(\rho||\sigma_{\mathrm{tr}})-D(E_N(\rho)||\sigma_{\mathrm{tr}})
\end{aligned}\tag{2.13}$$

这里，第一个极限由引理 2.5 得出，并且

$$\|\rho^{\frac{1}{2}}(p)\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}}-\rho^{\frac{1}{2}}(p)\|_2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \| \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2p'}} \|_\infty \| \rho^{\frac{1}{2}}(p) \hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2p'}} - \rho^{\frac{1}{2}}(p) \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2p'}} \|_2 \\
&\leq \| \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2p'}} \|_\infty \, \tau(\rho(p) \hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{p'}} - 2\rho(p) \hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{2p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{p'}} + \rho(p) \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{p'}}) \\
&= \| \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2p'}} \|_\infty \, \tau(\rho(p) E_N(\rho(p))^{-\frac{1}{p'}} - 2\rho(p) E_N(\rho(p))^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2p'}} + \rho(p) \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{p'}}) \to 0,
\end{aligned}$$

其中我们利用了这样一个事实：对于某个有限的 C， $\rho(p) \leq C E_N(\rho(p))$（见 [15]）。对于第二个极限，我们有

$$\begin{aligned}
\tau(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}} \rho) =& \tau(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}} (\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}} \rho(p) \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}) \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}}) \\
=& \tau(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}} E_N(\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}} \rho(p) \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}) \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}}) \\
=& \tau(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}} E_N(\sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}} \rho(p) \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}}) \sigma^{\frac{1}{2}}) \\
=& \tau(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}} \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}} \hat{\gamma}_p \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}}) \\
=& \sigma_{\mathrm{tr}}(\hat{\gamma}_p^{\frac{1}{p}}) = \| \hat{\gamma}_p \|_{\frac{1}{p}, \sigma_{\mathrm{tr}}}^{1/p},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{p \to 1^+} \frac{\tau_{\mathcal{M}}(\hat{\gamma}_p^{-\frac{1}{p'}} \rho(p)) - 1}{p-1} &= \lim_{p \to 1^+} \frac{\| \sigma_{\mathrm{tr}}^{\frac{1}{2}} E_N(\rho(p)) \sigma_{\mathrm{tr}}^{-\frac{1}{2}} \|_{\frac{1}{p}, \sigma_{\mathrm{tr}}}^{\frac{1}{p}} - 1}{p-1} \\
&= - \sigma_{\mathrm{tr}}(\hat{\gamma}_p \log \hat{\gamma}_p) = -D(E_N(\rho) || \sigma_{\mathrm{tr}})
\end{aligned}$$

其中我们再次使用了引理 2.5，并将 $E_N(\rho(p)) \to E_N(\rho)$ 视为 $p \to 1$。 ■

3. Generalized Strong Sub-additivity of quantum channels

设 $(\mathcal{M}, \tau_{\mathcal{M}})$ 和 $(\mathcal{N}, \tau_{\mathcal{N}})$ 是两个有限维冯·诺伊曼代数。若线性映射 $\Phi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 满足 $\Phi(\mathcal{M}_+) \subset \mathcal{N}_+$，则称其为正映射；若对任意矩阵代数 $\mathbb{M}_n$， $\Phi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{M}_n}$ 都是正映射，则称其为完全正映射；若对任意 $\rho \in \mathcal{M}$， $\tau_{\mathcal{N}}(\Phi(\rho)) = \tau_{\mathcal{M}}(\rho)$，则称 Φ 为保迹映射。完全正保迹（CPTP）映射称为量子信道，它将密度算子映射为密度算子。伴随映射 $\Phi^\dagger: \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 是完全正且保单位的，即 $\Phi^\dagger(1) = 1$ （UCP）。一种特殊情形是，当 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 是子代数时，嵌入映射 $\iota_{\mathcal{N}}: \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ 显然是 UCP 映射。其伴随映射$E_{\mathcal{N}}$: $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$是量子信道。例如， $\mathbb{B}(H_B) \cong \mathbb{C}1 \otimes \mathbb{B}(H_B) \subset \mathbb{B}(H_B \otimes H_A)$，偏迹映射 $\mathrm{tr}_A = \mathrm{tr} \otimes \mathrm{id}_B: \mathbb{B}(H_B \otimes H_A) \to \mathbb{B}(H_B)$ 是 CPTP 映射。

定理 3.1. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{R}$ 是有限维冯·诺伊曼代数，其迹分别记为 $\tau_{\mathcal{A}}$、$\tau_{\mathcal{B}}$、$\tau_{\mathcal{M}}$ 和 $\tau_{\mathcal{R}}$。假设 $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ 是一个子代数，并将 E_R 记为嵌入映射的伴随映射。给定两个量子信道映射

Φ_A： 对于任意密度算子 $\rho\in\mathcal{M}$，我们有 $\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ 和 Φ_B： $\mathcal{M}\to\mathcal{B}$

$$H(\Phi_A(\rho))+H(\Phi_B(\rho))\geq H(\rho)+H(E_R\circ\Phi_A(\rho))+\log\frac{1}{c}\,, \tag{3.1}$$

其中常数 c 为

$$c=\sup\{\tau_{\mathcal{M}}(\Phi_A^\dagger(a)\Phi_B^\dagger(b))\mid a\in\mathcal{A}_+, E_R(a)=1\,, b\in D(\mathcal{B})\}\,,$$

证明。固定一个密度算子 $b\in D(\mathcal{B})$。对于 $0\leq\Re(z)\leq 1$，我们定义映射 $T_z:\mathcal{M}\to\mathcal{A}$ 的解析族

$$T_z(\rho)=\Phi_A\Big(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1-z}{2}}\rho\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1-z}{2}}\Big)\,.$$

对于 $z=it$，由对偶性 $L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})^*=L_\infty^1(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})$

$$\begin{aligned}
\|\,T_{it}:L_\infty(\mathcal{M})\to L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})\,\| &= \sup_{\|\,\rho\,\|_\infty=1}\sup_{\|\,a\,\|_{L_\infty^1(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})}=1}|\tau_{\mathcal{M}}\Big(a\Phi_A\big(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1-it}{2}}\rho\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1-it}{2}}\big)\Big)|\\
&= \sup_{\|\,\rho\,\|_\infty=1}\sup_{\|\,a\,\|_{L_\infty^1}=1}|\tau_M\Big(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}\rho\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}\Phi_A^\dagger(a)\Big)|\\
&= \sup_{\|\,a\,\|_{L_\infty^1}=1}\|\,\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}\Phi_A^\dagger(a)\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}\,\|_{L_1(\mathcal{M})}\\
&= \sup_{a\geq0,\ E_R(a)\leq1}\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}\Phi_A^\dagger(a)\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}\Big) \qquad (3.2)\\
&= \sup_{a\geq0,\ E_R(a)\leq1}\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_B^\dagger(b)\Phi_A^\dagger(a)\Big):=c(b)\,.
\end{aligned}$$

此处等式 (3.2) 用到了以下事实:

$$S:L_\infty^1(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})\to L_1(\mathcal{M})\,,\ a\mapsto\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}\Phi_A^\dagger(a)\Phi_B^\dagger(b)^{\frac12}$$

是完全正的，则映射范数可由正元素取得 [10, 定理 13]。根据定义， $c=$上确界 $c(b)$。对于 $z=1+it$， $b\in D(\mathcal{B})$

$$\begin{aligned}
\|\,T_{1+it}:L_1(\mathcal{M})\to L_1(\mathcal{A})\,\| &= \sup_{\|\,\rho\,\|_1=1}\|\,\Phi_A(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{-it}{2}}\rho\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{-it}{2}})\,\|_{L_1(\mathcal{A})}\\
&\leq \sup_{\|\,\rho\,\|_1=1}\|\,\Phi_A(\rho)\,\|_{L_1(\mathcal{A})}\\
&=\|\,\Phi_A:L_1(\mathcal{M})\to L_1(\mathcal{A})\,\|=1\,,
\end{aligned}$$

因为 Φ_A 是正且保迹的。根据插值（见 [3]），我们知道对任意$b\in D(\mathcal{B})$,

$$\|\,T_p:L_p(\mathcal{M})\to L_p(\mathcal{A})\,\|\leq c(b)^{1-\frac1p}\,.$$

那么对于任意的 $\rho\in D(\mathcal{M})$

$$\|\,\Phi_A(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1}{2p'}}\rho\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1}{2p'}})\,\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})}\leq\|\,\rho\,\|_{L_p(\mathcal{M})}\ c(b)^{1-\frac1p}\,. \tag{3.3}$$

记

$$\omega(p) = \Phi_A\Big(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1}{2p'}}\rho\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1}{2p'}}\Big)\,,\ \hat{\omega}(p) = \frac{\omega(p)}{\tau_A(\omega(p))}$$

因此，我们有 $\omega(1) = \hat{\omega}(1) = \Phi_A(\rho)$，并且

$$\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\omega(p)\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})}-1}{p-1} \le \lim_{p\to 1^+}\frac{\|\rho\|_{L_p(\mathcal{M})}\,c(b)^{1-\frac{1}{p}}-1}{p-1}\,. \tag{3.4}$$

由于 Φ_A 是保迹的，$\tau_{\mathcal{M}}(\rho) = \tau_{\mathcal{A}}(\Phi_A(\rho)) = 1$。我们对 (3.4) 的右侧应用引理 2.2,

$$\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\rho\|_{L_p(\mathcal{M})}\,c(b)^{1-\frac{1}{p}}-1}{p-1} \tag{3.5}$$

$$= \lim_{p\to 1^+}\|\rho\|_{L_p(\mathcal{M})}\,\frac{(c(b)^{1-\frac{1}{p}}-1)}{p-1} + \lim_{p\to 1^+}\frac{\|\rho\|_{L_p(\mathcal{M})}-1}{p-1} = \ln c(b) - H(\rho)\,. \tag{3.6}$$

对于 (3.4) 的左侧,

$$\begin{aligned}
&\lim_{p\to 1^+}\frac{\|\omega(p)\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})}-1}{p-1}\\
&= \lim_{p\to 1^+}\frac{\tau_A(\omega(p))\,\|\hat{\omega}(p)\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})}-1}{p-1}\\
&= \lim_{p\to 1^+}\tau_A(\omega(p))\frac{\|\hat{\omega}(p)\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})}-1}{p-1} + \lim_{p\to 1^+}\frac{\tau_A(\omega(p))-1}{p-1}
\end{aligned}$$

根据引理 2.3，第一项为

$$\lim_{p\to 1^+}\tau_A(\omega(p))\frac{\|\hat{\omega}(p)\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{A})}-1}{p-1} = -H(\Phi_A(\rho)) + H(E_R\circ\Phi_A(\rho))\,.$$

对于第二项，由于 Φ_A 同样是保迹的，我们有

$$\tau_A\Big(\Phi_A\big(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1}{2p'}}\rho\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1}{2p'}}\big)\Big) = \tau_{\mathcal{M}}(\Phi_B^\dagger(b)^{\frac{1}{p'}}\rho) \ge \tau_{\mathcal{M}}(\Phi_B^\dagger(b^{\frac{1}{p'}})\rho) = \tau_{\mathcal{B}}(b^{\frac{1}{p'}}\Phi_B(\rho))\,. \tag{3.7}$$

这里我们使用 $f(x) = x^{\frac{1}{p'}}$ 的算子凸性。取 $b = \Phi_B(\rho)$,

$$\lim_{p\to 1^+}\frac{\tau_A(\omega(p))-1}{p-1} \ge \lim_{p\to 1^+}\frac{\tau_{\mathcal{B}}(\Phi_B(\rho)^{2-\frac{1}{p}})-1}{p-1} = -H(\Phi_B(\rho))\,. \tag{3.8}$$

综合以上所有步骤，我们得到

$$\log c - H(\rho) \ge -H(\Phi_B(\rho)) + H(E_R\circ\Phi_A(\rho)) - H(\Phi_A(\rho))\,. \qquad \blacksquare$$

注 3.2. 实际上，我们证明了

$$H(\Phi_A(\rho)) + H(\Phi_B(\rho)) \geq H(\rho) + H(E_{\mathcal{R}} \circ \Phi_A(\rho)) + \log \frac{1}{c(\rho)} \,, \tag{3.9}$$

其中 $c(\rho)$ 是一个依赖于 ρ 的局部常数

$$\begin{aligned} c(\rho) =& \sup\{\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_B^\dagger(\Phi_B(\rho))\Phi_A^\dagger(a)\Big) \mid a \in \mathcal{A}_+ \,, E_R(a) \leq 1\} \\ =& \| \Phi_A \circ \Phi_B^\dagger \circ \Phi_B(\rho) \|_{L_1^\infty(\mathcal{A}\subset\mathcal{R})} \end{aligned}$$

而上述定理中的全局常数 c 是

$$c = \| \Phi_A \circ \Phi_B^\dagger : L_1(\mathcal{B}) \to L_1^\infty(\mathcal{A} \subset \mathcal{R}) \| \geq c(\rho) \,.$$

例 3.3。考虑一个简单情形： $\mathcal{R} = \mathbb{C}1$ 是平凡子代数，定理 3.1 变为

$$H(\Phi_A(\rho)) + H(\Phi_B(\rho)) \geq H(\rho) + \log \frac{1}{c}$$

其中常数

$$c = \sup_{a \in D(\mathcal{A}) \,,\, b \in D(\mathcal{B})} \tau_{\mathcal{M}}(\Phi_A^\dagger(a)\Phi_B^\dagger(b)) \,.$$

这个常数是 Frank-Lieb 不确定性关系中两个测量最大重叠的非交换类比 [12]。这一情形也可以由 Berta、Sutter 和 Walter 的量子 Brascamp-Lieb 对偶 [5] 推出。事实上，他们得到了一个更强的常数

$$c_{BSW} = \sup_{a,b} \tau_{\mathcal{M}}\Big(\exp\big(\ln \Phi_A^\dagger(a) + \ln \Phi_B^\dagger(b)\big)\Big) \,.$$

根据 Golden-Thompson 不等式，满足 $c_{BSW} \leq c$

另一个特殊情形是， $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$、 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 是带有诱导迹$\tau_{\mathcal{A}} = \tau|_{\mathcal{A}}$、 $\tau_{\mathcal{B}} = \tau|_{\mathcal{B}}$的子代数，且 $\tau_{\mathcal{R}} = \tau|_{\mathcal{R}}$。那么 E_A、 E_B和 E_R是保迹条件期望。Petz [26] 证明，若 E_A（$\mathcal{B}$） $\subset \mathcal{R}$ ，则

$$H(E_A(\rho)) + H(E_B(\rho)) \geq H(\rho) + H(E_{\mathcal{R}}(\rho)) \,. \tag{3.10}$$

定理 3.1 给出了上述代数型 SSA 不等式的推广 ty

推论 3.4。设 $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$、 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 是带有诱导迹的有限维冯·诺依曼子代数。那么对于任意 $\rho \in D$（$\mathcal{M}$），

$$H(E_A(\rho)) + H(E_B(\rho)) \geq H(\rho) + H(E_{\mathcal{R}}(\rho)) + \log \frac{1}{c} \,, \tag{3.11}$$

其中常数 c 为

$$c = \sup\{\tau_{\mathcal{M}}(ab) \mid a \in \mathcal{A}_+, b \in \mathcal{B}_+ \,, E_{\mathcal{R}}(a) = 1 \,, \tau_{\mathcal{B}}(b) = 1\} \,,$$

特别地，常数 $c = 1$ 当且仅当 $E_A E_B = E_A E_B = E_R$。

证明。该不等式已在定理 3.1 中证明。这里我们讨论关于 $c = 1$ 的等价性。不失一般性，假设 $\tau(1) = 1$。若 $c = 1$，则对于任意 $b \in D(\mathcal{B})$，$\| E_A(b) \|_{L_1^\infty(\mathcal{R} \subset \mathcal{A})} \leq 1$。这意味着存在 $\sigma \in D(\mathcal{R})$，使得 $E_A(b) \leq \sigma$。注意到 $\tau(E_A(b)) = \tau(\sigma) = 1$。因此，$E_A(b) = \sigma \in \mathcal{R}$。于是，我们有 $E_A(\mathcal{B}) = \mathcal{R}$，因为$\mathcal{R} = E_A(\mathcal{R}) \subset E_A(\mathcal{B})$。现在我们证明 $E_B(\mathcal{A}) \subset \mathcal{R}$。根据 c 的定义，对于任意$a \in \mathcal{A}$，

$$\tau(ab) = \tau(aE_A(b)) = \tau(E_R(a)E_A(b)) = \tau(E_R(a)b)$$

那么，对于任意 $b \in \mathcal{B}$, $\tau((a - E_R(a))b) = 0$。这意味着 $E_B(a) = E_B \circ E_R(a) = E_R(a) \in \mathcal{R}$。因此，$E_B(\mathcal{A}) = \mathcal{R}$。最后，由于保迹条件期望的唯一性，我们得到了 $E_A E_B = E_R = E_A E_B$。

■

例 3.5。回顾 Maassen-Uffink 不确定性关系 (1.4)：设 H 是一个 d 维希尔伯特空间，$\mathcal{X} = \{|x_i\rangle\}_{i=1}^d$ 和 $\{|z_j\rangle\}_{j=1}^d$ 是希尔伯特空间上的两组标准正交基。考虑 $\mathcal{M} = \mathbb{B}(H)$，且 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Z}$分别是由这两组基生成的交换子代数。测量给出如下条件期望

$$E_X(\rho) = \sum_{i=1}^d \langle x_i|\rho|x_i\rangle |x_i\rangle\langle x_i| \ , \ E_Z(\rho) = \sum_{j=1}^d \langle z_i|\rho|z_i\rangle |z_i\rangle\langle z_i|$$

Berta 等人 [4]证明了

$$H(E_X(\rho)) + H(E_Z(\rho)) \geq H(\rho) + \log \frac{1}{c} \, .$$

其中 $c = \max_{i,j} |\langle x_i|z_j\rangle|^2 = \max_{i,j} \mathrm{tr}(E_X^\dagger(e_i)E_Z^\dagger(e_j))$。最小的 c可以是 $\frac{1}{d}$，此时 $|\langle x_i|z_j\rangle|^2 = \frac{1}{d}$，$\forall \, 1 \leq i, j \leq d$，其中 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Z}$称为互无偏基。特别地，它们满足交换方形条件

$$E_X E_Z = E_Z E_X = E_{\mathbb{C}} \, .$$

例 3.6. 设 $\mathcal{M} = \mathbb{M}_{d^2}$，$\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \cong \mathbb{M}_d$ 是 $\mathcal{M} = \mathbb{M}_{d^2}$ 的两个子代数。若 $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$，则有次可加性

$$H(\rho_A) + H(\rho_B) \geq H(\rho_{AB}) \, ,$$

其中 $\rho_A = E_A(\rho)$ $\rho_B = E_B(\rho)$。一般而言，推论 3.4 表明

$$H(\rho_A) + H(\rho_B) \geq H(\rho) + \log \frac{1}{c} \, , \ c = \sup_{a \in D(\mathcal{A}) \, , \, b \in D(\mathcal{B})} \mathrm{tr}(ab) \, .$$

此外，$c = 1$ 当且仅当 $\mathcal{M} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$。这回答了 Petz 在 [28] 中提出的一个问题。

4. Uncertainty relation for quantum channels

本节中，我们应用定理 3.1 推导存在量子存储器时的熵不确定关系。为此，我们需要讨论非交换 L_p-空间的算子空间结构。为简便起见，我们只考虑配备矩阵迹 tr 的矩阵代数 $\mathbb{B}(H) \cong \mathbb{M}_n$，其 L_p 空间为 Schatten p 类 $S_p(H) := S_p^n$。给定一个算子空间 E，我们定义如下范数

$$\| x \|_{S_p^n(E)} = \inf_{x=a\cdot y\cdot b} \| a \|_{S_{2p}^n} \| y \|_{\mathbb{M}_n(E)} \| b \|_{S_{2p}^n} \, , \; x \in \mathbb{M}_n(E) \, ,$$

其中，下确界取遍所有因子分解 $x = (x_{ij}) = (\sum_{k,\, l} a_{ik} y_{kl} b_{lj})_{ij}, y \in \mathbb{M}_n(E)$ $a, b \in \mathbb{M}_n$。这是 Pisier [30]引入的向量值非交换 L_p-范数。根据[30, 引理 1。7], 完全有界范数可以通过向量值非交换 L_p-空间来刻画。也就是说，对于任意 $1 \leq p \leq \infty$,

$$\| T : E \to F \|_{cb} = \sup_n \| \mathrm{id}_n \otimes T : S_p^n(E) \to S_p^n(F) \| \; . \tag{4.1}$$

这里 $S_\infty^n(E) := \mathbb{M}_n(E)$ 是 E的标准算子空间结构。当 E 为 $L_q(\mathcal{M})$ 时，这是融合 L_p-空间的一个特例,

$$S_q(K, S_p(H)) := L_q^p(\mathbb{B}(K) \subset \mathbb{B}(K) \otimes \mathbb{B}(H)) \, .$$

给定张量积希尔伯特空间$H_M \otimes H_C$上的密度算子 $\rho_{MC} \in \mathbb{B}(H_M \otimes H_C)$，关于 C 系统的条件熵定义为

$$H(M|C)_\rho = H(\rho_{MC}) - H(\rho_C) \, ,$$

其中， $H(\cdot)$ 是矩阵迹下的冯·诺依曼熵， $\rho_C = \mathrm{tr}_M \otimes \mathrm{id}_C(\rho_{MC})$ 是 H_C 上的约化密度算子。

定理 4.1. 设 H_A、 H_B 和 H_M 为有限维希尔伯特空间。设 $\Phi_A : \mathbb{B}(H_M) \to \mathbb{B}(H_A)$ 和 $\Phi_B : \mathbb{B}(H_M) \to \mathbb{B}(H_B)$ 为两个量子信道。则对于任意希尔伯特空间 H_C 以及 $H_M \otimes H_C$ 上的任意联合态 ρ_{MC}，

$$H(A|C)_{\Phi_A(\rho)} + H(B|C)_{\Phi_B(\rho)} \geq H(M|C)_\rho + \log \frac{1}{c} \, . \tag{4.2}$$

其中 c 是完全有界范数

$$c = \| \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger : S_1(H_A) \to \mathbb{B}(H_B) \|_{cb} \, , \tag{4.3}$$

证明。注意到 (4.2) 等价于

$$H(\Phi_A(\rho)) + H(\Phi_B(\rho)) \geq H(\rho_{MC}) + H(\rho_C) + \log \frac{1}{c}$$

在定理 3.1 中取 $\mathcal{M} = \mathbb{B}(H_M \otimes H_C)$ $\mathcal{A} = \mathbb{B}(H_A \otimes H_C)$ $\mathcal{B} = \mathbb{B}(H_B \otimes H_C)$ 和 $\mathcal{R} = \mathbb{B}(H_C)$，可得常数为 c 时的 (4.2)

$$c = \| \mathrm{id}_C \otimes \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger : S_\infty(H_C, S_1(H_A)) \to S_\infty(H_C \otimes H_B) \|$$

对所有维数取 H_C 的上确界，即可得到完全有界范数。 ■

注 4.2. 已知 [11, 7] ,

$$\| \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger : S_1(H_A) \to \mathbb{B}(H_B) \|_{cb} = \| C_{\Phi_B \circ \Phi_A^\dagger} \|_{\mathbb{B}(H_A \otimes H_B)} ,$$

其中

$$C_{\Phi_B \circ \Phi_A^\dagger} = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger(e_{ij}) \in \mathbb{B}(H_A \otimes H_B)$$

是 $\Phi_B \circ \Phi_A^\dagger$ 的 Choi 矩阵。事实上，根据注 3.2，我们知道常数 c 可以改进为依赖于状态的常数

$$c(\rho) = \| \mathrm{id}_C \otimes \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger \circ \Phi_A(\rho) \|_{S_1(H_C, \mathbb{B}(H_B))} .$$

例 4.3. 我们的结果得到了 Frank 和 Lieb 的不确定性关系 [12]。给定两个正算子值测量 $\{E_x\}$ 和 $\{F_z\}$，定义对应于该测量的量子到经典信道

$$\Phi_A(\rho) = \sum_x \mathrm{tr}(\rho E_x) |x\rangle\langle x| \, , \Phi_B(\rho) = \sum_z \mathrm{tr}(\rho F_z) |z\rangle\langle z|,$$

Then

$$\Phi_B \circ \Phi_A^\dagger(\rho) = \sum_x \mathrm{tr}(E_x F_z) \langle x|\rho|x\rangle |z\rangle\langle z| ,$$

是一个经典信道 $N(z|x) = \mathrm{tr}(E_x F_z)$，它从交换系统 $\mathbb{C}^X$ 到 $\mathbb{C}^Z$ ，其转移矩阵为 $N(z|x) = \mathrm{tr}(E_x F_z)$。根据 Smith 引理 [34]

$$c = \| \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger : \ell_1(X) \to \ell_\infty(Z) \|_{cb} = \| \Phi_B \circ \Phi_A^\dagger : \ell_1(X) \to \ell_\infty(Z) \| = \max_{x,z} \mathrm{tr}(E_x F_z) ,$$

它恢复了测量的最大重叠。

例 4.4。考虑 $\mathcal{M} = \mathbb{B}(H_A \otimes H_B)$、 $\mathcal{A} = \mathbb{B}(H_A)$ 和 $\mathcal{B} = \mathbb{B}(H_B)$，其偏迹信道 tr_A: $\mathbb{B}(H_A \otimes H_B) \to \mathbb{B}(H_A)$ 和 tr_B: $\mathbb{B}(H_A \otimes H_B) \to \mathbb{B}(H_B)$。有映射

$$\mathrm{tr}_B \circ (\mathrm{tr}_A)^\dagger(X) = \mathrm{tr}_B(X \otimes I_B) = I_B ,$$

其 Choi 矩阵 矩阵为 $\chi = I_A \otimes I_B$。因此， $c = 1$ ，这就得到了强次可加性

$$H(A|C) + H(B|C) \geq H(AB|C) .$$

受上述示例的启发，我们研究存在量子存储器时的最小不确定性。设 $\Phi_A\colon \mathbb{B}(H_M) \to \mathbb{B}(H_A)$ 和 $\Phi_B\colon \mathbb{B}(H_M) \to \mathbb{B}(H_B)$ 为两个量子信道。对于量子态 $\rho_{MC} \in \mathbb{B}(H_M \otimes H_C)$，我们定义广义条件互信息

$$I(\Phi_A, \Phi_B|C)_\rho := H(A|C)_{\Phi_A\otimes \mathrm{id}_C(\rho)} + H(B|C)_{\Phi_B\otimes \mathrm{id}_C(\rho)} - H(M|C)_\rho \,. \tag{4.4}$$

以及最小不确定性 Φ_A 和 Φ_B，

$$I(\Phi_A, \Phi_B|C) := \inf_{\rho_{MC}} I(\Phi_A, \Phi_B|C)_\rho \,, \tag{4.5}$$

$$I^{sq}(\Phi_A, \Phi_B) := \inf_{H_C} I(\Phi_A, \Phi_B|C)_\rho \,, \tag{4.6}$$

其中，下确界取遍所有密度算子 $\rho_{MC} \in \mathbb{B}(H_M \otimes H_C)$，第二个下确界则取遍所有维数的希尔伯特空间 H_C。符号 I^{sq} 的灵感来自文献 [8]中引入的压缩纠缠。考虑如下的 Φ_A 的斯坦斯普林扩张，

$$\Phi_A(\rho) = \mathrm{id}_A \otimes \mathrm{tr}_E(V\rho V^*)$$

其中 H_E 是一个希尔伯特空间，且 $V\colon H_M \to H_A \otimes H_E$ 是满足 $V^*V = 1$的等距映射。作为一项技术工具，我们引入映射

$$\hat{\Phi}_B : \mathbb{B}(H_A \otimes H_E) \to \mathbb{B}(H_B) \,,\ \hat{\Phi}_B(\rho_{AE}) = \Phi_B(V^*\rho_{AE}V) \,.$$

$\hat{}\Phi_B$ 是一个完全正的迹非增映射；将等距映射 V视为子空间嵌入后，可以把它看作 Φ_B的扩张。令 $e = VV^*$ 为到 V的值域上的投影。显然，$\mathrm{tr}(\Phi(\rho)) = \mathrm{tr}(\rho)$ 当且仅当 ρ 的支撑包含于 $\hat{}\ e$，即 $e\rho e = \rho$。这意味着，Φ_B 在 $\mathbb{B}(e(H_A\otimes H_E))$ 上的限制恰为 Φ_B，因此 $\hat{}$ 是保迹的。我们将在下一个引理中看到，映射 Φ_B 决定了 $I(\Phi_A, \Phi_B|C)$和$I^{sq}(\Phi_A, \Phi_B)$。

引理 4.5. 设 $1 \le p \le \infty$。设 H_C 是一个希尔伯特空间。那么

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{\|id_C \otimes \hat{\Phi}_B : S_1(H_A \otimes H_C, S_p(H_E)) \to S_1(H_C, S_p(H_B))\| - 1}{p-1} = -I(\Phi_A, \Phi_B|C)$$

$$\lim_{p\to 1^+} \frac{\|\hat{\Phi}_B : S_1(H_A, S_p(H_E)) \to S_p(H_B)\|_{cb} - 1}{p-1} = -I^{sq}(\Phi_A, \Phi_B)$$

证明。我们在 $[1,\infty] \times \mathbb{B}(H_{CAE})$ 上定义两个函数，

$$f(p,\rho) = \| \mathrm{id}_C \otimes \hat{\Phi}_B(\rho) \|_{S_1(H_C, S_p(H_B))} \,,$$
$$g(p,\rho) = \| \rho \|_{S_1(H_A\otimes H_C, S_p(H_E))} \,.$$

记作

$$h(p) = \| \mathrm{id}_C \otimes \hat{\Phi}_B : S_1(H_A \otimes H_C, S_p(H_E)) \to S_1(H_C, S_p(H_B)) \| \,.$$

ˆ由于 Φ_B 是完全正的，根据 [10, 定理 12]，只需考察其在密度算子上的范数，

$$h(p) = \sup_{\rho} \frac{f(p,\rho)}{g(p,\rho)} .$$

设 $p_n \to 1$ 是一个满足以下条件的序列

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(p_n)-1}{p_n-1} = \limsup_{p\to 1^+} \frac{h(p)-1}{p-1} .$$

假设 ρ_n 是一个满足以下条件的序列：对每个 p_n，都能达到 $h(p_n)$。不失一般性，我们可以假设 $\rho_n \to \rho$ 收敛。于是

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to 1^+} \frac{h(p)-1}{p-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(p_n)-1}{p_n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(p_n,\rho_n)-1}{p_n-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(p_n,\rho_n)} \Big(\frac{f(p_n,\rho_n)-1}{p-1} - \frac{g(p_n,\rho_n)-1}{p-1} \Big) .\end{aligned}$$

注意，我们应当有

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n,\rho_n) = f(1,\rho) = 1,$$

否则上述极限等于 $-\infty$。注意，由复插值，$h(p) \le h(1)^{\frac{1}{p}} h(\infty)^{(1-\frac{1}{p})} = h(\infty)^{(1-\frac{1}{p})}$并且

$$\limsup_{p\to 1^+} \frac{h(p)-1}{p-1} \le \limsup_{p\to 1^+} \frac{h(\infty)^{(1-\frac{1}{p})}-1}{p-1} = \ln h(\infty) < \infty ,$$

ˆ 这导致矛盾。因此我们有 $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_C \otimes \Phi_B(\rho_1)) = 1$，这意味着 ρ 支撑在 $eH_{AE} \cong H_M$ 上。由引理 2.3

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{f(p_n,\rho_{p_n})-1}{p_n-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\| \mathrm{id}_C \otimes \hat{\Phi}_B(\rho_n) \|_{S_1(H_C, S_{p_n}(H_B))} - 1}{p_n-1} = H(\mathrm{id}_C \otimes \hat{\Phi}_B(\rho)) - H(\rho_C) \\ \lim_{n\to\infty} \frac{g(p_n,\rho_{p_n})-1}{p_n-1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\| \rho_n \|_{S_1(H_A\otimes H_C, S_{p_n}(H_E))} - 1}{p_n-1} = H(\rho_{CM}) - H(\Phi_A(\rho_{MC})) \\ &= H(\rho_{CM}) - H(\rho_{AC})\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\limsup_{p\to 1^+} \frac{h(p)-1}{p-1} &= - H(\mathrm{id}_C \otimes \hat{\Phi}_B(\rho)) + H(\rho_C) + H(\rho_{CM}) - H(\Phi_A(\rho_{MC})) \\ &= - H(A|C)_{\Phi_A(\rho)} - H(B|C)_{\Phi_B(\rho)} + H(M|C)_\rho = -I(\Phi_A,\Phi_B|C)_\rho \\ &\le - \inf_{\rho} I(\Phi_A,\Phi_B|C)_\rho = -I(\Phi_A,\Phi_B|C) .\end{aligned}$$

对于另一个方向，假设 $I(\Phi_A,\Phi_B|C)$ 由 ω_{MC} 取得。那么

$$\begin{aligned}-I(\Phi_A,\Phi_B|C) =& -I(\Phi_A,\Phi_B|C)_\omega\\ =& -H(\mathrm{id}_C\otimes\hat{\Phi}_B(\omega))+H(\omega_C)+H(\omega_{CM})-H(\Phi_A(\omega_{MC}))\\ =& \lim_{p\to1^+}\frac{\frac{f(p,\omega)}{g(p,\omega)}-1}{p-1}\\ \le& \liminf_{p\to1^+}\frac{\sup_\rho\frac{f(p,\omega)}{g(p,\omega)}-1}{p-1}\\ =& \liminf_{p\to1^+}\frac{h(p)-1}{p-1}\,.\end{aligned}$$

所述第二个等式由对所有 H_C 取上确界得到 . ■

下文中，我们使用简记 $H_{AB}:=H_A\otimes H_B$。

˄ 引理 4.6. 设 $\Phi_j\colon\mathbb{B}(H_{A_jE_j})\to\mathbb{B}(H_{B_j})$ $j=1,2$ 分别是两个线性映射。那么

$$\begin{aligned}&\|\hat{\Phi}_1\otimes\hat{\Phi}_2: S_1(H_{A_1A_2},S_p(H_{E_1E_2}))\to S_p(H_{B_1B_2})\|_{cb}\\ =&\|\hat{\Phi}_1: S_1(H_{A_1},S_p(H_{E_1}))\to S_p(H_{B_1})\|_{cb}\|\hat{\Phi}_2: S_1(H_{A_2},S_p(H_{E_2}))\to S_p(H_{B_2})\|_{cb}\,.\end{aligned}\tag{4.7}$$

证明。我们将反复使用闵可夫斯基不等式的非交换版本[30,推论 1：10] 对于任意算子空间 E，恒等映射

$$\mathrm{id}: S_p(H_A;S_q(H_B;E))\to S_q(H_B;S_p(H_A;E))\tag{4.8}$$

在 $q\ge p$ 的条件下是一个完全压缩映射。我们将其写为

$$\hat{\Phi}_1\otimes\hat{\Phi}_2: S_1(H_{A_1A_2},S_p(H_{E_1E_2}))\to S_p(H_{B_1B_2})$$

以下四个映射的复合：

$$\begin{aligned}&S_1(H_{A_1A_2},S_p(H_{E_1E_2}))\\ \xrightarrow{\mathrm{id}}&S_1(H_{A_1},S_p(H_{E_1},S_1(H_{A_2},S_p(H_{E_2}))))\\ \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\hat{\Phi}_2}&S_1(H_{A_1},S_p(H_{E_1},S_p(H_{B_2})))\\ \xrightarrow{\mathrm{id}}&S_p(H_{B_2},S_1(H_{A_1},S_p(H_{E_1})))\\ \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\hat{\Phi}_1}&S_p(H_{B_1B_2})\end{aligned}$$

根据 (4.8)，第一个映射和第三个映射都是完全压缩映射。回顾 Pisier 引理 4.1：对于任意线性映射 $T\colon\ E\to F$ 和 $1\le p,q\le\infty$

$$\|\mathrm{id}_H\otimes T: S_p(H,E)\to S_p(H,F)\|\ =\ \|\mathrm{id}_H\otimes T: S_q(H,E)\to S_q(H,F)\|\,.$$

将这一性质应用两次，可得第二个映射

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{id}_{A_1E_1}\otimes\Phi_2 : S_1(H_{A_1}, S_p(H_{E_1}, S_1(H_{A_2}, S_p(H_{E_2})))) \to S_1(H_{A_1}, S_p(H_{E_1}, S_p(H_{B_2})))\|_{cb}\\ \le\ &\|\Phi_2 : S_1(H_{A_2}, S_p(H_{E_2})) \to S_p(H_{B_2})\|\end{aligned}$$

以及第四个映射

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{id}_{B_2}\otimes\Phi_1 : S_p(H_{B_2}, S_1(H_{A_1}, S_p(H_{E_1}))) \to S_p(H_{B_1B_2})\|_{cb}\\ \le\ &\|\Phi_1 : S_1(H_{A_1}, S_p(H_{E_1})) \to S_p(H_{B_1})\|\end{aligned}$$

因此，我们证明所需等式 (4.7) 中的“$\le$”方向。另一方向可由张量积元素得到。 ■

我们得到以下可加性结果。

定理 4.7. I^{sq} 具有可加性。也就是说，对于两对量子信道 (Φ_A, Φ_B) 和 (Ψ_A, Ψ_B)，

$$I^{sq}(\Phi_A\otimes\Psi_A, \Phi_B\otimes\Psi_B) = I^{sq}(\Phi_A, \Phi_B) + I^{sq}(\Psi_A, \Psi_B)\,.$$

证明. 根据引理 4.5 和引理 4.6，

$$\begin{aligned}&-I^{sq}(\Phi_A\otimes\Psi_A, \Phi_B\otimes\Psi_B)\\ =&\lim_{p\to1^+}\frac{\|\hat\Phi_B\otimes\hat\Psi_B : S_1(A_1A_2, S_p(E_1E_2)) \to S_p(B_1B_2)\|_{cb}-1}{p-1}\\ =&\lim_{p\to1^+}\frac{\|\hat\Phi_B : S_1(A_1, S_p(E_1)) \to S_p(B_1)\|_{cb}\|\hat\Psi_B : S_1(A_2, S_p(E_2)) \to S_p(B_2)\|_{cb}-1}{p-1}\\ =&\lim_{p\to1^+}\|\hat\Psi_B : S_1(A_2, S_p(E_2)) \to S_p(B_2)\|_{cb}\,\frac{\|\hat\Phi_B : S_1(A_1, S_p(E_1)) \to S_p(B_1)\|_{cb}-1}{p-1}\\ &+\lim_{p\to1^+}\frac{\|\hat\Psi_B : S_1(A_2, S_p(E_2)) \to S_p(B_2)\|_{cb}-1}{p-1}\\ =&-I^{sq}(\Phi_A, \Phi_B) - I^{sq}(\Psi_A, \Psi_B)\end{aligned}$$ ■

注 4.8. 上述可加性结果可以推广到具有参数的最小不确定性

$$I^{sq}_\alpha(\Phi_A, \Phi_B|C) := \inf_{\rho^{MC}} \alpha_A H(A|C) + \alpha_B H(B|C) - \alpha_M H(M|C)\,,$$

其中 $\alpha = (\alpha_A, \alpha_B, \alpha_M)$ 是满足 $0 \le \alpha_A \le \alpha_M \le \alpha_B$ 的非负参数。事实上，类似于例 2.4 和引理 4.5，我们有

$$\lim_{p\to1^+}\frac{1}{p-1}(\|\rho^{CA}\|_{S_{q_1}(H_C, S_{q_2}(H_A))}-1) \;=\; (\alpha_2-\alpha_1)H(C) - \alpha_2 H(CA)\,,$$

$$\lim_{p\to 1^+}\frac{1}{p-1}(\|\, id_C\otimes\hat{\Phi}_B : S_{q_1}(H_{CA}, S_{q_2}(H_E))\to S_{q_1}(H_C, S_{q_3}(H_B))\,\| -1) = -I_\alpha(\Phi_A,\Phi_B|C)$$

其中 $q_1, q_2\ q_3$ 是满足以下关系的 p 的函数

$$1-\frac{1}{q_j(p)} = \alpha_j(1-\frac{1}{p})\ ,\ j=1,2,3.$$

$I_\alpha^{sq}(\Phi_A,\Phi_B|C)$的可加性可通过引理 4.6 中完全有界范数的乘法性类似地得出。详情请参阅 [13] 。

5. Strong sub-additivity of relative entropy

本节讨论相对熵的广义强次可加性。我们的出发点是 Petz 的以下结果。回顾一下，对于两个密度算子 $\rho\in D(\mathcal{M})$和 $\sigma\in D_+(\mathcal{M})$，相对熵为

$$D(\rho||\sigma) = \mathrm{tr}(\rho\log\rho-\rho\log\sigma)\ .$$

定理 5.1（Petz [26]）。设 $\mathcal{M}$ 是一个 C^*-代数，且 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}\subset\mathcal{M}$ 是子代数。设σ 是 $\mathcal{M}$ 的忠实态，并假设存在一个 σ保持的条件期望$E_A^\dagger:\ \mathcal{M}\to\mathcal{A}$。若$E_A^\dagger(\mathcal{B})\ =\mathcal{R}$ 是子代数，则对于任意态 ρ,

$$D(\rho||\sigma)+D(\rho_R||\sigma_R)\geq D(\rho_A||\sigma_A)+D(\rho_B||\sigma_B)\ ,$$

其中，$\rho_A=\rho|_{\mathcal{A}}$、$\sigma_A=\sigma|_{\mathcal{A}}$ 是在 $\mathcal{A}$ 上的限制态；对子代数 $\mathcal{B}$和 $\mathcal{R}$，也有类似定义。

现在，我们给出上述定理的一个定量推广。

定理 5.2. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{M}$ 是配备迹 $\tau_{\mathcal{A}}$、$\tau_{\mathcal{B}}$ 和 $\tau_{\mathcal{M}}$的有限维冯·诺伊曼代数。设 $\Phi_A:\ \mathcal{M}\to\mathcal{A}$ 和 $\Phi_B:\ \mathcal{M}\to\mathcal{B}$ 是两个量子信道。假设 $\mathcal{R}\subset\mathcal{B}$ 是一个子代数，并且假设 $\sigma\in D_+(\mathcal{M})$是一个密度算子，且存在一个保持 $\Phi_B(\sigma)$的条件期望 $E_R^\dagger:\ \mathcal{B}\to\mathcal{R}$ 。那么，对于任意$\rho\in D(\mathcal{M})$，我们有

$$D(\rho||\sigma)+D(E_R\circ\Phi_B(\rho)||\Phi_B(\sigma))\geq D(\Phi_A(\rho)||\Phi_A(\sigma))+D(\Phi_B(\rho)||\Phi_B(\sigma))-\kappa$$

这里，常数 κ 为

$$\kappa=\int_{\mathbb{R}}\alpha(t)\log c(t)dt\ ,\ \alpha(t)=\frac{\pi}{2(\cosh(\pi t)+1)}\ ,$$
$$c(t)=\sup_b\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_B^\dagger(b)\Phi_{\mathcal{A}}^\dagger\big(\Phi_{\mathcal{A}}(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)\sigma\Phi_{\mathcal{A}}^\dagger\big(\Phi_{\mathcal{A}}(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)^*\Big)\ ,$$

其中，上确界取遍所有满足 $E_R^\dagger(b)\ =1$的 $b\in\mathcal{B}_+$。

证明分为两步。给定 $\sigma \in D_+(\mathcal{M})$ 和 $\rho \in D(\mathcal{M})$，我们定义参数

$$\lambda(p) = \| \sigma^{-\frac{1}{2}} \rho \sigma^{-\frac{1}{2}} \|_{p,\sigma} = \| \sigma^{-\frac{1}{2p'}} \rho \sigma^{-\frac{1}{2p'}} \|_p$$

对于 $1 \leq p \leq \infty$，我们记

$$\rho_A = \Phi_A(\rho) \, , \rho_B = \Phi_B(\rho) \, , \rho_R = E_R \circ \Phi_B(\rho) \, ,$$

对于 σ_A、σ_B 和 σ_R，也类似。回顾一下，条件期望 $E_R^\dagger \colon \mathcal{B} \to \mathcal{R}$ 诱导出一个自然权重 $\sigma_{\rm tr} = E_R(1) \in \mathcal{R}' \subset \mathcal{B}$。

引理 5.3。对于 $p > 1$，定义

$$\Delta(p) := \lambda(p)^{-1} \, \| \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B \Big(\Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{1}{2p'}} \sigma_A^{-\frac{1}{2p'}} \big) \rho \Phi_A^\dagger \big(\sigma^{-\frac{1}{2p'}} \rho_A^{\frac{1}{2p'}} \big) \Big) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \, \|_{L_1^p(\mathcal{R} \subset \mathcal{B}, \sigma_{tr})}$$

我们有

$$\lim_{p \to 1^+} \frac{\Delta_p(p) - 1}{p-1} \geq D(\rho_A || \sigma_A) + D(\rho_B || \sigma_B) - D(\rho_R || \sigma_R) - D(\rho || \sigma) \, .$$

证明。首先，$\lambda_1 = 1$，根据引理 2.5

$$\lim_{p \to 1^+} \frac{\lambda(p)^{-1} - 1}{p-1} = \lim_{p \to 1^+} \frac{\| \sigma^{-\frac{1}{2p'}} \rho \sigma^{-\frac{1}{2p'}} \|_p^{-1} - 1}{p-1} = -D(\rho || \sigma) \, .$$

定义

$$x_p = \Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{1}{2p'}} \sigma_A^{-\frac{1}{2p'}} \big) \rho \Phi_A^\dagger \big(\sigma_A^{-\frac{1}{2p'}} \rho_A^{\frac{1}{2p'}} \big) \, .$$

将 $s(\rho)$ 记为 ρ 的支撑。当 $p \to 1, \frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p} \to 0$ 时，我们有

$$\lim_{p \to 1^+} x_p = \Phi_A^\dagger(s(\rho_A)) \rho \Phi_A^\dagger(s(\rho_A)) = \rho$$

事实上，对于任意正的 $0 \leq y \leq 1$，$\Phi_A(\rho^{\frac{1}{2}} y \rho^{\frac{1}{2}}) \leq \Phi_A(\rho) = \rho_A$，因此 $s(\Phi_A(\rho^{\frac{1}{2}} y \rho^{\frac{1}{2}})) \leq s(\rho_A)$。于是，

$$\tau_{\mathcal{M}}(y \rho^{\frac{1}{2}} \Phi_A^\dagger(s(\rho_A)) \rho^{\frac{1}{2}}) = \tau_{\mathcal{A}} \Big(\Phi_A(\rho^{\frac{1}{2}} y \rho^{\frac{1}{2}}) s(\rho_A) \Big) = \tau_{\mathcal{A}} \Big(\Phi_A(\rho^{\frac{1}{2}} y \rho^{\frac{1}{2}}) \Big) = \tau_{\mathcal{M}} \Big(\rho y \Big) \, .$$

因此，

$$\rho^{\frac{1}{2}} \Phi_A^\dagger(s(\rho_A)) \rho^{\frac{1}{2}} = \rho \, , \; \Phi_A^\dagger(s(\rho_A)) \rho \Phi_A^\dagger(s(\rho_A)) = \rho \, .$$

我们将所求极限分解为以下三部分

$$\begin{aligned} \lim_{p \to 1^+} \frac{\Delta_p(p) - 1}{p-1} = & \lim_{p \to 1^+} \| \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B(x_p) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^p(\mathcal{R} \subset \mathcal{B}, \sigma_{\rm tr})} \frac{\lambda(p)^{-1} - 1}{p-1} \\ & + \frac{\| \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B(x_p) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^p(\mathcal{R} \subset \mathcal{B}, \sigma_{\rm tr})} - \tau_{\mathcal{B}}(\Phi_B(x_p))}{p-1} + \frac{\tau_{\mathcal{M}}(x_p) - 1}{p-1} \\ := & \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \end{aligned}$$

1 1由 $\| \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B(x_p) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})} \to 1$，可计算第一部分。第二部分和第三部分的极限如下：

$$\lim_{p\to 1^+} \mathrm{II}(p) \geq D(\rho_B||\sigma_{\rm tr}) - D(E_R(\rho_B)||\sigma_{\rm tr}) = D(\rho_B||\sigma_B) - D(E_R(\rho_B)||\sigma_B)\,,$$
$$\lim_{p\to 1^+} \mathrm{III}(p) \geq D(\rho_A||\sigma_A)$$

第二部分由引理 2.7 和 $\lim_{p\to 1^+} \Phi_B(x_p) = \Phi_B(\rho)$ 得出。对于第三部分，注意对于一个正的 a

$$\lim_{q\to 0} a^q = s(a)\,,\ \frac{d}{dq} a^q \Big|_{q=0} = s(a)\log a\ .$$

由于 $s(\rho_A) \leq s(\sigma_A)$，我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 1^+} \mathrm{III}(p) =& \lim_{p\to 1} \frac{\tau_{\mathcal{M}}(x_p) - 1}{p-1} \\
=& -\frac{1}{2}\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_A^\dagger\big(s(\rho_A)\log(\sigma_A)\big)\rho\Phi_A^\dagger\big(s(\rho_A)\big)\Big) + \frac{1}{2}\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_A^\dagger\big(\log\rho_A\big)\rho\Phi_A^\dagger\big(\rho_A\big)\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_A^\dagger\big(s(\rho_A)\big)\rho\Phi_A^\dagger\big(\log\rho_A\big)\Big) - \frac{1}{2}\tau_{\mathcal{M}}\Big(\Phi_A^\dagger\big(s(\rho_A)\big)\rho\Phi_A^\dagger\big(\log\sigma_A s(\rho_A)\big)\Big) \\
=& -\tau_{\mathcal{M}}\Big(\rho_A\log(\sigma_A)s(\rho_A)\Big) + \tau_{\mathcal{M}}\Big(\rho_A\log(\rho_A)s(\rho_A)\Big) \\
=& D(\rho_A||\sigma_A)\,.
\end{aligned}$$

结合上述三个部分，证明完成。 ■

固定 $1 < p < \infty$，定义算子的解析族

$$\rho : \{0 \leq \Re(z) \leq 1\} \to \mathcal{M}\,,\ \rho(z) = \lambda_p^{-pz}\sigma^{-\frac{z}{2}}|\sigma^{-\frac{1}{2p'}}\rho\sigma^{-\frac{1}{2p'}}|^{pz}\sigma^{-\frac{z}{2}}$$

注意,

$$\rho(\frac{1}{p}) = \frac{\sigma^{\frac{-1}{2}}\rho\sigma^{\frac{-1}{2}}}{\| \sigma^{-\frac{1}{2}}\rho\sigma^{-\frac{1}{2}} \|_{p,\sigma}} = \lambda_p^{-1}\sigma^{\frac{-1}{2}}\rho\sigma^{\frac{-1}{2}},$$

and

$$\begin{aligned}
\| \rho(it) \|_\infty =& \| \sigma^{\frac{-it}{2}}|\sigma^{-\frac{1}{2p'}}\rho\sigma^{-\frac{1}{2p'}}|^{ipt}\sigma^{\frac{-it}{2}} \|_\infty \leq 1 \\
\| \rho(1+it) \|_{1,\sigma_{\rm tr}} =& \lambda_p^{-p} \| \sigma^{\frac{-1-it}{2}}|\sigma^{-\frac{1}{2p'}}\rho\sigma^{-\frac{1}{2p'}}|^{p+ipt}\sigma^{\frac{-1-it}{2}} \|_{1,\sigma} \leq 1\,.
\end{aligned}$$

对于 $\Delta(\rho,\gamma)$，我们有以下估计：

引理 5.4。对于任意的 $1 < p < \infty$ 和 $\gamma \in \mathcal{R}_+$,

$$\lim_{p\leq 1^+} \frac{\Delta(p) - 1}{p-1} \leq \kappa\,,$$

其中

$$\kappa = \int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \log c(t) dt \ , \ \alpha(t) = \frac{\pi}{2(\cosh(\pi t) + 1)}$$

$$\begin{aligned} c(t) =& \sup_{t\in\mathbb{R}} \| \sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}} \Phi_B \Big(\Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{1+it}{2}} \sigma_A^{\frac{-1-it}{2}} \big) \sigma \Phi_A^\dagger \big(\sigma_A^{\frac{-1+it}{2}} \rho_A^{\frac{1-it}{2}} \big) \Big) \sigma_{tr}^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{tr})} \\ =& \sup_b \tau_{\mathcal{M}} (\Phi_B^\dagger(b) \Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{1+it}{2}} \sigma_A^{\frac{-1-it}{2}} \big) \sigma \Phi_A^\dagger \big(\sigma_A^{\frac{-1+it}{2}} \rho_A^{\frac{1-it}{2}} \big)) \end{aligned}$$

其中，上确界取遍所有满足 $b \in \mathcal{B}_+$ 使得 $E_R^\dagger(b) \leq 1$ 的对象。

证明。固定 $1 < p < \infty$，考虑以下解析算子族,

$$A(z) = \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B \Big(\Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{1-z}{2}} \sigma_A^{\frac{z-1}{2}} \big) \rho(z) \Phi_A^\dagger \big(\sigma_A^{\frac{z-1}{2}} \rho_A^{\frac{1-z}{2}} \big) \Big) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \ .$$

注意到

$$\| A(\frac{1}{p}) \|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})} = \Delta(p)$$

对于 $z = 1 + it$,

$$\begin{aligned} \| A(1+it) \|_{1,\sigma_{\rm tr}} =& \| \Phi_B \Big(\Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{it}{2}} \sigma_A^{\frac{-it}{2}} \big) \sigma^{\frac{1}{2}} \rho(1-it) \sigma^{\frac{1}{2}} \Phi_A^\dagger \big(\sigma_A^{\frac{-it}{2}} \rho_A^{\frac{it}{2}} \big) \Big) \|_1 \\ \leq& \| \Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{it}{2}} \sigma_A^{\frac{-it}{2}} \big) \sigma^{\frac{1}{2}} \rho(1-it) \sigma^{\frac{1}{2}} \Phi_A^\dagger \big(\sigma_A^{\frac{-it}{2}} \rho_A^{\frac{it}{2}} \big) \|_1 \\ \leq& \| \sigma^{\frac{1}{2}} \rho(1-it) \sigma^{\frac{1}{2}} \|_1 \\ \leq& \lambda_p^{-p} \ \| \sigma^{it} | \sigma^{-\frac{1}{2p'}} \rho \sigma^{-\frac{1}{2p'}} |^{p-ipt} \sigma^{-it} \|_1 = 1 \end{aligned}$$

对于 $z = it$,

$$\| A(it) \|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})} = \| \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B \Big(\Phi_A^\dagger \big(\rho_A^{\frac{1+it}{2}} \sigma_A^{\frac{-1-it}{2}} \big) \sigma^{\frac{1}{2}} \rho(it) \sigma^{\frac{1}{2}} \Phi_A^\dagger \big(\sigma_A^{\frac{-1-it}{2}} \rho_A^{\frac{1+it}{2}} \big) \Big) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})}$$

设 γ_1、$\gamma_2 \in \mathcal{R}_+$ 是 $\mathcal{R}$ 中任意两个正元素，且满足 $\| \gamma \|_{1,\sigma_{\rm tr}} = 1$。记

$$X_1 = \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \sigma_B^{-\frac{1}{2}}, \ X_1 = \gamma_2^{-\frac{1}{2}} \sigma_B^{-\frac{1}{2}}, \ Y(t) = \Phi_A^\dagger (\rho_A^{\frac{1+it}{2}} \sigma_A^{\frac{-1-it}{2}}) \ .$$

我们有

$$\begin{aligned} \| A(it) \|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})} =& \| \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B (Y(t) \sigma^{1/2} \rho(it) \sigma^{1/2} Y(-t)^*) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})} \\ =& \inf_{\gamma_1,\gamma_2} \| \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \Phi_B (Y(t) \sigma^{1/2} \rho(it) \sigma^{1/2} Y(-t)^*) \sigma_B^{-\frac{1}{2}} \gamma_2^{-\frac{1}{2}} \|_\infty \end{aligned}$$

注意,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X_1 \Phi_B(Y(t) \sigma Y(t)^*) X_1^* & A(it) \\ A(-it) & X_2 \Phi_B(Y(-t) \sigma Y(-t)^*) X_2^* \end{bmatrix} \\ =& \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Phi_B\left(\left[\begin{array}{cc} Y(t) & 0 \\ 0 & Y(-t) \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \sigma^{1/2}\rho(it) \\ \sigma^{1/2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \sigma^{1/2}\rho(it) \\ \sigma^{1/2} \end{array}\right]^*\left[\begin{array}{cc} Y(t)^* & 0 \\ 0 & Y(-t)^* \end{array}\right]\right)\\ &\cdot\left[\begin{array}{cc} X_1^* & 0 \\ 0 & X_2^* \end{array}\right]\\ \geq&0\end{aligned} \tag{5.1}$$

记

$$\begin{aligned}c(t):=&\|\,\Phi_B(Y(t)\sigma Y(t)^*)\,\|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})}\\ =&\inf_\gamma\|\,\gamma^{-\frac{1}{2}}\sigma_B^{\frac{-1}{2}}\gamma^{\frac{-1-it}{2}}\Phi_B\Big(\Phi_A^\dagger\big(\rho_A^{\frac{1+it}{2}}\sigma_A^{\frac{-1-it}{2}}\big)\sigma\Phi_A^\dagger\big(\sigma_A^{\frac{-1+it}{2}}\rho_A^{\frac{1-it}{2}}\big)\Big)\gamma^{\frac{-1+it}{2}}\sigma_B^{\frac{-1}{2}}\gamma^{-\frac{1}{2}}\,\|_\infty\end{aligned}$$

由（5.1）可得

$$\|\,A(it)\,\|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})}\leq\sqrt{c(t)c(-t)}$$

现在，由 Hirschman 插值定理 [17]（另见 [20, 引理 3.2]），可得

$$\begin{aligned}\log\|\,A(\frac{1}{p})\,\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})}\leq&\int_{\mathbb{R}}\beta_{\frac{1}{p}}(t)\log\|\,A(it)\,\|_{1,\sigma_{\rm tr}}^{\frac{1}{p}}+\alpha_{\frac{1}{p}}(t)\log\|\,A(1+it)\,\|_{L_1^\infty(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})}^{1-\frac{1}{p}}\,dt\\ \leq&\frac{p-1}{p}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2}\alpha_{\frac{1}{p}}(t)(\log c(t)+\log c(-t))dt\\ =&\frac{p-1}{p}\int_{\mathbb{R}}\alpha_{\frac{1}{p}}(t)\log c(t)dt\end{aligned}$$

其中

$$\alpha_{\frac{1}{p}}(t)=\frac{\sin(\frac{\pi}{p})}{2(1-\frac{1}{p})(\cosh(\pi t)-\cos(\pi\theta))}\,,$$

and

$$\lim_{p\to1^+}\alpha_{\frac{1}{p}}(t)=\frac{\pi}{2(\cosh(\pi t)+1)}:=\alpha(t)\,.$$

因此，可得

$$\begin{aligned}\lim_{p\to1^+}\frac{\Delta(p)-1}{p-1}=&\lim_{p\to1^+}\frac{\Delta(p)^p-1}{p-1}\\ =&\lim_{p\to1^+}\frac{p\log\Delta(p)}{p-1}\\ =&\lim_{p\to1^+}\frac{p\log\|\,A(\frac{1}{p})\,\|_{L_1^p(\mathcal{R}\subset\mathcal{B},\sigma_{\rm tr})}}{p-1}\\ \leq&\lim_{p\to1^+}\int_{\mathbb{R}}\alpha_{\frac{1}{p}}(t)\log c(t)dt=\int_{\mathbb{R}}\alpha(t)\log c(t)dt.\end{aligned}$$

至此，证明完成。 ■

定理 5.2 由引理 5.3 和引理 5.4 即可推出。下面讨论一些特殊情形。

例 5.5. 若 $\mathcal{A}$、$\mathcal{R}=\mathbb{C}1$ 是平凡子代数，我们便得到数据处理不等式

$$D(\rho||\sigma)\geq D(\Phi_B(\rho)||\Phi_B(\sigma))$$

因为常数是

$$\begin{aligned}c(t)=&\sup_{\|b\|_{\sigma_B,1}=1}\tau_M(\Phi_B^\dagger(b)\sigma)=\tau_B(b\Phi_B(\sigma))=1\\ \kappa=&\,0\end{aligned}$$

例 5.6. 若 $\mathcal{B}=\mathcal{R}=\mathbb{C}$ 是平凡子代数，我们有

$$D(\rho||\sigma)\geq D(\Phi_A(\rho)||\Phi_A(\sigma))-\kappa\,.$$

以及 $\kappa\leq 0$。因为

$$\begin{aligned}c(t)=&\tau_M\Big(\Phi_A^\dagger\big(\Phi_A(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)\sigma\Phi_A^\dagger\big(\Phi_A(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)^*\Big)\\ \leq&\tau_M\Big(\Phi_A^\dagger\big(\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1+it}{2}}\Phi_A(\rho)^{\frac{1-it}{2}}\Phi_A(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)\sigma\Big)\\ =&\tau_A\Big(\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1+it}{2}}\Phi_A(\rho)\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\Phi_A(\sigma)\Big)\\ =&\tau_A(\Phi_A(\rho))\\ =&1\,,\end{aligned}$$

这里我们使用了 Kadison-Schwarz 不等式 $\Phi^\dagger(x^*)\Phi^\dagger(x)\leq\Phi^\dagger(x^*x)$。这改进了数据处理不等式。此外，我们的常数 κ 在以下意义下是紧的：若 $\kappa=0$，由于 $\alpha(t)dt$ 是概率测度，我们有

$$c(t)=1\,,\ \forall\, t\in\mathbb{R}\,.$$

这意味着

$$\Phi_A^\dagger\big(\Phi_A(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)^*\Phi_A^\dagger\big(\Phi_A(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)=\Phi_A^\dagger\big(\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\Phi_A(\rho)\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}\big)\,.$$

因此，对所有 $t\in\mathbb{R}$，$\Phi_A(\rho)^{\frac{1+it}{2}}\Phi_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}}$ 都属于 $\Phi_A^\dagger$ 的乘法域，并可通过解析延拓进一步推广至 $\{\Phi_A(\rho)^z\Phi_A(\sigma)^{-z},\ z\in\mathbb{C}\}$。注意，这个条件等价于

$$D(\rho||\sigma)=D(\Phi_A(\rho)||\Phi_A(\sigma))$$

并且存在一个量子信道 Ψ，使得 $\Psi\circ\Phi_A(\rho)=\rho$ 且 $\Psi\circ\Phi_A(\sigma)=\sigma$（见 [27]）。因此，我们有

$$\kappa=0\Longleftrightarrow D(\rho||\sigma)=D(\Phi_A(\rho)||\Phi_A(\sigma))\,.$$

例 5.7. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 是子代数，$\Phi_A = E_A$、$\Phi_B = E_B$ 是包含映射的伴随映射。我们有

$$D(\rho||\sigma) + D(E_R \circ E_B(\rho)||E_B(\sigma)) \geq D(E_A(\rho)||E_A(\sigma)) + D(E_B(\rho)||\sigma_B) - \int_{\mathbb{R}} \alpha(t) \log c(t) dt \, .$$

这里的常数为

$$c(t) = \sup_{b \in \mathcal{B}, E_R(b)=1} \tau_M \Big(b E_A(\rho)^{\frac{1+it}{2}} E_A(\sigma)^{\frac{-1-it}{2}} \sigma E_A(\sigma)^{\frac{-1+it}{2}} E_A(\rho)^{\frac{1-it}{2}} \Big)$$

在定理 5.1 的假设下，$E_A(\sigma) = \sigma$ 和 $E_A^\dagger(\mathcal{B}) \subset \mathcal{R}$,

$$c(t) = \sup_{b \in B} \tau_M(bE_A(\rho)) = \sup_{b \in B} \tau_M(E_A^\dagger(b)\rho) = \sup_{b \in B} \tau_M \Big(E_R^\dagger(b)\rho \Big) = 1$$

这恢复了定理 5.1 的断言

References

[1] Ivan Bardet. 使用非交换函数不等式估计退相干时间。arXiv 预印本 arXiv:1710.01039，2017年。[2] William Beckner. 傅里叶分析中的不等式。数学年刊，102(1):159–182，1975年。[3] J¨oran Bergh 和 J¨orgen L¨ofstr¨om. 插值空间：导论，第223卷。Springer Science & Business Media，2012年。[4] Mario Berta、Matthias Christandl、Roger Colbeck、Joseph M Renes 和 Renato Renner. 存在量子存储器时的不确定性原理。《自然·物理》，6(9):659–662，2010年。[5] Mario Berta、David Sutter 和 Michael Walter. 量子 Brascamp-Lieb 对偶。arXiv 预印本 arXiv:1909.02383，2019年。[6] Iwo Bia lynicki-Birula 和 Jerzy Mycielski. 波动力学中信息熵的不确定性关系。《数学物理通讯》，44(2):129–132，1975年。[7] David P Blecher 和 Vern I Paulsen. 算子空间的张量积。《泛函分析杂志》，99(2):262–292，1991年。[8] Matthias Christandl 和 Andreas Winter. “压缩纠缠”：一种可加纠缠度量。《数学物理学杂志》，45(3):829–840，2004年。[9] Patrick J Coles、Mario Berta、Marco Tomamichel 和 Stephanie Wehner. 熵不确定性关系及其应用。《现代物理评论》，89(1):015002，2017年。[10] Igor Devetak、Marius Junge、Christoper King 和 Mary Beth Ruskai. 完全有界 p-范数的乘法性蕴含一个新的可加性结果。《数学物理通讯》，266(1):37–63，2006年。[11] Edward G Effros 和 Zhong-Jin Ruan. 关于算子空间的逼近性质。《国际数学杂志》，1(02):163–187，1990年。[12] Rupert L Frank 和 Elliott H Lieb. 扩展的量子条件熵与量子不确定性不等式。《数学物理通讯》，323(2):487–495，2013年。[13] Li Gao、Marius Junge 和 Nicholas LaRacuente. 量子信道的不确定性原理。载于：2018年 IEEE 国际信息论研讨会（ISIT），第996–1000页。IEEE，2018年。[14] Li Gao、Marius Junge 和 Nicholas LaRacuente. 冯·诺依曼子代数的相对熵。《国际数学杂志》，31(06):2050046，2020年。

[15] Li Gao 和 Cambyse Rouz´e. 量子马尔可夫链的完全熵不等式。《理性力学与分析档案》，第1–56页，2022年。[16] Isidore I Hirschman. 关于熵的一则注记。《美国数学杂志》，79(1):152–156，1957年。[17]Isidore Isaac Hirschman. 关于某些变换群的凸性定理。《数学分析杂志》，2(2):209–218，1952年。´Marius Junge、Nicholas LaRacuente 和 Cambyse Rouz[18] e. 非交换测度变换下对数 Sobolev 不等式的稳定性。《统计物理学杂志》，190(2):1–25，2023年。´Marius Junge 和 Javier Parcet. 混合范数不等式与算子空间嵌入理论。美国数学学会，2010年。[19] Marius Junge、Renato Renner、David Sutter、Mark M Wilde 和 Andreas Winter. 通用恢复映射与量子相对熵的近似充分性。载于《亨利·庞加莱年刊》，第19卷，第2955–2978页。施普林格，2018年。 L_p Earle H Kennard. 关于简单运动类型的量子力学。《物理学杂志》，44(4):326–352，1927年。[20] Hideki Kosaki. 复插值方法在冯·诺依曼代数中的应用：非交换 Lp 空间。《泛函分析杂志》，56(1):29–78，1984年。´Elliott H Lieb 和 Mary Beth Ruskai. 量子力学熵强次可加性的证明。《斯特拉斯堡物理学家—数学家会议录-RCP25》，19:36–55，1973年。[21] Hans Maassen 和 Jos BM Uffink. 广义熵不确定性关系。《物理评论快报》，60(12):1103，1988年。¨Martin M[22] uller-Lennert、Fr[23] ed´eric Dupuis、Oleg Szehr、Serge Fehr 和 Marco Tomamichel. 关于量子 Rényi 熵：一种新的推广及其若干性质。《数学物理学杂志》，54(12):122203，2013年。[24] D[25] enes Petz. 关于算子代数中态的相对熵的若干性质。《数学杂志》，206(1):351–361，1991年。¨D´enes Petz. 重新审视量子相对熵的单调性。《数学物理评论》，15(01):79–91，2003年。´D´enes Petz. 量子系统中的互补性。《数学物理报告》，59(2):209–224，2007年。[26] Mihai Pimsner 和 Sorin Popa. 子因子的熵与指标。载于《法国高等师范学院科学年刊》，第19卷，第57–106页，1986年。´Gilles Pisier. 非交换向量值 Lp 空间与完全 p-可和映射。法国数学会，1998年。[27] Gilles Pisier 和 Quanhua Xu. 非交换 Lp 空间。《巴拿赫空间几何手册》，2:1459–1517，2003年。´Sorin Popa. 有限冯·诺依曼代数中正交的*-子代数对。《算子理论杂志》，第253–268页，1983年。[28] Howard Percy Robertson. 不确定性原理。《物理评论》，34(1):163，1929年。´Roger R Smith. 完全有界模映射与 Haagerup 张量积。《泛函分析杂志》，102(1):156–175，1991年。[29] Hermann Weyl.《群论与量子力学》，Hirzel 出版社，莱比锡。Theory of Groups and Quantum Mechanics，第2版（1931年），HP Robertson 译，多佛出版社，纽约（1950年），第100–101页，1928年。

[36] Mark M Wilde、Andreas Winter 和 Dong Yang。通过夹心 Rényi 相对熵证明纠缠破坏信道和哈达玛信道经典容量的强逆定理。《数学物理通讯》，331(2):593–622，2014年。

Department of Mathematics, University of Houston
电子邮箱，Li Gao：lgao12@uh.edu

Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA
电子邮箱，Marius Junge：mjunge@illinois.edu

Chicago Quantum Exchange, University of Chicago, Chicago, IL 60637, USA
电子邮箱，Nicholas LaRacuente：nlaracuente@uchicago.edu