arXiv:2301.08418v3 [math.CT] 7 Jul 2023

Hopf 代数胚的测量及其在循环（上）同调理论中的态射

Abhishek Banerjee * Surjeet Kour †

摘要

本文研究 Hopf 代数胚之间的测量，并证明这些测量会在循环同调和循环上同调上诱导态射。我们还研究 Hopf 代数胚上的 SAYD 模之间的余模测量。这些测量使 SAYD 模的全局范畴在余模上得到富化。这些测量还会在带 SAYD 系数的 Hopf 代数胚的循环（上）同调上诱导态射，且与 Hopf-Galois 映射相容。最后，我们研究非-Σ 带乘法的运算子。由此得到循环幺 comp 模在非-Σ 运算子上的富化，以及由带乘法的运算子上的 comp 模测量所诱导的循环同调态射。

MSC(2020) 学科分类：16T15、16E40、18D50

Key词语：Hopf 代数胚、循环（上）同调、SAYD 模、非-Σ 歌剧代数、comp 模

1 引言

设 k 是一个域，Vect_k 是 k 上向量空间的范畴。设 R、R′ 是 k-代数。从 R 到 R′ 的一个测量由一个 k-余代数 C 和一个 k-线性映射 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R, R')$ 构成，并满足以下条件

$$\psi(x)(r_1 r_2) = \sum \psi(x_{(1)})(r_1)\psi(x_{(2)})(r_2) \qquad \psi(x)(1_R) = \epsilon_C(x)1_{R'} \qquad x \in C, r_1, r_2 \in R \tag{1.1}$$

这里，$\Delta_C(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ 表示 C 上的余乘法，$\varrho_C : C \longrightarrow k$ 表示余单位。这是 Sweedler [36], 引入的经典概念，而二元组 (C, ψ) 则刻画了从 R 到 R′的广义代数态射。例如，若 $x \in C$ 是群类元，即 $\Delta_C(x) = x \otimes x$ 且 $\varrho_C(x) = 1$，则 (1.1) 中的条件化简为从 R 到 R′的含幺环同态 $\psi(x)$。若 $R = R'$ 且 $x \in C$ 是原始元，即 $\Delta_C(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$，则 (1.1) 给出 R 上的导子 $\psi(x)$。

对于任意 k-代数 R 和 R′，Sweedler [36] 证明了，从 R 到 R′的余代数测量范畴中存在一个泛对象。这个泛测量余代数记作 $\mathcal{M}(R, R')$，发挥广义同态的作用，使 k-代数在 k-余代数范畴上得到富化。因此，泛测量余代数通常称为“Sweedler 同态对象”（例如参见 Anel 和 Joyal [1]）。我们还提到，Sweedler 同态对象与代数的经典 Sweedler 对偶密切相关（参见 Porst 和 Street [32]）。多年来，测量已在许多领域得到广泛研究，例如微分分次代数（参见 Anel 和 Joyal [1]）、编织幺半范畴中的幺半群（参见 Hyland、L´opez Franco 和 Vasilakopoulou [21], Vasilakopoulou [38]）、双代数和 Hopf 代数（参见 Grunenfelder 和 Mastnak [17]，[18]），以及缠结结构（参见 Brzezi´nski [8]）。关于这一主题的更多内容，读者可参阅例如 [1], [2]，[3], [4], [8], [21], [22],[38], [39], [40]。对于代数上的模，还有一种类似的测量余模概念（参见 [4]，[22]）。它由一个余代数测量 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R, R')$，以及一个右 C-余模 D 构成，后者配备了一个线性映射

*印度科学研究所数学系，班加罗尔。电子邮件：abhishekbanerjee1313@gmail.com
†印度理工学院数学系，德里。电子邮件：koursurjeet@gmail.com

$\omega : D \longrightarrow Vect_k(M, M')$，并满足对 (1.1) 中条件的相应改写，其中 M 是右 R-模，而 M' 是右 R'-模。后者使模在余模上得到富化（参见 Hyland、L´opez Franco 和 Vasilakopoulou [22]）。既然余代数测量类似于代数的广义态射，它们能否用于在同调理论之间诱导映射？我们在 [2] 开始研究这个问题，并构造了代数 Hochschild 同调中的态射。现在我们将这一思路进一步拓展。我们要探究，例如能否在 Connes 和 Moscovici 的 Hopf 循环上同调中做同样的事（参见[12], [13]）。Hopf 循环上同调及其上的算子本身就是研究对象。特别是，Hopf 循环上同调上的算子能够捕捉由各种情境所产生的“非交换空间”的对称性，这些情境涵盖从叶状结构到喷射丛和模 Hecke 代数，并对非交换几何产生深远影响（例如参见[12], [14]）。

本文在三种不同情形下研究余代数测量。我们的框架比 [2], 更全面，因为我们能够在很大程度上同时涵盖 Hochschild 同调理论和循环（上）同调理论，并处理系数。本文研究的情形如下。

(1) 我们从 Hopf 代数胚入手，它是 Hopf 代数在非交换基环上的推广。我们利用余代数测量在 Hochschild 理论与循环理论之间诱导映射，并利用余模测量在带有 SAYD 系数的这些理论之间诱导映射。一个特别之处在于，Hochschild 同调与循环（上）同调之间的态射与 Hopf-Galois 映射相容。另一个特点是，对于交换 Hopf 代数胚，我们可以诱导其 Hochschild 同调代数（配备洗牌乘积）的余代数测量。

(2) 我们研究能够在 Lie-Rinehart 代数的同调上诱导映射的余代数测量。我们将这些测量与其泛包络代数（具有左 Hopf 代数胚结构）的周期循环上同调之间的映射联系起来。

(3) 最后，我们考虑 Kowalzig 意义下 [27] 带乘法的非对称运算子上的循环 comp 模。对于循环 comp 模之间的余模测量，我们得到循环同调之间的诱导映射。特别地，这些测量在给定 Hopf 代数胚上的编织交换 Yetter-Drinfeld 代数的循环同调上诱导出映射。

现在我们将更详细地介绍本文。我们回顾一下，Hopf 代数胚是一个数据 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$，其中 U 和 A 是 k-代数（我们通常将环 A_L 记作 A，将反环 A_R 记作反环 A^{op}），$s_L : A \longrightarrow U$（分别地，$t_L : A^{op} \longrightarrow U$）称为源映射（分别地，目标映射），$\Delta_L : U \longrightarrow U \otimes_{A_L} U$ 是余乘法，$\varrho_L : U \longrightarrow A_L$ 是余单位，而 $S : U \longrightarrow U$ 是反 antipode（参见定义 2.2）。所谓从 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 到$\mathcal{U}' = (U', A'_L, s'_L, t'_L, \Delta'_L, \varrho'_L, S')$的 Hopf 代数胚测量，是指一个余交换余代数 C，以及一对（Ψ, ψ）代数的测量

$$\Psi : C \longrightarrow Vect_k(U, U') \qquad \psi : C \longrightarrow Vect_k(A, A') \tag{1.2}$$

满足某些相容条件（见定义 2.3）。我们为 k 上的 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ 构造一个万有（余交换）测量余代数$\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$。我们将其用作广义同态对象，从而得到一个以余交换余代数范畴 $CoCoalg_k$ 为对称幺半范畴的 Hopf 代数胚富集范畴 $HALG_k$（见定理 2.7）。我们在第 3 节证明，这些测量会在 Kowalzig 和 Posthuma 引入的 Hopf 代数胚的循环（上）同调群上诱导态射 [24], ，且这些态射与 Hopf-Galois 映射相容。若将范围限制在同时为交换的 Hopf 代数胚，我们知道（见 [26]），它们的 Hochschild 同调群带有由洗牌乘积给出的 k-代数结构。给定（1.2）中交换 Hopf 代数胚之间的余代数测量，我们证明底层 Hochschild 同调上的态射

$$\underline{\Psi}^{hoc} : C \longrightarrow Vect_k(HH_\bullet(\mathcal{U}), HH_\bullet(\mathcal{U}')) \tag{1.3}$$

给出一个关于混洗乘积结构的测量（见命题 4.1）。通过考察 Sweedler 在配备洗牌乘积的 Hochschild 同调环之间的泛测量余代数，我们得到交换 Hopf 代数胚在 $CoCoalg_k$上的第二种富化$\widetilde{\ }$$cHALG_k$。此外，我们构造了一个 $CoCoalg_k$-富集函子 $\tau : cHALG_k \longrightarrow$$\widetilde{\ }$$cHALG_k$，其中 $cHALG_k$ 是 $CoCoalg_k$-富集范畴 $HALG_k$ 的全子范畴，由交换 Hopf 代数胚构成（见定理 4.3 ）。

设 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 为 Hopf 代数胚，且 P（分别地，P′）是 $\mathcal{U}$（分别地，$\mathcal{U}'$）上的稳定反 Yetter–Drinfeld 模（或 SAYD 模）。从 P 到 P′ 的余模测量是指满足以下条件的一组数据

$$\Psi : C \longrightarrow Vect_k(U, U') \qquad \psi : C \longrightarrow Vect_k(A, A') \qquad \Omega : D \longrightarrow Vect_k(P, P') \tag{1.4}$$

其中 (Ψ, ψ) 是如 (1.2) 中所述的余代数测量，而 D 是一个 C-余模（见定义 5.6）。我们为余代数测量 (Ψ, ψ) 构造一个泛测量余模 Ω_C(P, P′)。随后，我们考察这样的配对 $(\mathcal{U}, P)$：$\mathcal{U}$ 是一个 Hopf 代数胚，P 是 $\mathcal{U}$ 上的 SAYD 模。通过考察泛测量余代数 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$，并取相应的泛测量余模 $\Omega_{\mathcal{M}_c}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$(P, P′)，我们证明（见定理 5.9）这些配对构成一个“SAYD 模的全局范畴”，且该范畴是以 k 上余模的全局范畴为富化范畴的。后者由配对 (C, D) 构成，其中 C 是余交换 k-余代数，D 是一个 C-余模。Kowalzig 和 Kr¨ahmer 在 [25] 中引入了 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ 上的 SAYD 模 P 所对应的（余）循环模。我们证明，如 (1.4) 中所述的余模测量会在相应的 Hochschild 同调群和循环（上）同调群之间诱导态射（见命题 6.3）。此外，这些诱导态射与 Hopf-Galois 映射相容（见定理 6.4）。

在第 7 节中，我们研究 Lie-Rinehart 代数的余代数测量。特别地，我们证明，Lie-Rinehart 代数之间的余代数测量会在其同调理论上诱导态射。我们还证明，这种测量会导出其泛包络代数的余代数测量。此外，Lie-Rinehart 代数同调理论上的态射，与该余代数测量在其泛包络代数的循环理论上诱导的态射相容。

在本文的最后一部分，我们讨论带乘法的非-Σ operad。我们回顾一下，非-Σ operad $(\mathscr{O}, \mathrm{m}, \mathrm{e})$ 由一族向量空间 $\mathscr{O} = \{\mathscr{O}(\mathrm{n})\}_{n\geq 0}$ 组成，并配备复合运算、一个乘法 $\mathrm{m} \in \mathscr{O}(2)$ 和一个单位元 $\mathrm{e} \in \mathscr{O}(0)$。若 $(\mathscr{O}, \mathrm{m}, \mathrm{e})$ 和 $(\mathscr{O}', \mathrm{m}', \mathrm{e}')$ 是这样的 operad，我们考虑如下测量，其中 C 是余交换余代数，而 Ψ是一族线性映射

$$\Psi = \{\Psi_n : C \longrightarrow Vect_k(\mathscr{O}(n), \mathscr{O}'(n))\}_{n\geq 0} \tag{1.5}$$

满足关于复合运算、乘法和单位元的某些条件（见定义 8.2）。我们构造一个泛（余交换）测量余代数 $\mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O}')$，并利用它在余交换余代数的对称幺半范畴 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 上，为非-Σ 带乘法的运算子赋予富化。随后，我们考虑如下配对 $(\mathscr{O}, \mathscr{L})$：其中 $\mathscr{O}$ 是一个非-Σ 带乘法的运算子，而 $\mathscr{L}$ 是 Kowalzig [27]意义下定义在 $\mathscr{O}$ 上的循环幺 comp 模。如果$\mathscr{L}$（分别为 $\mathscr{L}'$）是定义在 $\mathscr{O}$（分别为 $\mathscr{O}'$）上的循环幺 comp 模，我们就考虑余模测量

$$\Psi = \{\Psi_n : C \longrightarrow Vect_k(\mathscr{O}(n), \mathscr{O}'(n))\}_{n\geq 0} \qquad \Omega = \{\Omega_n : D \longrightarrow Vect_k(\mathscr{L}(n), \mathscr{L}'(n))\}_{n\geq 0} \tag{1.6}$$

其中 $\Psi = \{\Psi_n\}_{n\geq 0}$ 是 (1.5) 意义下从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathscr{O}'$ 的测量，而 D 是一个 C-余模（见定义 8.5）。通过构造泛测量余模，我们证明配对 $(\mathscr{O}, \mathscr{L})$ 构成一个余模全局范畴上的富集范畴（见定理 8.7）。在 [27], 中，Kowalzig 引入了一个循环模，它对应于定义在一个非-Σ 带乘法的运算子上的循环幺 comp 模。因此，我们证明，像 (1.6) 中那样的余模测量会在循环同调群上诱导态射。

最后，我们考虑编织交换 Yetter-Drinfeld 代数 Z、Z′ 之间的测量 ψ：C $\longrightarrow$ Vect_k(Z, Z′)，其中这些代数定义在给定的 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ = (U, A_L, s_L, t_L, Δ_L, ϱ_L, S) 上。由 [27] 可知，对于给定的 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$上的编织交换 Yetter-Drinfeld 代数 Z，存在一个带有乘法的非Σ operad $C^\bullet(\mathcal{U}, Z)$。我们证明，测量 ψ：C $\longrightarrow$$\mathrm{Vect}_k$(Z, Z′) 按照 (1.5) 的意义，诱导出从 $C^\bullet(\mathcal{U}, Z)$ 到 $C^\bullet(\mathcal{U}, Z')$ 的非Σ operad 测量。此外，如果 L 是 $\mathcal{U}$ 上的反 Yetter-Drinfeld 模，且 $L \otimes_{A^{op}} Z$ 是稳定的，那么由 [27] 可知，这确定了一个在 $C^\bullet(\mathcal{U}, Z)$ 上的循环含幺 comp 模 $C_\bullet(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z)$。相应地，我们证明，测量 ψ：C $\longrightarrow$ Vect_k(Z, Z′) 连同反 Yetter-Drinfeld 模的态射 L $\longrightarrow$ L′，按照 (1.6) 的意义，诱导出从 $C_\bullet(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z)$ 到 $C_\bullet(\mathcal{U}, L' \otimes_{A^{op}} Z')$ 的循环含幺 comp 模的余模测量。特别地，这将在相应的循环同调群上诱导出态射（参见命题 8.10）。

2 Hopf 代数胚的测量

全文中，k 均表示一个域，并令 Vect_k 表示 k-向量空间范畴。设 A 是一个含幺 k-代数。为了定义左、右双代数胚以及 Hopf 代数胚，我们经常需要同时使用代数 A 及其反代数 A^{op}。因此，我们常将代数 A 写作 A_L，而将 A^{op} 写作 A_R。

A 上的一个 (s, t)-环由一个含幺 k-代数 U 以及两个 k-代数态射 $s : A \longrightarrow U$ 和 $t : A^{op} \longrightarrow U$ 构成，它们的像在 U 中可交换，即对于任意 $a_1, a_2 \in U$，都有 $s(a_1)t(a_2) = t(a_2)s(a_1)$。态射 s 和 t 通常分别称为源映射与目标映射。这些态射通过左乘法在 U 上引入一个 (A, A)-双模结构

$$a_1 \cdot u \cdot a_2 := s(a_1)t(a_2)u \qquad a_1, a_2 \in A,\ u \in U \tag{2.1}$$

(2.1) 中 U 上的左、右 A-模结构使我们可以考虑张量积 $U \otimes_A U$。$U \otimes_A U$ 的下述子空间称为竹内积

$$U \times_A U := \{\sum u_i \otimes_A u_i' \in U \otimes_A U \mid \sum u_i t(a) \otimes_A u_i' = \sum u_i \otimes_A u_i' s(a), \forall\, a \in A\} \tag{2.2}$$

众所周知（例如参见 [24, § 2]），竹内积 $U \times_A U$ 是 $U \otimes_A U$ 的含幺子代数。

从现在起，我们还固定一个含幺 k-代数 U。U 上的乘法记为 μ_U。由于 (A, A)-双模范畴是幺半范畴，我们可以考虑该范畴中的余代数对象。现在回顾左 Hopf 代数余群的概念（例如参见 [5], [24], [37]）。关于几个密切相关的概念，参见 [34], [35]。

Defi义 2.1. k 上的左双代数胚 $\mathcal{U}_L := (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L)$ 由以下数据组成：

(1) 一个含幺 k-代数 A_L(2) 一个含幺 k-代数 U，它具有 A_L 上的 (s_L, t_L) 环结构。

(3) 范畴中的一个余代数对象 $(U, \Delta_L : U \longrightarrow U \otimes_{A_L} U, \varrho_L : U \longrightarrow A_L)$，其中对象为 (A_L, A_L)-双模，并满足以下条件：

(i) $\Delta_L : U \longrightarrow U \otimes_{A_L} U$ 可经由 $U \times_{A_L} U \subseteq U \otimes_{A_L} U$ 分解，且 $U \longrightarrow U \times_{A_L} U$ 是含幺 k-代数态射。

(ii) 对所有 $u, u' \in U$，均有 $\varrho_L(us_L(\varrho_L(u'))) = \varrho_L(uu') = \varrho_L(ut_L(\varrho_L(u')))$。

左双代数胚 $(U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L) = \mathcal{U}_L \longrightarrow \mathcal{U}_L' = (U', A_L', s_L', t_L', \Delta_L', \varrho_L')$ 的态射 (F, f) 由一对含幺 k-代数态射 $F : U \longrightarrow U'$ 和 $f : A_L \longrightarrow A_L'$ 构成，使得

$$F \circ s_L = s_L' \circ f \qquad F \circ t_L = t_L' \circ f \qquad \Delta_L' \circ F = (F \otimes_f F) \circ \Delta_L \qquad f \circ \epsilon_L = \epsilon_L' \circ F \tag{2.3}$$

我们将 k 上的左双代数胚范畴记为 LBialg_k。

若 $\mathcal{U}_L = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L)$ 是一个左双代数胚，则我们采用标准的 Sweedler 记号，将 $\Delta_L(u) = P\, u_{(1)} \otimes u^{(2)}$ 表示为任意 $u \in U$。我们也始终省略求和符号。现在回顾 [5, 定义 4.1] 中 Hopf 代数胚的概念。

定义 2.2。一个 k 上的 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, S)$ 由以下数据构成：

(1) 一个 k 上的左双代数胚 $\mathcal{U}_L = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L)$。

(2) 一个反自同构 $S : U \longrightarrow U$，它是 k-代数 U 的对合，并满足 $S \circ t_L = s_L$，以及 s

$$S(u_{(1)})_{(1)}u_{(2)} \otimes S(u_{(1)})_{(2)} = 1_U \otimes S(u) \qquad S(u_{(2)})_{(1)} \otimes S(u_{(2)})_{(2)}u_{(1)} = S(u) \otimes 1_U \tag{2.4}$$

作为 $U \otimes_{A_L} U$ 中的元素，对所有 $u \in U$ 均成立。

Hopf 代数胚的态射 $(F, f) : \mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, S) \longrightarrow (\mathcal{U}_L', S') = \mathcal{U}'$ 是 LBialg_k 中的态射，且还满足 $S' \circ F = F \circ S$。我们将 k 上的 Hopf 代数胚范畴记为 HAlg_k。

这里需要说明，本文始终假设 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (U_L, S)$ 上的反 antipode 是对合的，即 $S^2 = \mathrm{id}$。不过，根据 B¨ohm 和 Szlach´anyi 在 [5] 中给出的定义，这一条件并非定义的一部分。此外，[5, 命题 4.2] 证明了，Hopf 代数胚 $(\mathcal{U}_L, S)$ 等价于由一个左双代数胚和一个右双代数胚通过反 antipode 连接而成的数据。

现在我们回顾 Sweedler [36]提出的经典余代数测量概念。设 R、R′ 为 k-代数，C 为 k-余代数。那么，从 R 到 R′ 的 C-测度由一个态射 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R, R')$ 构成，满足

$$\psi(x)(ab) = \sum \psi(x_{(1)})(a)\psi(x_{(2)})(b) \qquad \psi(x)(1_R) = \epsilon_C(x)1_{R'} \qquad \forall\, a, b \in R \tag{2.5}$$

其中余乘法 $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$ 由 $\Delta_C(x) = P\, x_{(1)} \otimes x^{(2)}$ 给出，对任意 $x \in C$ 都成立；而 $\varrho_C : C \longrightarrow k$ 为余单位。从现在起，我们几乎总是在 Sweedler 记号中省略求和符号，并写作 $\Delta_C(x) = x_{(1)} \otimes x^{(2)}$。(2.5) 中的测量称为余交换的，当且仅当余代数 C 是余交换的。本文将只考虑余交换测量。若 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R, R')$ 是一个余代数测量，我们通常将态射 $\psi(x) \in \mathrm{Vect}_k(R, R')$ 简写为 $x : R \longrightarrow R'$，其中任意 $x \in C$。

现在我们可以引入 Hopf 代数胚之间测量的概念。

定义 2.3. 设 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, S) = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 和 $\mathcal{U}' = (\mathcal{U}'_L, S') = (U', A'_L, s'_L, t'_L, \Delta'_L, \varrho'_L, S')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。设 C 是余交换的 k-余代数。一个从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}'$ 的 C-测度 (Ψ, ψ) 由一对测量组成

$$\Psi : C \longrightarrow Vect_k(U, U') \qquad \psi : C \longrightarrow Vect_k(A_L, A'_L) \tag{2.6}$$

使得对于任意 $x \in C$，下列图表交换

$$\begin{array}{ccc} A_L & \xrightarrow{s_L} & U \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ A'_L & \xrightarrow{s'_L} & U' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_L & \xrightarrow{t_L} & U \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ A'_L & \xrightarrow{t'_L} & U' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{S} & U \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ U' & \xrightarrow{S'} & U' \end{array} \tag{2.7}$$

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\epsilon_L} & A_L \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ U' & \xrightarrow{\epsilon'_L} & A'_L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\Delta_L} & U \otimes_{A_L} U \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ U' & \xrightarrow{\Delta'_L} & U' \otimes_{A'_L} U' \end{array} \tag{2.8}$$

其中箭头 $x : U \otimes_{A_L} U \longrightarrow U' \otimes_{A'_L} U'$ 定义为：对 $u^1 \otimes u^2$，令 $x(u^1 \otimes u^2) := x^{(1)}(u^1) \otimes x^{(2)}(u^2)$，其中 $u^1 \otimes u^2 \in U \otimes_{A_L} U$。

在继续之前，我们需要验证以下事实。

引理 2.4. 对任意 $x \in C$，由 $x(u^1 \otimes u^2) := x^{(1)}(u^1) \otimes x^{(2)}(u^2)$ 定义的态射 $x : U \otimes_{A_L} U \longrightarrow U' \otimes_{A'_L} U'$，其中 $u^1 \otimes u^2 \in U \otimes_{A_L} U$，是良定义的。

证明。考虑 $u^1, u^2 \in U$ 和 $a \in A_L$。利用 $\Psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(U, U')$ 是测量这一事实，并应用 (2.7) 和 (2.8) 中的条件，我们得到对于任意 $x \in C$,

$$\begin{aligned} x((u^1 \cdot a) \otimes u^2) = x(t_L(a)u^1 \otimes u^2) &= x_{(1)}(t_L(a)u^1) \otimes x_{(2)}(u^2) = x_{(1)}(t_L(a))x_{(2)}(u^1) \otimes x_{(3)}(u^2) \\ &= t'_L(x_{(1)}(a))x_{(2)}(u^1) \otimes x_{(3)}(u^2) \\ &= t'_L(x_{(2)}(a))x_{(1)}(u^1) \otimes x_{(3)}(u^2) \quad \text{(because } C \text{ is cocommutative)} \\ &= x_{(1)}(u^1) \cdot x_{(2)}(a) \otimes x_{(3)}(u^2) = x_{(1)}(u^1) \otimes x_{(2)}(a) \cdot x_{(3)}(u^2) \\ &= x_{(1)}(u^1) \otimes s'_L(x_{(2)}(a))x_{(3)}(u^2) = x_{(1)}(u^1) \otimes x_{(2)}(s_L(a))x_{(3)}(u^2) \\ &= x_{(1)}(u^1) \otimes x_{(2)}(s_L(a)u^2) = x_{(1)}(u^1) \otimes x_{(2)}(a \cdot u^2) \\ &= x(u^1 \otimes (a \cdot u^2)) \end{aligned} \tag{2.9}$$

□

若 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, S)$ 和 $\mathcal{U}' = (\mathcal{U}'_L, S')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚，现在考虑子空间

$$V(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \subseteq Vect_k(U, U') \times Vect_k(A_L, A'_L) \tag{2.10}$$

定义为

$$V(\mathcal{U}, \mathcal{U}') := \{(F, f) \mid Fs_L = s'_L f, Ft_L = t'_L f, FS = S'F \text{ and } f\epsilon_L = \epsilon'_L F\} \tag{2.11}$$

注意，通过余交换余代数 C 从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}'$ 的测量，其底层态射为 $(\Psi, \psi) : C \longrightarrow V(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$。

令 Coalg_k 表示 k-余代数范畴。我们知道，遗忘函子 $\mathrm{Coalg}_k \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ 有一个右伴随 $\mathrm{C} : \mathrm{Vect}_k \longrightarrow \mathrm{Coalg}_k$。换言之，我们有自然同构

$$Vect_k(C, V) \cong Coalg_k(C, \mathfrak{C}(V)) \tag{2.12}$$

对于任意 k-余代数 C 和任意 k-向量空间 V。

命题 2.5. 设 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, \mathrm{S})$ 和 $\mathcal{U}' = (\mathcal{U}'_L, \mathrm{S}')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。则存在一个余交换余代数$\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$以及一个测量 $(\Phi, \phi) : \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \longrightarrow \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$，满足以下泛性质：给定任意一个测量 $(\Psi, \psi) : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$，其中 C 是余交换余代数，则存在唯一的余代数态射 $\xi : \mathrm{C} \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') & \xrightarrow{\quad(\Phi,\phi)\quad} & \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \\ & {\scriptstyle\xi}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle(\Psi,\psi)} & \\ & C & \end{array} \tag{2.13}$$

证明。令 $\mathrm{V} := \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$，并考虑由 (2.12) 中的伴随所诱导的典范态射 $\pi(\mathrm{V}) : \mathrm{C}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{V} \subseteq \mathrm{Vect}_k(\mathrm{U}, \mathrm{U}') \times \mathrm{Vect}_k(\mathrm{A}_L, \mathrm{A}'_L)$，它从余自由余代数 C(V) 出发。现在令 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') := \mathrm{P}\,\mathrm{D}$，其中求和遍及 C(V) 的所有余交换子余代数，并且限制 $\pi(\mathrm{V})|_D : \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ 是一个测量。显然，这个和仍是一个余交换余代数，并且限制 $(\Phi, \phi) := \pi(\mathrm{V})|_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\ \mathcal{U}')}$ 给出一个从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}'$ 的测量。

一般而言，若 $(\Psi, \psi) : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ 是一个余交换测量，则 (2.12) 中的伴随表明它可经由 $\xi : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}(\mathrm{V})$ 分解。于是，$\xi(\mathrm{C}) \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{V})$ 是一个余交换余代数，且其限制 $\pi(\mathrm{V})|_{\xi(C)}$ 是一个测量。根据定义可知，$\xi(\mathrm{C}) \subseteq \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$。结果得证。□

由 (2.10) 和 (2.11) 可知，给定 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, \mathrm{S})$、$\mathcal{U}' = (\mathcal{U}'_L, \mathrm{S}')$ 和 $\mathcal{U}'' = (\mathcal{U}''_L, \mathrm{S}'')$，态射的复合会诱导一个典范映射

$$V(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes V(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') \xrightarrow{\circ} V(\mathcal{U}, \mathcal{U}'') \tag{2.14}$$

我们用 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 表示 k 上余交换余代数构成的范畴。我们知道该范畴是对称幺半的，我们的目标是证明 Hopf 代数胚范畴 HAlg_k 以 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 为底范畴加细。为此，我们需要以下结果。

命题 2.6. 设 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, \mathrm{S})$、$\mathcal{U}' = (\mathcal{U}'_L, \mathrm{S}')$ 和 $\mathcal{U}'' = (\mathcal{U}''_L, \mathrm{S}'')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。假设有一个测量 $(\Psi, \psi) : \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$，以及一个测量 $(\Psi', \psi') : \mathrm{C}' \longrightarrow \mathrm{V}(\mathcal{U}', \mathcal{U}'')$。那么，以下

$$(\Psi', \psi') \circ (\Psi, \psi) : C \otimes C' \xrightarrow{(\Psi,\psi)\otimes(\Psi',\psi')} V(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes V(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') \xrightarrow{\circ} V(\mathcal{U}, \mathcal{U}'') \tag{2.15}$$

确定了一个从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}''$ 的测量。

证明。容易验证，这些复合

$$\begin{aligned} C \otimes C' &\xrightarrow{\Psi\otimes\Psi'} Vect_k(U, U') \otimes Vect_k(U', U'') \xrightarrow{\circ} Vect_k(U, U'') \\ C \otimes C' &\xrightarrow{\psi\otimes\psi'} Vect_k(A_L, A'_L) \otimes Vect_k(A'_L, A''_L) \xrightarrow{\circ} Vect_k(A_L, A''_L) \end{aligned} \tag{2.16}$$

给出了余代数测量　　分别从 U 到 U″，以及从 A_L 到 A''_L。对于 $\mathrm{x} \otimes \mathrm{x}' \in \mathrm{C} \otimes \mathrm{C}'$ 和 $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$，我们还看到 th at

$$\begin{aligned} \Delta''_L((x \otimes x')(u)) = \Delta''_L(x'(x(u))) \quad &= x'_{(1)}(x(u)_{(1)}) \otimes x'_{(2)}(x(u)_{(2)}) \\ &= x'_{(1)}(x_{(1)}(u_{(1)})) \otimes x'_{(2)}(x_{(2)}(u_{(2)})) \\ &= (x' \otimes x)_{(1)}(u_{(1)}) \otimes (x' \otimes x)_{(2)}(u_{(2)}) \end{aligned} \tag{2.17}$$

显然，(2.15) 中的态射也满足定义 2.3 中的所有其他条件。由此得证。□

定理 2.7. 范畴 HA　　Hopf 代数胚的 lg_k 在余交换 k-余代数范畴 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 中是丰化的。

证明. 给定 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, \mathrm{S})$ 和 $\mathcal{U}' = (\mathcal{U}'_L, \mathrm{S}')$，我们考虑位于 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 中的"同态对象" $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$。这些同态对象的复合如下得到：若 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 和 $\mathcal{U}''$ 是 Hopf 代数胚，则如命题 2.6 中那样，我们得到一个测量

$$\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes \mathcal{M}_c(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') \longrightarrow V(\mathcal{U}, \mathcal{U}'') \tag{2.18}$$

应用命题 2.5 中的泛性质，我们现在有一个余代数态射 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes \mathcal{M}_c(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}'')$。$\mathrm{CoCoalg}_k$ 中的单位对象是 k，将其视为自身上的余代数。于是，对于任意 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, \mathrm{S}) = (\mathrm{U}, \mathrm{A}_L, \mathrm{s}_L, \mathrm{t}_L, \Delta_L, \varrho_L, \mathrm{S})$，我们有一个单位映射

$$k \longrightarrow V(\mathcal{U}, \mathcal{U}) \subseteq Vect_k(U, U) \times Vect_k(A_L, A_L) \qquad t \mapsto (t \cdot id_U, t \cdot id_{A_L}) \tag{2.19}$$

再由命题 2.5 中的泛性质，可诱导出一个余交换余代数的态射 $\mathrm{k} \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U})$。结合 (2.18) 中同态对象的复合，我们看到 HAlg_k 是在 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 上富集的。□

从现在起，我们将以 HALG_k 表示在对称幺半范畴 $\mathrm{CoCoalg}_k$（由余交换 k-代数组成）上富集的 Hopf 代数胚范畴。第 4 节将用到这个富集范畴。

3 循环（上）同调上的态射与 Hopf-Galois 映射　　s

设 $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_L, \mathrm{S}) = (\mathrm{U}, \mathrm{A}_L, \mathrm{s}_L, \mathrm{t}_L, \Delta_L, \varrho_L, \mathrm{S})$ 是 k 上的一个 Hopf 代数胚。现在我们回顾 [24, § 2] 中的余循环模 $\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U})$，它计算 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ 的循环上同调。对于 $\mathrm{n} \geq 1$，令

$$C^n(\mathcal{U}) := \underbrace{U \otimes_{A_L} \otimes \cdots \otimes_{A_L} U}_{n\text{-times}} \tag{3.1}$$

使用如（2.1）中的（$\mathrm{A}_L, \mathrm{A}_L$）-双模结构，并令 $\mathrm{C}^0(\mathcal{U}) := \mathrm{A}_L$。对于 $\mathrm{n} \geq 1$，余面映射 $\delta_i : \mathrm{C}^n(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{C}^{n+1}(\mathcal{U})$ 定义为

$$\delta_i(u^1 \otimes ... \otimes u^n) := \begin{cases} 1 \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^n & \text{if } i = 0 \\ u^1 \otimes .... \otimes \Delta_L u^i \otimes ... \otimes u^n & \text{if } 1 \leq i \leq n \\ u^1 \otimes .... \otimes u^n \otimes 1 & \text{if } i = n+1 \end{cases} \tag{3.2}$$

对于 $\mathrm{n} = 0$，有两个映射 $\delta_0 := \mathrm{t}_L : \mathrm{C}^0(\mathcal{U}) = \mathrm{A}_L \longrightarrow \mathrm{C}^1(\mathcal{U}) = \mathrm{U}$ 和 $\delta_1 := \mathrm{s}_L : \mathrm{C}^0(\mathcal{U}) = \mathrm{A}_L \longrightarrow \mathrm{C}^1(\mathcal{U}) = \mathrm{U}$。余退化映射 $\sigma_i : \mathrm{C}^n(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{C}^{n-1}(\mathcal{U})$ 定义为

$$\sigma_i(u^1 \otimes ... \otimes u^n) := u^1 \otimes ... \otimes \epsilon_L(u^{i+1}) \cdot u^{i+2} \otimes ... \otimes u^n \qquad 0 \leq i \leq n-1 \tag{3.3}$$

余循环算子 $\tau_n : \mathrm{C}^n(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{C}^n(\mathcal{U})$ 的定义如下

$$\tau_n(u^1 \otimes ... \otimes u^n) := (S(u^1)_{(1)} \cdot u^2) \otimes .... \otimes (S(u^1)_{(n-1)} \cdot u^n) \otimes S(u^1)_{(n)} \tag{3.4}$$

由于我们假设反 antipode S 是对合的，根据 [24, 定理 2.1] 可知，$\mathrm{C}^\bullet(\mathcal{U})$ 确实是一个余循环模。我们将 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ 的循环上同调群记为 $\mathrm{HC}^\bullet(\mathcal{U})$。Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ 的 Hochschild 上同调群则记为 $\mathrm{HH}^\bullet(\mathcal{U})$。

设 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 为 Hopf 代数胚，且 (Ψ, ψ): $\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ 是从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}'$ 的余交换测量。对于每个 $\mathrm{x} \in \mathrm{C}$，我们现在定义一个态射族

$$\overline{\Psi}^n(x) : C^n(\mathcal{U}) \longrightarrow C^n(\mathcal{U}') \qquad \overline{\Psi}^n(x)(u^1 \otimes ... \otimes u^n) := x(u^1 \otimes ... \otimes u^n) = x_{(1)}(u^1) \otimes ... \otimes x_{(n)}(u^n) \qquad \forall\, n \geq 0 \tag{3.5}$$

现在我们证明本节的第一个主要结果。

命题 3.1. 设 C 为余交换余代数，且 $(\Psi,\psi):\mathsf{C}\longrightarrow\mathbb{V}(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ 是 Hopf 代双群胚的测量。对每个 $\mathrm{x}\in\mathsf{C}$，族 $\{\overline{\Psi}^n(\mathrm{x}):\mathsf{C}^n(\mathcal{U})\longrightarrow\mathsf{C}^n(\mathcal{U}')\}_{n\geq 0}$ 给出一个余循环模的态射。特别地，我们得到诱导态射

$$\overline{\Psi}^{\bullet}_{hoc}(x):HH^{\bullet}(\mathcal{U})\longrightarrow HH^{\bullet}(\mathcal{U}')\qquad \overline{\Psi}^{\bullet}_{cy}(x):HC^{\bullet}(\mathcal{U})\longrightarrow HC^{\bullet}(\mathcal{U}') \tag{3.6}$$

在每个 $\mathrm{x}\in\mathsf{C}$ 上的 Hochschild 上同调和循环上同调。

证明。对于每个 $\mathrm{x}\in\mathsf{C}$，我们首先证明 $\overline{\Psi}^{n+1}(\mathrm{x})\circ\delta_i=\delta'_i\circ\overline{\Psi}^n(\mathrm{x}):\mathsf{C}^n(\mathcal{U})\longrightarrow\mathsf{C}^{n+1}(\mathcal{U}')$，其中 δ_i 和 δ'_i 分别是余循环模 $\mathsf{C}^{\bullet}(\mathcal{U})$ 和 $\mathsf{C}^{\bullet}(\mathcal{U}')$ 上的余面映射。若 $\mathrm{i}=0$ 或 $\mathrm{i}=\mathrm{n}+1$，由 (3.2) 中的定义和 (3.5) 中的作用可立即得出这一点。对于 $1\leq\mathrm{i}\leq\mathrm{n}$，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}^{n+1}(x)\circ\delta_i(u^1\otimes\ldots\otimes u^n) &= \overline{\Psi}^{n+1}(x)(u^1\otimes\ldots.\otimes\Delta_L u^i\otimes\ldots\otimes u^n)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes\ldots\otimes x_{(i)}(u^i_{(1)})\otimes x_{(i+1)}(u^i_{(2)})\otimes\ldots.\otimes x_{(n+1)}(u^n)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes\Delta_L(x_{(i)}(u^i))\otimes\ldots\otimes x_{(n)}(u^n)=\delta'_i\circ\overline{\Psi}^n(x)(u^1\otimes\ldots\otimes u^n)\end{aligned}$$

接下来，我们验证 $\overline{\Psi}^{n-1}(\mathrm{x})\circ\sigma_i=\sigma'_i\circ\overline{\Psi}^n(\mathrm{x})$，其中 σ_i 和 σ'_i 分别是余循环模 $\mathsf{C}^{\bullet}(\mathcal{U})$ 和 $\mathsf{C}^{\bullet}(\mathcal{U}')$ 上的余退化映射。

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}^{n-1}(x)\circ\sigma_i(u^1\otimes\ldots\otimes u^n) &= \overline{\Psi}^{n-1}(x)(u^1\otimes\ldots\otimes\epsilon_L(u^{i+1})\cdot u^{i+2}\otimes\ldots\otimes u^n)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes\ldots\otimes x_{(i+1)}(\epsilon_L(u^{i+1})\cdot u^{i+2})\otimes\ldots\otimes x_{(n-1)}(u^n)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes\ldots\otimes x_{(i+1)}(\epsilon_L(u^{i+1}))\cdot x_{(i+2)}(u^{i+2})\otimes\ldots\otimes x_{(n)}(u^n)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes\ldots\otimes\epsilon'_L(x_{(i+1)}(u^{i+1}))\cdot x_{(i+2)}(u^{i+2})\otimes\ldots\otimes x_{(n)}(u^n)\\ &= \sigma'_i\circ\overline{\Psi}^n(x)(u^1\otimes\ldots\otimes u^n)\end{aligned}$$

最后，我们证明 $\overline{\Psi}^n(\mathrm{x})\circ\tau_n=\tau'_n\circ\overline{\Psi}^n(\mathrm{x})$，其中 τ_n 和 τ'_n 分别是余循环模 $\mathsf{C}^{\bullet}(\mathcal{U})$ 和 $\mathsf{C}^{\bullet}(\mathcal{U}')$ 上的余循环算子：

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}^n(x)\circ\tau_n(u^1\otimes\ldots\otimes u^n) &= \overline{\Psi}^n(x)((S(u^1)_{(1)}\cdot u^2)\otimes\ldots.\otimes(S(u^1)_{(n-1)}\cdot u^n)\otimes S(u^1)_{(n)})\\ &= x_{(1)}((S(u^1)_{(1)}\cdot u^2))\otimes\ldots.\otimes x_{(n-1)}((S(u^1)_{(n-1)}\cdot u^n)\otimes x_{(n)}(S(u^1)_{(n)})\\ &= x_{(1)}(S(u^1)_{(1)})\cdot x_{(2)}(u^2)\otimes\ldots.\otimes x_{(2n-3)}(S(u^1)_{(n-1)})\cdot x_{(2n-2)}(u^n)\otimes x_{(2n-1)}(S(u^1)_{(n)})\\ &= x_{(1)}(S(u^1)_{(1)})\cdot x_{(n+1)}(u^2)\otimes\ldots.\otimes x_{(n-1)}(S(u^1)_{(n-1)})\cdot x_{(2n-1)}(u^n)\otimes x_{(n)}(S(u^1)_{(n)})\\ &= (x_{(1)}(S(u^1)))_{(1)}\cdot x_{(2)}(u^2)\otimes\ldots.\otimes(x_{(1)}(S(u^1)))_{(n-1)}\cdot x_{(n)}(u^n)\otimes(x_{(1)}(S(u^1)))_{(n)}\\ &= (S'(x_{(1)}(u^1)))_{(1)}\cdot x_{(2)}(u^2)\otimes\ldots.\otimes(S'(x_{(1)}(u^1)))_{(n-1)}\cdot x_{(n)}(u^n)\otimes(S'(x_{(1)}(u^1)))_{(n)}\\ &= \tau'_n\circ\overline{\Psi}^n(x)(u^1\otimes\ldots\otimes u^n)\end{aligned}$$

□

我们继续讨论 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_L,\mathrm{S})=(\mathrm{U},\mathrm{A}_L,\mathrm{s}_L,\mathrm{t}_L,\Delta_L,\varrho_L,\mathrm{S})$。如第 2 节所述，我们设 $\mathrm{A}_R:=\mathrm{A}^{op}{}_L=\mathrm{A}^{op}$。按照 [5, § 4]，我们还设

$$s_R:=t_L\qquad t_R:=S\circ t_L=s_L\qquad \epsilon_R:=\epsilon_L\circ S:U\longrightarrow A_R \tag{3.7}$$

于是，U 通过如下的左乘法和右乘法成为一个 $(\mathrm{A}_R,\mathrm{A}_R)$-双模

$$a_1\cdot u\cdot a_2:=s_R(a_1)us_R(a_2) \tag{3.8}$$

现在设 $\mathcal{U},\mathcal{U}'$ 为 Hopf 代数胚，并考虑 $(\mathrm{F},\mathrm{f})\in\mathbb{V}(\mathcal{U},\mathcal{U}')$。由 (2.11) 中的条件和 (3.7) 中的定义，我们已有

$$Fs_R=s'_Rf\qquad Ft_R=t'_Rf\qquad FS=S'F\qquad f\epsilon_R=\epsilon'_RF \tag{3.9}$$

现在我们需要以下结果。

引理 3.2. 设 C 是一个余交换余代数，且 $(\Psi,\psi):\mathsf{C}\longrightarrow \mathsf{V}(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ 是 Hopf 代双群胚的测量。那么，对每个 $\mathrm{x}\in\mathsf{C}$，都存在一个定义良好的态射

$$x: U\otimes_{A_R} U\longrightarrow U'\otimes_{A'_R} U' \qquad u^1\otimes u^2\mapsto x_{(1)}(u^1)\otimes x_{(2)}(u^2) \tag{3.10}$$

证明。考虑 $\mathrm{u}^1,\mathrm{u}^2\in\mathrm{U}$ 和 $\mathrm{a}\in\mathrm{A}_R$。利用 $\Psi:\mathsf{C}\longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathrm{U},\mathrm{U}')$ 是一个测量这一事实，并应用 (3.9) 中的条件，我们可知对任意 $\mathrm{x}\in\mathsf{C}$，有

$$\begin{aligned} x((u^1\cdot a)\otimes u^2)=x(u^1 s_R(a)\otimes u^2) &= x_{(1)}(u^1 s_R(a))\otimes x_{(2)}(u^2)=x_{(1)}(u^1)x_{(2)}(s_R(a))\otimes x_{(3)}(u^2)\\ &= x_{(1)}(u^1)s'_R(x_{(2)}(a))\otimes x_{(3)}(u^2)\\ &= x_{(1)}(u^1)\cdot x_{(2)}(a)\otimes x_{(3)}(u^2)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes x_{(2)}(a)\cdot x_{(3)}(u^2)=x_{(1)}(u^1)\otimes s'_R(x_{(2)}(a))x_{(3)}(u^2)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes x_{(2)}(s_R(a))x_{(3)}(u^2)\\ &= x_{(1)}(u^1)\otimes x_{(2)}(s_R(a)u^2)=x_{(1)}(u^1)\otimes x_{(2)}(a\cdot u^2)=x(u^1\otimes(a\cdot u^2)) \end{aligned}$$

由此可知，(3.10) 中的态射是良定义的。 □

现在回顾 [24, § 2.3.1] 中的循环模 $\mathsf{C}_\bullet(\mathcal{U})$，它定义了 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ 的循环同调。对于 $\mathrm{n}\geq 0$，我们使用 (3.8) 中的双模结构，令

$$C_n(\mathcal{U}):=\underbrace{U\otimes_{A_R}\otimes\cdots\otimes_{A_R} U}_{n\text{-times}} \tag{3.11}$$

以及 $\mathsf{C}_0(\mathcal{U}):=\mathrm{A}_R$。面映射 $\mathrm{d}_i:\mathsf{C}_n(\mathcal{U})\longrightarrow\mathsf{C}_{n-1}(\mathcal{U})$ 定义为

$$d_i(u^1\otimes\ldots\otimes u^n):=\begin{cases}\epsilon_R(u^1)\cdot u^2\otimes\ldots\otimes u^n & \text{if } i=0\\ u^1\otimes\ldots\otimes u^i u^{i+1}\otimes\ldots\otimes u^n & \text{if } 1\leq i\leq n-1\\ u^1\otimes\ldots\otimes u^{n-1}\cdot\epsilon_R(S(u^n)) & \text{if } i=n\end{cases} \tag{3.12}$$

退化映射 $\mathrm{s}_i:\mathsf{C}_n(\mathcal{U})\longrightarrow\mathsf{C}_{n+1}(\mathcal{U})$ 定义为

$$s_i(u^1\otimes\ldots\otimes u^n):=\begin{cases}1\otimes u^1\otimes\ldots\otimes u^n & \text{if } i=0\\ u^1\otimes\ldots\otimes u^i\otimes 1\otimes u^{i+1}\otimes\ldots.\otimes u^n & \text{if } 1\leq i\leq n\end{cases} \tag{3.13}$$

循环算子 $\mathrm{t}_n:\mathsf{C}_n(\mathcal{U})\longrightarrow\mathsf{C}_n(\mathcal{U})$ 定义为

$$t_n(u^1\otimes\ldots\otimes u^n):=S(u^1_{(2)}\ldots u^{n-1}_{(2)}u^n)\otimes u^1_{(1)}\otimes u^2_{(1)}\otimes\ldots\otimes u^{n-1}_{(1)} \tag{3.14}$$

Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ 的 Hochschild 同调群记作 $\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U})$，循环同调群记作 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathcal{U})$。现在我们将证明命题 3.1 的同调对应结果。

命题 3.3. 设 C 为余交换余代数，且 $(\Psi,\psi):\mathsf{C}\longrightarrow \mathsf{V}(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ 是 Hopf 代数胚的测量。对于每个 $\mathrm{x}\in\mathsf{C}$，这个族

$$\underline{\Psi}_n(x):C_n(\mathcal{U})\longrightarrow C_n(\mathcal{U}') \qquad u^1\otimes\ldots\otimes u^n\mapsto x(u^1\otimes\ldots\otimes u^n)=x_{(1)}(u^1)\otimes\ldots\otimes x_{(n)}(u^n) \tag{3.15}$$

对于 $\mathrm{n}\geq 0$，给出一个循环模态射。特别地，我们得到诱导态射

$$\underline{\Psi}^{hoc}_\bullet(x):HH_\bullet(\mathcal{U})\longrightarrow HH_\bullet(\mathcal{U}') \qquad \underline{\Psi}^{cy}_\bullet(x):HC_\bullet(\mathcal{U})\longrightarrow HC_\bullet(\mathcal{U}') \tag{3.16}$$

对于每个 $\mathrm{x}\in\mathsf{C}$，在 Hochschild 同调和循环同调上。

证明。由引理 3.2 可知，(3.15) 中 $\underline{\Psi}_n(x)$ 的态射是良定义的。利用 (3.9) 中的性质以及 $\Psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(U, U')$ 是测量这一事实，可以很容易地验证，映射 $\underline{\Psi}_\bullet(x)$ 与循环模 $C_\bullet(\mathcal{U})$ 和 $C_\bullet(\mathcal{U}')$ 上相应的面映射和退化映射相交换。此外，若 t_n 和 t'_n 分别是 $C_\bullet(\mathcal{U})$ 和 $C_\bullet(\mathcal{U}')$ 上相应的循环算子，则对每个 $x \in C$,

$$\begin{aligned}
x(t_n(u^1 \otimes ... \otimes u^n)) &= x(S(u^1_{(2)}...u^{n-1}_{(2)}u^n) \otimes u^1_{(1)} \otimes u^2_{(1)} \otimes ... \otimes u^{n-1}_{(1)}) \\
&= x_{(1)}(S(u^1_{(2)}...u^{n-1}_{(2)}u^n)) \otimes x_{(2)}(u^1_{(1)}) \otimes x_{(3)}(u^2_{(1)}) \otimes ... \otimes x_{(n)}(u^{n-1}_{(1)}) \\
&= S'(x_{(1)}(u^1_{(2)})...x_{(n-1)}(u^{n-1}_{(2)})x_{(n)}(u^n)) \otimes x_{(n+1)}(u^1_{(1)}) \otimes ... \otimes x_{(2n-1)}(u^{n-1}_{(1)}) \\
&= S'(x_{(2)}(u^1_{(2)})...x_{(2n-2)}(u^{n-1}_{(2)})x_{(2n-1)}(u^n)) \otimes x_{(1)}(u^1_{(1)}) \otimes ... \otimes x_{(2n-3)}(u^{n-1}_{(1)}) \qquad \text{（因为 C 是余交换的）} \\
&= S'(x_{(1)}(u^1)_{(2)}...x_{(n-1)}(u^{n-1})_{(2)}x_{(n)}(u^n)) \otimes x_{(1)}(u^1)_{(1)} \otimes ... \otimes x_{(n-1)}(u^{n-1})_{(1)} \\
&= t'_n(x_{(1)}(u^1) \otimes ... \otimes x_{(n)}(u^n))
\end{aligned}$$

□

本节的最终目标是说明，由 Hopf 代数胚的测量所诱导的态射与循环对偶相容。更确切地说，由 [24, § 2.3.3] 可知，存在 Hopf-Galois 映射

$$\xi_n(\mathcal{U}) : C_n(\mathcal{U}) \xrightarrow{\cong} C^n(\mathcal{U}) \qquad u^1 \otimes ... \otimes u^n \mapsto u^1_{(1)} \otimes u^1_{(2)}u^2_{(1)} \otimes u^1_{(3)}u^2_{(2)}u^3_{(1)} \otimes ... \otimes u^1_{(n)}u^2_{(n-1)}....u^{n-1}_{(2)}u^n \tag{3.17}$$

它们在 $C_\bullet(\mathcal{U})$ 与 $C^\bullet(\mathcal{U})$ 之间诱导同构。现在我们有以下结果。

命题 3.4. 设 C 是余交换余代数，且 $(\Psi, \psi) : C \longrightarrow V(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ 是 Hopf 代数胚的测量。那么对每个 $x \in C$，以下图表可交换

$$\begin{array}{ccc}
C_n(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\xi_n(\mathcal{U})} & C^n(\mathcal{U}) \\
{\scriptstyle \underline{\Psi}_n(x)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\Psi}^n(x)} \\
C_n(\mathcal{U}') & \xrightarrow{\xi_n(\mathcal{U}')} & C^n(\mathcal{U}')
\end{array} \tag{3.18}$$

证明. 令 $N := n(n+1)/2$。利用 $\Psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(U, U')$ 是测量且 C 余交换这一事实，我们有

$$\begin{aligned}
x(\xi_n(\mathcal{U})(u^1 \otimes ... \otimes u^n)) &= x(u^1_{(1)} \otimes u^1_{(2)}u^2_{(1)} \otimes u^1_{(3)}u^2_{(2)}u^3_{(1)} \otimes ... \otimes u^1_{(n)}u^2_{(n-1)}....u^{n-1}_{(2)}u^n) \\
&= x_{(1)}(u^1_{(1)}) \otimes x_{(2)}(u^1_{(2)})x_{(3)}(u^2_{(1)}) \otimes ... \otimes x_{(N+1-n)}(u^1_{(n)})....x_{(N-1)}(u^{n-1}_{(2)})x_{(N)}(u^n) \\
&= x_{(1)}(u^1_{(1)}) \otimes x_{(2)}(u^1_{(2)})x_{(n+1)}(u^2_{(1)}) \otimes ... \otimes x_{(n)}(u^1_{(n)})....x_{(N-1)}(u^{n-1}_{(2)})x_{(N)}(u^n) \\
&= \xi_n(\mathcal{U}')(x_{(1)}(u^1) \otimes ... \otimes x_{(n)}(u^n))
\end{aligned}$$

这就证明了该结果。 □

4 混洗乘积与交换Hopf 代数胚范畴的富化

我们回顾第 2 节中的范畴 HALG_k，它是由 k 上的 Hopf 代数胚构成的范畴，并以余交换 k-余代数范畴 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 作为对称幺半范畴进行富化。若 cHALG_k 表示 HALG_k 中由交换 Hopf 代数胚构成的全子范畴，则 cHALG_k 也以 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 进行富化。本节将利用 Hochschild 同调中的洗牌乘积，得到交换 Hopf 代数胚在余交换余代数中的第二种富化。

设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 是一个交换 Hopf 代数胚。那么，U 和 $A_L = A = A_R$ 都是交换环。根据 [28, § 4.2]，我们知道交换代数的 Hochschild 同调带有混洗乘积结构。对于交换 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$，现在我们回顾 [26, § 4.4.1] 中的 (p, q)-混洗乘积

$$sh_{pq}(\mathcal{U}) : C_p(\mathcal{U}) \otimes C_q(\mathcal{U}) \longrightarrow C_{p+q}(\mathcal{U}) \tag{4.1}$$

它由以下公式给出（其中 p, q ≥ 1）

$$sh_{pq}(\mathcal{U})((u^1\otimes ...\otimes u^p)\otimes(u^{p+1}\otimes ...\otimes u^{p+q})) := \sum_{\sigma\in Sh(p,q)} sgn(\sigma)(u^{\sigma^{-1}(1)}\otimes ...\otimes u^{\sigma^{-1}(p+q)}) \tag{4.2}$$

这里，S h(p, q) 是 (p, q)-洗牌的集合，即

$$Sh(p,q) := \{\sigma\in S_{p+q} \mid \sigma(1) < ... < \sigma(p); \sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q)\} \tag{4.3}$$

当 p = q = 0 时，洗牌乘积 ct 通过令 $sh_{00}(\mathcal{U})$ 为 A 上的乘法来定义。此外，有（见 [26, § 4.4.1]）

$$\begin{array}{ll} sh_{p0}(\mathcal{U}) : C_p(\mathcal{U})\otimes C_0(\mathcal{U}) \longrightarrow C_p(\mathcal{U}) & (u^1\otimes ...\otimes u^p)\otimes a \mapsto (t_L(a)u^1\otimes ...\otimes u^p) \\ sh_{0q}(\mathcal{U}) : C_0(\mathcal{U})\otimes C_q(\mathcal{U}) \longrightarrow C_q(\mathcal{U}) & a\otimes(u^1\otimes ...\otimes u^p) \mapsto (u^1\otimes ...\otimes u^q t_L(a)) \end{array} \tag{4.4}$$

当 p ≥ 1 且 q ≥ 1 时。现在存在一个诱导乘积结构 $sh_{pq}(\mathcal{U}) : HH_p(\mathcal{U})\otimes HH_q(\mathcal{U}) \longrightarrow HH_{p+q}(\mathcal{U})$，它使交换Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$ 的 Hochschild 同调 $HH_\bullet(\mathcal{U}) := LHH_n(\mathcal{U})$ 成为一个分次代数（见 [26, § 4.4.1]）$_{n\geq 0}$，记作 $(HH_\bullet(\mathcal{U}), sh(\mathcal{U}))$。

命题 4.1. 设 $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ 是交换 Hopf 代数胚。设 C 是余交换余代数，且 $(\Psi,\psi) : C \longrightarrow V(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ 是 Hopf 代双群胚的测量。那么，诱导的K-线性映射

$$\underline{\Psi}^{hoc} : C \longrightarrow Vect_k(HH_\bullet(\mathcal{U}), HH_\bullet(\mathcal{U}')) \qquad x\mapsto (\underline{\Psi}^{hoc}_\bullet(x) : HH_\bullet(\mathcal{U}) \longrightarrow HH_\bullet(\mathcal{U}')) \tag{4.5}$$

给出了从 $(HH_\bullet(\mathcal{U}), sh(\mathcal{U}))$ 到 $(HH_\bullet(\mathcal{U}'), sh(\mathcal{U}'))$ 的代数测量。

证明。$(HH_\bullet(\mathcal{U}), sh(\mathcal{U}))$ 中的单位元由单位元 $1_A \in A = C_0(\mathcal{U})$ 的等价类给出。由于 $\psi : C \longrightarrow Hom_K(A, A')$ 特别给出了从 A 到 A′ 的测量，因此我们有 $\underline{\Psi}^{hoc}_\bullet(x)(1_A) = \varrho_C(x)1_{A'}$，其中 ϱ_C 是 C 上的余单位。现在注意，对于任意 x ∈ C 以及 p, q ≥ 1，有

$$\begin{aligned} &\underline{\Psi}_{p+q}(x)(sh_{pq}(\mathcal{U})((u^1\otimes ...\otimes u^p)\otimes(u^{p+1}\otimes ...\otimes u^{p+q}))) \\ &= \underline{\Psi}_{p+q}(x)\left(\sum_{\sigma\in Sh(p,q)} sgn(\sigma)(u^{\sigma^{-1}(1)}\otimes ...\otimes u^{\sigma^{-1}(p+q)})\right) \\ &= \sum_{\sigma\in Sh(p,q)} sgn(\sigma)(x_{(1)}(u^{\sigma^{-1}(1)})\otimes ...\otimes x_{(p+q)}(u^{\sigma^{-1}(p+q)})) \\ &= \sum_{\sigma\in Sh(p,q)} sgn(\sigma)(x_{\sigma^{-1}(1)}(u^{\sigma^{-1}(1)})\otimes ...\otimes x_{\sigma^{-1}(p+q)}(u^{\sigma^{-1}(p+q)})) \qquad \text{(because } C \text{ is cocommutative)} \\ &= sh_{pq}(\mathcal{U})((x_{(1)}(u^1)\otimes ...\otimes x_{(p)}(u^p))\otimes(x_{(p+1)}(u^{p+1})\otimes ...\otimes x_{(p+q)}(u^{p+q}))) \end{aligned} \tag{4.6}$$

对于 p ≥ 1，有

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_p(x)(sh_{p0}(\mathcal{U})((u^1\otimes ...\otimes u^p)\otimes a) &= \underline{\Psi}_p(x)((t_L(a)u^1\otimes ...\otimes u^p)) \\ &= (x_{(1)}(t_L(a)u^1)\otimes ...\otimes x_{(p)}(u^p)) \\ &= (x_{(1)}(t_L(a))x_{(2)}(u^1)\otimes ...\otimes x_{(p+1)}(u^p)) \\ &= (t'_L(x_{(p+1)}(a)))x_{(1)}(u^1)\otimes ...\otimes x_{(p)}(u^p)) \\ &= sh_{p0}(\mathcal{U})((x_{(1)}(u^1)\otimes ...\otimes x_{(p)}(u^p))\otimes x_{(p+1)}(a)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

我们也可以类似地验证 sh_{0q} 在 q ≥ 1 时以及 sh_{00} 的情形。由此证明了该结果。

□

我们的下一个目标是利用命题 4.1，得到交换 Hopf 代数胚关于余交换余代数范畴的富化。为此，我们回顾以下事实：若 R、R′ 是 k-代数，则从 R 到 R′ 的余代数测量范畴包含一个终对象 $\varphi(R, R') : \mathcal{M}(R, R') \longrightarrow Vect_k(R, R')$（见 Sweedler [36]）。于是，$\mathcal{M}(R, R')$ 称为泛测量余代数。令 $\mathcal{M}_c(R, R')$ 为余代数 $\mathcal{M}(R, R')$ 的余交换部分。接下来，

$\varphi_c(R, R')$: $\mathcal{M}_c(R, R') \hookrightarrow \mathcal{M}(R, R') \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R, R')$ 成为从 R 到 R′ 的余交换余代数测量范畴中的终对象（见 [17, 命题 1.4], [18]）。此外，对象 $\mathcal{M}_c(R, R')$ 使 k-代数关于余交换 k-余代数得到富化。

现在定义富集范畴 $\widetilde{\mathrm{cHALG}_k}$，其对象是 k 上的交换 Hopf 代数胚，而其同对象定义为

$$c\widetilde{HALG}_k(\mathcal{U}, \mathcal{U}') := \mathcal{M}_c((HH_\bullet(\mathcal{U}), sh(\mathcal{U})), (HH_\bullet(\mathcal{U}'), sh(\mathcal{U}'))) \in CoCoalg_k \tag{4.8}$$

对于交换 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$。由于每个 $(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{sh}(\mathcal{U}))$ 都是代数，因此我们还有一个余交换余代数的典范态射 $k \longrightarrow \mathcal{M}_c((\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{sh}(\mathcal{U})), (\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{sh}(\mathcal{U})))$。

引理 4.2。设 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 是交换 Hopf 代数胚。那么，存在一个余交换余代数的典范态射

$$\tau(\mathcal{U}, \mathcal{U}') : \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \longrightarrow \mathcal{M}_c((HH_\bullet(\mathcal{U}), sh(\mathcal{U})), (HH_\bullet(\mathcal{U}'), sh(\mathcal{U}'))) \tag{4.9}$$

证明。沿用命题 2.5 中的记号，(Φ, ϕ) : $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \longrightarrow \mathbf{V}(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ 是从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}'$ 的余交换测量。由命题 4.1，这诱导出一个从 $(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{sh}(\mathcal{U}))$ 到 $(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}'), \mathrm{sh}(\mathcal{U}'))$ 的代数测量。根据泛余交换测量余代数 $\mathcal{M}_c((\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{sh}(\mathcal{U})), (\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}'), \mathrm{sh}(\mathcal{U}')))$ 的性质，我们现在得到一个如 (4.9) 所示的诱导态射$\tau(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$。□

定理 4.3. 存在一个 $\mathrm{CoCoalg}_k$-富化函子 $\tau : \mathrm{cHALG}_k \longrightarrow \widetilde{\mathrm{cHALG}_k}$，它在对象上为恒等映射，且其态射对象上的映射由下式给出

$$\tau(\mathcal{U}, \mathcal{U}') : cHALG_k(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \longrightarrow \mathcal{M}_c((HH_\bullet(\mathcal{U}), sh(\mathcal{U})), (HH_\bullet(\mathcal{U}'), sh(\mathcal{U}'))) = c\widetilde{HALG}_k(\mathcal{U}, \mathcal{U} \tag{4.10}$$

对于 k 上的交换 Hopf 代数胚 $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$。

证明. 令 $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}', \mathcal{U}''$ 为交换 Hopf 代数胚。我们将证明下列图表可交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes \mathcal{M}_c(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}'') \\ {\scriptstyle \tau(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\tau(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau(\mathcal{U},\mathcal{U}'')} \\ \mathcal{M}_c(HH_\bullet(\mathcal{U}), HH_\bullet(\mathcal{U}')) \otimes \mathcal{M}_c(HH_\bullet(\mathcal{U}'), HH_\bullet(\mathcal{U}'')) & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{M}_c(HH_\bullet(\mathcal{U}), HH_\bullet(\mathcal{U}'')) \end{array} \tag{4.11}$$

(4.11) 中的上方水平复合 $\circ$: $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes \mathcal{M}_c(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}'')$ 由定理 2.7 得到，而下方水平复合 $\circ$: $\mathcal{M}_c(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}),\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}')) \otimes \mathcal{M}_c(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}'),\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}'')) \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}),\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}''))$ 则由余交换余代数中的代数富化得到。

由引理 4.2 和定理 2.7 可知，(4.11) 中的所有映射都是余交换余代数的态射。根据万有余交换测量余代数 $\mathcal{M}_c(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}''))$ 的性质，要证明 (4.11) 可交换，只需验证以下两个复合相等

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes \mathcal{M}_c(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') & & \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes \mathcal{M}_c(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') \\ {\scriptstyle \tau(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\tau(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ \mathcal{M}_c(HH_\bullet(\mathcal{U}), HH_\bullet(\mathcal{U}')) \otimes \mathcal{M}_c(HH_\bullet(\mathcal{U}'), HH_\bullet(\mathcal{U}'')) & & \mathcal{M}_c(\mathcal{U}, \mathcal{U}'') \\ {\scriptstyle \circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau(\mathcal{U},\mathcal{U}'')} \\ \mathcal{M}_c(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}'')) & & \mathcal{M}_c(HH_\bullet(\mathcal{U}), HH_\bullet(\mathcal{U}'')) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_c(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}),\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}''))} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_c(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}),\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}''))} \\ \mathrm{Vect}_k(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}'')) & & \mathrm{Vect}_k(\mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}), \mathrm{HH}_\bullet(\mathcal{U}'')) \end{array} \tag{4.12}$$

为方便起见，我们将 (4.12) 中的左垂直复合记为 ψ_1，将右垂直复合记为 ψ_2。现在考虑 $x \in \mathcal{M}_c(U, U')$、$y \in \mathcal{M}_c(U', U'')$ 以及 $(u^1 \otimes ... \otimes u^p) \in C^p(U)$。我们看到

$$\begin{aligned} \psi_2(x \otimes y)(u^1 \otimes ... \otimes u^p) &= (y \circ x)(u^1 \otimes ... \otimes u^p) \\ &= (y \circ x)_{(1)}(u^1) \otimes ... \otimes (y \circ x)_{(p)}(u^p) \end{aligned} \tag{4.13}$$

由于 $\circ : \mathcal{M}_c(U, U') \otimes \mathcal{M}_c(U', U'') \longrightarrow \mathcal{M}_c(U, U'')$ 是余代数态射，我们注意到 $(y \circ x)_{(1)} \otimes ... \otimes (y \circ x)_{(p)} = (y_{(1)} \circ x_{(1)}) \otimes ... \otimes (y_{(p)} \circ x_{(p)})$。结合 (4.13)，可知 (4.12) 中的右垂直复合可明确地描述为

$$\psi_2(x \otimes y)(u^1 \otimes ... \otimes u^p) = (y_{(1)} \circ x_{(1)})(u^1) \otimes ... \otimes (y_{(p)} \circ x_{(p)})(u^p) = y_{(1)}(x_{(1)}(u^1)) \otimes ... \otimes y_{(p)}(x_{(p)}(u^p)) \tag{4.14}$$

另一方面，我们注意到下图是交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_c(U, U') \otimes \mathcal{M}_c(U', U'') & \xrightarrow{\circ(\tau(U,U') \otimes \tau(U',U''))} & \mathcal{M}_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U'')) \\ {\scriptstyle (\varphi_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U')) \circ \tau(U,U')) \otimes} \downarrow {\scriptstyle (\varphi_c(HH_\bullet(U'), HH_\bullet(U'')) \circ \tau(U',U''))} & & {\scriptstyle \varphi_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U''))} \downarrow \\ Vect_k(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U')) \otimes Vect_k(HH_\bullet(U'), HH_\bullet(U'')) & \xrightarrow{\circ} & Vect_k(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U'')) \end{array} \tag{4.15}$$

F由 (4.15) 可知，(4.12) 中的左垂直复合可明确地描述为

$$\begin{aligned} \psi_1(x \otimes y)(u^1 \otimes ... \otimes u^p) &= y(x(u^1 \otimes ... \otimes u^p)) \\ &= y_{(1)}(x_{(1)}(u^1)) \otimes ... \otimes y_{(p)}(x_{(p)}(u^p)) \end{aligned} \tag{4.16}$$

由 (4.14) 和 (4.16)，我们可知 $\psi_1 = \psi_2$，因此图表 (4.11) 交换。类似地，考虑余代数 k，并利用其 p 次迭代余乘 $\Delta^p(1) = 1 \otimes ... \otimes 1$(p-times) 这一事实，可知下列复合相等

$$\begin{array}{c} k \longrightarrow \mathcal{M}_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U)) \xrightarrow{\varphi_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U))} Vect_k(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U)) \\ k \longrightarrow \mathcal{M}_c(U, U) \xrightarrow{\tau(U,U)} \mathcal{M}_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U)) \xrightarrow{\varphi_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U))} Vect_k(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U)) \end{array} \tag{4.17}$$

由 (4.17) 可知，下图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} k & \longrightarrow & \mathcal{M}_c(HH_\bullet(U), HH_\bullet(U)) \\ & \searrow \quad \nearrow_{\tau(U,U)} & \\ & \mathcal{M}_c(U, U) & \end{array} \tag{4.18}$$

这就证明了该结论。 □

5 SAYD 模的余模测量

设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 是一个 Hopf 代数胚。从现在开始，我们设 $A^e := A \otimes_k A^{op}$ 并定义

$$\eta_L : A^e = A \otimes_k A^{op} \xrightarrow{s_L \otimes t_L} U \otimes U \longrightarrow U \tag{5.1}$$

其中，(5.1) 中的第二个箭头是 U 上的乘法。沿用 [25, § 2] 的记号，我们注意到，现在 A 在 U 上有四个彼此可交换的作用，记作如下

$$a \triangleright u \triangleleft b := s_L(a)t_L(b)u \qquad a \blacktriangleright u \blacktriangleleft b := us_L(b)t_L(a) \qquad a, b \in A,\ u \in U \tag{5.2}$$

根据定义 2.1，我们得到一个 A-余环

$$\Delta_L : U \longrightarrow U_{\triangleleft} \otimes_A {}_{\triangleright}U \qquad \epsilon_L : U \longrightarrow A \tag{5.3}$$

A 在 U 上的左作用 $\blacktriangleright$ 可视为 A^{op} 在 U 上的右作用。同样，A 在 U 上的右作用 $\triangleleft$ 可视为 A^{op}对 U 的左作用。因此，我们可以考虑张量积

$${}_{\blacktriangleright}U \otimes_{A^{op}} U_{\triangleleft} := U \otimes_k U/\mathrm{span}\{a \blacktriangleright u \otimes v - u \otimes v \triangleleft a \mid u, v \in U, a \in A\} \tag{5.4}$$

现在有一个 Hopf-Galois 映射（见 [5], [25], [35]）

$$\beta(\mathcal{U}) : {}_{\blacktriangleright}U \otimes_{A^{op}} U_{\triangleleft} \longrightarrow U_{\triangleleft} \otimes_A {}_{\triangleright}U \qquad u \otimes_{A^{op}} v \mapsto u_{(1)} \otimes_A u_{(2)}v \tag{5.5}$$

由于 $\mathcal{U}$ 是 Hopf 代数胚，由此可知（见 [5, 命题 4.2]），(5.5) 中的态射 $\beta(\mathcal{U})$ 是一个双射。因此，采用 [25], [35], 的记号，我们写作

$$u_+ \otimes_{A^{op}} u_- := \beta(\mathcal{U})^{-1}(u \otimes_A 1) \qquad u \in U \tag{5.6}$$

本节将讨论 Hopf 代数胚上稳定反 Yetter–Drinfeld 模之间的余模测量。为此，我们首先回顾普通模之间余模测量的概念。设 R、R′ 为 k-代数，且 P、P′ 分别为 R 和 R′ 上的右模。那么，从 P 到 P′ 的余模测量由一对映射组成（见 [4], [22]）

$$\psi : C \longrightarrow Vect_k(R, R') \qquad \omega : D \longrightarrow Vect_k(P, P') \tag{5.7}$$

其中，C 是一个 k-余代数，D 是一个右 C-余模，ψ : C $\longrightarrow$ Vect$_k$(R, R′) 是一个余代数测量，并且

$$\omega(y)(pr) = y(pr) = y_{(0)}(p)y_{(1)}(r) = \omega(y_{(0)})(p)\psi(y_{(1)})(r) \tag{5.8}$$

对于 y $\in$D、p $\in$P 和 r $\in$R。对于 $\mathcal{U}$ = (U, A_L, s_L, t_L, Δ_L, ϱ_L, S)，我们现在回顾 $\mathcal{U}$-模、 $\mathcal{U}$-余模以及稳定反 Yetter–Drinfeld 模的概念。

定义 5.1。（见 [25, § 2.4]）设 $\mathcal{U}$ = (U, A_L, s_L, t_L, Δ_L, ϱ_L, S) 是一个 Hopf 代数胚。右 $\mathcal{U}$-模 P 是 k-代数 U 上的右模。由于环同态 $\eta_L : A^e \longrightarrow U$，任意右 $\mathcal{U}$-模 P 也带有一个右 A^e-模结构（或 (A, A)-双模结构），其定义如下:

$$b \blacktriangleright p \blacktriangleleft a = p(a \otimes b) = p\eta_L((a \otimes 1)(1 \otimes b)) = ps_L(a)t_L(b) \tag{5.9}$$

对于 (a $\otimes$ b) $\in A^e = A \otimes_k A^{op}$ 以及 p $\in$P。

定义 5.2.（见 [6], [11], [25], [34]）设 $\mathcal{U}$ = (U, A_L, s_L, t_L, Δ_L, ϱ_L, S) 是一个 Hopf 代数胚。左 $\mathcal{U}$-余模 P 是余环 (U, Δ_L : U $\longrightarrow$ U $\otimes_{A_L}$ U, ϱ_L : U $\longrightarrow$ A_L) 上的左余模。特别地，左 $\mathcal{U}$-余模 P 配备了一个左 A-模结构 (a, p) $\mapsto$ ap，以及一个左 A-模映射

$$\Delta_P : P \longrightarrow U_{\triangleleft} \otimes_A P \qquad p \mapsto p_{(-1)} \otimes p_{(0)} \tag{5.10}$$

根据 [25, § 2.5], ，我们注意到，任意左 $\mathcal{U}$-余模 P 也带有一个右 A-模结构，定义如下:

$$pa := \epsilon_L(p_{(-1)}s_L(a))p_{(0)} \tag{5.11}$$

对于 p $\in$P、a $\in$A。这样，通过定义如下，任意左 $\mathcal{U}$-余模 P 都成为一个右 $A^e = A \otimes_k A^{op}$-模:

$$p(a \otimes b) = bpa = b\epsilon_L(p_{(-1)}s_L(a))p_{(0)} \tag{5.12}$$

对于 p $\in$P 和 (a $\otimes$b) $\in A^e$。

定义 5.3。（参见 [25, 定义 2.7]）设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 是一个 Hopf 代数胚。P 上的反 Yetter-Drinfeld 模由以下数据给出

(1) P 上的右 $\mathcal{U}$-模结构记为 $(p, u) \mapsto pu$，其中 $p \in P$，$u \in U$。

(2) P 上的左 $\mathcal{U}$-余模结构给出 $\Delta_P : P \longrightarrow U_\triangleleft \otimes_A P$。

(3) 由 (5.9) 诱导的 P 上的右 A^e-模结构与 (5.12) 中 P 上的右 A^e-模结构一致：

$$ps_L(a)t_L(b) = b \blacktriangleright p \blacktriangleleft a = b\epsilon_L(p_{(-1)}s_L(a))p_{(0)} \tag{5.13}$$

(4) 对于 $u \in U$ 和 $p \in P$，有

$$\Delta_P(pu) = u_- p_{(-1)}u_{+(1)} \otimes_A p_{(0)}u_{+(2)} \tag{5.14}$$

在 $\mathcal{U}$ 上的反 Yetter-Drinfeld 模之间的态射，是与右 $\mathcal{U}$-模结构和左 $\mathcal{U}$-余模结构相容的向量空间态射。反 Yetter-Drinfeld 模范畴记为 ${}^{\mathcal{U}}\mathrm{aYD}_{\mathcal{U}}$。此外，若反 Yetter-Drinfeld 模 P 是稳定的，即为 SAYD 模，则对任意 $p \in P$，都有 $p^{(0)}p^{(-1)} = p$。

引理 5.4. 设 R、R′ 是 k-代数，且 $R^e = R \otimes_k R^{op}$、$R'^e = R' \otimes_k R'^{op}$ 分别是它们的包络代数。设 C 是余交换 k-余代数，并设 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R,R')$ 是一个测量。那么，

$$\psi^e : C \longrightarrow Vect_k(R^e, R'^e) \qquad \psi^e(x)(r_1 \otimes r_2) = x(r_1 \otimes r_2) = x_{(1)}(r_1) \otimes x_{(2)}(r_2) = \psi(x_{(1)})(r_1) \otimes \psi(x_{(2)})(r_2) \tag{5.15}$$

是一个代数测量。

证明。由 (5.15) 可立即得出 $x(1 \otimes 1) = \varrho_C(x)(1 \otimes 1)$，其中 ϱ_C 是 C 上的余单位。由于 C 是余交换的，对于 $(r_1 \otimes r_2)$、$(r_3 \otimes r_4) \in R^e$，有

$$\begin{aligned} x((r_1 \otimes r_2)(r_3 \otimes r_4)) = x(r_1r_3 \otimes r_4r_2) &= x_{(1)}(r_1r_3) \otimes x_{(2)}(r_4r_2) \\ &= x_{(1)}(r_1)x_{(2)}(r_3) \otimes x_{(3)}(r_4)x_{(4)}(r_2) \\ &= x_{(1)}(r_1)x_{(3)}(r_3) \otimes x_{(4)}(r_4)x_{(2)}(r_2) \\ &= (x_{(1)}(r_1) \otimes x_{(2)}(r_2))(x_{(3)}(r_3) \otimes x_{(4)}(r_4)) \\ &= x_{(1)}(r_1 \otimes r_2)x_{(2)}(r_3 \otimes r_4) \end{aligned} \tag{5.16}$$

□

引理 5.5. 设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 和 $\mathcal{U}' = (U', A'_L, s'_L, t'_L, \Delta'_L, \varrho'_L, S')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。设 P（分别地，P′）是 $\mathcal{U}$（分别地，$\mathcal{U}'$）上的 SAYD 模。设 C 是余交换 k-余代数，D 是右 C-余模。假设给定以下数据

$$\Psi : C \longrightarrow Vect_k(U, U') \qquad \psi : C \longrightarrow Vect_k(A, A') \qquad \Omega : D \longrightarrow Vect_k(P, P') \tag{5.17}$$

使得

(1) (Ψ, ψ) 是从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}'$ 的 Hopf 代双群胚的测量。

(2) (Ψ, Ω) 是从右 U-模 P 到右 U′ 模 P′ 的余模测量。

那么，我们有：

(a) (ψ^e, Ω) 是从右 A^e-模 P 到右 A'^e-模 P′ 的余模测量。

(b) 对每个 $y \in D$，下面的态射是良定义的

$$y : U_\triangleleft \otimes_A P \longrightarrow U'_\triangleleft \otimes_{A'} P' \qquad y(u \otimes_A p) := \Psi(y_{(1)})(u) \otimes_{A'} \Omega(y_{(0)})(p) = y_{(1)}(u) \otimes_{A'} y_{(0)}(p) \tag{5.18}$$

证明。(a) 由于 C 是余交换的，根据引理 5.4，我们已经知道 $\psi^e : C \longrightarrow Vect_k(A^e, A'^e)$ 是从 A^e 到 A'^e的余代数测量。现在考虑 $(a \otimes b) \in A^e = A \otimes_k A^{op}$ 以及 $p \in P$。根据 (5.9)，我们知道 $p(a \otimes b) = ps_L(a)t_L(b)$。对于任意 $y \in D$，现在有

$$\begin{aligned}\Omega(y)(p(a\otimes b)) = \Omega(y)(ps_L(a)t_L(b)) &= \Omega(y_{(0)})(p)\Psi(y_{(1)})(s_L(a)t_L(b))\\ &= \Omega(y_{(0)})(p)\Psi(y_{(1)})(s_L(a))\Psi(y_{(2)})(t_L(b))\\ &= \Omega(y_{(0)})(p)s'_L(\psi(y_{(1)})(a))t'_L(\psi(y_{(2)})(b))\\ &= \Omega(y_{(0)})(p)(\psi(y_{(1)})(a)\otimes\psi(y_{(2)})(b))\\ &= \Omega(y_{(0)})(p)(\psi^e(y_{(1)})(a\otimes b))\end{aligned} \tag{5.19}$$

(b) 由于 P 和 P′ 是 SAYD 模，依据定义 (5.9)、(5.12) 以及条件 (5.13)，可得

$$ap = pt_L(a) \qquad a'p' = p't'_L(a') \qquad a \in A, a' \in A', p \in P, p' \in P' \tag{5.20}$$

等式 (5.20) 左侧的表达式来自 P 上的左 A-模作用（分别为 P′ 上的左 A′-模作用），该作用出现在结构映射 $\Delta_P : P \longrightarrow U_\triangleleft \otimes_A P$（分别为结构映射 $\Delta'_{P'} : P' \longrightarrow U'_\triangleleft \otimes_{A'} P'$）中。对于 $\in A$、$u \in U$ 和 $p \in P$，我们现在可以看到

$$\begin{aligned}y(u\otimes_A ap) &= \Psi(y_{(1)})(u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(ap)\\ &= \Psi(y_{(1)})(u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(pt_L(a)) && \text{(using (5.20))}\\ &= \Psi(y_{(2)})(u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(p)\Psi(y_{(1)})(t_L(a))\\ &= \Psi(y_{(2)})(u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(p)t'_L(\psi(y_{(1)})(a))\\ &= \Psi(y_{(2)})(u)\otimes_{A'}\psi(y_{(1)})(a)\Omega(y_{(0)})(p) && \text{(using (5.20))}\\ &= \Psi(y_{(2)})(u)\triangleleft\psi(y_{(1)})(a)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(p)\\ &= t'_L(\psi(y_{(1)})(a))\Psi(y_{(2)})(u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(p) && \text{(using (5.2))}\end{aligned} \tag{5.21}$$

另一方面，我们还有

$$\begin{aligned}y(u\triangleleft a\otimes_A p) &= y(t_L(a)u\otimes_A p) && \text{(using (5.2))}\\ &= \Psi(y_{(1)})(t_L(a)u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(p)\\ &= \Psi(y_{(1)})(t_L(a))\Psi(y_{(2)})(u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(p)\\ &= t'_L(\psi(y_{(1)})(a))\Psi(y_{(2)})(u)\otimes_{A'}\Omega(y_{(0)})(p)\end{aligned} \tag{5.22}$$

这就证明了该结论。 □

现在我们可以引入 SAYD 模之间余模测量的概念 .

定义 5.6. 设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 和 $\mathcal{U}' = (U', A'_L, s'_L, t'_L, \Delta'_L, \varrho'_L, S')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。设 P（分别为 P′）是 $\mathcal{U}$（分别为 $\mathcal{U}'$）上的 SAYD 模。设 C 是余交换余代数。那么，从 P 到 P′ 的一个 (C, Ψ, ψ)-余模测量由以下数据组成

$$\Psi : C \longrightarrow Vect_k(U, U') \qquad \psi : C \longrightarrow Vect_k(A, A') \qquad \Omega : D \longrightarrow Vect_k(P, P') \tag{5.23}$$

使得

(1) (Ψ, ψ) 是从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}'$ 的 Hopf 代双群胚的测量。

(2) (Ψ, Ω) 是从右 U-模 P 到右 U′ 模 P′ 的余模测量。

(3) 对每个 $y \in D$，下面的图表交换

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Delta_P} & U_\triangleleft \otimes_A P \\ {\scriptstyle y:=\Omega(y)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ P' & \xrightarrow{\Delta'_{P'}} & U'_\triangleleft \otimes_{A'} P' \end{array} \tag{5.24}$$

其中，右侧的竖直态射如（5.18）中所定义

现在我们将构造 SAYD 模之间的泛测量余模。根据定义，k-余代数 C 上的右余模是余单子 $\otimes_k C : \mathrm{Vect}_k \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ 上的余代数。因此，来自右 C-余模范畴的遗忘函子 $\mathrm{Comod}\text{–}C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k$ 有一个右伴随（例如，参见 [9, § 2.4]），记为 R_C，即我们有如下自然同构

$$Vect_k(D, V) \cong Comod - C(D, \Re_C(V)) \tag{5.25}$$

对任意 $D \in \mathrm{Comod}\text{–}C$ 和 $V \in \mathrm{Vect}_k$。

定理 5.7. 设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 和 $\mathcal{U}' = (U', A'_L, s'_L, t'_L, \Delta'_L, \varrho'_L, S')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。设 P（分别地，P′）是 $\mathcal{U}$（分别地，$\mathcal{U}'$）上的 SAYD 模。设 C 是余交换余代数，且 $(\Psi, \psi) : C \longrightarrow V(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ 是 Hopf 代数胚的测量。

那么，存在一个 (C, Ψ, ψ)-余模测量 $\Theta : \Omega_C(P, P') \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(P, P')$，满足以下性质：给定任意从 P 到 P′ 的 (C, Ψ, ψ)-余模测量 $\Omega : D \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(P, P')$，存在一个态射 $\chi : D \longrightarrow \Omega_C(P, P')$，它是右 C-余模之间的态射，使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} \Omega_C(P, P') & \xrightarrow{\quad\Theta\quad} & Vect_k(P, P') \\ & {\scriptstyle\chi}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\Omega} & \\ & D & \end{array} \tag{5.26}$$

证明。令 $V := \mathrm{Vect}_k(P, P')$。由 (5.25) 中的伴随，存在一个向量空间的典范态射 $\rho(V) : R_C(V) \longrightarrow V$。我们定义 $\Omega_C(P, P') := P\,Q$，其中求和遍及 $R_C(V)$ 的所有右 C-余子模，且其限制映射 $\rho(V)|Q : Q \longrightarrow V = \mathrm{Vect}_k(P, P')$ 是从 P 到 P′ 的 (C, Ψ, ψ)-余模测量，其含义见定义 5.6。显然，$\Theta : \rho(V)|\Omega_C(P, P') : \Omega_C(P, P') \longrightarrow V = \mathrm{Vect}_k(P, P')$ 是一个 (C, Ψ, ψ)-余模测量。

此外，给定一个从 P 到 P′的 (C, Ψ, ψ)-余模测量 $\Omega : D \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(P, P')$，(5.25) 中的伴随给出一个右 C-余模态射 $\chi : D \longrightarrow R_C(V)$，满足 $\rho(V) \circ \chi = \Omega$。但我们注意到，$\rho(V)|\chi(D) : \chi(D) \longrightarrow V$ 是一个 (C, Ψ, ψ)-余模测量，因此可得其像 $\chi(D) \subseteq \Omega_C(P, P')$。结论显然。□

引理 5.8. 设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$，$\mathcal{U}' = (U', A'_L, s'_L, t'_L, \Delta'_L, \varrho'_L, S')$ 和 $\mathcal{U}'' = (U'', A''_L, s''_L, t''_L, \Delta''_L, \varrho''_L, S'')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。设 P、P′ 和 P″ 分别是 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$ 和 $\mathcal{U}''$ 上的 SAYD 模。假设我们有：

(1) $\Psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(U, U')$，$\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(A, A')$ 和 $\Omega : D \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(P, P')$，它们给出了从 P 到 P′ 的余模测量数据。

(2) $\Psi' : C' \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(U', U'')$、$\psi' : C' \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(A', A'')$ 和 $\Omega' : D' \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(P', P'')$，给出了从 P′ 到 P″ 的余模测量数据。

那么，以下

$$\begin{array}{c} (\Psi', \psi') \circ (\Psi, \psi) : C \otimes C' \xrightarrow{(\Psi,\psi)\otimes(\Psi',\psi')} V(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \otimes V(\mathcal{U}', \mathcal{U}'') \xrightarrow{\circ} V(\mathcal{U}, \mathcal{U}'') \\ \Omega' \circ \Omega : D \otimes D' \xrightarrow{\Omega\otimes\Omega'} Vect_k(P, P') \otimes Vect_k(P', P'') \xrightarrow{\circ} Vect_k(P, P'') \end{array} \tag{5.27}$$

给出了一个余模测量的数据 从 P 到 P″。此外，还有一个右 $(C \otimes C')$-余模的典范态射 *les*

$$\Omega_C(P, P') \otimes \Omega_{C'}(P', P'') \longrightarrow \Omega_{C\otimes C'}(P, P'') \tag{5.28}$$

证明。由命题 2.6 可知，$(\Psi', \psi') \circ (\Psi, \psi) : C \otimes C' \longrightarrow V(\mathcal{U}, \mathcal{U}'')$ 是 Hopf 代双群胚的测量。也可以直接验证，$((\Psi', \psi') \circ (\Psi, \psi), \Omega' \circ \Omega)$ 是从右 U-模 P 到右 U″-模 P″ 的余模测量。为检验定义 5.6 中的条件 (5.24)，我们注意到，对于任意 $y \otimes y' \in D \otimes D'$、$u \in U$ 和 $p \in P$:

$$(y \otimes y')(u \otimes_A p) = (y \otimes y')_{(1)}(u) \otimes_{A''} (y \otimes y')_{(0)}(p) = y'_{(1)}(y_{(1)}(u)) \otimes_{A''} y'_{(0)}(y_{(0)}(p)) = y'(y(u \otimes_A p))) \tag{5.29}$$

由于测量 (Ψ, ψ, Ω) 和 (Ψ', ψ', Ω') 都满足 (5.24) 中的条件，因此显然 $((\Psi', \psi') \circ (\Psi, \psi), \Omega' \circ \Omega)$ 也满足该条件。因此，(5.27) 给出了从 P 到 P″ 的余模测量数据。根据定义，$\Omega_C(P, P')$（分别地，$\Omega_{C'}(P', P'')$）是从 P 到 P′ 的测量余模（分别地，是从 P′ 到 P″ 的测量余模）。由 (5.27) 可知，$\Omega_C(P, P') \otimes \Omega_{C'}(P', P'')$ 是从 P 到 P″ 的测量余模。由 $\Omega_{C\otimes C'}(P, P'')$ 的泛性质即可得到 (5.28) 中的态射。□

现在考虑“余模的全局范畴” Comod_k，其对象是有序对 (C, D)，其中 C 是余交换 k-余代数，D 是 C-余模。Comod_k 中的态射 (f, g) : (C, D) $\longrightarrow$ (C′, D′) 由一个 k-余代数态射 f : C $\longrightarrow$ C′ 和一个 C′-余模态射 g : D $\longrightarrow$ D′ 组成，其中 D 通过标量限制被视为 C′-余模。显然，令 (C, D) $\otimes$ (C′, D′) := (C $\otimes$ C′, D $\otimes$ D′)，便使 Comod_k 成为对称幺半范畴。

定理 5.9. 令 SAYD_k 为如下范畴：
(a) 对象：对 (𝒰, P)，其中 𝒰 是一个 Hopf-代数胚，且 P 是 𝒰上的 S AYD-模。
(b) Hom对象：对于对 (𝒰, P)、(𝒰′, P′) $\in$ S AYD_k，定义

$$SAYD_k((\mathcal{U},P),(\mathcal{U}',P')) := (\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'),\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')}(P,P')) \in Comod_k \tag{5.30}$$

于是，S AYD_k 是由余模范畴 Comod_k富集的。

证明. 对任意 (𝒰, P) $\in$ S AYD_k，由定理 2.7 的证明可知，存在一个 k-余代数之间的态射 k $\longrightarrow$ $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U})$。利用恒等映射的标量倍数，并应用定理 5.7 中的泛性质，可得一个态射 k $\longrightarrow$ $\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U})}$(P, P)。现在考虑 (𝒰, P)、(𝒰′, P′)、(𝒰″, P″) $\in$ S AYD_k。令 C =$\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ 且 C′ = $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')$，对引理 5.8 加以应用，可得一个态射 $\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')}$(P, P′)$\otimes\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}$(P′, P″) $\longrightarrow$ $\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}$(P, P″)，它是 ($\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')$)-余模之间的态射。由定理 2.7 的证明，我们已有一个 k-余代数之间的态射 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')$ $\longrightarrow$$\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')$。结合上述结果，可得 Comod_k中的一个态射

$$SAYD_k((\mathcal{U},P),(\mathcal{U}',P'))\otimes SAYD_k((\mathcal{U}',P'),(\mathcal{U}'',P'')) \longrightarrow (\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}''),\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}(P,P'')) \tag{5.31}$$

在 (5.31) 中，$\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}$(P, P″) 通过 k-余代数的态射 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')$ $\longrightarrow$ $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')$ 成为一个 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')$-余模。由定理 2.7 的证明可知，态射 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ $\otimes$ $\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')$ $\longrightarrow$ $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')$ 是将 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')$ $\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')$ $\longrightarrow$V(𝒰, 𝒰′) $\otimes$V(𝒰′, 𝒰″) $\overset{\circ}{\to}$V(𝒰, 𝒰″) 这一测量应用于 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')$ 的泛性质所得到的。因此，将映射 $\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}$(P, P″) $\longrightarrow$ Vect_k(P, P″) 视为一个 $\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')$-余模时，它给出一个测量。定理 5.7 中 $\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')}$(P, P″) 的泛性质现在给出一个态射

$$(\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}''),\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}')\otimes\mathcal{M}_c(\mathcal{U}',\mathcal{U}'')}(P,P'')) \longrightarrow (\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}''),\Omega_{\mathcal{M}_c(\mathcal{U},\mathcal{U}'')}(P,P'')) \tag{5.32}$$

在 Comod_k 中。将 (5.32) 与 (5.31) 复合，我们得到所需的 Hom对象 S AYD_k((𝒰, P), (𝒰′, P′)) $\otimes$S AYD_k((𝒰′, P′), (𝒰″, P″)) $\longrightarrow$ S AYD_k((𝒰, P), (𝒰″, P″)) 的复合。这就证明了该结果。□

6 循环（上）同调上的余模测量与态射

在本节中，我们固定如下条件：设 𝒰 = (U, A_L, s_L, t_L, Δ_L, ϱ_L, S) 和 𝒰′ = (U′, A'_L, s'_L, t'_L, Δ'_L, ϱ'_L, S′) 是定义在 k 上的 Hopf 代数胚。设 P 和 P′ 分别是 𝒰 和 𝒰′ 上的 SAYD 模。设 (Ψ,ψ) : C $\longrightarrow$ V(𝒰, 𝒰′) 是一个余交换测量，且 Ω : D $\longrightarrow$ Vect_k(P, P′) 是从 P 到 P′ 的一个 (C, Ψ,ψ)-余模测量。

由于 𝒰, 𝒰′ 是 Hopf 代数胚，我们在第 5 节中已回顾过，采用 (5.5) 中的记号，态射 $\beta(\mathcal{U})$: ${}_{\blacktriangleright}U \otimes_{A^{op}} U_{\blacktriangleleft} \longrightarrow U_{\blacktriangleleft}\otimes_A {}_{\blacktriangleright}U$ 和 $\beta(\mathcal{U}')$: ${}_{\blacktriangleright}U'\otimes_{A'^{op}} U'_{\blacktriangleleft} \longrightarrow U'_{\blacktriangleleft}\otimes_{A'} {}_{\blacktriangleright}U'$ 是双射。现在我们需要以下结果。

引理 6.1. 对每个 x $\in$ C，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} U_{\blacktriangleleft}\otimes_A {}_{\blacktriangleright}U & \xrightarrow{\beta(\mathcal{U})^{-1}} & {}_{\blacktriangleright}U\otimes_{A^{op}} U_{\blacktriangleleft} \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & {\scriptstyle x}\downarrow \\ U'_{\blacktriangleleft}\otimes_{A'} {}_{\blacktriangleright}U' & \xrightarrow{\beta(\mathcal{U}')^{-1}} & {}_{\blacktriangleright}U'\otimes_{A'^{op}} U'_{\blacktriangleleft} \end{array} \tag{6.1}$$

这里，左侧的垂直映射由 $u^1\otimes_A u^2 \mapsto x^{(1)}(u^1)\otimes_{A'} x^{(2)}(u^2)$ 给出，右侧的垂直映射由 $u^1\otimes_{A^{op}} u^2 \mapsto x^{(1)}(u^1)\otimes_{A'^{op}} x^{(2)}(u^2)$ 给出。

证明。容易验证 (6.1) 中的垂直态射是良定义的。此外，由于 $\beta(\mathcal{U})$ 和 $\beta(\mathcal{U}')$ 可逆，只需验证下图交换

$$\begin{array}{ccc} {}_{\triangleright}U \otimes_{A^{op}} U_{\triangleleft} & \xrightarrow{\beta(\mathcal{U})} & U_{\triangleleft} \otimes_A {}_{\triangleright}U \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ {}_{\triangleright}U' \otimes_{A'^{op}} U'_{\triangleleft} & \xrightarrow{\beta(\mathcal{U}')} & U'_{\triangleleft} \otimes_{A'} {}_{\triangleright}U' \end{array} \tag{6.2}$$

现在我们看到，对于 $u \otimes_{A^{op}} v \in {}_{\triangleright}U \otimes_{A^{op}} U_{\triangleleft}$ 以及 $x \in C$，有

$$x(\beta(\mathcal{U})(u \otimes_{A^{op}} v)) = x(u_{(1)} \otimes_A u^{(2)}v) = x^{(1)}(u^{(1)}) \otimes_{A'} x^{(2)}(u^{(2)})x^{(3)}(v) = (x^{(1)}(u))_{(1)} \otimes_{A'} (x^{(1)}(u))^{(2)}x^{(2)}(v) = \beta(\mathcal{U}')(x^{(1)}(u) \otimes x^{(2)}(v))$$

这就证明了该结论。 □

由引理 6.1，按照（5.6）中的记号可得

$$x_{(1)}(u_+) \otimes_{A'^{op}} x_{(2)}(u_-) = x(u_+ \otimes_{A^{op}} u_-) = \beta(\mathcal{U}')^{-1}(x(u \otimes_A 1)) = x(u)_+ \otimes_{A'^{op}} x(u)_- \tag{6.3}$$

对每个 $u \in U$。现在回顾 [25, 定理 4.1]，其中指出，$\mathcal{U}$ 以 SAYD 模 P 为系数的 Hochschild 同调群 $HH_\bullet(\mathcal{U}; P)$（相应地，循环同调群 $HC_\bullet(\mathcal{U}; P)$）可由循环模 $C_\bullet(\mathcal{U}; P) := P \otimes_{A^{op}} ({}_{\triangleright}U_{\triangleleft})^{\otimes_{A^{op}}\bullet}$ 得到，其算子如下（其中 $\bar{u} := u^1 \otimes_{A^{op}} \otimes ... \otimes_{A^{op}} u^n$，$p \in P$）

$$\begin{aligned} d_i(p \otimes_{A^{op}} \bar{u}) &:= \begin{cases} p \otimes_{A^{op}} u^1 \otimes_{A^{op}} \cdots \otimes_{A^{op}} u^{n-1} t_L(\epsilon_L(u^n)) & \text{if } i = 0 \\ p \otimes_{A^{op}} u^1 \otimes_{A^{op}} \cdots \otimes_{A^{op}} u^{n-i}u^{n-i+1} \otimes_{A^{op}} \ldots & \text{if } 1 \le i \le n-1 \\ pu^1 \otimes_{A^{op}} u^2 \otimes_{A^{op}} \cdots \otimes_{A^{op}} u^n & \text{if } i = n \end{cases} \\ s_i(p \otimes_{A^{op}} \bar{u}) &:= \begin{cases} p \otimes_{A^{op}} u^1 \otimes_{A^{op}} \cdots \otimes_{A^{op}} u^n \otimes_{A^{op}} 1 & \text{if } i = 0 \\ p \otimes_{A^{op}} \cdots \otimes_{A^{op}} u^{n-i} \otimes_{A^{op}} 1 \otimes_{A^{op}} u^{n-i+1} \otimes_{A^{op}} \ldots & \text{if } 1 \le i \le n-1 \\ p \otimes_{A^{op}} 1 \otimes_{A^{op}} u^1 \otimes_{A^{op}} \cdots \otimes_{A^{op}} u^n & \text{if } i = n \end{cases} \\ t_n(p \otimes_{A^{op}} \bar{u}) &:= p_{(0)}u^1_+ \otimes_{A^{op}} u^2_+ \otimes_{A^{op}} \cdots \otimes_{A^{op}} u^n_+ \otimes_{A^{op}} u^n_- \ldots u^1_- p_{(-1)} \end{aligned} \tag{6.4}$$

现在我们得到以下结果。

命题 6.2. 对每个 $y \in D$，族

$$\underline{\Omega}_n(y) : C_n(\mathcal{U}; P) \longrightarrow C_n(\mathcal{U}'; P') \qquad p \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^n \mapsto y(p \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^n) = y_{(0)}(p) \otimes y_{(1)}(u^1) \otimes ... \otimes y_{(n)}(u^n) \tag{6.5}$$

对 $n \ge 0$，给出一个循环模态射。特别地，我们得到诱导态射

$$\underline{\Omega}^{hoc}_\bullet(y) : HH_\bullet(\mathcal{U}; P) \longrightarrow HH_\bullet(\mathcal{U}'; P') \qquad \underline{\Omega}^{cy}_\bullet(y) : HC_\bullet(\mathcal{U}; P) \longrightarrow HC_\bullet(\mathcal{U}'; P') \tag{6.6}$$

对于每个 $y \in D$，作用于 Hochschild 同调和循环同调上。

证明. 由 C 是余交换的以及定义 5.6 中的条件可知，态射 $\Omega_n(y)$ 定义良好，并且它们与循环模 $C_\bullet(\mathcal{U};P)$ 和 $\underline{C}_\bullet(\mathcal{U}'; P')$ 中出现的面映射和退化映射交换，如式 (6.4) 所示。为验证式 (6.5) 中的态射也与循环算子交换，我们注意到，对于 $p \otimes_{A^{op}} u^1 \otimes_{A^{op}} \otimes ... \otimes_{A^{op}} u^n \in C_n(\mathcal{U};P)$，有

$$\begin{aligned} & y(t_n(p \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^n)) = y(p_{(0)}u^1_+ \otimes u^2_+ \otimes \cdots \otimes u^n_+ \otimes u^n_- \ldots u^1_- p_{(-1)}) \\ &= y_{(0)}(p_{(0)})y_{(1)}(u^1_+) \otimes y_{(2)}(u^2_+) \otimes \cdots \otimes y_{(n)}(u^n_+) \otimes y_{(n+1)}(u^n_-) \ldots y_{(2n)}(u^1_-)y_{(2n+1)}(p_{(-1)}) \\ &= y_{(0)}(p_{(0)})y_{(2)}(u^1_+) \otimes y_{(4)}(u^2_+) \otimes \cdots \otimes y_{(2n)}(u^n_+) \otimes y_{(2n+1)}(u^n_-) \ldots y_{(3)}(u^1_-)y_{(1)}(p_{(-1)}) && \text{(since } C \text{ is cocommutative)} \\ &= y_{(0)}(p)_{(0)}y_{(1)}(u^1_+) \otimes y_{(3)}(u^2_+) \otimes \cdots \otimes y_{(2n-1)}(u^n_+) \otimes y_{(2n)}(u^n_-) \ldots y_{(2)}(u^1_-)y_{(0)}(p)_{(-1)} && \text{(using (5.24))} \\ &= y_{(0)}(p)_{(0)}y_{(1)}(u^1)_+ \otimes y_{(2)}(u^2)_+ \otimes \cdots \otimes y_{(n)}(u^n)_+ \otimes y_{(n)}(u^n)_- \ldots y_{(1)}(u^1)_-y_{(0)}(p)_{(-1)} && \text{(using (6.3))} \end{aligned}$$

这就证明了该结果。 □

现在我们来讨论循环上同调。为此，我们回顾一下，根据 [25, 定理 1.1、定理 3.6]，$\mathcal{U}$ 在系数取为 SAYD 模 P 时，其 Hochschild 上同调群 $HH^\bullet(\mathcal{U};P)$（分别地，循环上同调群 $HC^\bullet(\mathcal{U};P)$）由余循环模 $C^\bullet(\mathcal{U};P):=(\mathcal{U}^\natural)^{\otimes_A\bullet+1}\otimes_A P$ 得到，其算子如下（其中 $\bar{u}:=u^1\otimes_A\otimes\ldots\otimes_A u^n$，$p\in P$）

$$\begin{aligned}
\delta_i(\bar{u}\otimes_A p) &= \begin{cases} 1\otimes_A u^1\otimes_A\cdots\otimes_A u^n\otimes_A p & \text{if } i=0\\ u^1\otimes_A\cdots\otimes_A \Delta_L(u^i)\otimes_A\cdots\otimes_A u^n\otimes_A p & \text{if } 1\le i\le n\\ u^1\otimes_A\cdots\otimes_A u^n\otimes_A p_{(-1)}\otimes_A p_{(0)} & \text{if } i=n+1\end{cases}\\
\delta_i(p) &= \begin{cases} 1\otimes_A p & \text{if } j=0\\ p_{(-1)}\otimes_A p_{(0)} & \text{if } j=1\end{cases}\\
\sigma_i(\bar{u}\otimes_A p) &= u^1\otimes_A\cdots\otimes_A \epsilon_L(u^{i+1})\otimes_A\cdots\otimes_A u^n\otimes_A p \qquad 0\le i\le n-1\\
\tau_n(\bar{u}\otimes_A p) &= u^1_{-(1)}u^2\otimes_A\cdots\otimes_A u^1_{-(n-1)}u^n\otimes_A u^1_{-(n)}p_{(-1)}\otimes_A p_{(0)}u^1_+
\end{aligned} \tag{6.7}$$

现在得到以下结果。

命题6.3. 对每个 $y\in D$，族

$$\overline{\Omega}^n(y):C^n(\mathcal{U};P)\longrightarrow C^n(\mathcal{U}';P') \qquad u^1\otimes\ldots\otimes u^n\otimes p\mapsto y(u^1\otimes\ldots\otimes u^n\otimes p)=y_{(1)}(u^1)\otimes\ldots\otimes y_{(n)}(u^n)\otimes y_{(0)}(p) \tag{6.8}$$

对 $n\ge 0$ 给出一个余循环模之间的态射。特别地，我们得到诱导态射

$$\overline{\Omega}^\bullet_{hoc}(y):HH^\bullet(\mathcal{U};P)\longrightarrow HH^\bullet(\mathcal{U}';P') \qquad \overline{\Omega}^\bullet_{cy}(y):HC^\bullet(\mathcal{U};P)\longrightarrow HC^\bullet(\mathcal{U}';P') \tag{6.9}$$

对每个 $y\in D$，作用于 Hochschild 上同调和循环上同调。

证明. 显然，(6.8) 中的态射是良定义的。对于 $y\in D$ 和 (6.7) 中的 $i=n+1$，注意到

$$\begin{aligned}
y(\delta_{n+1}(u^1\otimes\cdots\otimes u^n\otimes p)) &= y_{(1)}(u^1)\otimes\ldots y_{(n)}(u^n)\otimes y_{(n+1)}(p_{(-1)})\otimes y_{(0)}(p_{(0)})\\
&= y_{(2)}(u^1)\otimes\ldots y_{(n+1)}(u^n)\otimes y_{(1)}(p_{(-1)})\otimes y_{(0)}(p_{(0)}) \quad \text{(since } C \text{ is cocommutative)}\\
&= y_{(1)}(u^1)\otimes\ldots y_{(n)}(u^n)\otimes (y_{(0)}(p))_{(-1)}\otimes y_{(0)}(p)_{(0)} \quad \text{(using (5.24))}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

同样，我们可以验证 (6.8) 中的态射与 (6.7) 中出现的其他余面映射和余退化映射相交换。为了证明它们也与 (6.7) 中出现的余循环算子相交换，我们注意到，对于 $u^1\otimes\ldots\otimes u^n\otimes p\in C^n(\mathcal{U};P)$ 和 $y\in D$，有

$$\begin{aligned}
&y(\tau_n(u^1\otimes\ldots\otimes u^n\otimes p))=y(u^1_{-(1)}u^2\otimes_A\cdots\otimes_A u^1_{-(n-1)}u^n\otimes_A u^1_{-(n)}p_{(-1)}\otimes_A p_{(0)}u^1_+)\\
&=y_{(1)}(u^1_{-(1)})y_{(2)}(u^2)\otimes_A\cdots\otimes_A y_{(2n-3)}(u^1_{-(n-1)})y_{(2n-2)}(u^n)\otimes_A y_{(2n-1)}(u^1_{-(n)})y_{(2n)}(p_{(-1)})\otimes_A y_{(0)}(p_{(0)}u^1_+)\\
&=y_{(1)}(u^1_{-(1)})y_{(n+1)}(u^2)\otimes_A\cdots\otimes_A y_{(n-1)}(u^1_{-(n-1)})y_{(2n-1)}(u^n)\otimes_A y_{(n)}(u^1_{-(n)})y_{(2n)}(p_{(-1)})\otimes_A y_{(0)}(p_{(0)}u^1_+)\\
&=y_{(1)}(u^1_-)_{(1)}y_{(2)}(u^2)\otimes_A\cdots\otimes_A y_{(1)}(u^1_-)_{(n-1)}y_{(n)}(u^n)\otimes_A y_{(1)}(u^1_-)_{(n)}y_{(n+1)}(p_{(-1)})\otimes_A y_{(0)}(p_{(0)}u^1_+)\\
&=y_{(2)}(u^1_-)_{(1)}y_{(3)}(u^2)\otimes_A\cdots\otimes_A y_{(2)}(u^1_-)_{(n-1)}y_{(n+1)}(u^n)\otimes_A y_{(2)}(u^1_-)_{(n)}y_{(n+2)}(p_{(-1)})\otimes_A y_{(0)}(p_{(0)})y_{(1)}(u^1_+)\\
&=y_{(1)}(u^1)_{-(1)}y_{(2)}(u^2)\otimes_A\cdots\otimes_A y_{(1)}(u^1)_{-(n-1)}y_{(n)}(u^n)\otimes_A y_{(1)}(u^1)_{-(n)}y_{(n+1)}(p_{(-1)})\otimes_A y_{(0)}(p_{(0)})y_{(1)}(u^1)_+ \quad \text{(using (6.3))}\\
&=y_{(1)}(u^1)_{-(1)}y_{(2)}(u^2)\otimes_A\cdots\otimes_A y_{(1)}(u^1)_{-(n-1)}y_{(n)}(u^n)\otimes_A y_{(1)}(u^1)_{-(n)}y_{(0)}(p)_{(-1)}\otimes_A y_{(0)}(p)_{(0)}y_{(1)}(u^1)_+ \quad \text{(using (5.24))}
\end{aligned}$$

这就证明了该结果。 □

最后，我们回顾 [25, § 4.3]，其中指出存在 Hopf-Galois 同构，将模 $C_\bullet(\mathcal{U};P)$ 与 $C^\bullet(\mathcal{U};P)$ 联系起来

$$\xi_n(\mathcal{U};P):C_n(\mathcal{U};P)\xrightarrow{\cong}C^n(\mathcal{U};P) \qquad p\otimes u^1\otimes\cdots\otimes u^n\mapsto u^1_{(1)}\otimes u^1_{(2)}u^2_{(1)}\otimes\cdots\otimes u^1_{(n)}u^2_{(n-1)}\ldots u^{n-1}_{(2)}u^n\otimes p \tag{6.11}$$

我们将通过证明由 SAYD 模的余模测量所诱导的态射与 (6.11) 中的 Hopf-Galois同构相容，来结束本节。

定理 6.4. 设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 和 $\mathcal{U}' = (U', A'_L, s'_L, t'_L, \Delta'_L, \varrho'_L, S')$ 是 k 上的 Hopf 代数胚。设 P 和 P′分别是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 上的 SAYD 模。设 $(\Psi, \psi) : C \longrightarrow V(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ 是一个余交换测量，且 $\Omega : D \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(P, P')$ 是从 P 到 P′ 的一个 (C, Ψ, ψ)-余模测量。那么，对每个 $y \in D$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} C_n(\mathcal{U}; P) & \xrightarrow{\xi_n(\mathcal{U};P)} & C^n(\mathcal{U}; P) \\ \underline{\Omega}_n(y)\downarrow & & \downarrow\overline{\Omega}^n(y) \\ C_n(\mathcal{U}'; P') & \xrightarrow{\xi_n(\mathcal{U}';P')} & C^n(\mathcal{U}'; P') \end{array} \tag{6.12}$$

证明。设 $N := n(n-1)/2$。对于 $y \in D$ 和 $p \otimes u^1 \otimes \cdots \otimes u^n \in C_n(\mathcal{U}; P)$，我们看到

$$\begin{aligned} &\overline{\Omega}^n(y)(\xi_n(\mathcal{U}; P)(p \otimes u^1 \otimes \cdots \otimes u^n)) \\ &= \overline{\Omega}^n(y)(u^1_{(1)} \otimes u^1_{(2)}u^2_{(1)} \otimes \cdots \otimes u^1_{(n)}u^2_{(n-1)} \ldots u^{n-1}_{(2)}u^n \otimes p) \\ &= y_{(1)}(u^1_{(1)}) \otimes y_{(2)}(u^1_{(2)})y_{(3)}(u^2_{(1)}) \otimes \cdots \otimes y_{(N+1)}(u^1_{(n)})y_{(N+2)}(u^2_{(n-1)}) \ldots y_{(N+n-1)}(u^{n-1}_{(2)})y_{(N+n)}(u^n) \otimes y_{(0)}(p) \\ &= y_{(1)}(u^1_{(1)}) \otimes y_{(2)}(u^1_{(2)})y_{(n+1)}(u^2_{(1)}) \otimes \cdots \otimes y_{(n)}(u^1_{(n)})y_{(2n-1)}(u^2_{(n-1)}) \ldots y_{(N+n-1)}(u^{n-1}_{(2)})y_{(N+n)}(u^n) \otimes y_{(0)}(p) \\ &= y_{(1)}(u^1)_{(1)} \otimes y_{(1)}(u^1)_{(2)}y_{(2)}(u^2)_{(1)} \otimes \cdots \otimes y_{(1)}(u^1)_{(n)}y_{(2)}(u^2)_{(n-1)} \ldots y_{(n-1)}(u^{n-1})_{(2)}y_{(n)}(u^n) \otimes y_{(0)}(p) \\ &= \xi_n(\mathcal{U}; P)(\underline{\Omega}_n(y)(p \otimes u^1 \otimes \cdots \otimes u^n)) \end{aligned} \tag{6.13}$$

□

7 Lie-Rinehart 代数的测量与同调中的态射

本节中，我们假设基域 k 包含 $\mathbb{Q}$。根据定义，k 上的 Lie-Rinehart 代数（例如，参见 [19], [20], [33]）由一对 (R,L) 构成，满足

(a) R 是交换 k-代数，且 L 是一个 R-模

(b) L 带有如下结构：一个 k 上的李代数，并配备一个态射 $L \longrightarrow \mathrm{Der}_k(R), Z \mapsto \{r \mapsto Z(r)\}$（李满足条件的代数

$$(rZ)(r') = r(Z(r')) \qquad [Z, rZ'] = r[Z, Z'] + Z(r)Z' \qquad r, r' \in R,\ Z, Z' \in \mathfrak{L} \tag{7.1}$$

(R, L) 上的一个（右）联络由一个线性映射 $\nabla : L \otimes R \longrightarrow R$ 构成，该映射满足（见 [20], [24]）

$$\nabla(Z \otimes r'r) = r'\nabla(Z \otimes r) - Z(r')r = \nabla(r'Z \otimes r) \qquad Z \in \mathfrak{L},\ r, r' \in R \tag{7.2}$$

由于 ∇ 也可以写成映射 $\nabla : L \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R, R), Z \mapsto \nabla_Z$，关系式 (7.2) 也可以表示为$\nabla_Z(r'r) = r'\nabla_Z(r) - Z(r')r = \nabla_{r'Z}(r)$。如果对任意 Z、Z′ ∈ L 都有 $[\nabla_Z, \nabla_{Z'}] = \nabla_{[Z',Z]}$，则称该联络是平坦的。本文只考虑配备了平坦联络 ∇，且 L 作为 R-模是投射的 Lie-Rinehart 代数 (R, L)。关于 Lie-Rinehart 代数的更多信息，例如可参阅 [19], [20], [23], [31], [41], [42]。

定义 7.1. 设 (R, L, ∇) 和 (R′, L′, ∇′) 是 k 上的 Lie-Rinehart 代数。设 C 是余交换的 k-余代数。那么，从 (R, L, ∇) 到 (R′, L′, ∇′) 的 C-测度 (Ψ, ψ) 由一对线性映射构成

$$\begin{aligned} \Psi : C &\longrightarrow Vect_k(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}') \qquad x \mapsto \Psi(x) = \{Z \mapsto x(Z)\} \\ \psi : C &\longrightarrow Vect_k(R, R') \qquad x \mapsto \psi(x) = \{r \mapsto x(r)\} \end{aligned} \tag{7.3}$$

对于 $x \in C$、$r \in R$ 和 $Z \in L$，使得

(a) $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(R, R')$ 是代数测量

(b) 对于 $Z_1, Z_2 \in L$ 和 $x \in C$，有 $x([Z_1,Z_2]) = [x^{(1)}(Z_1), x^{(2)}(Z_2)]$。

(c) 对于 $x \in C$、$r \in R$ 和 $Z \in L$，我们有

$$x(Z(r)) = (x_{(1)}(Z))(x_{(2)}(r)) \qquad x(\nabla_Z(r)) = \nabla_{x_{(1)}(Z)}(x_{(2)}(r)) \qquad x(rZ) = x_{(1)}(r)x_{(2)}(Z) \tag{7.4}$$

设 (R,L, ∇) 是一个 Lie-Rinehart代数。那么，其同调可通过取外代数 $\wedge_R^\bullet$L 以及如下微分 $\partial: \wedge_R^n \mathrm{L} \longrightarrow \wedge_R^{n-1}\mathrm{L}$ 来计算，其中规定（参见 [24, § 3.3.3]）

$$\begin{aligned}\partial(Z_1 \wedge ... \wedge Z_n) \quad &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \nabla_{Z_i}(1_R) Z_1 \wedge ... \wedge \hat{Z}_i \wedge ... \wedge Z_n \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [Z_i, Z_j] \wedge Z_1 \wedge ... \wedge \hat{Z}_i \wedge ... \wedge \hat{Z}_j \wedge ... \wedge Z_n\end{aligned} \tag{7.5}$$

对于 Z_1,..., $Z_n \in$ L。该复形的同调群记为 $\mathrm{H}_\bullet$(R, L, ∇)。

命题 7.2. 设 C 为余交换余代数，且 (Ψ, ψ) 是从 (R, L, ∇) 到 (R′, L′, ∇′) 的 Lie-Rinehart 代数的 C-测度。那么，对于每个 x ∈ C，映射族（对于 n ≥ 0）

$$\wedge_R^n \mathfrak{L} \longrightarrow \wedge_{R'}^n \mathfrak{L}' \qquad Z_1 \wedge ... \wedge Z_n \mapsto x_{(1)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(n)}(Z_n) \tag{7.6}$$

给出从 $(\wedge_R^\bullet \mathrm{L}, \partial)$ 到 $(\wedge_{R'}^\bullet \mathrm{L}', \partial')$ 的复形态射。因此，对于每个 x ∈ C，在同调群上诱导出态射 $\underline{\Psi_\bullet^{Lie}}$ (x) : $\mathrm{H}_\bullet$(R, L, ∇) ⟶ $\mathrm{H}_\bullet$(R′, L′, ∇′)。

证明。由于 C 是余交换 的，显然，对每个 x ∈ C，(7.6) 中的映射都是良定义的。现在我们来验证 t

$$\begin{aligned}&x(\partial(Z_1 \wedge ... \wedge Z_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_{(1)}(\nabla_{Z_i}(1_R) Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(n-1)}(Z_n) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} x_{(1)}([Z_i, Z_j]) \wedge x_{(2)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i+1)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(j)}(\hat{Z}_j) \wedge ... \wedge x_{(n-1)}(Z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_{(1)}(\nabla_{Z_i}(1_R)) x_{(2)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i+1)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(n)}(Z_n) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} x_{(1)}([Z_i, Z_j]) \wedge x_{(2)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i+1)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(j)}(\hat{Z}_j) \wedge ... \wedge x_{(n-1)}(Z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (\nabla_{x_{(1)}(Z_i)}(1_{R'})) x_{(2)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i+1)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(n)}(Z_n) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [x_{(1)}(Z_i), x_{(2)}(Z_j)] \wedge x_{(3)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i+2)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(j+1)}(\hat{Z}_j) \wedge ... \wedge x_{(n)}(Z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} (\nabla_{x_{(i)}(Z_i)}(1_{R'})) x_{(1)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(n)}(Z_n) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [x_{(i)}(Z_i), x_{(j)}(Z_j)] \wedge x_{(1)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(i)}(\hat{Z}_i) \wedge ... \wedge x_{(j)}(\hat{Z}_j) \wedge ... \wedge x_{(n)}(Z_n)\end{aligned}$$

这就证明了该结论。 □

若 (R,L, ∇) 是一个 Lie-Rinehart代数，则其泛包络代数 $\mathcal{V}$(R,L, ∇) 按以下步骤构造（例如参见 [24], [31], [42]）：通过规定下式，将直和 R ⊕ L 构造成一个 k-Lie代数

$$[(r_1, Z_1), (r_2, Z_2)] := ((Z_1(r_2) - Z_2(r_1), [Z_1, Z_2]) \tag{7.7}$$

因此，可以构造泛包络代数 $\mathcal{U}$(R ⊕L)，并令 $\mathcal{U}$(R ⊕L) 为其由 $\overline{\mathrm{R}}$ ⊕ L 在 $\mathcal{U}$(R ⊕ L) 中的像内的元素生成的子代数。对于任意 (r,Z) ∈ R ⊕ L，令 (r,Z) 表示其在 $\mathcal{U}$(R ⊕ L) 中的像。然后，通过 $\overline{\ }$ 将 $\mathcal{U}$(R ⊕ L) 除以由以下形式的元素生成的双边理想，构造出 $\mathcal{V}$(R,L, ∇):

$$\overline{(r_1 r_2, r_1 Z_2)} - \overline{r_1} \otimes \overline{(r_2, Z_2)} \tag{7.8}$$

其中 $\mathrm{r}_1 \in$ R，且 $(\mathrm{r}_2, \mathrm{Z}_2) \in$ R ⊕ L。式 (7.8) 中使用了 ⊗ 符号，因为 $\mathcal{U}$(R ⊕ L) 中的乘积是由空间 R ⊕L 上的张量代数中的乘积诱导而来的。

引理 7.3. 设 C 是余交换余代数，且 (Ψ, ψ) 是从 (R, L, ∇) 到 (R′, L′, ∇′) 的 Lie-Rinehart 代数的 C-测度。那么，(Ψ, ψ) 诱导出泛包络代数的测量 $\mathcal{V}(\Psi, \psi)$: C ⟶ $\mathrm{Vect}_k(\mathcal{V}$(R, L, ∇), $\mathcal{V}$(R′, L′, ∇′)。

证明。对于每个 x ∈C，我们使用测量 (Ψ, ψ) 定义映射 R ⊕L ⟶ R′ ⊕ L′, (r, Z) ↦ x(r, Z) := $(\psi$(x)(r), Ψ(x)(Z)) =(x(r), x(Z))。这意味着

$$\begin{aligned}x([(r_1, Z_1), (r_2, Z_2)]) = x((Z_1(r_2) - Z_2(r_1), [Z_1, Z_2]) \quad &= (x(Z_1(r_2)) - x(Z_2(r_1)), x([Z_1, Z_2])) \\ &= (x_{(1)}(Z_1)(x_{(2)}(r_2)) - x_{(1)}(Z_2)(x_{(2)}(r_1)), [x_{(1)}(Z_1), x_{(2)}(Z_2)]) \\ &= (x_{(1)}(Z_1)(x_{(2)}(r_2)) - x_{(2)}(Z_2)(x_{(1)}(r_1)), [x_{(1)}(Z_1), x_{(2)}(Z_2)]) \\ &= [x_{(1)}(r_1, Z_1), x_{(2)}(r_2, Z_2)]\end{aligned} \tag{7.9}$$

由（7.9）可知，存在一个从 $\mathcal{U}(R \oplus L)$ 到 $\mathcal{U}(R' \oplus L')$ 的代数测量，它由（对于 $x \in C$）诱导

$$x((r_1, Z_1) \otimes ... \otimes (r_n, Z_n)) := (x_{(1)}(r_1, Z_1) \otimes ... \otimes x_{(n)}(r_n, Z_n)) \tag{7.10}$$

在 $R \oplus L$ 上的张量代数层面上。由于该测量将 $R \oplus L$ 中的元素映到 $R' \oplus L'$，我们可以将其限制为从 $\mathcal{U}(R \oplus L)$ 到 $\mathcal{U}(R' \oplus L')$ 的代数测量。现在考虑 $\mathcal{U}(R \oplus L)$ 中一个形如（7.8）的元素 $(r_1r_2, r_1Z_2) - r_1 \otimes (r_2, Z_2)$。对于任意 $x \in C$，我们有

$$\begin{aligned} x(\overline{(r_1r_2, r_1Z_2)} - \overline{r_1} \otimes \overline{(r_2, Z_2)}) &= \overline{(x(r_1r_2), x(r_1Z_2))} - \overline{x_{(1)}(r_1)} \otimes \overline{x_{(2)}(r_2, Z_2)} \\ &= \overline{(x_{(1)}(r_1)x_{(2)}(r_2), x_{(1)}(r_1)x_{(2)}(Z_2))} - \overline{x_{(1)}(r_1)} \otimes \overline{(x_{(2)}(r_2), x_{(2)}(Z_2))} = 0 \in \mathcal{V}(R', \mathfrak{L}', \nabla') \end{aligned}$$

现在显然，从 $\mathcal{U}(R \oplus L)$ 到 $\mathcal{U}(R' \oplus L')$ 的测量可下降到各自的商代数上，从而得到一个从 $\mathcal{V}(R, L, \nabla)$ 到 $\mathcal{V}(R', L', \nabla')$ 的代数测量。□

根据定义，显然存在一个典范包含 $R \hookrightarrow \mathcal{V}(R, L, \nabla)$。由 [24, § 3.3.2], [25, § 5.1] 可知，泛包络代数 $\mathcal{V}(R, L, \nabla)$ 成为一个左 Hopf 代数胚 $(\mathcal{V}(R, L, \nabla), R, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L)$，由下式确定

$$s_L = t_L : R \hookrightarrow \mathcal{V}(R, \mathfrak{L}, \nabla) \qquad r \mapsto r \tag{7.11}$$

$$\epsilon_L(Z) = 0 \qquad \epsilon_L(r) = r \qquad r \in R, Z \in \mathfrak{L} \tag{7.12}$$

$$\Delta_L(Z) = 1 \otimes Z + Z \otimes 1 \qquad \Delta_L(r) = r \otimes 1 \qquad r \in R, Z \in \mathfrak{L} \tag{7.13}$$

关于左 Hopf 代数胚的完整定义（它是满足某些条件的左双代数胚），请参见 [24] 。相应地，通过以显而易见的方式修改定义 2.3 和 5.6，即可得到左 Hopf 代数胚的余代数测量概念，或左 Hopf 代数胚上的 SAYD 模的余模测量概念。注意，由于 R 是交换的，(7.11) 中的 t_L 也是一个反同态。

给定 (R, L, ∇)，我们知道（见 [24, § 3.3.2]），R 成为一个右 $\mathcal{V}(R, L, \nabla)$-模，其作用由 R 上通常的乘法以及对于 $r \in R$、$Z \in L$ 的 $r \cdot Z := \nabla_Z(r)$ 决定。事实上，结合左余模作用 $\Delta_R : R \longrightarrow \mathcal{V}(R, L, \nabla) \otimes_R R$，$r \mapsto 1 \otimes r$，我们知道 R 成为 $\mathcal{V}(R, L, \nabla)$ 上的一个 SAYD 模（见 [25, 引理 5.1]）。

引理 7.4. 设 C 是一个余交换余代数，且 (Ψ, ψ) 是从 (R, L, ∇) 到 (R', L', ∇') 的 Lie-Rinehart 代数的 C-测度。那么，三元组：

$$\psi : C \longrightarrow Vect_k(R, R') \qquad \mathcal{V}(\Psi, \psi) : C \longrightarrow Vect_k(\mathcal{V}(R, \mathfrak{L}, \nabla), \mathcal{V}(R', \mathfrak{L}', \nabla')) \qquad \psi : C \longrightarrow Vect_k(R, R') \tag{7.14}$$

是从 R 到 R′ 的余模测量数据。

证明. 根据引理 7.3 和 (7.11)-(7.13) 中的定义，显然 $(\mathcal{V}(\Psi, \psi), \psi)$ 是左 Hopf 代数胚的测量。利用 (7.4) 以及 C 是余交换的这一事实，对于任意 $x \in C$、$r \in R$ 和 $Z \in L$，有：

$$x(r \cdot Z) = x(\nabla_Z(r)) = \nabla_{x_{(1)}(Z)}(x_{(2)}(r)) = \nabla_{x_{(2)}(Z)}(x_{(1)}(r)) = (x_{(1)}(r)) \cdot x_{(2)}(Z) \tag{7.15}$$

由 (7.15) 可知，$(\mathcal{V}(\Psi, \psi), \psi)$ 是从右 $\mathcal{V}(R, L, \nabla)$-模 R 到右 $\mathcal{V}(R', L', \nabla')$-模 R′ 的余模测量。最后，对于 $x \in C$ 和 $r \in R$，有 $\Delta_{R'}(x(r)) = 1 \otimes x(r) = x(1 \otimes r) = x(\Delta_R(r))$，因此条件 (5.24) 得到满足。这就证明了该结果。□

令 $C^\bullet(\mathcal{V}(R, L, \nabla); R)$ 为与左 Hopf 代数余群 $\mathcal{V}(R, L, \nabla)$ 及 SAYD 模 R 对应的余循环模，如 (6.7) 所示。那么，根据 [25, 定理 5.2] ，我们知道映射

$$Alt_n : \wedge_R^n \mathfrak{L} \longrightarrow \mathcal{V}(R, \mathfrak{L}, \nabla)^{\otimes_R n} \qquad Z_1 \wedge ... \wedge Z_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma Z_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes Z_{\sigma(n)} \tag{7.16}$$

诱导出混合复形的拟同构 $(\wedge_R^\bullet L, 0, \partial) \longrightarrow (C^\bullet(\mathcal{V}(R, L, \nabla); R), b, B)$。其中，b 是标准的 Hochschild 微分，B 是 Connes 微分（例如参见 [28, § 2.5.13]）。

定理 7.5. 设 C 为余交换余代数，且 (Ψ,ψ) 是从 (R, L, ∇) 到 (R′, L′, ∇′) 的 Lie-Rinehart 代数的 C-测度。那么，对每个 $x \in C$，以下图表是交换的

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{n\equiv\bullet\ (mod\ 2)} H_n(R,\mathfrak{L},\nabla) & \xrightarrow{\cong} & HP^\bullet(\mathcal{V}(R,\mathfrak{L},\nabla);R) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{n\equiv\bullet\ (mod\ 2)}\Psi_n^{Lie}(x)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \overline{\Psi}^\bullet_{per}(x)} \\ \bigoplus_{n\equiv\bullet\ (mod\ 2)} H_n(R',\mathfrak{L}',\nabla') & \xrightarrow{\cong} & HP^\bullet(\mathcal{V}(R',\mathfrak{L}',\nabla);R') \end{array} \tag{7.17}$$

这里，右侧的垂直箭头 $\overline{\Psi}^\bullet$per(x) 是由命题 6.3 中余循环模的态射诱导出的周期循环上同调上的态射。水平箭头由拟同构 (7.16) 诱导。

证明。 (7.17) 中的水平同构由 (7.16) 中的拟同构以及 [24, 定理 3.13], [25,定理 5.2] 得到。我们需要验证 (7.16) 中的映射与测量 (Ψ,ψ) 的作用交换。由于 C 是余交换的，我们注意到，对于 $x \in C$ 和 $Z_1 \wedge ... \wedge Z_n \in \wedge^n_R L$，有

$$\begin{aligned} Alt_n(x(Z_1 \wedge ... \wedge Z_n)) &= Alt_n(x_{(1)}(Z_1) \wedge ... \wedge x_{(n)}(Z_n)) \\ &= (1/n!)\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}(Z_{\sigma(1)}) \otimes ... \otimes x_{\sigma(n)}(Z_{\sigma(n)}) = (1/n!)\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma x_{(1)}(Z_{\sigma(1)}) \otimes ... \otimes x_{(n)}(Z_{\sigma(n)}) \\ &= x(Alt_n(Z_1 \wedge ... \wedge Z_n)) \end{aligned}$$

这就证明了该结果。 □

8 带乘法的 operad tiplication、comp 模以及循环同调上的态射 y

我们以回顾带乘法的非对称算子（或非-Σ operad）的概念开始本节。在本节中，我们只考虑此类 operad。关于这一主题的更多信息，读者可参阅例如 [15], [16], [29], [30]。

定义 8.1.（例如，参见 [27, 定义 2.2]）带乘法的 k 上非-Σ operad $(\mathscr{O}$,m,e) 由以下部分组成：

(a) 一族向量空间 $\mathscr{O} = \{\mathscr{O}(n)\}_{n\geq 0}$。

(b) 一族 k-双线性运算 $\circ_i : \mathscr{O}(p) \otimes \mathscr{O}(q) \longrightarrow \mathscr{O}(p+q-1)$，以及一个满足以下条件的单位元 $\mathbb{I} \in \mathscr{O}(1)$（其中 $u \in \mathscr{O}(p)$、$v \in \mathscr{O}(q)$、$w \in \mathscr{O}(r)$）

$$\begin{aligned} u \circ_i v &= 0 && if\ p < i\ or\ p = 0 \\ (u \circ_i v) \circ_j w &= \begin{cases} (u \circ_j w) \circ_{i+r-1} v & if\ j < i \\ u \circ_i (v \circ_{j-i+1} w) & if\ i \le j < q+i \\ (u \circ_{j-q+1} w) \circ_i v & if\ j \ge q+i \end{cases} && \\ u \circ_i \mathbb{I} &= \mathbb{I} \circ_1 u = u && for\ i \le p \end{aligned} \tag{8.1}$$

(c) 一个算子乘法 $m \in \mathscr{O}(2)$ 和一个单位元 $e \in \mathscr{O}(0)$，使得

$$m \circ_1 m = m \circ_2 m \qquad m \circ_1 e = m \circ_2 e = \mathbb{I} \tag{8.2}$$

现在我们来考虑 带乘法的非对称 operad 之间的余交换测量这一概念 n.

定义 8.2. 设 C 是一个余交换 k-余代数，且 $(\mathscr{O}$, m, e)、$(\mathscr{O}'$, m′, e′) 是带乘法的非-Σ 运算子。从 $(\mathscr{O}$, m, e) 到 $(\mathscr{O}'$, m′, e′) 的 C-测度由一族映射 $\{\Psi_n : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(n), \mathscr{O}'(n)), x \mapsto x_n := \Psi_n(x) : \mathscr{O}(n) \longrightarrow \mathscr{O}'(n)\}_{n\geq 0}$ 组成，使得

$$\begin{aligned} x_{p+q-1}(u \circ_i v) := \Psi_{p+q-1}(x)(u \circ_i v) = \Psi_p(x_{(1)})(u) \circ'_i \Psi_q(x_{(2)})(v) = \sum x_{(1),p}(u) \circ'_i x_{(2),q}(v) \\ x_2(m) = \Psi_2(x)(m) = \epsilon_C(x)m' \qquad x_0(e) = \Psi_0(x)(e) = \epsilon_C(x)e' \end{aligned} \tag{8.3}$$

对于 $u \in \mathscr{O}(p)$、$v \in \mathscr{O}(q)$ 和 $x \in C$，其中 $\Delta_C(x) = x_{(1)} \otimes x^{(2)}$ 是 C 上的余乘法，而 $\varrho_C : C \longrightarrow k$ 是 C 上的余单位。

命题 8.3. 设 $(\mathscr{O},\mathrm{m},\mathrm{e})$、$(\mathscr{O}',\mathrm{m}',\mathrm{e}')$ 是非-Σ 带乘法的运算子。那么，

(a) 存在一个余交换余代数 $\mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O}')$ 和一个测量 $\{\Phi_n\colon \mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O}') \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}),\mathscr{O}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$，满足以下泛性质：给定任意测量 $\{\Psi_n\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}),\mathscr{O}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$，其中 C 是余交换余代数，则存在唯一的余代数态射 $\xi\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O}')$，使得对每个 $\mathrm{n} \geq 0$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O}') & \xrightarrow{\quad\Phi_n\quad} & \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}),\mathscr{O}'(\mathrm{n})) \\ & {\scriptstyle\xi}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\Psi_n} & \\ & C & \end{array} \tag{8.4}$$

(b) 带乘法的非-Σ operad 在 k 上构成一个范畴，该范畴是富化于余交换 k-余代数范畴 $\mathrm{CoCoalg}_k$ 的范畴。

证明。(a) 令 $\mathrm{V} := \mathrm{QVect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}),\mathscr{O}'(\mathrm{n}))$。令 $\pi(\mathrm{V})\colon \mathrm{C}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{V}$ 为 V 上的余自由余代数。现在令 $\mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O}') :=_{n\geq 0} \mathrm{P}\ \mathrm{D}$，其中求和遍历 C(V) 的所有余交换子余代数 D，且 $\pi(\mathrm{V})$ 在 D 上的限制给出一个从 $\mathscr{O}$ 到 $\mathscr{O}'$ 的测量。现在，$\mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O}')$ 的泛性质可由命题 2.5 的证明同理得到。

(b) 对于 $(\mathscr{O},\mathrm{m},\mathrm{e})$、$(\mathscr{O}',\mathrm{m}',\mathrm{e}')$，$\mathrm{CoCoalg}_k$ 中的同对象由 $\mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O}')$ 给出。此外，单位元的数乘给出一个从 $\mathscr{O}$ 到其自身的测量，它根据 (a) 诱导出余代数的态射 $\mathrm{k} \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathscr{O},\mathscr{O})$。结果现可仿照定理 2.7 的证明得出。□

定义 8.4。（参见 [27, 定义 3.1]）带乘法的 operad $(\mathscr{O},\mathrm{m},\mathrm{e})$ 上的循环含幺（左）comp 模 $\mathscr{L}$ 由以下数据组成：

(a) 向量空间的一个集族 $\mathscr{L} = \{\mathscr{L}(\mathrm{n})\}_{n\geq 0}$.

(b) 一族 k-双线性运算

$$\bullet_i : \mathscr{O}(p)\otimes\mathscr{L}(n) \longrightarrow (n-p+1),\ 0 \leq i \leq n+1-p \tag{8.5}$$

令 t 于 $\mathrm{p} \geq \mathrm{n}+1$ 时为零，并满足以下条件：对于 $\mathrm{u} \in \mathscr{O}(\mathrm{p})$、$\mathrm{v} \in \mathscr{O}(\mathrm{q})$、$\mathrm{l} \in \mathscr{L}(\mathrm{n}$)

$$u\bullet_i(v\bullet_j l) = \begin{cases} v\bullet_j(u\bullet_{i+q-1} l) & j<i \\ (u\circ_{j-i+1} v)\bullet_i l & if\ j-p<i\leq j \\ v\bullet_{j-p+1}(u\bullet_i l) & if\ 0\leq i\leq j-p \end{cases} \qquad for\ (p>0)$$

$$u\bullet_i(v\bullet_j l) = \begin{cases} v\bullet_j(u\bullet_{i+q-1} l) & j<i \\ v\bullet_{j+1}(u\bullet_i l) & if\ 0\leq i\leq j \end{cases} \qquad for\ (p=0)$$

以及对于 $\mathrm{i} = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ \mathrm{n},\ \mathbb{I}^{\bullet_i}\mathrm{l} = \mathrm{l}$。

(c) 一个循环算子 $\mathrm{t} \in \mathrm{Q}_{n\geq 1}\mathrm{Vect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}),\mathscr{L}'(\mathrm{n}))$，满足

$$t(u\bullet_i l) = u\bullet_{i+1} t(l) \tag{8.6}$$

对于 $\mathrm{u} \in \mathscr{O}(\mathrm{p})$、$\mathrm{l} \in \mathscr{L}(\mathrm{n})$ 和 $0 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}-\mathrm{p}$，以及 $\mathrm{t}^{n+1} = \mathrm{id}$。

现在我们将考虑循环含幺 comp 模之间的余模测量。

定义 8.5. 设 $\{\Psi_n\colon \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}),\mathscr{O}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$ 是非Σ 带乘法的运算子的一种测量。设 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{L}'$分别是 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{O}'$ 上的循环含幺 comp 模。则从 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{P}'$ 的 $(\mathrm{C},\{\Psi_n\}_{n\geq 0})$-余模测量由一个左 C-余模 D 和一个态射族 $\{\Omega_n\colon \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}),\mathscr{L}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$ 组成，满足

$$\Omega_{n-p+1}(y)(u\bullet_i l) = \Psi_p(y_{(0)})(u)\bullet_i \Omega_n(y_{(1)})(l) \tag{8.7}$$

对于 $\mathrm{y} \in \mathrm{D}$、$\mathrm{u} \in \mathscr{O}(\mathrm{p})$、$\mathrm{l} \in \mathscr{L}(\mathrm{n})$、$0 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}+1-\mathrm{p}$，以及

$$\Omega_n(y)(t(l)) = t'(\Omega_n(y)(l)) \tag{8.8}$$

对于 $\mathrm{y} \in \mathrm{D}$，$\mathrm{l} \in \mathscr{L}(\mathrm{n})$，其中 t 和 t′ 分别是 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{L}'$上的循环算子。

命题 8.6. 设 $\{\Psi_n : \mathsf{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}), \mathscr{O}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$ 是非Σ 带乘法的运算子上的一个测量。设 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{L}'$ 分别是 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{O}'$ 上的循环含幺 comp 模。则存在一个 $(\mathsf{C}, \{\Psi_n\}_{n\geq 0})$-余模测量$\{\Theta_n : \mathcal{Q}_C(\mathscr{L}, \mathscr{L}') \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}), \mathscr{L}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$，满足以下泛性质：给定任意一个 $(\mathsf{C}, \{\Psi_n\}_{n\geq 0})$-余模测量 $\{\Omega_n : \mathsf{D} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}), \mathscr{L}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$，存在一个 C-余模态射 $\chi : \mathsf{D} \longrightarrow \mathcal{Q}_C(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$，使得对每个 $\mathrm{n} \geq 0$，以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_C(\mathscr{L}, \mathscr{L}') & \xrightarrow{\quad\Theta_n\quad} & \mathrm{Vect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}), \mathscr{L}'(\mathrm{n})) \\ & {\scriptstyle\chi}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\Omega_n} & \\ & D & \end{array} \tag{8.9}$$

证明。我们设 $\mathsf{V} : \mathrm{QVect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}), \mathscr{L}'(\mathrm{n}))$。利用 (5.25) 中的伴随，我们得到 C-余模 $\mathrm{R}_C(\mathsf{V})$ 以及规范的$_{n\geq 0}$态射 $\rho(\mathsf{V}) : \mathrm{R}_C(\mathsf{V}) \longrightarrow \mathsf{V}$（向量空间中的态射）。现在设 $\mathcal{Q}_C(\mathscr{L}, \mathscr{L}') = \mathsf{P}\ \mathsf{Q} \subseteq \mathrm{R}_C(\mathsf{V})$，其中求和遍历所有满足以下条件的子余模 $\mathsf{Q} \subseteq \mathrm{R}_C(\mathsf{V})$：$\rho(\mathsf{V})$ 在 Q 上的限制给出一个从 $\mathscr{L}$到 $\mathscr{L}'$的 $(\mathsf{C}, \{\Psi_n\}_{n\geq 0})$-余模测量。现在，$\mathcal{Q}_C(\mathscr{P}, \mathscr{P}')$ 的泛性质可仿照定理 5.7 的证明得到。□

定理 8.7. 令 Comp_k 为由下式给出的范畴
(a) 对象：有序对 $(\mathscr{O}, \mathscr{L})$，其中 $\mathscr{O}$ 是带乘法的非-Σ operad，且 $\mathscr{L}$是 $\mathscr{O}$上的循环幺 comp 模。 (b) 同态对象：对于有序对 $(\mathscr{O}, \mathscr{L})$、$(\mathscr{O}', \mathscr{L}') \in \mathrm{Comp}_k$，我们设

$$Comp_k((\mathscr{O}, \mathscr{L}), (\mathscr{O}', \mathscr{L}')) := (\mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O}'), \mathcal{Q}_{\mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O}')}(\mathscr{L}, \mathscr{L}')) \in Comod_k \tag{8.10}$$

因此，Comp_k 是由对称幺半范畴 Comod_k 丰富化的。

证明。我们考虑 $(\mathscr{O}, \mathscr{L})$、$(\mathscr{O}', \mathscr{L}') \in \mathrm{Comp}_k$。对于测量 $\{\Phi_n : \mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O}') \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}), \mathscr{O}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$ 余代数，由命题 8.6 可知，我们有泛 $(\mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O}'), \{\Phi_n\}_{n\geq 0})$-余模测量 $\{\Theta_n : \mathcal{Q}_{\mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O}')}(\mathscr{L}, \mathscr{L}') \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}), \mathscr{L}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$。恒等映射的标量倍数给出余代数的态射 $\mathsf{k} \longrightarrow \mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O})$，利用命题 8.6 中的泛性质，可得到态射 $\mathsf{k} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathcal{M}_c(\mathscr{O}, \mathscr{O}')}(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$。同对象的复合现在可仿照引理 5.8 和定理 5.9 的证明得出。□

设 $(\mathscr{O}, \mathrm{m}, \mathrm{e})$ 是一个带乘法的非-Σ 运算子，且 $\mathscr{L}$是其上的循环含幺 comp 模。现在我们回顾[27, 命题 3.5]：有序对 $(\mathscr{O}, \mathscr{L})$ 的循环同调由循环模 $\mathsf{C}_\bullet(\mathscr{O}, \mathscr{L}) := \mathscr{L}(\bullet)$ 给出，其循环算子为 $\mathsf{t} : \mathscr{L}(\bullet) \longrightarrow \mathscr{L}(\bullet)$，而其面映射和退化映射定义如下：

$$d_i(l) := m \bullet_i l,\ (0 \leq i < n) \quad d_n(l) := m \bullet_0 t(l) \qquad s_j(l) := e \bullet_{j+1} l,\ 0 \leq j \leq n \tag{8.11}$$

对于 $\mathsf{l} \in \mathscr{L}(\mathrm{n})$。该循环模的循环同调记为 $\mathrm{HC}_\bullet(\mathscr{O}, \mathscr{L})$。现在我们有以下结果。

命题 8.8. 设 $\{\Psi_n : \mathsf{C} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{O}(\mathrm{n}), \mathscr{O}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$ 是带乘法的非-Σ 运算子的一个测量。设 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{L}'$ 分别是 $\mathscr{O}$和 $\mathscr{O}'$ 上的循环含幺 comp 模。给定一个 $(\mathsf{C}, \{\Psi_n\}_{n\geq 0})$-余模测量 $\{\Omega_n : \mathsf{D} \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(\mathscr{L}(\mathrm{n}), \mathscr{L}'(\mathrm{n}))\}_{n\geq 0}$，从 $\mathscr{L}$到 $\mathscr{L}'$，每个 $\mathsf{y} \in \mathsf{D}$ 都诱导出循环同调上的一个态射 $\Omega^{cy}_\bullet(\mathsf{y}) : \mathrm{HC}_\bullet(\mathscr{O}, \mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{HC}_\bullet(\mathscr{O}', \mathscr{L}')$。

证明。由 (8.8) 可知，任意 $\mathsf{y} \in \mathsf{D}$ 的作用都与循环算子交换。由 (8.3) 可知，对任意 $\mathsf{x} \in \mathsf{C}$，$\mathsf{x}_2(\mathrm{m}) = \Psi_2(\mathsf{x})(\mathrm{m}) = \varrho_C(\mathsf{x})\mathrm{m}'$，且 $\mathsf{x}_0(\mathrm{e}) = \Psi_0(\mathsf{x})(\mathrm{e}) = \varrho_C(\mathsf{x})\mathrm{e}'$。根据 (8.7) 中的条件和 (8.11) 中的定义，现在很容易看出，任意 $\mathsf{y} \in \mathsf{D}$ 的作用也与面映射和退化映射交换。结论显而易见。□

最后，我们研究 Yetter–Drinfeld 代数的测量，由此得到带乘法的运算子的测量，并在循环同调中诱导态射。我们固定一个 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (\mathsf{U}, \mathsf{A}_L, \mathsf{s}_L, \mathsf{t}_L, \Delta_L, \varrho_L, \mathsf{S})$。类似于定义 5.3，$\mathcal{U}$ 上的一个（左左）Yetter–Drinfeld 模 P 带有左 U-模结构和左 U-余模结构：

$$(u, p) \mapsto up \qquad p \mapsto p_{(-1)} \otimes p_{(0)} \qquad u \in U,\ p \in P \tag{8.12}$$

它们满足关于底层 A^e-模结构以及 U-作用和 U-余作用的相容条件（例如参见 [7], [27, § 6.3.2], [35]）。左左 Yetter–Drinfeld 模的范畴 ${}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}\mathcal{YD}$ 是一个编织幺半范畴。编织交换 Yetter-Drinfeld 代数是 ${}^{\mathcal{U}}_{\mathcal{U}}\mathcal{YD}$ 中的编织交换幺半群（例如参见 [10], [27, § 6.3.2]）。对于 Hopf 代数胚 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 上的编织交换 Yetter-Drinfeld 代数 Z，这一族

$$C^\bullet(\mathcal{U}, Z) := Hom_{A^{op}}((\triangleright U_\triangleleft)^{\otimes_{A^{op}}\bullet}, Z) \tag{8.13}$$

是一个非-Σ带乘法的 operad（见 [27, § 6.3.3]）。其结构映射定义如下

$$\begin{gathered}\circ_i : C^p(\mathcal{U}, Z) \otimes C^q(\mathcal{U}, Z) \longrightarrow C^{p+q-1}(\mathcal{U}, Z)\\ (f \circ_i g)(u^1 \otimes ... \otimes u^{p+q-1}) := f(u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p-i}_{(1)} \otimes [g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(-1)} u^{p-i+1}_{(2)} ... u^{p+q-i}_{(2)} \otimes u^{p+q-i+1} \otimes ... \otimes u^{p+q-1})\\ \cdot_Z(u^1_{(2)} ... u^{p-i}_{(2)} [g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(0)})\end{gathered} \tag{8.14}$$

其中 $\cdot_Z$ 是 Z 中的乘法。乘法 $\mathrm{m} \in C^2(\mathcal{U},Z)$、单位元 $\mathbb{I} \in C^1(\mathcal{U},Z)$ 和单位元 $\mathrm{e} \in C^0(\mathcal{U},Z)$ 分别定义如下

$$m := \epsilon_L(\mu_U(__ \otimes __)) \triangleright 1_Z \qquad \mathbb{I} := \epsilon_L(__) \triangleright 1_Z \qquad e := 1_Z \tag{8.15}$$

其中 μ_U 是 U 上的乘法，1_Z 是 Yetter–Drinfeld 代数 Z 中的单位元。如果 Z 和 Z′ 是 $\mathcal{U}$上的辫交换 Yetter–Drinfeld 代数，我们称从 Z 到 Z′ 的测量由一个余交换余代数 C 和一个映射$\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(Z,Z')$ 组成，$\psi(x) := x(\,) : Z \longrightarrow Z'$，并满足以下条件

$$x(z_1 \cdot_Z z_2) := x_{(1)}(z_1) \cdot_{Z'} x_{(2)}(z_2) \qquad x(1_Z) = \epsilon_C(x) 1_{Z'} \qquad x(uz) = ux(z) \qquad x(z)_{(-1)} \otimes x(z)_{(0)} = z_{(-1)} \otimes x(z_{(0)}) \tag{8.16}$$

其中 $x \in C$、$u \in U$，且 $z_1, z_2, z \in Z$。

引理 8.9. 设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 是一个 Hopf 代数胚。设 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(Z, Z')$ 是 $\mathcal{U}$上辫交换 Yetter–Drinfeld 代数之间的测量。那么，ψ 诱导出一个测量 $\{\Psi_n : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(C^n(\mathcal{U}, Z), C^n(\mathcal{U}, Z'))\}_{n\geq 0}$，它是带乘法的运算子。

证明。我们定义

$$\Psi_n : C \longrightarrow Vect_k(C^n(\mathcal{U}, Z), C^n(\mathcal{U}, Z')) \qquad x \mapsto (f \mapsto \psi(x) \circ f = xf) \tag{8.17}$$

对每个 $n \geq 0$。对于 $f \in C^p(\mathcal{U}, Z)$、$g \in C^q(\mathcal{U}, Z)$，现在对每个 $x \in C$ 有：

$$\begin{aligned}
&\Psi_{p+q-1}(x)(f \circ_i g)(u^1 \otimes ... \otimes u^{p+q-1})\\
&= x\begin{pmatrix} f(u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p-i}_{(1)} \otimes [g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(-1)} u^{p-i+1}_{(2)} ... u^{p+q-i}_{(2)} \otimes u^{p+q-i+1} \otimes ... \otimes u^{p+q-1})\\ \cdot_Z(u^1_{(2)} ... u^{p-i}_{(2)} [g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(0)}) \end{pmatrix}\\
&= \begin{array}{l} x_{(1)}(f(u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p-i}_{(1)} \otimes [g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(-1)} u^{p-i+1}_{(2)} ... u^{p+q-i}_{(2)} \otimes u^{p+q-i+1} \otimes ... \otimes u^{p+q-1}))\\ \cdot_{Z'} x_{(2)}(u^1_{(2)} ... u^{p-i}_{(2)} [g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(0)}) \end{array}\\
&= \begin{array}{l} x_{(1)}(f(u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p-i}_{(1)} \otimes [g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(-1)} u^{p-i+1}_{(2)} ... u^{p+q-i}_{(2)} \otimes u^{p+q-i+1} \otimes ... \otimes u^{p+q-1}))\\ \cdot_{Z'} (u^1_{(2)} ... u^{p-i}_{(2)} x_{(2)}([g(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(0)})) \end{array}\\
&= \begin{array}{l} x_{(1)}(f(u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p-i}_{(1)} \otimes [(x_{(2)}g)(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(-1)} u^{p-i+1}_{(2)} ... u^{p+q-i}_{(2)} \otimes u^{p+q-i+1} \otimes ... \otimes u^{p+q-1}))\\ \cdot_{Z'} (u^1_{(2)} ... u^{p-i}_{(2)} [(x_{(2)}g)(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(0)}) \end{array}\\
&= \begin{array}{l} (x_{(1)}f)(u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p-i}_{(1)} \otimes [(x_{(2)}g)(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(-1)} u^{p-i+1}_{(2)} ... u^{p+q-i}_{(2)} \otimes u^{p+q-i+1} \otimes ... \otimes u^{p+q-1})\\ \cdot_{Z'} (u^1_{(2)} ... u^{p-i}_{(2)} [(x_{(2)}g)(u^{p-i+1}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{p+q-i}_{(1)})]_{(0)}) \end{array}\\
&= (\Psi_p(x_{(1)})(f)) \circ_i \Psi_q(x_{(2)})(g))(u^1 \otimes ... \otimes u^{p+q-1})
\end{aligned} \tag{8.18}$$

令 m（分别为 m′）和 e（分别为 e′）分别表示 $C^\bullet(\mathcal{U}, Z)$（分别为 $C^\bullet(\mathcal{U}, Z')$）上的乘法和单位元，如 (8.15) 所示。于是我们看到

$$\begin{gathered}\Psi_2(x)(m)(u^1 \otimes u^2) = x(\epsilon_L(\mu_U(u^1 \otimes u^2)) \triangleright 1_Z) = \epsilon_L(\mu_U(u^1 \otimes u^2)) \triangleright \epsilon_C(x) 1_{Z'} = \epsilon_C(x) m'(u^1 \otimes u^2)\\ \Psi_0(x)(e) = x(1_Z) = \epsilon_C(x) 1_{Z'} = \epsilon_C(x)(e')\end{gathered} \tag{8.19}$$

这就证明了该结果。 □

另一方面，如果 $L \in {}^{\mathcal{U}}\mathrm{aYD}_{\mathcal{U}}$ 是一个反 Yetter-Drinfeld 模，而 Z 是一个辫交换 Yetter–Drinfeld 代数，则由 [27, 引理 6.1] 可知，$L \otimes_{A^{op}} Z$ 也具有典范反 Yetter–Drinfeld 模结构。现在我们像在 [27, § 6.3.4]中那样考虑：

$$C_\bullet(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z) := {}_{\blacktriangleright}(_{\blacktriangleright}L \otimes_{A^{op}} Z_{\blacktriangleleft}) \otimes_{A^{op}} {}_{\blacktriangleright}U_{\blacktriangleleft}^{\otimes_{A^{op}}\bullet} \tag{8.20}$$

此外，若 $L \otimes_{A^{op}} Z$ 是一个稳定反 Yetter-Drinfeld 模，则 $C_\bullet(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z)$ 在 $C^\bullet(\mathcal{U}, Z)$ 上成为一个循环幺 comp 模，其复合映射和循环算子如下：

$$\begin{aligned}
f \bullet_i (l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k) &= l \otimes (u^1_{(2)} ... u^{k-p-i+1}_{(2)} [f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(0)}) \cdot_Z z \otimes u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-p-i+1}_{(1)} \otimes \quad (i > 0) \\
&\quad [f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(-1)}) u^{k-p-i+2}_{(2)} ... u^{k-i+1}_{(2)} \otimes u^{k-i+2} \otimes ... \otimes u^k \\
f \bullet_0 (l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k) &= l_{(0)} \otimes ((u^1_{+(2)} ... u^{k-p+1}_{+(2)} f(u^{k-p+2}_{+} \otimes ... \otimes u^k_+ \otimes (u^k_- ... u^1_- z_{(-1)} l_{(-1)}))) \cdot_Z z_{(0)}) \otimes \\
&\quad u^1_{+(1)} \otimes ... \otimes u^{k-p+1}_{+(1)} \\
t(l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k) &= l_{(0)} u^1_{++} \otimes u^1_{+-z_{(0)}} \otimes u^2_+ \otimes ... \otimes u^k_+ \otimes u^k_- ... u^1_- z_{(-1)} l_{(-1)}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

其中 $f \in C^p(\mathcal{U}, Z)$，且 $l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k \in C_k(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z)$。相应循环模（如式 (8.11) 所示）的循环同调记为 $HC_\bullet(\mathcal{U}, Z, L)$。

现在设 $h : L \longrightarrow L'$ 是 ${}^{\mathcal{U}}\mathrm{aYD}_{\mathcal{U}}$ 中的一个态射，且 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(Z, Z')$ 是 $\mathcal{U}$ 上辫交换 Yetter–Drinfeld 代数之间的测量。据此，我们得到诱导映射

$$\begin{gathered}
(h, \psi(x))_\bullet : C_\bullet(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z) = {}_{\blacktriangleright}(_{\blacktriangleright}L \otimes_{A^{op}} Z_{\blacktriangleleft}) \otimes_{A^{op}} {}_{\blacktriangleright}U_{\blacktriangleleft}^{\otimes_{A^{op}}\bullet} \longrightarrow {}_{\blacktriangleright}(_{\blacktriangleright}L' \otimes_{A^{op}} Z'_{\blacktriangleleft}) \otimes_{A^{op}} {}_{\blacktriangleright}U_{\blacktriangleleft}^{\otimes_{A^{op}}\bullet} = C_\bullet(\mathcal{U}, L' \otimes_{A^{op}} Z') \\
l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k \mapsto h(l) \otimes \psi(x)(z) \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k
\end{gathered} \tag{8.22}$$

对每个 $x \in C$。最后给出以下结果。

命题 8.10. 设 $\mathcal{U} = (U, A_L, s_L, t_L, \Delta_L, \varrho_L, S)$ 是一个 Hopf 代数胚。设 $\psi : C \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(Z, Z')$ 是 $\mathcal{U}$ 上辫交换 Yetter–Drinfeld 代数之间的测量。设 $h : L \longrightarrow L'$ 是 ${}^{\mathcal{U}}\mathrm{aYD}_{\mathcal{U}}$ 中的一个态射。假设 $L \otimes_{A^{op}} Z$ 和 $L' \otimes_{A^{op}} Z'$ 均稳定。则诱导态射：

$$\begin{gathered}
\Psi_\bullet : C \longrightarrow Vect_k(C^\bullet(\mathcal{U}, Z), C^\bullet(\mathcal{U}, Z')) \qquad x \mapsto (f \mapsto \psi(x) \circ f) \\
(h, \psi)_\bullet : C \longrightarrow Vect_k(C_\bullet(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z), C_\bullet(\mathcal{U}, L' \otimes_{A^{op}} Z')) \qquad x \mapsto (h, \psi(x))_\bullet
\end{gathered} \tag{8.23}$$

给出循环含幺 comp 模的余模测量。特别地，每个 $x \in C$ 都诱导一个态射 $(h, \psi(x))^{cy}_\bullet : HC_\bullet(\mathcal{U}, Z, L) \longrightarrow HC_\bullet(\mathcal{U}, Z', L')$，作用于循环同调。

证明。对于 $x \in C$、$f \in C^p(\mathcal{U}, Z)$、$l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k \in C_k(U, L \otimes_{A^{op}} Z)$ 和 $i > 0$，我们看到

$$\begin{aligned}
&(h, \psi(x))_{k-p+1}(f \bullet_i (l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k)) \\
&= h(l) \otimes \psi(x)((u^1_{(2)} ... u^{k-p-i+1}_{(2)} [f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(0)}) \cdot_Z z) \otimes u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-p-i+1}_{(1)} \otimes \\
&\quad [f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(-1)}) u^{k-p-i+2}_{(2)} ... u^{k-i+1}_{(2)} \otimes u^{k-i+2} \otimes ... \otimes u^k \\
&= h(l) \otimes x_{(1)}(u^1_{(2)} ... u^{k-p-i+1}_{(2)} [f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(0)})) \cdot_{Z'} x_{(2)}(z) \otimes u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-p-i+1}_{(1)} \otimes \\
&\quad [f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(-1)}) u^{k-p-i+2}_{(2)} ... u^{k-i+1}_{(2)} \otimes u^{k-i+2} \otimes ... \otimes u^k \\
&= h(l) \otimes (u^1_{(2)} ... u^{k-p-i+1}_{(2)} x_{(1)}([f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(0)}))) \cdot_{Z'} x_{(2)}(z) \otimes u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-p-i+1}_{(1)} \otimes \\
&\quad [f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(-1)}) u^{k-p-i+2}_{(2)} ... u^{k-i+1}_{(2)} \otimes u^{k-i+2} \otimes ... \otimes u^k \\
&= h(l) \otimes (u^1_{(2)} ... u^{k-p-i+1}_{(2)} [x_{(1)} f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(0)})) \cdot_{Z'} x_{(2)}(z) \otimes u^1_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-p-i+1}_{(1)} \otimes \\
&\quad [x_{(1)} f(u^{k-p-i+2}_{(1)} \otimes ... \otimes u^{k-i+1}_{(1)})]_{(-1)}) u^{k-p-i+2}_{(2)} ... u^{k-i+1}_{(2)} \otimes u^{k-i+2} \otimes ... \otimes u^k \\
&= x_{(1)} f \bullet_i (h(l) \otimes x_{(2)}(z) \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k) = x_{(1)} f \bullet_i (h, \psi(x_{(2)}))_k (l \otimes z \otimes u^1 \otimes ... \otimes u^k)
\end{aligned}$$

我们注意到，由于 $h : L \longrightarrow L'$ 是 ${}^{\mathcal{U}}\mathrm{aYD}_{\mathcal{U}}$中的一个态射，我们必须有 $h(l)_{(-1)} \otimes h(l)_{(0)} = l_{(-1)} \otimes h(l_{(0)})$，对任意 $l \in L$。使用

这一事实, 现在我们看到，对于 $f \in C^p(\mathcal{U},Z)$，$l \otimes z \otimes u^1 \otimes \dots \otimes u^k \in C_k(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z)$，以及任意 $x \in C$，有

$$\begin{aligned}
&(h, \psi(x))^{k-p+1}(f \bullet_0 (l \otimes z \otimes u^1 \otimes \dots \otimes u^k)) = h(l_{(0)}) \otimes \psi(x)((u^1_{+(2)} \dots u^{k-p+1}_{+2})(f(u^{k-p+2}_+ \otimes \dots \otimes u^k_+ \otimes (u^k_- \dots u^1_- z_{(-1)} l_{(-1)}))) \cdot_Z z_{(0)}) \otimes u^1_{+(1)} \otimes \dots \otimes u^{k-p+1}_{+1}) = h(l_{(0)}) \otimes (x^{(1)}(u^1_{+(2)} \dots u^{k-p+1}_{+2})(f(u^{k-p+2}_+ \otimes \dots \otimes u^k_+ \otimes (u^k_- \dots u^1_- z_{(-1)} l_{(-1)}))) \cdot_{Z'} \\
&x^{(2)}(z_{(0)})) \otimes u^1_{+(1)} \otimes \dots \otimes u^{k-p+1}_{+1}) = h(l)_{(0)} \otimes ((u^1_{+(2)} \dots u^{k-p+1}_{+2})(x^{(1)} f(u^{k-p+2}_+ \otimes \dots \otimes u^k_+ \otimes (u^k_- \dots u^1_- z_{(-1)} h(l)_{(-1)}))) \cdot_{Z'} \\
&x^{(2)}(z_{(0)})) \otimes u^1_{+(1)} \otimes \dots \otimes u^{k-p+1}_{+1}) = h(l)_{(0)} \otimes ((u^1_{+(2)} \dots u^{k-p+1}_{+2})(x^{(1)} f(u^{k-p+2}_+ \otimes \dots \otimes u^k_+ \otimes (u^k_- \dots u^1_- x^{(2)}(z)_{(-1)} h(l)_{(-1)}))) \\
&\cdot_{Z'} x^{(2)}(z)_{(0)}) \otimes u^1_{+(1)} \otimes \dots \otimes u^{k-p+1}_{+1}) = x^{(1)} f \bullet_0 (h(l) \otimes x^{(2)}(z) \otimes u^1 \otimes \dots \otimes u^k) = x^{(1)} f \bullet_0 (h, \psi(x^{(2)}))_k (l \otimes z \otimes \\
&u^1 \otimes \dots \otimes u^k)
\end{aligned}$$

最后，我们验证映射 $(h,\psi(x))_\bullet$ 的作用与循环算子可交换，即，对于任意 $l \otimes z \otimes u^1 \otimes \dots \otimes u^k \in C_k(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z)$，都有

$$\begin{aligned}
(h,\psi(x))_k(t(l \otimes z \otimes u^1 \otimes \dots \otimes u^k)) &= h(l_{(0)} u^1_{++}) \otimes \psi(x)(u^1_{+-} z_{(0)}) \otimes u^2_+ \otimes \dots \otimes u^k_+ \otimes u^k_- \dots u^1_- z_{(-1)} l_{(-1)} \\
&= h(l_{(0)}) u^1_{++} \otimes (u^1_{+-} \psi(x)(z_{(0)})) \otimes u^2_+ \otimes \dots \otimes u^k_+ \otimes u^k_- \dots u^1_- z_{(-1)} l_{(-1)} \\
&= h(l)_{(0)} u^1_{++} \otimes (u^1_{+-} \psi(x)(z)_{(0)}) \otimes u^2_+ \otimes \dots \otimes u^k_+ \otimes u^k_- \dots u^1_- \psi(x)(z)_{(-1)} h(l)_{(-1)}
\end{aligned}$$

现在可以推出，集合 $(h,\psi(x))_\bullet$ 按定义 8.5 的意义给出了从 $C_\bullet(\mathcal{U}, L \otimes_{A^{op}} Z)$ 到 $C_\bullet(\mathcal{U}, L' \otimes_{A^{op}} Z')$ 的一个测量。应用命题 8.8，结果即显然成立。□

参考文献

[1] M. Anel 和 A. Joyal，关于（余）代数的 Sweedler 理论及 bar-cobar 构造，arXiv 1309.6952（2013）。[2] A. Banerjee 和 S. Kour，关于 operad 上代数的测量及同调理论，Algebr. Geom. Topol. 22（2022），第 3 期，1113–1158。[3] M. Batchelor，差分算子、测量余代数与量子群类对象，Adv. Math. 105（1994），第 2 期，190–218。[4] ———，测量余模——及其应用，J. Geom. Phys. 36（2000），第 3-4 期，251–269。[5] G. B¨ohm 和 K. Szlach´anyi，具有双射反极的 Hopf 代数胚：公理、积分与对偶，J. Algebra 274（2004），第 2 期，708–750。[6] G. B¨ohm，Hopf 代数胚的伽罗瓦理论，Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.) 51（2005），233–262。[7] ———，Hopf 代数胚，代数手册，第 6 卷，Handb. Algebr.，第 6 卷，Elsevier/North-Holland，阿姆斯特丹，2009，第 173–235 页。[8] T. Brzezi´nski，关于与余代数伽罗瓦扩张相关的模，J. Algebra 215（1999），第 1 期，290–317。[9] G. B¨ohm、T. Brzezi´nski 和 R. Wisbauer，模范畴上的单子与余单子，J. Algebra 322（2009），第 5 期，1719–1747。[10] T. Brzezi´nski 和 G. Militaru，双代数胚、$\times_A$-双代数与对偶性，J. Algebra 251（2002），第 1 期，279–294。[11] T. Brzezi´nski 和 R. Wisbauer，余环与余模，伦敦数学会讲义系列，第 309 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2003。[12] A. Connes 和 H. Moscovici，Hopf 代数、循环上同调与横截指标定理，Comm. Math. Phys. 198（1998），第 1 期，199–246。[13] ———，循环上同调与 Hopf 代数，Lett. Math. Phys. 48（1999），第 1 期，97–108。纪念 Mosh´e Flato（1937–1998）。[14] ———，模 Hecke 代数及其 Hopf 对称性，Mosc. Math. J. 4（2004），第 1 期，67–109，310。[15] B. Fresse，算子上的模与函子，数学讲义，第 1967 卷，Springer-Verlag，柏林，2009。[16] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack，代数、双代数、量子群与代数变形，载于《变形理论与量子群及其在数学物理中的应用》（马萨诸塞州阿默斯特，1990），Contemp. Math.，第 134 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992，第 51–92 页。[17] L. Grunenfelder 和 M. Mastnak，关于双测量，J. Pure Appl. Algebra 204（2006），第 2 期，258–269。[18] ———，关于双测量。II，J. Pure Appl. Algebra 209（2007），第 3 期，823–832。[19] J. Huebschmann，泊松上同调与量子化，J. Reine Angew. Math. 408（1990），57–113。[20] ———，Lie-Rinehart 代数、Gerstenhaber 代数与 Batalin-Vilkovisky 代数，Ann. Inst. Fourier（Grenoble）48（1998），第 2 期，425–440。[21] M. Hyland 、 I. L´opez Franco 和 C. Vasilakopoulou，Hopf 测量余幺半群与富化，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 115（2017），第 5 期，1118–1148。[22] ———,测量余模与富化，arXiv 1703.10137（2017）。[23] N. Kowalzig 和 U. Kr¨ahmer，代数（上）同调理论中的对偶性与乘积，J. Algebra 323（2010），第 7 期，2063–2081。

[24] N. Kowalzig 和 H. Posthuma，Hopf 代数胚的循环理论，J. Noncommut. Geom. 5（2011），第 3 期，423–476。[25] N. Kowalzig 和 U. Kr¨ahmer，代数（上）同调理论中的循环结构，Homology Homotopy Appl. 13（2011），第 1 期，297–318。[26] N. Kowalzig，（余）Tor 上的 Batalin-Vilkovisky 代数结构与 Poisson 双代环，J. Pure Appl. Algebra 219（2015），第 9 期，3781–3822。[27] _____，算子上模的 Gerstenhaber 结构与 Batalin-Vilkovisky 结构，Int. Math. Res. Not. IMRN 22（2015），11694–11744。[28] J.-L Loday，循环同调，第 2 版，数学科学基础丛书，第 301 卷，Springer-Verlag，柏林，1998。附录 E 由 M. O. Ronco 撰写；第 13 章由作者与 T. Pirashvili 合作撰写。[29] J.-L Loday 和 B. Vallette，代数算子，数学科学基础丛书 [数学科学基础原理], 第 346 卷，Springer，海德堡，2012。[30] L. Menichi，Connes–Moscovici 特征映射是李代数同态，J. Algebra 331（2011），311–337。[31] I. Moerdijk 和 J. Mrˇcun，关于李代数胚的泛包络代数，Proc. Amer. Math. Soc. 138（2010），第 9 期，3135–3145。[32] H.-E. Porst 和 R. Street，Sweedler 对偶的推广，Appl. Categ. Structures 24（2016），第 5 期，619–647。[33] G. S. Rinehart，一般交换代数上的微分形式，Trans. Amer. Math. Soc. 108（1963），195–222。[34] P. Schauenburg，非交换环上的双代数及 Hopf 双模的结构定理，Appl. Categ. Structures 6（1998），第 2 期，193–222。[35] _____，量子群胚的对偶与双代数（$\times_R$-Hopf 代数），载于《Hopf 代数理论新进展》（La Falda，1999），Contemp. Math.，第 267 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000，第 273–299 页。[36] M. E. Sweedler，Hopf 代数，数学讲义系列，W. A. Benjamin, Inc.，纽约，1969。[37] M. Takeuchi，A⊗ A 上的代数组，J. Math. Soc. Japan 29（1977），第 3 期，459–492。[38] C. Vasilakopoulou，代数与模范畴的富化，arXiv 1205.6450（2012）。[39] _____，关于富集纤维化，Cah. Topol. G´eom. Diff´er. Cat´eg. 59（2018），第 4 期，354–387。[40] _____，双范畴中的富集对偶：$\mathcal{V}$-范畴与 $\mathcal{V}$-余范畴，J. Pure Appl. Algebra 223（2019），第 7 期，2889–2947。[41] P. Xu，Poisson 几何中的 Gerstenhaber 代数与 BV 代数，Comm. Math. Phys. 200（1999），第 3 期，545–560。[42] _____，量子群胚，Comm. Math. Phys. 216（2001），第 3 期，539–581。