arXiv:2301.08469v1 [math.LO] 20 Jan 2023

若干类有效拟波兰空间的理想表示与编号

Matthew de Brecht 人类与环境研究生院 京都大学，日本
matthew@i.h.kyoto-u.ac.jp以及 Takayuki Kihara数学信息学系，
信息学研究生院 名古屋大学，日本 kihara@i.nagoya-u.ac.jp以及
Victor SelivanovA.P. Ershov 信息系统研究所 俄罗斯科学院西伯利亚
分院 新西伯利亚，俄罗斯 vseliv@iis.nsk.su

2023年1月23日

摘要

众所周知，可数基域的理想表示最近已扩展到（有效）拟波兰空间。作为这些研究的延续，我们探讨若干类有效拟波兰空间。具体而言，我们证明了拟波兰空间的域刻画的一个有效版本，描述了拟波兰拓扑的有效扩张，发现了若干类有效拟波兰空间的自然编号，估计了（有效）同胚关系以及相对于这些编号的一些空间类的复杂度，并研究了连续域的度谱。

关键词。有效拟波兰空间、有效波兰空间、有效域、可计算可枚举传递关系、可插值关系、理想空间、编号、指标集、分离公理、度谱。

1 引言

对拓扑结构中的可计算性进行研究（目前这是可计算性理论中的热门课题），比研究可数代数结构中的可计算性更为复杂 [10, 2]。其中一个原因是，对于拓扑空间（即使该空间是波兰空间）中的可计算性问题，尚不清楚如何通过单个可数代数结构加以刻画。尽管如此，人们仍经常在拓扑语境中寻找可计算结构理论中那些已经发展成熟的概念和方法的类比。例如，可计算范畴性的类比在可计算度量空间和巴拿赫空间的研究中也取得了富有成果的应用（例如参见 [23, 22]），而度谱的类比对于拓扑空间也显示出相当的研究价值 [27, 16, 18]。

本文是对会议论文 [6][1],的重大更新，探讨了若干类有效准波兰空间（EQP 空间）。拟波兰（QP）空间 [4] 是一类性质良好的可数基空间，具有许多有趣的刻画，并包含分析学和理论计算机科学中许多重要的空间，例如波兰空间、ω-连续域和可数基谱空间。对 QP 空间有效版本的研究始于 [20, 26]，并于近期在 [8, 17, 5]中继续推进。特别是，研究表明，QP 空间的一些等价刻画在有效情形下不再等价，而且哪些由此得到的概念才是“恰当的”，并不显而易见。

[8] 中的定理 11 将 EQP 空间（文中称为预可计算 QP 空间）刻画为自然数集 ω上可计算可枚举传递关系的理想空间（更直接的证明另见 [5] 中的定理 3）。这一刻画很有域理论的风格，因为类似的可计算域刻画在域理论中十分重要。它是本文的一项基本技术工具，尤其使我们能够发现 EQP 空间类的自然编号，并估计（有效）同胚关系以及相对于这些编号的某些空间类的复杂度。我们对 EQP 空间类编号的研究，类似于可计算结构理论中对代数结构类编号的研究（例如，参见 [25, 15, 11, 12, 13] 及其中的参考文献）。

除了上述关于 EQP 空间类的编号结果外，我们还得到了若干其他结果。特别是，我们证明了一个有效的

[1]第 3、4、5、8、11 节均为全新内容，第 10 节补充了新的结果，其余各节与 [6] 中的内容基本相同。

拟波兰空间域刻画的版本 [4, 定理53], 描述了拟波兰拓扑的有效扩张（部分使 [4, 第 14]节中的某些结果有效化），并研究了连续域的度谱（继续研究 [27] 中代数域的度谱以及 [16, 18]中波兰空间的度谱）。

在下一节回顾一些预备知识后，我们将在第 3 节讨论 EQP 空间的理想刻画的若干变体。第 4 节将把这些结果应用于扩张 EQP 拓扑的问题。第 5 节将研究 [27] 中部分识别出的有效域类的理想刻画。这项研究与可计算偏序、可计算可枚举偏序以及计算理论中其他一些值得关注的二元关系的研究密切相关（例如参见 [3] 及其中的参考文献）。具体而言，我们的讨论引出了拟波兰空间的域刻画的一种有效版本（[4], 定理 53）。第 6 节将介绍若干类有效域之间可计算函数的表示。

第 7 节将讨论自然数集 ω 上若干类可计算可枚举二元关系的自然编号，以及相应 EQP 空间类的自然编号（其中一些已在 [27] 中讨论过）。第 8 节将构造可计算可枚举连续域的一个可计算编号（在某种意义上，这部分回答了会议论文 [6] 中提出的关于可计算可枚举可插值关系是否可枚举的问题）；与代数域的相应结果相比，这种编号的存在性远不那么显而易见。第 9 节将与代数结构中的类似问题平行，估计所引入编号下（有效）同胚的复杂度（例如参见 [15, 11, 12]）。第 10 节将精确估计与分离公理相关的若干常见拓扑空间类的指标集。最后，第 11 节将介绍连续域度谱的若干非平凡事实，以补充 [27, 16, 18] 中的一些结果。

2 预备知识

这里我们回顾全文中使用的一些记号、概念和事实。更具体的信息将在下文相应章节中回顾。

我们使用标准集合论符号；特别地，Y^X 是从 X 到 Y 的函数集，而 $P(X)$ 是集合 X 的子集类。本文中的所有（拓扑）空间都是可数基空间（简称 cb_0-空间）。我们用 $\simeq$ 表示同胚关系。有效空间是一个对 (X, β)，其中 X 是一个 cb_0-空间，且 $\beta\colon \omega \to P(X)$ 是一个基的编号

在 X 中，使得存在一个可计算可枚举集的可计算可枚举序列 $\{A_{ij}\}$，满足 $\beta(i)\cap\beta(j)=\bigcup\beta(A_{ij})$，其中 $\beta(A_{ij})$ 是 A_{ij} 在 β 下的像。若上下文已明确 β，我们就将 (X,β) 简写为 X。有效空间 (X,β) 的任意子空间 Y 都是有效的，其基集的诱导编号为 $\beta_Y(n)=\beta(n)\cap Y$。

若集合 $\{n\mid\beta(n)\neq\varnothing\}$ 是可计算可枚举的，则有效空间 (X,β) 是可计算可枚举的（或可显的）。可计算可枚举空间的子空间不一定是可计算可枚举的。有效空间包括：自然数的离散空间 $\mathbb{N}$、欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$、Scott 域 $P\omega$（自然数集的幂集，配备 Scott 拓扑；关于域的信息见 [1]）、贝尔空间 $\mathcal{N}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$、希尔伯特立方体 $[0,1]^\omega$；所有这些空间都配有基的自然数编号。对于任意有效空间 (X,β)，我们都关联典范嵌入 $e:X\to P\omega$，其定义为 $e(x)=\{n\mid x\in\beta(n)\}$。典范嵌入是 X 与 $P\omega$ 的子空间 $e(X)$ 之间的可计算同胚。

在任意有效空间 X 中，都可以定义经典层级的有效版本（例如参见 [26]），尤其是有效博雷尔层级 $\{\Sigma^0_{1+n}(X)\}_{n<\omega}$ 和有效卢津层级 $\{\Sigma^1_n(X)\}_{n<\omega}$。对于 $X=\omega$，它们分别与算术层级和解析层级相一致。

如果一个有效空间与希尔伯特立方体（分别为 Scott 域）的一个 Π^0_2-子空间有效同胚，则称其为有效波兰空间（分别称为有效准波兰空间，缩写为 EQP）。注意，EQP 空间在[8] 中称为预可计算准波兰空间，而可计算可枚举 EQP 空间则称为可计算准波兰空间。上述所有空间的例子都是可计算可枚举 EQP 空间。此外，所有可计算波兰空间以及所有可计算的 ω-连续域（例如参见 [26]）都是可计算可枚举 EQP 空间。然而，有效波兰空间不一定是可计算波兰空间（甚至不一定是 Δ^1_1可计算波兰空间；例如，考虑一个没有 Δ^1_1 元素的 Π^0_1 子空间 P $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$。如果 P 是 Δ^1_1 可显的，那么 P 就会有一个 Δ^1_1 元素）。有效空间之间的有效同胚关系记作 $\simeq_e$。注意，如果 $(X、\beta)\simeq_e(Y、\gamma)$，那么 $X\simeq Y$。下文考虑的所有有效空间类都在 $\simeq_e$下封闭。

我们采用关于二元关系和域的标准术语（例如参见 [1, 27]）。特别地，$(S;\rho)$ 的理想是S的有向下集。所谓可插值关系，是指 S 上的传递关系 $\prec$，使得任意初始段 $\{x\mid x\prec y\}$, $y\in S$ 都是有向的。

我们简要回顾域理论中的一些术语（详情见 [1, 14, 9]）。设 X 是一个 T_0-空间。X 上的特化序 $\leqslant_X$ 定义如下：对于每个开集 $U\subseteq X$，若 $x\in U$ 蕴含 $y\in U$，则 $x\leqslant_X y$。任何连续函数 $f\colon X\to Y$相对于 $\leqslant_X,\leqslant_Y$都是单调的。设 $K(X)$ 为以下元素的集合：

X的紧元，即满足 $\uparrow x = \{y \mid x \leqslant_X y\}$为开集的元素 x 。 X 上的逼近关系 $\ll_X$ 定义如下：若 y 位于 $\uparrow x$的内部，则 $x \ll_X y$。显然， $\ll_X \subseteq \leqslant_X$。可以看出，若 $x \in X$是一个紧元，则 $x \ll_X y$ 当且仅当 $x \leqslant_X y$。另请注意， $x \in X$是一个紧元，当且仅当 $x \ll_X x$。

如果 $(X,$ 则空间 X 是连续域；$\leqslant_X)$ 是有向完备的，并且存在一个集合 $B \subseteq X$ （称为 X 的域基），使得集合$\{x \mid b \ll_X x\}$、 $b \in B$ 构成 X 中拓扑的一个基，而且每个 $x \in X$ 都是 $\{b \in B \mid b \ll_X x\}$ 的有向上确界。 ω 连续域是具有可数域基的连续域。如果 $(X,$ 则空间 X 是代数域；$\leqslant_X)$ 是有向完备的，并且集合 $\uparrow c$、$c \in K(X)$ 构成 X 中拓扑的一个基。每个代数域也是连续域，因为 $K(X)$ 是域基。 ω 代数域是具有可数个紧元的代数域。

某些 EQP 空间类的研究与 ω 上满足某些有效性条件的上述类型二元关系密切相关。相应地，我们假定读者熟悉可计算性理论基础，例如参见 [24]。可计算、可计算可枚举和补可计算可枚举二元关系的概念可用自然的方式定义。关于可计算关系（以及一般的可计算结构和可计算可枚举结构）有许多有趣的结果。下面我们将用到一个关于有效偏序的漂亮事实（ [3] 中的定理 2.1）：在 ω 上存在一个补可计算可枚举偏序，它不同构于任何可计算可枚举偏序；反过来，将可计算可枚举与补可计算可枚举互换后，结论也成立。

最后，我们回顾定理 11 [8] 中确立的基本事实（更多细节也可参见 [5]中的定理 3）。

定义 1. 设 $\prec$ 是 ω上的一个传递关系。子集 $I \subseteq \omega$ 是一个理想（相对于 $\prec$而言）当且仅当：

(1) $I \neq \varnothing$, *(I is non-empty)*

(2) $(\forall a \in I)(\forall b \in \omega)\,(b \prec a \Rightarrow b \in I)$, *($I$ is a lower set)*

(3) $(\forall a, b \in I)(\exists c \in I)\,(a \prec c \,\&\, b \prec c)$. *($I$ is directed)*

全体理想组成的集合 $\mathrm{I}(\prec)$具有由形如 $[n]_\prec = \{I \in \mathrm{I}(\prec) \mid n \in I\}$ （其中 $n \in \omega$）的基本开集生成的拓扑。 □

如 [8, 定理 11], 所示，这类理想空间与QP空间密切相关，即：空间 X 是拟波兰空间，当且仅当它同胚于某个定义在 ω上的传递关系 $\prec$ 所对应的 $\mathrm{I}(\prec)$ 。此外，有效空间 $(X,\ \xi)$

是 EQP，当且仅当它可计算同胚于某个定义在 ω上的传递可计算可枚举关系 $\prec$所对应的 $\mathrm{I}(\prec)$ 。

3 EQP 空间的理想表示

本节证明 [8] 中定理 11 的若干变体。一个自然的相关问题是：如果将上述可计算可枚举传递关系限制为例如可计算严格偏序，会得到哪一类 EQP 空间？结果表明，不会出现任何新内容（不过，正如我们将在第 5 节所示，有效域的类似变体会引出一些有趣的新概念）。

命题 1。对于 $\prec$ 上的每个可计算可枚举传递关系 ω，都存在 ω 上的可计算严格偏序 $\sqsubset$ ，使得 $\mathrm{I}(\prec)$ 与 $\mathrm{I}(\sqsubset)$ 可计算同胚。

证明。设 $\prec^{(k)}$ 是一个可计算关系，使得当且仅当某个固定图灵机在 k 步内接受 $x \prec y$ 时， $x \prec^{(k)} y$ 成立。设 $P_{fin}\omega$ 为 ω 的有限子集所组成的集合；对于 F、$G \in P_{fin}\omega$ 和 m、$n \in \omega$，定义 $\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle G、\ n\rangle$ 当且仅当以下条件全部成立：

(1) $F \subseteq G$，（2） $m < n$，（3）
$(\forall y \in F)(\forall x \leqslant n)\,[x \prec^{(n)} y \Rightarrow x \in G]$,
（4） $(\exists y \in G)(\forall x \in F)\, x \prec^{(n)} y$。

容易验证， $\sqsubset$是可计算的、反自反的且具有传递性，因此它是一个可计算严格偏序。定义 $f\colon \mathrm{I}(\prec) \to \mathrm{I}(\sqsubset)$ 为

$$f(I) = \{\langle F, m\rangle \mid F \subseteq I \text{ is finite} \,\&\, m \in \omega\},$$

并定义 $g\colon \mathrm{I}(\sqsubset) \to \mathrm{I}(\prec)$ 为

$$g(I) = \bigcup_{\langle F,m\rangle \in I} F.$$

容易证明 f 是定义良好的且可计算。我们验证 g 是定义良好的，之后其可计算性便显而易见。任取 $I \in \mathrm{I}(\sqsubset)$。显然 $g(I) \neq \varnothing$。为证明 $g(I)$ 是下集，假设$x \prec y \in g(I)$。取足够大的 k ，使得 $x \leqslant k$ 且 $x \prec^{(k)} y$，并固定满足 $y \in F$的$\langle F、\ m\rangle \in I$。利用 I和 (2)的有向性，存在$\langle G、\ n\rangle \in I$

满足 $\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle G、\ n\rangle$和 $k \leqslant n$。由 (3) 可得 $x \in G$，因此$x \in g(I)$。为证明 $g(I)$ 是有向的，注意对任意 $\langle F、\ m\rangle$、$\langle G、\ n\rangle \in I$，存在满足 $\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle H、\ p\rangle$和 $\langle G、\ n\rangle \sqsubset \langle H、\ p\rangle$的 $\langle H、\ p\rangle \in I$，因此由 (4) 可得满足 $(\forall w \in F)\, w \prec x$和 $(\forall w \in G)\, w \prec y$的 x、$y \in H$。再利用 I的有向性，存在满足 $\langle H、\ p\rangle \sqsubset \langle H'、\ p'\rangle$的 $\langle H'、\ p'\rangle \in I$，因此(4)，而 $\prec$ 的传递性意味着 $F \cup G$ 中的每一对元素在 H' 中都有一个$\prec$-上界，且该上界包含于 $g(I)$。

只需证明 f 和 g 互为逆映射。显然，对每个 $I \in \mathrm{I}(\prec)$，都有 $g(f(I)) = I$。同样显然，对每个 $I \in \mathrm{I}(\sqsubset)$，都有 $I \subseteq f(g(I))$。为证明 $f(g(I)) \subseteq I$，取定 $\langle F、\ m\rangle \in f(g(I))$。对每个 $x \in F$，存在 $\langle F_x、\ m_x\rangle \in I$，使得 $x \in F_x$。令 $\langle G、\ n\rangle$ 为 $\sqsubset$ 中 $\{\langle F_x、\ m_x\rangle \mid x \in F\}$ 的一个上界，并令 $\langle H、\ p\rangle \in I$ 为 $\sqsubset$ 中 $\langle G、\ n\rangle$ 的一个上界。于是存在 $y \in H$，使得对每个 $x \in F$，都有 $x \prec^{(p)} y$。此外，由于 I 和 (2) 的有向性，不失一般性，我们可以假设 $m < p$。由此可得 $\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle H、\ p\rangle \in I$，因此 $\langle F、\ m\rangle \in I$，因为 I 是一个下集。至此便完成了证明：$\mathrm{I}(\prec)$ 和 $\mathrm{I}(\sqsubset)$ 可计算同胚。

□

现在我们将 $(\prec)$ 传递时的理想空间 $\mathrm{I}(\prec)$ where $\prec$，与 $\sqsubseteq$ 是 ω 上偏序时的空间 $\mathrm{I}(\sqsubseteq)$ where $\sqsubseteq$ 联系起来。回顾一下，若理想 $\sqsubseteq$ 相对于 $\sqsubseteq$ 有最大元素，则称其为主理想。

命题 2. 对于 ω 上任意可计算可枚举传递关系 $\prec$，都存在 ω 上的可计算偏序 $\sqsubseteq$，使得 $\mathrm{I}(\prec)$ 与 $\mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 中非主理想构成的子空间可计算同胚。

证明. 根据命题 1，存在ω 上的可计算严格偏序 $\sqsubset$，使得 $\mathrm{I}(\prec)$与 $\mathrm{I}(\sqsubset)$ 可计算同胚。定义 $\sqsubseteq$ 为 $\sqsubset$的自反闭包。只需证明，$I \subseteq \omega$ 是$\sqsubset$ 的理想，当且仅当 I 是 $\sqsubseteq$的非主理想。

假设 $I \in \mathrm{I}(\sqsubset)$。显然 $I \neq \varnothing$。若 $a \sqsubseteq b \in I$，则由于 I 是 $\sqsubset$-有向的，存在 $c \in I$ 使得 $b \sqsubset c$，因此 $a \sqsubset c$，这意味着 $a \in I$，因为 I 是一个$\sqsubset$-下集。因此，I 是一个 $\sqsubseteq$-下集。由于 I 是 $\sqsubset$-有向的，显然 I 是 $\sqsubseteq$-有向的，并且相对于 $\sqsubseteq$ 也是非主的。

反过来，假设 $I \in \mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 是非主的。显然，I 非空且是一个 $\sqsubset$-下集。任意 a、$b \in I$ 都有一个 $\sqsubseteq$-上界 $c \in I$，并且由于 I 是非主的，存在 $c' \in I$ 使得 $c \subseteq c'$。因此，c' 是 a 和 b的一个$\sqsubset$-上界，这证明 I 是 $\sqsubset$-有向的。

□

4 扩展 EQP 拓扑

众所周知，若将可数多个 $\mathbf{\Delta}_2^0$-集加入拟波兰空间的拓扑中，所得空间仍是拟波兰空间 [4]。以下结果是这一观察的有效版本，但仅限于闭集。

定理 1. 给定自然数集 $\prec$ 上的一个可计算可枚举传递关系，以及一个可计算可枚举集 $U \subseteq \omega$，可以有效地得到自然数集 ω 上的一个可计算可枚举传递关系，使得 $\mathrm{I}(\sqsubset)$ 与通过将 $A = \{I \in \mathrm{I}(\prec) \mid (\forall x \in U)\, x \notin I\}$ 作为可计算可枚举开集加入 $\mathrm{I}(\prec)$ 的拓扑而得到的空间可计算同胚。

证明. 根据命题 1，不失一般性，我们可以假设 $\prec$ 是可计算的。我们用 $U^{(n)}$ 表示由某个固定图灵机在 n 步内枚举出的 U 的子集。令 $\omega_* = \omega \cup \{*\}$，其中 $\{*\}$ 是一个不属于 ω 的符号。定义自然数集 $(P_{fin}\omega_*) \times n$ 上的一个可计算可枚举传递关系 $\sqsubset$ 为 $\langle F, m\rangle \sqsubset \langle G, n\rangle$，当且仅当以下条件全部成立：

(1) $m < n$,

(2) $* \in F \Rightarrow * \in G$,

(3) $(\exists y \in G\backslash\{*\})(\forall x \in F\backslash\{*\})\, x \prec y$,

(4) $* \in G$ or $(\exists x \in U)\, x \in G$,

(5) $[* \in F \,\&\, y \in F\backslash\{*\}] \Rightarrow (\forall x \leqslant n)\, [x \in U^{(n)} \Rightarrow x \not\prec y]$.

显然，$\sqsubset$ 是可计算可枚举的。证明 $\sqsubset$ 具有传递性的唯一非平凡部分，是验证 (5) 成立，因此我们将在此证明这一点。假设$\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle G、\ n\rangle \sqsubset \langle H、\ p\rangle$。假设 $* \in F$且 $y \in F\backslash\{*\}$，并且 $x \leqslant p$属于 $U^{(p)}$。那么 (2) 蕴含 $* \in G$；根据 (3)，存在 $z \in G\backslash\{*\}$ 使得 $y \prec z$；而根据 (5)，我们有 $x \not\prec z$。因此，如果 $x \prec y$ 成立，那么传递性将推出 $x \prec z$，这就产生了矛盾。所以，(5) 成立，并且我们得到 $\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle H、\ p\rangle$。

定义 $g\colon \mathrm{I}(\sqsubset) \to \mathrm{I}(\prec)$ 为

$$g(I) = \bigcup_{\langle F,m\rangle \in I} F\backslash\{*\}.$$

我们首先证明 $g(I)$ 定义良好。$g(I)$ 非空，因为 (3) 蕴含存在 $\langle G、\ n\rangle \in I$，使得某个 $y \in G\backslash\{*\}$成立。为证明 $g(I)$ 是下集，假设$x \prec y \in g(I)$，并设 $\langle F、\ m\rangle \in I$满足 $y \in F\backslash\{*\}$。由于 I是有向的，存在 $\langle G、\ n\rangle \in I$，使得 $\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle G、\ n\rangle$成立。根据 (3)，存在 $z \in G\backslash\{*\}$，使得

$y \prec z$，因此由 $\prec$的传递性可得 $x \prec z$。由此可知 $\langle\{x\}、\ m\rangle \sqsubset \langle G、\ n\rangle$成立，这意味着 $\langle\{x\}、\ m\rangle \in I$，进而得到 $x \in g(I)$。证明 $g(I)$ 是有向的，与命题 1 中证明 $g(I)$ 是有向的过程相同。

显然， g 是可计算的。为证明 g 是单射，设 $g(I)$ =$g(J)$，并任取 $\langle F、\ m\rangle \in I$。这意味着 $F\backslash\{*\} \subseteq g(I) = g(J)$，因此在 $g(J)$中， $F\backslash\{*\}$ 有一个 $\prec$-上界 y。于是存在 $\langle G、\ n\rangle \in J$，使得 $y \in G$；由有向性可不妨设 $m < n$，且 G 满足 (4)。我们证明$\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle G、\ n\rangle$。根据$G$的选取，条件 (1)、 (3)和 (4) 均成立。为证明 (2) 成立，反设 $* \in F$ 且$* \notin G$。由于 G 满足 (4)，必存在 $x \in U$ 使得 $x \in G$；又由 J的有向性，存在 $\langle H、\ p\rangle \in J$，使得 $\langle G、\ n\rangle \sqsubset \langle H、\ p\rangle$、 $x \leqslant p$且$x \in U^{(p)}$。于是由 (3) 可知存在 $z \in H$ 使得 $x \prec z$，但这样一来，由 (5) 可知，$\langle H、\ p\rangle$在 J中不可能有 $\sqsubset$-上界，这与 J的有向性矛盾。因此， $* \in F \Rightarrow * \in G$，故 (2) 成立。最后，若 $* \in F$且 $F\backslash\{*\} \neq \varnothing$，则由 I的有向性，可找到某些 $\langle H、\ p\rangle \in I$，使得$\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle H、\ p\rangle$ 且 $n < p$，并且很容易推出 (5) 成立。因此，$\langle F、\ m\rangle \sqsubset \langle G、\ n\rangle$，故 $\langle F、\ m\rangle \in J$，因为 J是一个下集。证明$J \subseteq I$ 的过程完全相同，故 g 是单射。

为说明 g 是满射，固定 $J \in \mathbf{I}(\prec)$。我们先考虑 $J \in A$ 的情形。定义

$$I = \{\langle F, m\rangle \mid F \subseteq J \cup \{*\} \text{ is finite} \,\&\, m \in \omega\}.$$

那么 I 显然非空，并且它是一个下集，因为若 $\langle F, m\rangle \sqsubset \langle G, n\rangle \in I$，则 (3) 蕴含 G 含有 $\prec$的一个上界，因此 $F \subseteq J$，因为 J 是一个下集。为说明 I 是有向的，假设 $\langle F, m\rangle, \langle G, n\rangle \in I$，并令 $y \in J$ 为 $\prec$的一个上界。设 $H = \{y, *\}$ 和 $p = m + n + 1$。那么 $\langle H, p\rangle \in I$ 是 $\langle F, m\rangle$ 以及 $\langle G, n\rangle$ 的一个 $\sqsubset$上界。因此 $I \in \mathbf{I}(\sqsubset)$，并且显然 $g(I) = J$。 $J \notin A$ 的情形类似，只是我们定义

$$I = \{\langle F, m\rangle \mid F \subseteq J \text{ is finite} \,\&\, m \in \omega\},$$

并且在证明 I 是有向的时，我们利用这样一个事实：构造 J 中一对元素的 $\sqsubset$上界时，存在 $x \in U \cap I$，使其满足 (4)。这就完成了 g 是一个可计算双射的证明。

最后，显然，$\mathbf{I}(\sqsubset)$ 的每个基本开子集都等于 $g^{-1}(O)$ 或 $g^{-1}(A \cap O)$，其中 O 是 $\mathbf{I}(\prec)$ 的一个开子集。因此，$\mathbf{I}(\sqsubset)$ 与通过将 A 作为可计算可枚举开集加入 $\mathbf{I}(\prec)$ 的拓扑而得到的空间可计算同胚。 □

利用所述的可数积和等化子构造

在 [4], 中，我们可以轻松地将上述定理推广到处理补可计算可枚举闭集的可计算可枚举序列。

推论 1. 给定自然数集 ω 上的可计算可枚举传递关系 $\prec$，以及由 $\mathrm{I}(\prec)$ 的余可计算可枚举闭子集构成的可计算可枚举序列 $(A_i)_{i\in\omega}$，可以计算出自然数集 ω 上的可计算可枚举传递关系 $\sqsubset$，使得 $\mathrm{I}(\sqsubset)$ 与这样得到的空间可计算同胚：将每个 A_i ($i \in \omega$) 作为可计算可枚举开集加入 $\mathrm{I}(\prec)$ 的拓扑中。

证明. 令 $\sqsubset_i$ 为前述定理中针对将 A_i 加入 $\mathrm{I}(\prec)$ 的拓扑后所得空间而得到的可计算可枚举传递关系；令 $\sqsubset'$ 为这些空间的积的一个可计算可枚举编码；令 $\sqsubset$ 为 $\mathrm{I}(\sqsubset')$ 的对角线的一个可计算可枚举编码，该对角线是可计算函数 $(x_i)_{i\in\omega} \mapsto (g_i(x_i))_{i\in\omega}$ 和 $(x_i)_{i\in\omega} \mapsto (g_0(x_0))^\omega$ 的等化子，其中 g_i 是前述定理证明中使用的从 $\mathrm{I}(\sqsubset_i)$ 到 $\mathrm{I}(\prec)$ 的双射。那么 $\sqsubset$ 满足该推论。

□

5 有效域的理想表示

本节将建立若干类有效域的有效版本的理想刻画。首先回顾两类有效域的定义（其中一类已有所知，另一类则最近在 [27] 中引入）。需要提醒读者的是，文献中“可计算”和“可计算可枚举”这两个形容词的用法有时并不一致。

定义 2. 我们称一对 (X, b) 为可计算域，其中 X 是一个 ω-连续域，且 $b : \omega \to X$ 是 X 中域基的一个编号，并满足关系 $b_i \ll_X b_j$ 可计算；这里 $\ll_X$ 是 X 上的逼近关系。将“可计算”替换为“可计算可枚举”，即可得到可计算可枚举域的概念。

对于代数域，至少有三种自然的有效性版本。

定义 3. (1) 我们称一对(X, c) 为可计算代数域，其中 X 是一个 ω-代数域，且 $c : \omega \to X$ 是 X 中紧元的编号，并满足关系 $c_i \leqslant_X c_j$ 可计算；这里 $\leqslant_X$ 是 X上的特化序。

(2) 强可计算可枚举代数域是指有限域，或一对 (X, c)，其中 X 是一个 ω-代数域，且 $c : \omega \to X$ 是 X 中紧元的双射编号，使得关系 $c_i \leqslant_X c_j$ 是可计算可枚举的。

(3) 可计算可枚举代数域是指一对 (X, c)，其中 X 是一个 ω-代数域，且 c: $\omega \to X$ 是 X 中紧元的编号，使得关系 $c_i \leqslant_X c_j$ 是可计算可枚举的。

概念（1）和（2）是在 [27] 中引入的，而概念（3）有时会在文献中以“可计算 ω-代数域”之名出现。显然，任何可计算代数域都是强可计算可枚举的，而任何强可计算可枚举代数域都是可计算可枚举的。下面的结果是对域理论中一些众所周知事实的重新表述 [1]。该结果曾作为命题 2 在 [27] 中公布，但未附证明；为求完整起见，我们在此给出证明。

命题 3。（1）一个拓扑空间是 ω-连续域，当且仅当它同胚于某个定义在 ω 上的传递插值关系 $\prec$所对应的 $\mathrm{I}(\prec)$。（2）一个拓扑空间是 ω-代数域，当且仅当它同胚于某个定义在 ω上的预序 $\sqsubseteq$ 所对应的 $\mathrm{I}(\sqsubseteq)$。（3）一个无限拓扑空间是 ω-代数域，当且仅当它同胚于某个定义在 ω上的偏序 $\sqsubseteq$ 所对应的 $\mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 。

证明。（1）设 $\prec$ 是 ω 上的传递插值关系。众所周知（参见 [1] 中的命题 2.2.22 ），$\mathrm{I}(\prec)$ 是一个 ω- 连续域。反过来，设 X 是一个 ω- 连续域，且 $b\colon \omega \to X$ 是域基的一个编号。在 ω 上定义关系 $\prec$ 如下：若 $b_i \ll_X b_j$，则 $i \prec j$。于是，$\prec$ 是 ω 上的传递插值关系，并且 X 通过 $f(x) = \{i \mid b_i \ll_X x\}$ 与 $\mathrm{I}(\prec)$ 同胚。

（2）设 $\sqsubseteq$ 是 ω 上的预序。众所周知，$\mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 是一个 ω-代数域，其紧元为主理想（另请注意，$\mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 与 $\mathrm{I}(\omega^*; \sqsubseteq^*)$，其中 $(\omega^*; \sqsubseteq^*)$ 是 $(\omega, \sqsubseteq)$ 的商序）。反过来，设 X 是一个 ω-代数域，且 $c\colon \omega \to X$ 是紧元的一个编号。在 ω 上定义预序 $\sqsubseteq$ 如下：若 $c_i \leqslant_X c_j$，则 $i \sqsubseteq j$。于是 X 通过 $f(x) = \{i \mid c_i \leqslant_X x\}$ 与 $\mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 同胚。

(3) 与 (2) 类似。 □

接下来，我们将上述命题的有效版本推广到代数域（对于连续域，这种直接的有效化可能尚不为人所知）；另见第3节。下一条事实在 [27] 中陈述时未附证明。

命题 4. (1) 一个有效空间是可计算（分别为可计算可枚举）代数域，当且仅当它与某个定义在 ω 上的可计算（分别为可计算可枚举）预序 $\sqsubseteq$ 的 I($\sqsubseteq$) 有效同胚。

(2) 一个无限有效空间是可计算（分别为强可枚举）代数域，当且仅当它与某个可计算（分别为可计算可枚举）偏序 $\sqsubseteq$ 上的 I($\sqsubseteq$) 有效同胚。

证明。(1) 设 ω 上的 $\sqsubseteq$ 是一个可计算预序。那么 (I($\sqsubseteq$); c)，其中 $c_i =\downarrow i = \{j \mid j \sqsubseteq i\}$，是一个可计算域，因为 $c_i \subseteq c_j$ 当且仅当 $i \sqsubseteq j$。反之，设 (X, c) 是一个可计算代数域。定义 ω 上的可计算预序 $\sqsubseteq$ 如下：如果 $c_i \leqslant_X c_j$，则 $i \sqsubseteq j$。于是 $\sqsubseteq$ 具有所需性质。对于可计算可枚举情形，同样的论证也成立。

(2) 设 ω 上的 $\sqsubseteq$ 是一个可计算偏序。那么 (I($\sqsubseteq$), c)，其中 c 与条目 (1) 中相同，是一个无限可计算域。反之，设 (X, c') 是一个无限可计算代数域。由于 $K(X)$ 是无限的，因此可以直接修改 c'，得到一个紧元的单射编号 c: $\omega \to X$，同时保持关系 $c_i \leqslant_X c_j$ 的可计算性。然后按上述方法进行。对于强可计算可枚举情形，类似的论证也成立。 □

尽管本文假设 ω-代数域赋予 Scott 拓扑，但 Lawson 拓扑也有实用的应用（见 [14]）。域 X 上的劳森拓扑通过将所有形如 $X \setminus \uparrow x$ 的集合加入开集，细化了 X 上的 Scott 拓扑。对于代数域，只需将形如 $X \setminus \uparrow x$ 的集合加入开集（其中 $x \in K(X)$），即可得到劳森拓扑（参见 [14]中练习 III-1.14 后的提示）。利用推论 1 和命题 4，我们得到以下已知事实的部分有效化：带有劳森拓扑的 ω-代数域是一个（零维）波兰空间。

推论 2. 若 X 是可计算（或可计算可枚举）代数域，则带有劳森拓扑的 X 是一个有效拟波兰空间。 □

接下来，我们证明以下拟波兰空间的域论刻画的有效版本，该刻画见 [4]：一个空间是拟波兰空间，当且仅当它同胚于某个 ω-代数域（等价地，某个 ω-连续域）的非紧元素空间。

定理 2. 对于有效空间 $(X$，以下条件等价：

(1) (X, ξ) 是一个有效拟波兰空间。

(2) (X,ξ) 与某个可计算代数域的非紧元素空间可计算同胚。(3) (X,ξ) 与某个可计算域的非紧元素空间可计算同胚。

证明。(1)→(2)。由命题 1， X 与某个定义在 ω上的可计算严格偏序 $\prec$ 所对应的 I($\prec$)可计算同胚。由命题 2， X 与 I($\sqsubset$)中非主理想所构成的子空间可计算同胚，其中 $\sqsubset$是定义在 ω上的可计算偏序。由命题 4(1)，I($\sqsubset$) 是一个可计算代数域。

蕴含关系 (2)→(3)显然，因为每个可计算代数域都是可计算域。

(3)→(1)。设 $(Y、\ b)$ 是一个可计算域，并设 X 与 $Y\backslash K(Y)$可计算同胚。由于 Y是 EQP，只需证明 $K(Y)\in\Sigma_2^0(Y)$ [8, 17]。集合 $C=\{i\mid b_i\ll_Y b_i\}$ 是可计算的，且 $K(Y)=\{b_i\mid i\in C\}$，因此只需验证$\{b_i\}\in\Sigma_2^0(Y)$ 在 $i\in C$ 上一致成立。我们有

$$\{b_i\}=\{y\mid b_i\leqslant_Y y\}\backslash\{y\mid y\nleqslant_Y b_i\}=\{y\mid b_i\leqslant_Y y\}\backslash\bigcup_{b_j\nleqslant_Y b_i}\{y\mid b_j\prec_Y y\}.$$

这是因为 $y\leqslant_Y b_i$ 当且仅当对于任意 j， $b_j\ll_Y y$ 都蕴含 $b_j\ll_Y b_i$。由于关系 $b_j\nleqslant_Y b_i$ 是可计算的，所需的估计由此得出。 □

接下来，我们证明上文引入的代数域的有效版本并不等价。为此，我们使用第 2 节中引用的 [3] 中的定理 2.1，以及 [27] 中的定理 1；它们等价于关于ω上的可计算可枚举预序的以下事实。

命题 5。存在一个定义在 ω 上的可计算可枚举预序 $\sqsubseteq$ ，其商序(ω^*；$\sqsubseteq^*$) 是无限的，且不同构于 ω上的任何可计算可枚举偏序。

我们利用这个命题得到以下事实；该事实也曾在 [27] 中宣布，但未给出证明：

命题 6。（1）存在一个强可计算可枚举代数域，它不同胚于任何可计算代数域。

(2) 存在一个可计算可枚举代数域，它不同胚于任何强可计算可枚举代数域。(3) 存在一个可计算可枚举域，它不同胚于任何可计算域。

证明。(1) 根据 [3], 中的定理 2.1，存在一个定义在 ω 上的可计算可枚举偏序 $\sqsubseteq$，它不同构于定义在 ω 上的任何可计算偏序。我们断言，空间 $X = \mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 具有所需性质。事实上，根据命题 4(2)，X （对紧元采用自然编号）是一个强可计算可枚举代数域。反设 X 同胚于一个可计算代数域 $(Y,\ c)$，并令 $f:\ X \to Y$ 为一个同胚。正如 [27], 中定理 2 的证明所指出的，f 在 $K(X)$ 上的限制是 $(K(X);\ \leqslant_X)$ 与 $(K(Y);\ \leqslant_Y)$ 之间的一个同构。根据命题 4，$(K(X);\ \leqslant_X)$ 与 $(K(Y);\ \leqslant_Y)$ 分别同构于 $(\omega, \sqsubseteq)$ 和 $(\omega, \sqsubseteq_Y)$，其中 $\sqsubseteq_Y$ 是定义在 ω 上的某个可计算偏序。因此，后两个偏序同构，矛盾。

(2) 令 $\sqsubseteq$ 为命题 5 中的 ω 上的预序。条目 (1) 中的相同论证表明，空间 $X = \mathrm{I}(\sqsubseteq)$ 具有所需的性质，因为 $(K(X);\ \leqslant_X)$ 与 $(\omega^*;\ \sqsubseteq^*)$ 同构。

(3) 令 $(X、\ c)$ 为条目 (1) 的证明中构造的空间，则 $(X、\ c)$ 是一个无限可计算可枚举域。反设对于某个可计算域 $(Y、\ b)$，X 与 Y 同胚。令 $C = \{i \mid b_i \ll_Y b_i\}$，那么由于基必须包含所有紧元，$C = \{i_0 < i_1 < \cdots\}$ 是一个无限可计算集，且 $(Y、\ \{b_{i_j}\}_j)$ 是一个可计算代数域。这与条目 (1) 矛盾。 □

6 表示可计算函数

本文介绍 EQP 空间与有效域之间的可计算函数的实用表示。

首先，我们简要回顾 [1]第 2.2.6 节中的一些概念和事实。设 $\mathbb{A} = (A;\ \prec_1)$ 和 $\mathbb{B} = (B;\ \prec_2)$ 是任意集合A、B上的可插值关系；我们将 A 的元素记为 a、a'、.....，对 B也作类似记号。若集合 $R \subseteq A \times B$ 满足以下条件，则称其为从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$ 的态射（记作 $R:\ \mathbb{A} \to \mathbb{B}$）：若 aRb 且 $a \prec_1 a'$，则 $a'Rb$；若 aRb且 $b' \prec_2 b$，则 aRb'；对于任意 a，存在 b使得 aRb；对于所有满足aRb、aRb'的 a、b、b'，存在 b''使得 $b \prec_2 b''$、$b' \prec_2 b''$和 aRb''；若 aRb，则对于某个 $a' \prec_1 a$ 有 $a'Rb$（参见 [1]中的定义 2.2.27）。

根据 [1], 中的定理 2.2.28，范畴 INT 的可插值关系及上述定义的态射，与以连续域为对象、以连续函数为态射的范畴 CONT 等价。该等价由函子 I : INT $\to$ CONT 和 B : CONT $\to$INT 给出，定义如下。设 $I(\mathbb{A})$ 为 $\mathbb{A}$ 的理想空间；对于 R:$\mathbb{A} \to \mathbb{B}$，$I(R):\ I(\mathbb{A}) \to I(\mathbb{B})$，令像映射 $\ulcorner R \urcorner(J) = \{b \mid \exists a \in J(aRb)\}$ 为，

$J \in I(\mathbb{A})$。对于 CONT 中的对象 X，令 $B(X) = (X;\ \ll_X)$；对于 CONT 中的态射 $f\colon X \to Y$，令 $B(f) = \{(x,y) \mid y \ll_Y f(x)\}$。

根据 [1]，中的定理 2.2.29，由任意预序 $\mathbb{A} = (A;\sqsubseteq)$ 作为对象构成的 INT 的满子范畴 PRE，与由代数域作为对象构成的 CONT 的满子范畴 ALG 等价。该等价由函子 $I_{\mathbf{PRE}}$: PRE $\to$ ALG 和 K : ALG $\to$ PRE 给出，其中 $I_{\mathbf{PRE}}$ 是 I 在 PRE 上的限制，$K(X)$ 是 $\leqslant_X$ 在 X 中紧元集合上的限制；对于 ALG 中的态射 $f\colon X \to Y$，令 $K(f) = \{(x,$
$y) \mid x \in K(X) \wedge y \in K(Y) \wedge y \leqslant_Y f(x)\}$。

现在我们为命题 4 中有效代数域类描述所引结果的有效版本。[1] 中定理 2.2.28 的有效化目前尚不清楚。问题在于，函子 I 会增加算法复杂度（而函子 B, $B_e(X,b) = (\omega;\prec)$ 的有效版本，其中 $m \prec n \leftrightarrow b(m) \ll_X b(n)$, 则保持算法复杂度不变）。

令 ALG$_e$ （分别为 ALG$_s$ 和 ALG$_c$）表示如下范畴：对象为可计算可枚举（分别为无限强可枚举和可计算）代数域，态射为可计算函数。令 PRE$_e$ （分别为 PRE$_s$ 和 PRE$_c$）表示 ω 上的可计算可枚举预序（分别为可计算可枚举偏序和可计算预序）范畴；这三个范畴中的态射均为 PRE 的可计算可枚举态射，并限制在这些范畴的对象上。令 $\simeq$ 表示范畴等价。

定理 3。我们有：PRE$_e \simeq$ ALG$_e$，PRE$_s \simeq$ ALG$_s$，PRE$_c \simeq$ ALG$_c$。

证明。我们只定义见证这些等价的函子，其性质的直接验证留给读者。定义I_e：PRE$_e$ $\to$ ALG$_e$ 如下：$I_e(\omega;\ \sqsubseteq) = (I(\sqsubseteq), b)$ 其中 $b(n) = \{m \mid m \sqsubseteq n\}$，而对于态射 R：$(\omega;\ \sqsubseteq_1) \to (\omega;\ \sqsubseteq_2)$，令 $I_e(R)$ 为像映射 $\ulcorner R \urcorner$ 在 $I(\sqsubseteq_1)$ 上的限制。定义 B_e : ALG$_e$ $\to$ PRE$_e$ 如下：若 (X,b) 是一个可计算可枚举代数域，则令 $B_e(X,b) = (\omega;\ \sqsubseteq)$ 其中 $m \sqsubseteq n \leftrightarrow b(m) \leqslant_X b(n)$；若 f：$(X,b) \to (Y,c)$ 是一个可计算函数，则令 $B_e(f) = \{(m,n) \mid c(n) \leqslant_Y f(b(m))\}$。于是 I_e, B_e 是 INT$_e \simeq$ ALG$_e$ 的见证。其余两个等价的见证显然是 I_e, B_e 的限制。 □

我们以关于如何表示由理想空间 I($\prec_1$) 和 I($\prec_2$) 表示的 QP空间之间函数的几点说明结束本节。我们将偏函数的代码定义为任意子集 $R \subseteq \omega \times \omega$。每个代码 R 编码了

偏函数 $\ulcorner R\urcorner :\subseteq \mathrm{I}(\prec_1) \to \mathrm{I}(\prec_2)$ 定义如下

$$\begin{aligned} \ulcorner R\urcorner(I) &= \{n \in \omega \mid (\exists m \in I)\langle m, n\rangle \in R\}, \\ dom(\ulcorner R\urcorner) &= \{I \in \mathbf{I}(\prec_1) \mid \ulcorner R\urcorner(I) \in \mathbf{I}(\prec_2)\}. \end{aligned}$$

以下事实是 [5][2] 中的定理 2。

定理 4. 设 $\prec_1$ 和 $\prec_2$ 是 ω 上的可计算可枚举传递关系。全函数 $f\colon \mathrm{I}(\prec_1) \to \mathrm{I}(\prec_2)$ 可计算，当且仅当存在一个可计算可枚举编码 $R \subseteq \omega \times \omega$，使得 $f = \ulcorner R\urcorner$。 □

7 空间类的枚举

这里我们介绍并研究 ω 上若干类关系以及 EQP 空间的编号。有些空间的自然编号可以直接根据第 2 节的定义给出。对于任意有效空间 X，令 π_X 为 X 的 Π^0_2-子空间的标准编号。在特殊情形 $X = P\omega$ 下，我们得到所有（相差一个 $\simeq_e$ 意义下）的 EQP 空间的编号 $\pi = \pi_X$。在特殊情形 $X = [0, 1]^\omega$ 下，π_X 是所有有效波兰空间的一个编号（因为在同胚意义下，波兰空间恰好是希尔伯特立方体的 $\mathbf{\Pi}^0_2$-子空间，参见例如 [19] 中的定理 4.14）；令 $\mu(n) = e(\pi_X(n))$，其中 e 是 [0 到 $P\omega$ 中的典范嵌入，我们便得到一个编号 μ，它将有效波兰空间实现为 $P\omega$ 的 Π^0_2-子空间。

空间的其他自然编号是通过理想表示定义的。我们先定义关系类在 ω 上的一些编号。令 $V_n = \{(i, j) \mid \langle i, j\rangle \in W_n\}$，即可得到 ω 上所有可枚举二元关系所成类 E 的一个标准可计算编号 $\{V_n\}$。令 T、I、P、O 分别表示 ω 上所有传递可计算可枚举关系、所有可插值可计算可枚举关系、所有可计算可枚举预序以及所有可计算可枚举偏序所成的类。

命题 7. (1) 存在一个可计算函数 t，使得：$V_{t(n)} \in$ T、$V_n \in$T 蕴含 $V_n = V_{t(n)}$，且 $V_m = V_n$ 蕴含 $V_{t(m)} = V_{t(n)}$。
(2) 存在一个可计算函数 p，使得：$V_{p(n)} \in$ P，$V_n \in$P 蕴含$V_n = V_{p(n)}$，且 $V_m = V_n$ 蕴含 $V_{p(m)} = V_{p(n)}$。(3) 存在一个可计算函数 o，使得：$V_{o(n)} \in$O，且 $V_n \in$O 蕴含 $V_n = V_{o(n)}$。

[2]在原论文中，定理的表述错误地遗漏了 $\prec_1$ 必须是可计算可枚举关系这一要求。感谢 Ivan Georgiev 指出这一错误并提供反例。

证明。(1) 对于 t，我们可以取任意一个可计算函数，使得 $V_{t(n)}$是 V_n 的传递闭包（这样的函数显然存在）。

(2) 作为 p，我们可以取任意可计算函数，使得 V_n 的自反传递闭包为 $V_{p(n)}$（这样的函数显然存在）。

(3) 给定 $\{V_{p(n)}\}$的一个可计算逐步枚举，可以直接构造一个由 ω 上的可计算可枚举偏序组成的可计算序列 $\{A_n\}$，满足：$A_n \subseteq V_{p(n)}$；如果 $V_{p(n)}$ 是偏序，那么 $A_n = V_{p(n)}$；如果 $V_{p(n)}$ 不是偏序，那么 A_n 中几乎所有元素两两不可比较。作为 o，我们可以取任意满足 $V_{o(n)} = A_n$ 的可计算函数。 □

我们感谢本文会议版本的一位匿名审稿人指出，不存在一个如第 (3) 项所述、且具有附加性质“ $V_m = V_n$ 蕴含 $V_{o(m)} = V_{o(n)}$”的函数 o 。

推论 3。类 T、P、O 具有可计算编号，即分别为编号 $\{V_{t(n)}\}$、$\{V_{p(n)}\}$、$\{V_{o(n)}\}$。

与其他类相比，如何枚举类 I 中可插值的可计算可枚举关系，并不清楚。可插值性的复杂性是难以简单枚举 I 的原因之一。

命题 8. 判定给定的可计算可枚举传递关系是否可插值是 Π^0_2-完全的。

证明. 显然，这一判定问题属于 Π^0_2。为证明其完备性，考虑有理数集 $\mathbb{Q} = \{q_i$ 上的标准严格序 $<_{\mathbb{Q}}$： $i \in \mathbb{N}\}$，它显然是可插值的。对于任意 Π^0_2 公式 $\varphi(n) \equiv \forall a \exists b \theta(n, a, b)$，考虑将 $<_{\mathbb{Q}}$限制在 $Q_n = \{q_i$ 上： $\forall a < i \exists b \theta(n, a, b)\}$，这是可计算可枚举的。若 $\varphi(n)$为真，则 $Q_n = \mathbb{Q}$；否则， Q_n 是有限的。注意，将严格序 $<_{\mathbb{Q}}$限制在有限集上不可能是可插值的。 □

我们不知道类 I 是否具有可计算编号，但根据命题 8，我们可以定义一个自然的非可计算编号 $\{V_{i(n)}\}$，其中 i 是 $\varnothing''$-可计算函数，它按递增顺序枚举 Π^0_2-集合 $\{m \mid V_{t(m)} \in$I$\}$。目前，设 j、c 分别是 $\varnothing''$-可计算函数，它们分别枚举 Σ^0_3-集合 $\{m \mid V_{t(m)}$ is computable$\}$ 和 $\{m \mid V_{p(m)}$ is computable$\}$。我们将在第 8 节再次讨论这个问题，以证明 I 的一个子类具有可计算编号，且该子类足够大，能够表示有效 ω-连续域的所有同胚类型。

[8], 推论 3 中的定理 11，以及 [27] 中的命题 3、4 表明，$\{$I$(V_{t(n)})\}$、$\{$I$(V_{p(n)})\}$、$\{$I$(V_{o(n)})\}$、$\{$I$(V_{c(n)})\}$ 分别是所有（在 $\simeq_e$ 意义下）

EQP 空间、正代数域、可计算可枚举代数域和可计算代数域的编号（精确定义以及对这些域类的讨论见 [27] ）；我们有时分别用 ι、α、β、γ表示这些编号。序列 $\{\mathbf{I}(V_{i(n)})\}$ 和 $\{\mathbf{I}(V_{j(n)})\}$ 是 ω-连续域自然类的编号，我们也分别将它们记为 δ 和 ε。下面总结引入的编号。

- μ: $[0$ 的 Π^0_2 子空间的标准编号，$1]^\omega$。
- π: $\mathcal{P}\omega$ 的 Π^0_2 子空间的标准编号。
- ι: 由可计算可枚举传递关系（T）的可计算编号$\{V_{t(n)}\}$导出的 EQP 空间编号。
- α: 由可计算可枚举预序（P）的可计算编号 $\{V_{p(n)}\}$ 导出的正代数域编号。
- β: 由可计算可枚举偏序（O）的可计算编号 $\{V_{o(n)}\}$ 导出的可计算可枚举代数域编号。
- γ: 由 $\varnothing''$-可计算偏序的可计算编号导出的可计算代数域编号。

- δ: 由可插值可计算可枚举关系的 $\varnothing''$-可计算编号 $\{I(V_{i(n)})\}$ 导出的 ω-连续域的编号（I）。
- ε: 由可插值可计算关系的 $\varnothing''$-可计算编号 $\{I(V_{j(n)})\}$ 导出的 ω-连续域的编号。

下一个命题比较了所引入的编号，它们基于有效空间编号上的以下预序: $\nu \leqslant_e \nu'$，若对于某个可计算函数 f，有 $\nu(n) \simeq_e \nu'(f(n))$；令 $\equiv_e$为由 $\leqslant_e$诱导的等价关系。对于预言机 h，令 $\leqslant_e^h$ 和 $\equiv_e^h$ 分别为$\leqslant_e$ 和 $\equiv_e$的 h-相对化。下面某些归约中出现预言机，是因为编号 γ、δ、ε 的定义方式不如其他编号具有构造性。

命题 9。我们有: $\mu \leqslant_e \pi \equiv_e \iota$, $\beta \leqslant_e \alpha \leqslant_e \iota$, $\varepsilon \leqslant_e^{\varnothing''} \delta \leqslant_e^{\varnothing''} \iota$, 和 $\gamma \leqslant_e^{\varnothing''} \alpha$。在任意一种编号 $\mu, \pi, \iota, \alpha, \gamma$ 中，积和余积的二元运算都由可计算函数表示（同样，至多相差 $\equiv_e$）。

证明。关系 $\pi \equiv_e \iota$ 由 [8] 中定理 11 的证明具有有效性以及 [5] 中定理 3 的证明具有有效性得出。关系 $\mu \leqslant_e \pi$ 由 [17] 中定理 1 得出，因为希尔伯特立方体是一个可计算波兰空间。其余关系由编号的定义、函数 i, j, c 的定义以及命题 7 得出。关于积和余积的断言可直接验证，方法类似于 [5] 中第 3.1 节和第 3.2 节。 □

不可计算编号 γ, δ, ϵ 能否改进为相应 EQP 空间类的可计算编号？在第 8 节中，我们针对 δ 的情形给出了肯定的答案。

8 连续域的枚举

如命题 3 所示，ω-连续域可以用可插值传递关系表示。然而，如第 7 节（以及 [6]）所述，目前尚不清楚如何为所有可计算可枚举的可插值关系提供可计算编号。本节将探讨这一问题。尽管目前尚不清楚是否存在对 $\mathbb{N}$ 上所有可计算可枚举的可插值传递关系的可计算枚举，但本节将证明，相应的 ω-连续域存在可计算枚举（在可计算同胚意义下）。在 [6], 时，这一结果尚不为人所知，我们在此首次给出该结果。

引理 1. 设 $(X, \prec_X)$ 和 $(Y, \prec_Y)$ 是配备了（可计算可枚举）传递关系的集合。假设 $f\colon\ X \to Y$ 是一个（可计算）函数，满足

- f 是满射，并且
- $x \prec_X x' \iff f(x) \prec_Y f(x')$.

令 $G_f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in X\}$ 为 f 的图。那么 $\ulcorner G_f \urcorner \colon \mathrm{I}(\prec_X) \to \mathrm{I}(\prec_Y)$ 是一个（可计算的）同胚。

证明。首先我们证明，$x \in I$ 当且仅当 $f(x) \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$。若 $x \in I$，则根据 $\ulcorner G_f \urcorner$ 的定义，$f(x) \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$。反过来，若 $f(x) \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$，则必定存在某个 $x' \in I$，使得 $f(x') = f(x)$。由 I 的有向性，存在 $x'' \in I$，使得 $x' \prec_X x''$。于是 $f(x) = f(x') \prec_Y f(x'')$，因此我们对 f 的假设意味着 $x \prec_X x''$；又由于 I 是下集，可得 $x \in I$。

接下来我们证明，对于每个 $I \in \mathrm{I}(\prec_X)$，都有 $\ulcorner G_f \urcorner(I) \in \mathrm{I}(\prec_Y)$。下面我们将用到 f 是满射这一假设。

(1)（$\ulcorner G_f \urcorner(I)$ 非空）：存在 $x \in I$，因此存在 $f(x) \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$。

(2)（$\ulcorner G_f \urcorner(I)$是下集）：假设 $f(x) \prec_Y f(x') \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$。那么 $x \prec_X x' \in I$，因此 $x \in I$。所以，$f(x) \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$。

(3)（$\ulcorner G_f \urcorner(I)$是有向的）：假设 $f(x_0), f(x_1) \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$。那么 $x_0, x_1 \in I$，因此存在 $x \in I$，使得 $x_0 \prec_X x$且 $x_1 \prec_X x$。所以，$f(x) \in \ulcorner G_f \urcorner(I)$且 $f(x_0) \prec_Y f(x)$ 且 $f(x_1) \prec_Y f(x)$。

由定理 4 可知，$\ulcorner G_f \urcorner\colon \mathrm{I}(\prec_X) \to \mathrm{I}(\prec_Y)$是一个全可计算函数。

接下来证明 $\ulcorner G_f \urcorner$是满射。给定 $J \in \mathrm{I}(\prec_Y)$，令 $I = f^{-1}(J)$。那么

(1) $I \neq \varnothing$，因为 $J \neq \varnothing$ 且 f 是满射。(2) I是一个下集，因为若 $x \prec_X x' \in I$，则 $f(x) \prec_Y f(x') \in J$，因此$f(x) \in J$，这意味着 $x \in I$。(3) I是有向的，因为若 $x_0, x_1 \in I$，则存在 $y \in J$，使得 $f(x_0) \prec_Y y$且 $f(x_1) \prec_Y y$；因此，由于 f 是满射，存在 $x \in I$，使得$f(x) = y$，并满足 $x_0 \prec_X x$ 和 $x_1 \prec_X x$。

最后，由于 $I \in [x]_{\prec_X}$ 当且仅当 $\ulcorner G_f \urcorner(I) \in [f(x)]_{\prec_Y}$，可知$\ulcorner G_f \urcorner$ 是一个可计算同胚。 □

定理 5. 存在所有 EQP ω-连续域的一个可计算枚举。

证明. 设 $(Y, \prec_Y)$ 是一个配备了可计算可枚举传递关系的集合。我们将在 X 上定义一个可计算可枚举子集 $X \subseteq \mathbb{N}$ 和一个可计算可枚举可插值传递关系 $\prec_X$，以及一个可计算函数 $f\colon X \to Y$。我们认为 $2n \in \mathbb{N}$ 对应于 $n \in Y$，并将 $2n+1 \in \mathbb{N}$ 视为一个虚拟符号 w_n。

设 $\prec_Y^{(s)}$ 是 $\prec_Y$ 在阶段 s的一个有限近似。设 $(F_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ 的一个枚举，使得 $x \in F_n$ 蕴含 $x < n$。定义偏函数 $f^{(0)} :\subseteq \mathbb{N} \to Y$，使其定义域中只有偶数，并令 $f^{(0)}(2n) = n$。设 $\prec_X^{(0)}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的空二元关系。

在每个阶段 s，每个虚符号 w_k 在阶段 0 都处于未激活状态，但之后的阶段可能会变为激活状态。激活的虚符号 w_k 之后可能会被替换。如果 $F_n \cup \{y_n\}$ 的每个元素在阶段 s 都处于激活状态（和/或已被替换），并且$x \prec_X^{(s)} y_n$ 对每个 $x \in F_n$ 都成立，那么对 (F_n, y_n) 在阶段 s 需要注意。此时，如果$x \prec_X^{(s)} z \prec_X^{(s)} y_n$ 对每个 $x \in F_n$都成立，我们就说 z 解决了这样的 (F_n, y_n)。

对每个阶段 $s \geqslant 0$，执行以下各子阶段。

- 子阶段 1：令 $n < s$ 为需要关注的最小未解决对 (F_n, y_n)（如果不存在这样的对，则转到下一个子阶段）。令 w_k 为最小的未激活虚拟符号，并对每个 $x \in F_n$，设定 $x \prec_X^{(s+1)} w_k \prec_X^{(s+1)} y_n$。宣布 w_k 激活，并将 (F_n, y_n) 标记为已解决。

- 子阶段 2：若 w_k 是尚未被替换的激活虚符号中最小的一个，且 w_k 满足 (F_n, y_n)，那么我们可以假设 $f^{(s)}$ 已经对 $F_n \cup \{y_n\}$中的所有元素定义，因此对每个 $x \in F_n$，我们寻找满足$f(x) \prec_Y^{(s+1)} z \prec_Y^{(s+1)} f(y_n)$ 的 $z \in Y$。如果找到这样的 z，则声明 w_k已被替换，并通过将 $2k+1$加入其定义域并定义 $f^{(s+1)}(2k+1) = z$，将 $f^{(s)}$扩展为 $f^{(s+1)}$。如果未找到这样的 z，则令 $f^{(s+1)} = f^{(s)}$。

- 子阶段 3：进一步扩展 $\prec_X^{(s+1)}$，使得当 $f(x)$和 $f(x')$有定义且 $f(x) \prec_Y^{(s+1)} f(x')$时，$x \prec_X^{(s+1)} x'$。

- 子阶段 4：通过添加 $\prec_X^{(s+1)}$ 并取传递闭包来完成 $\prec_X^{(s)}$。然后进入阶段 $s+1$。

Set

$$X = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1 \mid w_n \text{ becomes active at some stage}\}.$$

定义 $\prec_X = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \prec_X^{(s)}$和 $f = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} f^{(s)}$。显然，$X$和 $\prec_X$都是可计算可枚举的。此外，子阶段 4 保证 $\prec_X$ 是传递的，而子阶段 1 保证它是可插值的。

接下来，考虑 $\prec_Y$ 是可插值的情况。于是 $f\colon\ X \to Y$ 是一个全函数，因为每个已激活的虚符号最终都会在子阶段 2 中被替换。显然，f 也是可计算的，并且它是一个满射，因为 $f(2n) = n$。此外，子阶段 3 保证 $f(x) \prec_Y f(x')$意味着 $x \prec_X x'$。我们证明反过来，如果 $x \prec_X x'$，那么 $f(x) \prec_Y f(x')$。我们考虑 $x \prec_X x'$ 在某个阶段被添加到关系 $\prec_X$中的不同情况：

(1) 如果在子阶段 1 中添加了 $x \prec_X x'$，那么 x（或 x'）是一个虚符号 w_k，而 x'（或 x）来自某个对 $(F_n、y_n)$。根据假设，w_k 会在之后的某个子阶段 2 中被替换，并且替换方式会使得 $f(x) \prec_Y f(x')$ 成立。

(2) 如果 $x \prec_X x'$ 是在子阶段 3 添加的，那么显然 $f(x) \prec_Y f(x')$。

(3) 最后一种可能是，$x \prec_X x'$ 是在通过传递闭包完成闭包时于子阶段 4 添加的。那么存在某个 z，使得$x \prec_X z$ 和 $z \prec_X x'$ 在添加 $x \prec_X x'$ 之前就已包含在 $\prec_X$ 中。根据归纳法，我们可以假设 $f(x) \prec_Y f(z)$ 和$f(z) \prec_Y f(x')$。因此，由于 $\prec_Y$的传递性，$f(x) \prec_Y f(x')$。

由引理 1 可知，若 $\prec_Y$是可插值的，则 $\mathbf{I}(\prec_X)$ 和 $\mathbf{I}(\prec_Y)$可计算同胚。

根据上述构造，我们可以枚举一个可计算可枚举可插值传递关系 $(\prec_{X_i})_{i\in\mathbb{N}}$ 序列，使得对于每个可计算可枚举可插值传递关系 $\prec_Y$，都存在某个 $i \in \mathbb{N}$，使 $\mathbf{I}(\prec_{X_i})$ 与 $\mathbf{I}(\prec_Y)$可计算同胚。

□

9 （有效）同胚的复杂度

这里我们估计所引入的编号中的（有效）同胚关系 $\simeq_e$和 $\simeq$ 的复杂度，并推导出一些推论。代数结构的类似问题已得到详细研究（例如参见 [15, 11, 12]）。在下一个定理中，我们汇总了一些估计；对于域类，这些估计与代数结构的相应估计相似[3]，而对于波兰空间和拟波兰空间，其复杂度显然更高。

为了得到 ι的估计，我们采用理想空间之间可计算函数的表示 $f :\subseteq \mathbf{I}(\prec_1) \to \mathbf{I}(\prec_2)$，其中 $\prec_1$、$\prec_2 \in \mathbf{T}$，该表示在 [5], 定理 2 中建立（见第 6 节末尾）。

对于域的情形 $\prec_1, \prec_2 \in \mathbf{I}$，可以利用 [1] 第 2.2.6 节结果的有效版本来简化上述表示（见上文定理 3）。也就是说，可计算函数 $f :\subseteq \mathbf{I}(\prec_1) \to \mathbf{I}(\prec_2)$ 与满足以下条件的函数 $\ulcorner R \urcorner$ 重合，其中 R 是 ω 上的二元可计算可枚举关系：若 aRb 且 $a \prec_1 a'$，则 $a'Rb$；若 aRb 且 $b' \prec_2 b$，则 aRb'；对任意 a，存在 b 使得 aRb；对所有满足 aRb、aRb' 的 a, b, b'，存在 b'' 使得 $b \prec_2 b'', b' \prec_2 b''$，且 aRb''；若 aRb，则对某个 $a' \prec_1 a$ 有 $a'Rb$。这些条件的合取记作 $mor(R, \prec_1, \prec_2)$（意为“R 是从 $\prec_1$ 到 $\prec_2$ 的态射”）。注意，$\ulcorner R \urcorner = id_{\mathbf{I}(\prec_1)}$ 当且仅当 $aRb \leftrightarrow b \prec_1 a$。

定理 6. (1) 设 $\nu \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$。那么，关系 $\nu(m) \simeq_e \nu(n)$和 $\nu(m) \simeq \nu(n)$ 分别是 Σ^0_3-完全集和 Σ^1_1-完全集。此外，在等价关系的可计算归约意义下，它们分别是 Σ^0_3-完全和 Σ^1_1-完全等价关系。

[3]我们感谢 Nikolay Bazhenov 提供了相关的文献线索。

(2) 设 $\nu \in \{\iota, \mu\}$。关系 $\nu(m) \simeq_e \nu(n)$ 和 $\nu(m) \simeq \nu(n)$ 分别是 Π^1_1和 Σ^1_2。

证明。1. 首先我们证明上界。对于 $\nu = \alpha$，很容易看出（参见 [27] 中定理 2 的证明） $\alpha(m) \simeq_e \alpha(n)$ 当且仅当 $(\omega;\ V_{p(m)}) \simeq_e (\omega;\ V_{p(n)})$ 当且仅当

$$\exists k, l \forall x, y(\varphi_k(x) \downarrow \wedge \varphi_l(x) \downarrow \wedge (xV_{p(m)}y \leftrightarrow \varphi_k(x)V_{p(n)}\varphi_k(y)) \wedge (xV_{p(n)}y \leftrightarrow \varphi_l(x)V_{p(m)}\varphi_l(y)) \wedge xV_{p(m)}\varphi_l(\varphi_k(x))V_{p(m)}x \wedge yV_{p(n)}\varphi_k(\varphi_l(y)V_{p(n)}y)),$$

因此，该关系是 Σ^0_3。对于关系 $\simeq$，我们只需在上述公式开头添加函数量词 $\exists h$，并将 φ 相对化到预言机 h；由此得到所需的估计 Σ^1_1。

如果只将 p 替换为 o，上述论证对 $\nu = \beta$ 也成立。对于 $\nu = \gamma$，我们还将 p 替换为 c；很容易看出，c 的 $\varnothing''$-可计算性不会影响估计 Σ^0_3，也（显然）不会影响估计 Σ^1_1。

对于 $\nu = \delta$，我们使用定理陈述之前所描述的理想空间之间可计算函数的表示： $\delta(m) \simeq_e \delta(n)$当且仅当

$$\exists k, l, x, y(x = i(m) \wedge y = i(n) \wedge mor(V_k, V_x, V_y) \wedge mor(V_l, V_y, V_x) \wedge \forall a, b(a(V_l \circ V_k)b \leftrightarrow bV_x a) \wedge \forall a, b(a(V_k \circ V_l)b \leftrightarrow bV_y a).$$

由于 i 是 $\varnothing''$-可计算的，主括号中的前两个合取项是Σ^0_3。由于 V_x 是可计算可枚举的，第三和第四个合取项也同样如此，而第五和第六合取项是 Π^0_2。至此，我们完成了对$\simeq_e$的估计。对于关系 $\simeq$，我们只需在上述公式开头添加函数量词 $\exists h$，并将 V_k、V_l 替换为 V^h_k、V^h_l；由此得到所需的估计Σ^1_1。对于 $\nu = \varepsilon$，上述论证（以 j 代替 i）同样适用。

现在我们证明下界。根据 [15], 中的定理 4.7(a)，对于任意Σ^0_3 集 A，存在 ω 上的可计算线性序的可计算序列 $\{L_k\}$、$\{M_k\}$，使得 $k \in A$ 当且仅当 $L_k \simeq_e M_k$。根据理想空间的定义，$L_k \simeq_e M_k$ 当且仅当 $I(L_k) \simeq_e I(M_k)$ 当且仅当对每个$\nu \in \{\alpha、\ \beta、\ \gamma、\ \delta、\ \varepsilon\}$，$A \leqslant_m \{\langle k、\ l\rangle \mid \nu(k) \simeq_e \nu(l)\}$，从而完成了对 Σ^0_3的证明。

根据 [15], 中的定理 4.4(d)，对于任意 Σ^1_1 集合 A，都存在 ω 上的可计算线性序的可计算序列 $\{L_k\}$、$\{M_k\}$，使得 $k \in A$ 当且仅当 $L_k \simeq M_k$。重复上一段的论证，我们便得到 Σ^1_1 的证明。

剩下要证明的是，$\simeq_e$ 和 $\simeq$ 作为等价关系也都是完备的。由 [12], 中的命题 4 可知，对于 ω 上的任意 Σ^0_3 等价关系 A，都存在一个可计算序列 $\{L_k\}$，其中包含可计算偏序

，定义在 ω 上，使得 kAl 当且仅当 $L_k \simeq_e L_l$，这证明了 Σ^0_3 完备性对每个 $\nu \in \{\alpha$、β、γ、δ、$\varepsilon\}$都成立。由 [11], 中的定理 5 可知，对于 ω 上的任意 Σ^1_1 等价关系 A，都存在一个可计算序列 $\{L_k\}$，其中包含定义在 ω 上的可计算线性序，使得 kAl 当且仅当 $L_k \simeq L_l$。这证明了 Σ^1_1 完备性对每个 $\nu \in \{\alpha$、β、γ、δ、$\varepsilon\}$都成立。

2. 根据命题 9，我们可以用 ι 代替 π。将命题 7 中的关系$V_{t(n)}$ 记作 $\prec_n$，可得：$\iota(m) \simeq_e \iota(n)$ 当且仅当 $\mathbf{I}(\prec_m) \simeq_e \mathbf{I}(\prec_n)$ 当且仅当

$$\exists k, l(\ulcorner V_k \urcorner : \mathbf{I}(\prec_m) \to \mathbf{I}(\prec_n) \wedge \ulcorner V_l \urcorner : \mathbf{I}(\prec_n) \to \mathbf{I}(\prec_m) \wedge \ulcorner V_l \urcorner \circ \ulcorner V_k \urcorner = id_{\mathbf{I}(\prec_m)} \wedge \ulcorner V_k \urcorner \circ \ulcorner V_l \urcorner = id_{\mathbf{I}(\prec_n)}),$$

因此，只需验证关系 $\ulcorner V_l \urcorner \circ \ulcorner V_k \urcorner = id_{\mathbf{I}(\prec_m)}$ 是 Π^1_1。由于它等价于 $\forall I \in \mathbf{I}(\prec_m)(\ulcorner V_j \urcorner(\ulcorner V_i \urcorner(I)) = I)$，这可由 $\ulcorner R \urcorner(I)$的定义推出。

第二个断言是第一个断言的直接相对化。事实上，$\iota(m) \simeq \iota(n)$ 当且仅当 $\mathbf{I}(\prec_m) \simeq\mathbf{I}(\prec_n)$ 当且仅当

$$\exists R, S \subseteq \mathbb{N}^2(\ulcorner R \urcorner : \mathbf{I}(\prec_m) \to \mathbf{I}(\prec_n) \wedge \ulcorner S \urcorner : \mathbf{I}(\prec_n) \to \mathbf{I}(\prec_m) \wedge \ulcorner S \urcorner \circ \ulcorner R \urcorner = id_{\mathbf{I}(\prec_m)} \wedge \ulcorner R \urcorner \circ \ulcorner S \urcorner = id_{\mathbf{I}(\prec_n)}),$$

因此该关系是 Σ^1_2。 □

我们目前尚不清楚上述定理第 2 项中的估计是否精确。由 [18, 16]中发展的有效斯通对偶可知，可计算紧波兰空间之间的同胚关系是 Σ^1_1-完全的；第三位作者最近与 Alexander Melnikov 的交流中也提到了这一点（参见 [7]中的推论 4.28）。但对于可计算波兰空间，这个问题仍未解决。

作为定理 6 和命题 9 的推论，我们得到了某些自然空间类的 ι-指标集的上界。

推论 4. 设 $\nu \in \{\mu$、α、β、γ、δ、$\varepsilon\}$。则 $\{n \mid \exists m(\iota(n) \simeq_e \nu(m))\}$ 是 Π^1_1，而 $\{n \mid \exists m(\iota(n) \simeq \nu(m))\}$ 是 Σ^1_2。

特别地，判断给定的有效拟波兰空间是否与某个可度量化空间（可计算可枚举域、可计算可枚举代数域等）有效同胚的问题是 Π^1_1。对于同胚问题，这是 Σ^1_2。下一节将说明，对于可度量化空间，这一估计可以得到改进。

10 分离公理的复杂性

这里我们讨论一些与分离公理有关的空间类。令$\mathcal{T}_1$、 $\mathcal{T}_2$、 $\mathcal{R}$和 $\mathcal{M}$ 分别表示 T_1 空间、 T_2 空间、正则空间和可度量化空间的类。令 $\{D_n\}$ 为 ω 的有限子集的标准编号，则集合 $\check{}\ D_n = \{A \subseteq \omega \mid D_n \subseteq A\}$ 构成 $P\omega$上的 Scott 拓扑的标准基。

命题 10。类 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{R}, \mathcal{M}$ 中任意一个的 π-指标集都是 Π^1_1。

证明。根据 T_1-空间的定义， $\pi(m) \in \mathcal{T}_1$ 当且仅当 $\forall x, y \in \pi(m)(x \neq y \to \exists n(x \in \check{}D_n \not\ni y))$.。由于 $\pi(m) \in \Pi^0_2(P\omega)$，我们得到 $\pi^{-1}(\mathcal{T}_1) \in \Pi^1_1$。

根据 T_2-空间的定义， $\pi(m) \in \mathcal{T}_2$ 当且仅当

$$\forall x, y \in \pi(m)(x \neq y \to \exists i, j(x \in \check{D}_i \wedge y \in \check{D}_j \wedge \check{D}_i \cap \check{D}_j \cap \pi(m) = \varnothing)).$$

由于 $\check{}\ D_i \cap \check{}D_j \cap \pi(m) = \varnothing$ 当且仅当 $\forall z \in \pi(m)(z \notin \check{}D_i \vee z \notin \check{}D_j)$，我们有$\pi^{-1}(\mathcal{T}_2) \in \Pi^1_1$。

回忆一下， X 是正则的，当且仅当对于每个 $x \in X$ 以及 x 的每个基本邻域U，都存在 x 的一个基本邻域 V，使得 X 中 V 的闭包 $Cl(V)$ 包含于 U。对于 $X = \pi(m)$，这表示为： $\pi(m) \in \mathcal{R}$ 当且仅当 $\forall x \in \pi(m) \forall i(x \in \check{}D_i \to \exists j(x \in \check{}D_j \wedge Cl(\check{}D_j \cap \pi(m)) \subseteq \check{}D_i))$.。因此，只需验证关系 $\forall y(y \in Cl(\check{}D_j \cap \pi(m)) \to y \in \check{}D_i)$ 是 Π^1_1；为此，只需验证关系 $y \in Cl(\check{}D_j \cap \pi(m))$ 是 Σ^1_1。该关系等价于 $\forall k(y \in \check{}D_k \cap \pi(m) \to \exists z \in \check{}D_j \cap \pi(m)(z \in \check{}D_k))$，因此它确实是 Σ^1_1。

由乌雷松度量化定理可知 $\mathcal{M} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{R}$，因此 $\pi^{-1}(\mathcal{M})$ 的估计 Π^1_1 可由前面的结果推出。注意，推论 4 中 $\pi^{-1}(\mathcal{M})$ 的上界 Σ^1_2 （无需使用乌雷松定理）要差得多。 □

接下来我们证明命题 10 的上界是最优的。下面的证明表明，理想刻画为此类结果提供了有用的工具。回顾一下，以下蕴含关系对 cb_0-空间成立：

$$\text{metrizable} \iff \text{regular} \implies \text{Hausdorff} \implies T_1.$$

关于可度量化性与正则性的等价性，正如 [28,第 12], 页所提到的，每个正则 T_0 空间都是豪斯多夫的：对于两个不同的点 x、 y，根据 T_0性，存在一个包含 x 或 y 之一、但不包含另一个的开集 U。假设 U 包含 x，则 U 的补集是闭集，因此根据

正则性可知它们彼此分离，尤其是 x和 y彼此分离。因此，根据乌雷松度量化定理，正则 cb_0 空间是可度量化的。

首先，针对编号 ι （即由可计算可枚举传递关系的标准编号诱导出的所有有效拟波兰空间的编号），我们给出以下 Π^1_1-完备性结果；回忆一下，根据命题 9， $\iota \equiv_e \pi$。

定理 7. 设 $F \subseteq \omega$ 是一个 Π^1_1 集。那么，存在一个可计算函数，它对给定的 $p \in \omega$返回一个可计算可枚举 EQP 空间 X 的 ι-指标，使得

$$\begin{cases} X \text{ is metrizable} & \text{if } p \in F, \\ X \text{ is not } T_1 & \text{if } p \notin F. \end{cases}$$

证明. 回忆一下，良基可计算树的指标集是 Π^1_1-完备的。因此，我们考虑可计算树，而不是 Π^1_1 集。设 $T \subseteq \omega^{<\omega}$ 是一个可计算树。我们的空间 X 将是 $\{I_x : x \in \omega^\omega\} \cup \{J_x : x \in [T]\}$，配备特化序 $J_x \leqslant I_x$，其中 $[T]$ 是穿过 T的所有无限路径的集合。接下来要做的是将此空间 X 写成一个理想空间。

对于每个 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，我们准备一个新符号 $\underline{\sigma}$。令 $|\sigma|$ 为 σ的长度，并设 $|\underline{\sigma}| = |\sigma|$。如果 σ 非空，即 $|\sigma| > 0$，我们用 σ^- 表示 σ的直接前驱。我们在集合 $|\prec|$ 上定义一个可计算二元关系 $\prec := \{\sigma, \underline{\sigma} : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$，如下所示：如果 $\sigma \in \omega^\omega$ 非空，则枚举$\sigma^- \prec \sigma$、 $\underline{\sigma^-} \prec \underline{\sigma}$和 $\sigma \prec \underline{\sigma}$。如果 $\sigma \notin T$，那么我们也枚举 $\underline{\sigma^-} \prec \sigma$。接着考虑其传递闭包，并定义 $X = I(\prec)$。

注意，如果 $a \prec b$，那么要么 $|a| < |b|$，要么对某个$\sigma \in \omega^{<\omega}$，$a = \sigma$ 且 $b = \underline{\sigma}$。如果 I 是 $\prec$的一个理想，那么对于任意 $a \in I$，可以两次利用 I 的有向性，得到 b、$c \in I$，使得 $a \prec b \prec c$。于是，根据上文提到的 $\prec$的性质，我们有 $|a| < |c|$。因此，任意理想都包含任意长的字符串。此外，由于不可比较字符串之间的任意一对都没有上界，要使一个集合有向，其所有元素都必须可比较。这意味着，对于 $\prec$ 的任意理想 I，都存在一个无限字符串 $x \in \omega^\omega$，使得 I 仅由 x 的初始段或其中划线标出的初始段组成。换言之， I 是 $\{\sigma$ 的 $\prec$-向下闭包：$\sigma \subset x\}$ 或 $\sigma \subset x\}$： $\{\underline{\sigma}$，其中我们用 $\sigma \subset x$ 表示 σ 是 x的一个初始段。

如果 x 是经过 T的一条无限路径，那么 $\{\sigma : \sigma \subset x\}$ 的向下闭包是 $J_x = \{\sigma : \sigma \subset x\}$，而$\{\underline{\sigma} : \sigma \subset x\}$的向下闭包是 $I_x = \{\sigma, \underline{\sigma} : \sigma \subset x\}$。 I_x 和 J_x 都是理想，并且由于 $J_x \subseteq I_x$，

显然， $J_x \in [\tau]_\prec$ 蕴含 $I_x \in [\tau]_\prec$，所以 $J_x \leqslant_X I_x$，其中回顾一下，$[n]_\prec = \{I \in \mathrm{I}(\prec) : n \in I\}$ 是一个基本开集，而 $\leqslant_X$ 是特化序。因此，若 T 不是良基的，那么 X 就不是 T_1。若 T 是良基的，那么任意一个 $x \in \omega^\omega$ 都有一个初始段 $\sigma \notin T$，并且对于任意这样的 σ，我们有$\sigma^- \prec \underline{\sigma^-} \prec \sigma \prec \underline{\sigma} \prec \ldots$。因此，$\{\sigma : \sigma \subset x\}$ 和 $\{\underline{\sigma} : \sigma \subset x\}$ 具有相同的向下闭包 $I_x = \{\sigma, \underline{\sigma} : \sigma \subset x\}$。所以，任意理想都具有形式 I_x，其中某个 $x \in \omega^\omega$。由此，我们有 $X = \{I_x : x \in \omega^\omega\}$，它与贝尔空间 ω^ω同胚。这是因为，正如 $|\prec| = \{\sigma, \underline{\sigma} : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$是二元关系 $\prec$的底集，集合 $\{[\sigma]_\prec, [\underline{\sigma}]_\prec : \sigma \in \omega^{<\omega}\}$ 按定义给出 X 上的拓扑，而上述论证表明 $X \cap [\sigma]_\prec = X \cap [\underline{\sigma}]_\prec = \{I_x : \sigma \subset x\}$。特别地，$X$ 是可度量化的。

关于显明性，给定 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，若 x 扩张了 σ，则 $I_x = \{\sigma, \underline{\sigma} :$ 如上所示，$\sigma \subset x\}$ 是 $\prec$ 的一个理想，并且同时包含 σ 和 $\underline{\sigma}$；因此 $I_x \in [\sigma]_\prec$ 且 $I_x \in [\underline{\sigma}]_\prec$。这意味着，对于任意 $\tau \in |\prec|$，$X \cap [\tau]_\prec \neq \varnothing$。特别地，$X$ 是可显空间。

□

定理 7 表明，对于任意 $i \in \{1, 2, 3\}$，所有可计算可枚举 EQP T_i-空间的 ι-指标集是 Π^1_1-完全的，其中第二可数 T_0 空间是 T_3 当且仅当它可度量化。该结果还可进一步推广如下。

定理 8。设 $M \subseteq H \subseteq F \subseteq \omega$ 为 Π^1_1 集。则存在一个可计算函数，它在给定 $p \in \omega$ 时，返回一个可计算可枚举 EQP-空间 X 的 ι-指标，使得

$$\begin{cases} X \text{ is metrizable} & \text{if } p \in M, \\ X \text{ is Hausdorff, but not metrizable} & \text{if } p \in H \backslash M, \\ X \text{ is } T_1\text{, but not Hausdorff} & \text{if } p \in F \backslash H, \\ X \text{ is not } T_1 & \text{if } p \notin F. \end{cases}$$

这意味着，每个由 Π^1_1 集组成的元组 (M, H, F)，只要 $M \subseteq H \subseteq F$ 一致地 m-归约到 $(\iota^{-1}(\mathcal{M}), \iota^{-1}(\mathcal{T}_2), \iota^{-1}(\mathcal{T}_1))$，都是如此。我们将定理 8 的证明分解为几个引理。

引理 2. 设 $H \subseteq \omega$ 是一个 Π^1_1 集。那么，存在一个可计算函数，它在给定 $p \in \omega$ 时，返回一个可计算可枚举 EQP 空间 X 的 ι-指标，使得

$$\begin{cases} X \text{ is metrizable} & \text{if } p \in H, \\ X \text{ is } T_1\text{, but not Hausdorff} & \text{if } p \notin H. \end{cases}$$

证明。首先，一个非豪斯多夫的第二可数 T_1 拓扑的具体例子称为末期拓扑 [28, II. 73]。这里，我们的构造更接近 [21], 中的做法，即在无穷远处添加一对不可分辨点

到 ω ，而不是 [28, II.73], 中的做法，即添加一个新点 $1^\star$ 到$[0,\ 1]$ 其中 $(1、1^\star)$ 构成一对不可分辨点。在我们的构造中，首先给定一棵树$T \subseteq \omega^{<\omega}$ 。对于 $x \in \omega^\omega$，如果 x 是穿过 T 的一条无限路径，那么我们就在离散空间$\omega^{<\omega}$的无穷远处添加一对不可分辨点 $(I_x、\ I_x^\star)$ 。如果 x 不是穿过 T 的一条无限路径，那么我们就在 $\omega^{<\omega}$的无穷远处添加一个点 J_x。

形式上，给定一棵树 $T \subseteq \omega^{<\omega}$，我们考虑末期拓扑的如下特定表示 $\prec$：对于每个 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，我们准备符号$\underline{\sigma}$、$[\sigma、\ \infty]$，以及 $[\sigma、\ \infty^\star]$。我们在集合$|\prec|$上定义一个可计算二元关系 $\prec := \{\underline{\sigma}、\ [\sigma、\ \infty]、\ [\sigma、\ \infty^\star] :\ \sigma \in \omega^{<\omega}\}$。若 σ非空，我们将 σ的直接前驱记作 σ^-，并对每个 $o \in \{\infty、\infty^\star\}$枚举 $[\sigma^-、\ o] \prec [\sigma、o] \prec \underline{\sigma} \prec \underline{\sigma}$。若 $\sigma \notin T$，我们也枚举 $[\sigma^-、\ \infty^\star] \prec [\sigma、\ \infty] \prec [\sigma、\ \infty^\star]$。接着，考虑其传递闭包，并定义 $X = \mathbf{I}(\prec)$。

首先，由于 $\underline{\sigma} \prec \underline{\sigma}$，$\{\underline{\sigma}\}$ 的 $\prec$向下闭包构成一个理想。这是 $I_\sigma = \{\underline{\sigma}\} \cup \{[\tau, \infty],\ [\tau,\ \infty^\star] :\ \tau \subseteq \sigma\}$，其中 $\tau \subseteq \sigma$ 的意思是 τ 是 σ 的一个初始段。注意，X 的子空间 $Y = \{I_\sigma :\ \sigma \in \omega^{<\omega}\}$ 是离散的，因为 $Y \cap [\underline{\sigma}]_\prec = \{I_\sigma\}$。对于任意 $a \notin I_\sigma$，a 和 $\underline{\sigma}$ 都没有共同上界，因此 I_σ 是包含 $\underline{\sigma}$ 的唯一理想。如果理想 I 对任何 $\sigma \in \omega^{<\omega}$ 都不包含 $\underline{\sigma}$，那么与定理 7 的证明类似，可以看出 I 包含 $[\sigma, \infty]$ 或 $[\sigma,\ \infty^*]$，且字符串 σ 可以任意长。此外，由于不可比较字符串的对没有上界，要使一个集合成为有向集，其所有成员都必须可比较。这意味着，对于 $\prec$ 的任意此类理想 I，都存在一个无限字符串 $x \in \omega^\omega$，使得 I 仅由 $[\sigma,\ \infty]$ 或 $[\sigma, \infty^\star]$ 构成，其中 σ 是 x的初始段。换言之，这样的 I 是 $\{[\sigma,\ \infty] :\ \sigma \subset x\}$ 或 $\{[\sigma,\ \infty^\star] :\ \sigma \subset x\}$的 $\prec$向下闭包。

如果 x 是穿过 T 的无限路径，那么 $I_x = \{[\sigma、\ \infty] :\ \sigma \subset x\}$和 $I_x^\star = \{[\sigma、\ \infty^\star] :\ \sigma \subset x\}$ 都是向下闭的。因此，任意理想都具有 I_σ、I_x 或 $I_x^\star$的形式。我们声称，作为点的后两个理想无法被互不相交的开集分离。这是因为，任何包含 I_x 和 $I_x^\star$ 的基本开集，分别具有 $[[\sigma、\ \infty]]_\prec$（其中 $\sigma \subset x$）和 $[[\tau、\ \infty^\star]]_\prec$（其中 $\tau \subset x$）的形式。然而，$[[\sigma、\ \infty]]_\prec$ 和 $[[\tau、\ \infty^\star]]_\prec$ 总有交集 I_ρ，其中 ρ 是 σ 和 τ的公共延伸。因此，X 不是豪斯多夫的。如果 x 不是穿过 T 的无限路径，那么如定理 8 的证明所示，可以看出 $\{[\sigma、\ \infty] :\ \sigma \subset x\}$ 和 $\{[\sigma、\ \infty^\star] :\ \sigma \subset x\}$具有相同的向下闭包 $J_x = \{[\sigma、\ \infty],\ [\sigma、\ \infty^\star] :\ \sigma \subset x\}$。无论如何，没有两个理想能通过 $\subseteq$相比较，因此 X 是 T_1。所以，如果 T 是非良基的，那么 X 是 T_1，但不是豪斯多夫的。

若 T 是良基的，那么如上所述，任意理想都具有 I_σ或 J_x的形式；也就是说，$X = \{I_\sigma :\ \sigma \in \omega^{<\omega}\} \cup \{J_x :\ x \in \omega^\omega\}$。我们声称 X与波兰空间 $\omega^{\leqslant\omega} := \omega^{<\omega} \cup \omega^\omega$ 同胚，其拓扑为

由 $\{\sigma\colon \sigma\in\omega^{<\omega}\}$ 和 $[\sigma]=\{x\in\omega^{\leqslant\omega}\colon x$ 生成，并且拓扑比 $\sigma\}$ 更细。这是因为，正如 $|\prec|=\{\underline{\sigma},[\sigma,\infty],[\sigma,\infty^\star]\colon \sigma\in\omega^{<\omega}\}$ 是二元关系 $\prec$ 的底集，集合 $\{[\underline{\sigma}]_\prec,[[\sigma,\infty]]_\prec,[[\sigma,\infty^\star]]_\prec\colon \sigma\in\omega^{<\omega}\}$ 根据定义给出了 X 上的拓扑，而上述论证表明 $X\cap[[\sigma,\infty]]_\prec=X\cap[[\sigma,\infty^\star]]_\prec=\{I_\tau\colon \tau\subseteq\sigma\}\cup\{J_x\colon \sigma\subset x\}$。因此，映射 $\sigma\mapsto I_\sigma$ 与映射 $x\mapsto J_x$ 的并给出了 $\omega^{\leqslant\omega}$ 与 X 之间的同胚。特别地，X 是可度量化的。

关于显明性，给定 $\sigma\in\omega^{<\omega}$，我们有 $I_\sigma\in[\sigma]_\prec$；若 x 扩展 σ，则 I_x、$J_x\in[[\sigma、\infty]]_\prec$ 以及 $I_x^\star$、$J_x\in[[\sigma、\infty^\star]]_\prec$。这意味着，对于任意 $\tau\in|\prec|$，$X\cap[\tau]_\prec\neq\varnothing$。特别地，$X$ 是可显的。 □

引理 3. 设 $M\subseteq\omega$ 是一个 Π^1_1 集。那么，存在一个可计算函数，它接收 $p\in\omega$ 并返回一个可计算可枚举 EQP 空间 X 的 ι指标，使得

$$\begin{cases} X \text{ is metrizable} & \text{if } p\in M,\\ X \text{ is Hausdorff, but not metrizable} & \text{if } p\notin M.\end{cases}$$

证明。首先，有一个第二可数豪斯多夫拓扑的具体例子，它不可度量化，称为双原点拓扑 [28, II.74]。它类似于具有两个原点的欧几里得平面，其中两个原点无法通过闭邻域分离（这导致其不可度量化）。这里，我们的构造更接近 [21], 中的构造，后者给出了一个拟波兰空间，而 [28, II.74] 中的例子不是拟波兰空间。在我们的构造中，首先给定一棵树 $T\subseteq\omega^{<\omega}$。我们空间的基平面是离散空间 $\omega\times(\omega^{<\omega}\sqcup\omega^{<\omega})$。对于每个 $x\in\omega^\omega$，都可以添加点 $I_{n,\ x}=(n、\ x)$ 以及 $(\infty、\ x)$。这里，若x 是经过 T的一条无限路径，则会添加对应于$(\infty、\ x)$ 的两个点 J_x^+和 J_x^-，而这两个点无法通过闭邻域分离。事实上，任意两个分别包含 J_x^+和J_x^-的闭邻域的交集，都包含任意大的 n对应的 $I_{n,\ x}$。若 x 不是经过 T的一条无限路径，则平面沿横坐标 $\{I_{n,\ x}\colon n\in\omega\}$ 所在直线对折，然后将 J_x^+ 与 J_x^- 等同。

形式上，给定一棵树 $T\subseteq\omega^{<\omega}$，我们考虑末期拓扑的一种特定表示 $\prec$：对于每个 $n\in\omega$ 和 $\sigma\in\omega^{<\omega}$，我们准备符号 $(n、\ \sigma)$、$(n、\ \underline{\sigma})$、$(n、\ \sigma^\pm)$、$[n、\ \sigma]$ 以及 $[n、\ \underline{\sigma}]$。我们在集合上定义一个可计算二元关系 $\prec$

$$|\prec|:=\{(n,\sigma),(n,\underline{\sigma}),(n,\sigma^\pm),[n,\sigma],[n,\underline{\sigma}]:n\in\omega \text{ and } \sigma\in\omega^{<\omega}\}.$$

对于任意 $m<n$，定义如下：

$$[m,\sigma]\prec[n,\sigma]\prec(n,\sigma)\prec(n,\sigma),$$
$$[m,\underline{\sigma}]\prec[n,\underline{\sigma}]\prec(n,\underline{\sigma})\prec(n,\underline{\sigma}).$$

如果 τ 是 σ 的真初始段，则定义如下：

$$(n,\tau^{\pm}) \prec (n,\sigma^{\pm}), \quad (n,\sigma^{\pm}) \prec (n,\sigma), \quad (n,\sigma^{\pm}) \prec (n,\underline{\sigma}).$$

若 $m < n$，且 τ 是 σ的真初始段，则令如下：

$$[m,\tau] \prec [n,\sigma], \quad [m,\underline{\tau}] \prec [n,\underline{\sigma}].$$

若 $\sigma \notin T$、 $m < n$和 τ 是 σ的真初始段，则我们也令如下：

$$[m,\tau] \prec [n,\underline{\sigma}] \prec [n,\sigma], \quad (n,\sigma) \prec (n,\underline{\sigma}) \prec (n,\sigma).$$

然后考虑其传递闭包，并定义 $X = \mathrm{I}(\prec)$。对于有向集 D，令 $\downarrow D$ 表示 D的 $\prec$-向下闭包。与前面的证明一样，可以看出，$\prec$ 的任意理想都属于以下形式之一：

$$I_{n,\sigma} = \downarrow\{(n,\sigma)\}, \quad I_{n,\underline{\sigma}} = \downarrow\{(n,\underline{\sigma})\}, \quad I_{n,x} = \downarrow\{(n,\sigma^{\pm}) : \sigma \subset x\},$$
$$J_x^+ = \downarrow\{[n,\sigma] : n \in \omega \text{ and } \sigma \subset x\}, \quad J_x^- = \downarrow\{[n,\underline{\sigma}] : n \in \omega \text{ and } \sigma \subset x\}$$

若 x 不是经过 T的无限路径，则很容易看出 $I_{n,\sigma} = I_{n,\underline{\sigma}}$和 $J_x^+ = J_x^-$。我们声称 X 是豪斯多夫的。首先，为了说明当 σ、$\tau \in \omega^{<\omega}$时，$I_{n,\sigma}$与 $I_{m,\tau}$是分离的，注意到 (n,σ) 和(m,τ)没有公共上界，因此 $[(n,\sigma)]_{\prec}$和 $[(m,\tau)]_{\prec}$没有交集。因此，点 $I_{n,\sigma}$ 和 $I_{m,\tau}$ 由 $[(n,\sigma)]_{\prec}$ 和$[(m,\tau)]_{\prec}$分离。类似地，可以看出 $I_{n,\underline{\sigma}}$和 $I_{n,\underline{\tau}}$是分离的。若 $\sigma \in T$，则 $I_{n,\sigma}$ 和 $I_{n,\underline{\sigma}}$ 是分离的；若 $\sigma \notin T$，则 $I_{n,\sigma} = I_{n,\underline{\sigma}}$。若 $m > n$，则 $(n,\sigma^{\pm})$和 $[m,\sigma]$没有公共上界，因此 $[(n,\sigma^{\pm})]_{\prec}$和$[(m,\sigma)]_{\prec}$没有交集。因此，$I_{n,x}$和 J_x^+由它们分离。类似地，很容易将对$(I_{n,x}, J_y^-)$、$(I_{n,\sigma}, J_x^+)$、$(I_{n,\sigma}, I_{n,x})$等分离开来。若 x是经过 T的无限路径，则 $[n,\sigma]$和 $[n,\underline{\sigma}]$没有公共上界，因此 $[[n,\sigma]]_{\prec}$ 和 $[[n,\underline{\sigma}]]_{\prec}$ 没有交集。因此，J_x^+和 J_x^-由它们分离。若 x 不是经过T的无限路径，则 $J_x^+ = J_x^-$。由此可知，X是豪斯多夫的。

如果 x 是穿过 T 的无限路径，我们声称 J_x^+ 和 J_x^- 不能被闭邻域分离。事实上，我们证明 J_x^+ 或 J_x^- 的任意闭邻域都包含某个 $I_{n,x}$，其中 $n \in \omega$。为此，考虑 J_x^+ 的一个开邻域 $[[n,\sigma]]_{\prec}$。那么，对于任意 $m \geqslant n$, $[(m,\sigma^{\pm})]_{\prec}$ 是 $I_{m,x}$的一个开邻域。由于 $m \geqslant n$, (m,σ) 是 $[n,\sigma]$ 和 $(m,\sigma^{\pm})$的一个共同上界，因此我们有 $I_{m,\sigma} \in [(m,\sigma)]_{\prec} \subseteq [[n,\sigma]]_{\prec} \cap [(m,\sigma^{\pm})]_{\prec}$。于是，$I_{m,x}$ 的任意开邻域都与 $[[n,\sigma]]_{\prec}$相交，而这

意味着，对于任意 $m \geqslant n$， $[[n, \sigma]]_{\prec}$ 的闭包都包含 $I_{m,\ x}$。类似地，对于任意 $m \geqslant n$，$[[n, \underline{\sigma}]]_{\prec}$ 的闭包都包含 $I_{m,\ x}$。这就验证了这一断言。特别地，如果 T 是非良基的，那么这样的 x 存在，因此 X 不可度量化。

如果 T 是良基的，那么 $I_{n,\ \sigma} = I_{n,\ \underline{\sigma}}$ 和 $J_x^+ = J_x^-$。因此，

$$X = \{I_{n,\sigma} : n \in \omega \text{ and } \sigma \in \omega^{<\omega}\} \cup \{I_{n,x} : n \in \omega \text{ and } x \in \omega^{\omega}\} \cup \{J_x^+ : x \in \omega^{\omega}\}.$$

我们声称， X 嵌入到波兰空间 $Z = (\omega + 1) \times \omega^{\leqslant\omega}$ 中，其中 $\omega + 1$ 是 ω 的一点紧化，而 $\omega^{\leqslant\omega}$ 赋予引理 2 证明中所述的波兰拓扑。事实上，映射 $\langle n、\sigma\rangle \mapsto I_{n、\ \sigma}$、$\langle n、\ x\rangle \mapsto I_{n、\ x}$、$\langle \omega和\ x\rangle \mapsto J_x^+$的并给出了 $(\omega \times \omega^{\leqslant\omega}) \cup (\{\omega\} \times \omega^{\omega}) \subseteq Z$ 与 X之间的同胚。这是因为我们有$[(n、\sigma)]_{\prec} = \{I_{n、\ \sigma}\}$，并且如果 T 没有一条延伸 σ的无限路径，那么我们有$[(n、\sigma^{\pm})]_{\prec} = \{I_{n、\ \tau} : \sigma \subseteq \tau\} \cup \{I_{n、\ x} : \sigma \subset x\}$，以及 $[[n、\ \sigma]]_{\prec} = \{I_{m、\ \tau} : n \leqslant m、\ \sigma \subseteq \tau\} \cup \{I_{n、\ x} : n \leqslant m、\ \sigma \subset x\} \cup \{J_x^+ : \sigma \subset x\}$。这意味着，$X$中的基本开集 $[(n、\ \sigma)]_{\prec}$对应于 Z中的基本开集 $\{\langle n、\ \sigma\rangle\}$； X 中的基本开集 $[(n、\ \sigma^{\pm})]_{\prec}$ 对应于 Z中的基本开集 $\{n\} \times \{x \in \omega^{\leqslant\omega} : \sigma \subset x\}$；而 X 中的基本开集 $[[n、\ \sigma]]_{\prec}$ 对应于 Z中的基本开集 $\{m \in \omega + 1 : m \geqslant n\} \times \{x \in \omega^{\leqslant\omega} : \sigma \subset x\}$。因此，如果 T 是良基的，那么 X 可度量化。与之前一样， X 的显明性显而易见。 □

定理 8 的证明。令 $M \subseteq H \subseteq F \subseteq \omega$ 为 Π_1^1 集。令 X_F、 X_H 和 X_M 分别为由定理 7、引理 2 和引理 3 得到的可计算可枚举 EQP 空间。然后，考虑这些空间的不交并，即 $X = (\{0\} \times X_F) \cup (\{1\} \times X_H) \cup (\{2\} \times X_M)$。如果 $p \in M$，那么这些空间都是可度量化的，因此 X 是可度量化的。如果 $p \in H \backslash M$，那么 X_F 和 X_H 是可度量化的，而 X_M 是豪斯多夫的，但不可度量化。因此， X 是豪斯多夫的，但不可度量化。如果 $p \in F \backslash H$，那么 X_F 是可度量化的， X_H 是 T_1，但不是豪斯多夫的，而 X_M 是豪斯多夫的。因此， X 是 T_1，但不是豪斯多夫的。如果 $p \notin F$，那么 X_F 不是 T_1。因此， X 不是 T_1。 □

备注。我们的引理 3 证明实际上表明，若 $p \in M$，则存在一个可度量化空间；若 $p \notin M$，则存在一个豪斯多夫但非 $T_{2.5}$空间。另一方面，一位匿名审稿人提出了引理 3 的另一种证明：若 $p \in M$，则存在一个可度量化空间；若 $p \notin M$，则存在一个 $T_{2.5}$ （事实上是次可度量化）但不可度量化的空间：它是积空间 $\omega^{\omega} \times [0,1]^2$，并将 $C = [T] \times \{(x, y) : x = 0 和\ y > 0\}$ 作为闭集加入拓扑。综合来看，定理 8 更为完整：每个元组(M, U, H, F)，其中各项都是 Π_1^1-集，且 $M \subseteq U \subseteq H \subseteq F$可一致地 m-归约到$(\iota^{-1}(\mathcal{M}), \iota^{-1}(\mathcal{T}_{2.5}), \iota^{-1}(\mathcal{T}_2), \iota^{-1}(\mathcal{T}_1))$。

11 连续域的度谱

可插值关系 $\prec$ 与预序的区别在于，它通常不满足$x \prec x$；用域的术语来解释，满足$x \prec x$ 的元素 x 对应于一个紧元。由于代数域的度谱已在一定程度上得到研究 [27], ，我们来考察非代数的 ω-连续域的度谱。若对任意 x, $x \prec x$ 都不成立，则称二元关系 $\prec$ 是反自反的。我们首先证明，对于任意图灵度 a，都存在一个无自反可插值关系，其度谱为 $\{\mathbf{x} : \mathsf{a} \leqslant \mathbf{x}'\}$。

定理 9. 对任意 $A \subseteq \mathbb{N}$，存在定义在 $\mathbb{N}$ 上的无自反可插值关系 $\prec_A$，使得对任意 $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$A \leqslant_T X' \iff \textit{there exists an } X\textit{-computable isomorphic copy of } \prec_A.$$

证明. 对于 $\ell \in \omega + 1$，令 $\prec_\ell$ 为定义在 $\ell \times \mathbb{Q}$ 上的二元关系，其定义如下:

$$(m, p) \prec_\ell (n, q) \iff m \leqslant n \text{ and } p < q.$$

显然， $\prec_\ell$ 是反自反且传递的。我们断言 $\prec_\ell$ 是可插值的。为此，取 $\ell \times \mathbb{Q}$ 的有限子集 $F = \{(m_i, p_i)\}_{i<j}$，以及 F 的一个 $\prec_\ell$-上界 (n, q)。于是有 $\max_{i<j} m_i \leqslant n$ 和 $\max_{i<j} p_i < q$。由 $\mathbb{Q}$ 的稠密性可知 $\max_{i<j} p_i < r < q$，因此 $(n, r) < (n, q)$ 也是 F 的一个 $\prec_\ell$-上界。

对于任意集合 $A \subseteq \mathbb{N}$，我们将定义一个定义在 $\omega^2 \times \mathbb{Q}$ 上的二元关系 $\prec_A$。下文固定一个双射编码 $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\omega \times 2 \to \omega$，例如 $\langle a, b \rangle = 2a + b$。然后我们将关系 $\prec_A$ 定义为 $\{\prec_{\langle n, A(n) \rangle} : n \in \mathbb{N}\}$ 与 $\prec_\omega$ 的可数个副本的不交并。更具体地，对于每个 $a \in \omega$，若 a 为偶数，设为 $a = 2a'$，则令 $\ell(a) = \langle a', A(a') \rangle$；若 a 为奇数，则令 $\ell(a) = \omega$。于是 $\prec_A$ 定义如下:

$$(a, m, p) \prec_A (b, n, q) \iff a = b \text{ and } (m, p) \prec_{\ell(a)} (n, q).$$

假设存在一个 X-可计算关系 $\prec$，定义在 $\mathbb{N}$ 上，且它与 $\prec_A$ 同构。我们称 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 相容，当且仅当 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 有一个 $\prec$-下界。我们声称，对于任意 $a \in \mathbb{N}$, $A(a) = b$ 当且仅当存在一个大小为 $\langle a$ 的极大相容反链 $b \rangle$。为证明这一点，注意若 h 是 $\prec$ 与 $\prec_A$ 之间的同构，那么 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的相容性确保 $\{h(x_i) : i \leqslant n\}$ 属于同一个分支；也就是说，对于某个 $a \in \mathbb{N}$，有 $\{h(x_i) : i \leqslant n\} \subseteq \{a\} \times \ell(a) \times \mathbb{Q}$。因此，可以假设 $h(x_i)$ 具有 (a, m_i, p_i) 的形式。若这样的 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 构成反链，那么

$i \neq j$ 蕴含 $m_i \neq m_j$，因此得到 $n \leqslant \ell(a)$。若 $n < \ell(a)$，则存在 $k < \ell(a)$，使得对于任意非零 $i \leqslant n$，都有 $k \neq m_i$。由于 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是反链，$i < j$ 蕴含 $q_j \leqslant q_i$，因此可以选取 $q \in \mathbb{Q}$，使得 $\max_{m_j > k} q_j \leqslant q \leqslant \min_{m_i < k} q_i$，并令 $x' = h^{-1}(a, k, q)$。容易看出，$\{x_1, \ldots, x_n, x'\}$ 仍然构成反链。因此，若 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是极大相容反链，则 $n = \ell(a)$。反过来，对于固定的 $p \in \mathbb{Q}$，由于 $\{(a, i, p) : \ i < \ell(a)\}$ 是极大相容反链，$\{h^{-1}(a, i, p) : \ i < \ell(a)\}$ 也如此。这就证明了该断言。

接下来我们断言，存在一个由 X'可计算的、包含所有有限极大相容反链的序列。容易看出，对于有限序列而言，成为相容反链这一条件相对于 X 是可计算可枚举的。注意，相容反链 $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ 是极大的，当且仅当同一分支中任意一个 y 都与x_j 可比较（即 $y \prec x_j$ 或 $x_j \prec y$），其中 x_i 属于某个 $j \leqslant n$。这是因为 $h(x_i)$ 具有 (a, m_i, p_i)的形式，而对于某个 $k < \ell(a)$，$h(y)$具有 (a, k, q) 的形式。注意，y与 x_i 属于同一分支，等价于 $\{x_i, y\}$ 相容，因此该性质是 X-可计算可枚举的。因此，相容反链的极大性相对于X是余可计算可枚举的。这就验证了该断言。

最后，对于任意 $a \in \mathbb{N}$，使用 X' 搜索一个极大相容反链，其大小具有 $\langle a, b \rangle$的形式。然后，我们计算 $A(a) = b$。因此，$A \leqslant_T X'$。

反过来，假设 $A \leqslant_T X'$。令 $(A_s)_{s \in \omega}$ 为 A 的一个 X-可计算逼近。在阶段 s，我们假设已经枚举了 $\prec_{\langle a, A_s(a) \rangle}$ 的一个副本（有限片段），以及 $\prec_\omega$ 的无穷多个副本。在阶段 $s+1$，若对于某个 $a < s$，$A_s(a) < A_{s+1}(a)$，则可通过在顶部枚举有理数，将 $\prec_{\langle a, A_s(a) \rangle}$ 的原始副本修改为副本 $\prec_{\langle a, A_{s+1}(a) \rangle}$。若 $A_{s+1}(a) < A_s(a)$，则可通过在顶部枚举 $\mathbb{Q}$ 的无穷多个副本，将 $\prec_{\langle a, A_s(a) \rangle}$ 的原始副本修改为 $\prec_\omega$ 的一个副本。接着，使用新元素开始构造 $\prec_{\langle a, A_{s+1}(a) \rangle}$ 的一个新副本。无论哪种情况，我们也都开始构造 $\prec_{\langle s, A_{s+1}(s) \rangle}$ 的一个副本。容易看出，这一构造给出了 $\prec_A$ 的一个 X-可计算副本。

□

我们来提及定理 9 的几个结论。回忆一下，若 $\varnothing'' \leqslant_T X'$，则 X 是高的；若 $X^{(n)} \leqslant_T \varnothing^{(n)}$，则 X 是低的$_n$。关系 $\prec$ 的度谱是 $\prec$在 ω上的同构副本的所有图灵度的集合。

推论 5. 高图灵度类是某个无自反、可插值关系的度谱。

证明。令定理 9 中的 A 为 $\varnothing''$。 □

推论 6。存在一种低$_2$ 无自反可插值关系，它不同构于任何可计算关系。

证明。若 $A \not\leqslant_T \varnothing'$，则根据定理 9，$\prec_A$ 没有可计算同构副本。因此，若 X 不是低的，则 $\prec_{X'}$ 没有可计算同构副本；但根据定理 9，它有一个 X-可计算副本。现在，考虑一个低的 $_2$ 集合 $X \leqslant_T \varnothing'$，它不是低的。 □

不过，请回顾一下，有效拟波兰空间与可计算可枚举传递关系直接对应。因此，在关注拓扑方面时，考虑可计算可枚举关系似乎比考虑可计算关系更自然。

定理 10. 对任意 $A \subseteq \mathbb{N}$，存在一个定义在 $\mathbb{N}$ 上的反自反可插值关系 $\prec_A^*$，使得对任意 $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$A \leqslant_T X'' \iff \textit{there exists an } X\textit{-c.e. isomorphic copy of } \prec_A^*.$$

证明。下文固定一个双射编码 $\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$: $\omega \times 2 \times 2 \to \omega$，例如 $\langle a, b, c \rangle = 4a + 2b + c$。令 $\prec_A^*$ 为无穷多个 $\prec_{\langle a,i,1\rangle}$ 的副本的不交并，其中每个 $i < 2$ 都对应一个副本，且 $\prec_{\langle a,A(a),0\rangle}$。显然，$\prec_A^*$ 是反自反且可插值的。

假设存在一个 X-可计算可枚举关系 $\prec$，它定义在 $\mathbb{N}$ 上，且与 $\prec_A^*$ 同构。在这种情况下，对于有限序列，相容性是可计算可枚举的，构成反链是余可计算可枚举的，而极大性相对于 X 是 Π^0_2。因此，存在一个 X''-可计算序列，列出所有有限极大相容反链。与定理 9 的证明类似，可以看出，对于任意 $a \in \mathbb{N}$，$A(a) = b$ 当且仅当存在一个大小为 $\langle a$ 的极大相容反链，b，$0\rangle$。因此，可以像以前一样证明 $A \leqslant_T X''$。

反过来，若 $A \leqslant_T X''$，则利用它们的 $\Sigma^0_3(X)$-定义，A 及其补集可以表示如下:

$$a \in A \iff (\exists t \in \mathbb{N}) \liminf_{t\to\infty} A_t(a) = 0,$$
$$a \notin A \iff (\exists t \in \mathbb{N}) \liminf_{t\to\infty} \bar{A}_t(a) = 0,$$

$\bar{}$，其中 $(a,\ t) \mapsto A_t(a)$ 和 $(a,\ t) \mapsto A_t(a)$ 是两个取值的 X-可计算函数。

接下来，提到 $\prec_\ell$ 的同构副本中的一层时，我们指的是某个 $m < \ell$ 对应的 $\{m\} \times \mathbb{Q}$ 的同构像。在每个阶段 s，我们都会构造（有限近似）无穷多个 $\prec_{\langle a,\ 1,\ A_s(a)\rangle}$ 的副本，位于第 $\langle a, 1\rangle$ 个区域；并构造无穷多个 $\prec_{\langle a,\ 0,\ \bar{A}_s(a)\rangle}$ 的副本，位于第 $\langle a, 0\rangle$ 个

区域。我们还会构造无用分支，即 $\prec_{\langle a,\ i,\ 1\rangle}$ 的无穷多个副本。在阶段 $s+1$，如果 $A_s(a) < A_{s+1}(a)$，那么可以通过在顶部枚举新的有理数，将每个 $\prec_{\langle a,\ 1,\ A_s(a)\rangle}$ 的副本修改为一个 $\prec_{\langle a,\ 1,\ A_{s+1}(a)\rangle}$ 的副本。即使 $A_s(a) > A_{s+1}(a)$，也可以通过添加一种关系，将有理数的上层移至有理数的下层右侧，从而降低每个 $\prec_{\langle a,\ 1,\ A_s(a)\rangle}$ 副本的高度（更正式的说明见下一段）。这样，每个 $\prec_{\langle a,\ 1,\ A_s(a)\rangle}$ 的副本都可以修改为一个 $_\prec_{\langle a,\ 1,\ A_{s+1}(a)\rangle}$ 的副本。对 A_s 也进行同样的处理。

让我们更详细地解释 $A_s(a) > A_{s+1}(a)$ 情况下的降低构造。在这个区域中，$\prec_{\langle a}$ 的副本里每个元素 x 、$\mathbf{1}$、$A_s(a)\rangle$ 都被赋予一个角色 $(a、\mathbf{1}、i,$ 对于某些 $i \leqslant 1$ 和 $p \in \mathbb{Q}$ 而言为 $p)$。在整个构造过程中，这个角色至多改变一次。在阶段 s，副本中至多枚举 s 个元素。这些元素中每一对之间的关系直接遵循其被赋予角色之间的$\prec_{\langle a}$、$\mathbf{1}$、$A_s(a)\rangle$-关系。只有在发生 $A_s(a) > A_{s+1}(a)$ 的阶段，每个属于 $\langle a、\mathbf{1}、1\rangle$层的元素$x$ 的角色才会改变，从而在足够大的 p 下扮演 $(a、\mathbf{1}、\mathbf{0}、p)$。如果选择 p 大于迄今为止提到的所有有理数，那么这种角色变化就对应于将该元素 x 放置在所有下层元素之上。这里已有的元素只有有限多个；此外，下层元素永远不会出现在较高层元素之上，因此角色变化可以一致地进行。角色变化可能发生的情况仅此而已：只有 $\langle a、\mathbf{1}、1\rangle$层中的元素才能引起角色变化，而这种元素在角色变化后会降至 $\langle a、\mathbf{1}、0\rangle$层；因此，角色变化至多只能发生一次。最后，在每个阶段 s，对于每个 $n < s$ 和 $i \leqslant A_s(a)$，如果不存在角色为 $(a、\mathbf{1}、i、p_n)$ 的元素，其中 p_n 是第 n 个有理数，我们就安排一个新元素来赋予角色 $(a、\mathbf{1}、i、p_n)$。

如果 $A_s(a) = i$ 对几乎所有 s都成立，那么第 $\langle a,1\rangle$ 个区域中的每个分支都会稳定为 $\prec_{\langle a,\mathbf{1},i\rangle}$。否则，对于无穷多个 s，我们有 $A_s(a) > A_{s+1}(a)$。那么，如果第 $\langle a,1\rangle$ 个区域中的某个分支内的一个元素 u 在某个阶段 s 属于较高层，那么在满足$A_{s'}(a) > A_{s'+1}(a)$的阶段 $s' \geqslant s$，添加一个关系会将 u 移至较低层，此后它不再离开该层（因为角色变化至多只发生一次）。因此，每个元素最终都属于较低层，这意味着这样的分支同构于 $\prec_{\langle a,\mathbf{1},0\rangle}$。因此，$a \in A$ 当且仅当存在一个 $\prec_{\langle a,\mathbf{1},0\rangle}$ 的副本。事实上，如果情况如此，就有无穷多个这样的副本。 A的情形也相同。因此，我们有无穷多个 $\prec_{\langle a,A(a),0\rangle}$ 的副本，而没有 $\prec_{\langle a,1-A(a),0\rangle}$ 的副本。这个过程也可能额外构造一个 $\prec_{a,i,\mathbf{1}}$ 的副本，但无论如何，在无用分支中，我们也会构造无穷多个 $\prec_{a,i,\mathbf{1}}$ 的副本。因此，这个构造

给出了 $<^*_A$ 的一个 X-可计算拷贝。 □

由此可知，存在一个可计算可枚举的无自反可插值关系，它不同构于任何可计算关系。事实上，我们可以证明一个稍强的结论。

推论 7. 只要 X 不是高的，就存在一个可计算可枚举的无自反可插值关系，它不同构于任何 X-可计算关系。

证明. 对于 $A \subseteq \mathbb{N}$，令 $<^*_A$ 为定理 10 中的一个无自反可插值关系。若 $A \leqslant_T X''$，则 $<^*_A$ 有一个可计算可枚举副本。此外，如定理 9 的证明所示，容易看出，$A \leqslant_T X'$ 当且仅当存在一个 X-可计算的 $<^*_A$同构副本。因此，对于 $A = \varnothing''$，若 X 不是高的，即 $\varnothing'' \nleqslant_T X'$，则 $<^*_A$ 没有 X-可计算副本。 □

推论 8. 存在一种低$_3$-可计算可枚举的反自反可插值关系，它不同构于任何可计算可枚举关系。

证明. 根据定理 9，如果 $A \nleqslant_T \varnothing''$，那么 $<^*_A$ 没有可计算可枚举同构副本。因此，如果 X 不是低$_2$,，那么 $<^*_{X''}$ 没有可计算可枚举同构副本；但根据定理 9，它有一个 X-可计算可枚举副本。现在，考虑一个低$_3$ 集合 $X \leqslant_T \varnothing'$，它不是低$_2$。 □

对于 ω-连续域的度谱，也可以得到相同的结果，而不只是可插值关系。

致谢。De Brecht 的研究得到 JSPS KAKENHI 资助项目编号 18K11166 的支持。Kihara 的研究部分得到 JSPS KAKENHI 资助项目编号 19K03602 和 21H03392，以及 JSPS-RFBR 双边联合研究项目 JPJSBP120204809 的支持。Selivanov 的研究得到 RFBR-JSPS 双边联合研究项目 20-51-50001 的支持。

参考文献

[1] Abramsky S., Jung, A.: 《域理论》。载于: 《计算机科学逻辑手册》第 3 卷，牛津，1994 年，1–168 页。

[2] Ash C., Knight J.: 《可计算结构与超算术层级》，《逻辑与数学基础研究》第144卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，2000年。

[3] Cholak, P.A., Dzhafarov, D.D., Schweber, N., Shore, R.A.：可计算枚举偏序。《可计算性》，第1卷第2期，第99–107页，2012年。[4] de Brecht, M.：拟波兰空间。《纯粹与应用逻辑年刊》，164（2013），356–381。[5] de Brecht, M.：关于理想空间与可计算拓扑的一些笔记。CiE 2020，《计算机科学讲义》，第12098卷，第26–37页。[6] de Brecht M., Kihara T., Selivanov V.：有效拟波兰空间类的枚举。CiE-22，《计算机科学讲义》第13359卷，2022年，第88–102页，Springer Nature，瑞士。（Ulrich Berger、Johanna N. Y. Franklin、Florin Manea、Arno Pauly 编）。[7] Downey R., Melnikov A.G.：有效紧空间。未发表手稿。[8] de Brecht, M., Pauly A., Schr¨oder M.：显然选择。《可计算性》，第9卷第3–4期，第169–191页，2020年。[9] Ershov Yu.L.：域理论及相关主题。《计算机科学讲义》，第735卷（1993），第1–7页。[10] Ershov Yu.L., Goncharov S.S.：《构造模型》。Plenum，纽约，1999年。[11] Fokina E.D., Friedman S.D., Harizanov V., Knight J.F., McCoy C., Montalban A.：可计算结构上的同构关系。《符号逻辑杂志》77（1），122–132，2012年。[12] Fokina E., Friedman S., Nies A.：对可计算归约完备的等价关系。载于：Ong L., de Queiroz R.（编）《逻辑、语言、信息与计算》。WoLLIC 2012。《计算机科学讲义》第7456卷，第26–33页。施普林格，柏林、海德堡。[13] Fokina E. B., Harizanov V., Melnikov A.：可计算模型论。载于《图灵遗产：图灵逻辑思想的发展》，《逻辑讲义》第42卷，第124–194页。符号逻辑协会，拉霍亚，加利福尼亚州，2014年。[14] Giertz, G., Hoffmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M.W., Scott. D.S.：《连续格纲要》。柏林，施普林格，1980年。

[15] Goncharov S.S., Knight J.：可计算结构与反结构定理。Algebra Logika，41(6)：639–681，757，2002。[16] Hoyrup, M., Kihara, T., Selivanov, V.：波兰空间同胚类型的度谱。arXiv 2004.06872v1，2020。[17] Hoyrup, M., Rojas, C., Selivanov, V., Stull, D.M.：拟波兰空间上的可计算性。DCFS-2019 会议论文集，计算机科学讲义第 11612 卷，柏林，施普林格，2019，171–183。[18] Harrison-Trainor M., Melnikov A., Ng K.M.：波兰空间在同胚意义下的可计算性。《符号逻辑杂志》，第 1–25 页，2020。[19] Kechris A. S.：经典描述集合论。数学研究生教材，156，施普林格，纽约，1995。[20] Korovina, M.V., Kudinov, O.V.：论高阶有效描述集合论。CiE-2017，计算机科学讲义，施普林格，第 282–291 页。[21] Kihara, T., Ng, K.M., Pauly, A.：枚举度与非可度量拓扑。已投稿。arXiv:1904.04107。[22] McNicholl T. H., Stull D. M.：可计算副本的等距度 ℓ^{p1}。《可计算性》，8(2)：179–189，2019。[23] Melnikov A. G.：可计算等距空间。《符号逻辑杂志》，78(4)：1055–1085，2013。[24] Rogers, H. jr.：递归函数理论与有效可计算性。麦格劳-希尔，纽约，1967。[25] Selivanov, V.L.：正结构。载于：《可计算性与模型：东西方视角》，S. Barry Cooper 和 Sergei S. Goncharov 编，克吕维尔学术出版社／普莱纽姆出版社，纽约，2003，321–350。[26] Selivanov, V.L.：迈向有效描述集合论。《计算机科学讲义》，CiE 2015（Arnold Beckmann 等编），柏林，施普林格，2015。- 第 9136 卷。- 第 324–333 页。[27] Selivanov V.：论拓扑空间的度谱。罗巴切夫斯基数学杂志，41 (2)：252-259，2020。

[28] Steen, L.A., Seebach, J.A.: 《拓扑学中的反例》。施普林格出版社，纽约，1978。由Dover Publications于纽约再版，1995。