arXiv:2301.08476v1 [math.OA] 20 Jan 2023

´算子系数自由庞加莱不等式 Y

HYUGA ITO

Abstract. 我们证明以下算子系数自由庞加莱不等式：
$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }|f(X) - E[f(X)]|_2 \leq 2|X|_2\|\partial_{X:B}[f(X)]\|_\pi$, $f(X)$ $\in \mathrm{dom}(\partial_{X:B})$，其中 $\|\cdot\|_\pi$ 是射影张量范数。

1. Introduction

设 M 是一个冯·诺依曼代数，其上带有忠实正规迹态 τ，且 B 是 M 的一个含幺冯·诺依曼子代数，并存在一个从 M 到B的（唯一） τ-保持条件期望 E。设 X 是 M中的一个自伴元素，并假设它与 B代数自由。用 $B\langle X\rangle$表示所有 B-值非交换多项式构成的族，即

$$B\langle X\rangle = \mathrm{span}\{b_0Xb_1X\dots Xb_n | n \in \mathbb{N},\, b_i \in B\},$$

而 μ 表示 $B\langle X\rangle$上的通常乘法。自由差商 $\partial_{X:B}$：$B\langle X\rangle \to B\langle X\rangle^{\otimes 2}$是 $B\langle X\rangle$ 上唯一满足 $\partial_{X:B}[X] = 1\otimes 1$ 和 $\partial_{X:B}[b] = 0$的 $B\langle X\rangle^{\otimes 2}$-值导子，其中任意 $b \in B$均成立。令 $L^2(M,\tau) = L^2(M)$表示 M关于由 $|a|_2 = \tau(a^*a)^{\frac{1}{2}}$定义的（迹的）$L^2$-范数的完备化，其中每个 $a \in M$均成立。设 $B\langle t\rangle := B * \mathbb{C}\langle t\rangle$（代数自由积），其不定元为 t。注意， $B\langle t\rangle$ 中的任意元素都是单项式 $b_0tb_1t\cdots tb_n(b_i \in B)$的线性组合。对于任意 $R > 0$，令 $B_R\{t\}$ 为 $B\langle t\rangle$ 关于由 $|||\cdot|||_R$定义的范数的完备化

$$|||p(t)|||_R = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\|b_{k,0}\|\cdot\|b_{k,1}\|\cdots\|b_{k,m(k)}\|R^{m(k)}\,\middle|\, p(t) = \sum_{k=1}^{n} b_0tb_1\cdots tb_{m(k)}\right\}$$

对每个 $p(t) \in B\langle t\rangle$。

这篇短文旨在以一个非常简单的证明，给出一个系数取算子的自由 Poincar´é 不等式。它几乎与 Voiculescu 的猜想相同（参见 [AIM06]），但我们在此选择 $\partial_{X:B}[p(X)]$ 的范数为射影张量范数，而不是 L^2-范数。值得指出的是，Voiculescu 已在其未发表的笔记中成功建立了系数取标量的自由 Poincar´é 不等式，其证明可见于例如 [MS17 第 8 节。1]。

作者感谢导师 Yoshimichi Ueda 教授与他就本文进行讨论、提出意见并给予编辑方面的支持。作者还衷心感谢 Dan Voiculescu 教授，他友善地向作者及其导师补充解释了 [V00]。

2. Main result

在本节中，我们假设 $\partial_{X:B}$ 从 $(C^*(B\langle X\rangle)\ \|\cdot\|)$ 到 $(C^*(B\langle X\rangle)^{\overline{\otimes}2}, \|\cdot\|)$ 是可闭的（这可由 $L^2(M)$ 中共轭变量的存在性推出，见 [V98, 推论 4.2] 和 [V00, 第 3.2] 节），并且 $\overline{\partial}_{X:B}$ 表示关于两侧的 $\|\cdot\|$ 闭包 $\partial_{X:B}$。此外，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$从射影张量积 $C^*(B\langle X\rangle)^{\otimes 2} \subset M^{\otimes 2}$ 到 $C^*(B\langle X\rangle)^{\overline{\otimes}2} \subset M^{\overline{\otimes}2}$ 的自然映射是单射。这确实可由 Haagerup 的著名工作 [H85, 命题 2.2] 得出。因此，若 $\partial_{X:B}$ 从 $(C^*(B\langle X\rangle)\ \|\cdot\|)$ 到 $(C^*(B\langle X\rangle)^{\overline{\otimes}2}, \|\cdot\|)$ 可闭，则 $\partial_{X:B}\widehat{\ }$从 $(C^*(B\langle X\rangle)\ \|\cdot\|)$ 到 $(C^*(B\langle X\rangle)^{\otimes 2}, \|\cdot\|_\pi)$ 也可闭，并且 $\widehat{\partial}_{X:B}$ 表示关于 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_\pi$ 的闭包 $\partial_{X:B}$。

Date：2023年1月23日。

Voiculescu 引入了一个 $C^*(B\langle X\rangle$ 的特定光滑子代数，它是一种索博列夫空间（见 [V98，第 4] 节）。设 $B^{(1)}(X)$ 是 $B\langle X\rangle$ 关于范数 $|||\cdot|||_{(1)}$ 定义的完备化

$$|||p(X)|||_{(1)} := \|p(X)\| + \|\partial_{X:B}[p(X)]\|_\pi$$

对于任意 $p(X) \in B\langle X\rangle$。由此得到的空间成为一个 Banach$*$-代数。接下来，我们可以证明以下两个引理。

引理 2.1。我们有以下事实：

(1) 对于任意 $\eta \in B^{(1)}(X)$，存在 $\eta_\pi \in C^*(B\langle X\rangle)^{\widehat{\otimes}2}$ 和 $\eta_\infty \in C^*(B\langle X\rangle)$，使得 $|||\eta|||_{(1)} = \|\eta_\infty\| + \|\eta_\pi\|_\pi$。(2) 对应关系 $\iota : B^{(1)}(X) \to C^*(B\langle X\rangle)$，由 $\iota[\eta] := \eta_\infty$ 对每个 $\eta \in B^{(1)}(X)$ 给出，定义了一个压缩代数同态，且满足 $\iota|_{B\langle X\rangle} = \mathrm{id}_{B\langle X\rangle}$。借助此映射，我们将$B^{(1)}(X)$视为 $C^*(B\langle X\rangle)$的一个 $*$-子代数。(3) 对应关系 $\widetilde{\partial}_{X:B} : B^{(1)}(X) \to C^*(B\langle X\rangle)^{\widehat{\otimes}2}$，由 $\widetilde{\partial}_{X:B}[\eta] := \eta_\pi$ 对每个 $\eta \in B^{(1)}(X)$ 给出，定义了一个压缩导子，并满足 $\widetilde{\partial}_{X:B} = \widehat{\partial}_{X:B} \circ \iota$，因此 $\widetilde{\partial}_{X:B}|_{B\langle X\rangle} = \partial_{X:B}$。(4) 从 $B_R\{t\}$ 到 $C^*(B\langle X\rangle)$ 的非交换函数演算映射 $f(t) \mapsto f(X)$，将t 映为 X，只要满足 $\|X\| < R$，便是良定义的，其值域成为 $B^{(1)}(X)$的一个 $*$-子代数。

证明。我们仅给出证明的概要。

(1) 这由范数 $|||\cdot|||_{(1)}$ 的定义直接得到。

(2) ι 的定义良好性源于：对于任意 $\eta \in B^{(1)}(X)$，η_∞ 不依赖于 η_∞ 的逼近序列的选取。

(3) 定义良好性 $\widetilde{\partial}_{X:B}$ 以及 $\widehat{\partial}_{X:B}$ 与(2)类似。根据 $\widetilde{\partial}_{X:B}$ 的可闭性 $\partial_{X:B}$，我们有 $\widetilde{\partial}_{X:B} = \partial_{X:B} \circ \iota$。证明 $\partial_{X:B}$ 是一个导子，只需用到 [V00引理 3 的第一部分。1], 该引理的论证在当前情形下同样适用。

(4) 使用以下不等式（参见 [V98，第 4]节）：

$$\|p(X)\| \le |||p(t)|||_R, \quad \|\partial_{X:B}[p(X)]\| \le \|\partial_{X:B}[p(X)]\|_\pi \le C|||p(t)|||_R$$

对于任意 $p(t) \in B\langle t\rangle$，其中 $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\|X\|^{n-1}}{R^n}$。 □

引理 2.2. 映射 $\iota : B^{(1)}(X) \to C^*(B\langle X\rangle)$ 是单射。此外，ι 的值域恰好是 $\widehat{\mathrm{dom}}(\partial_{X:B})$。

证明。我们只证明第二部分。根据引理 2.1(3)，有 $\mathrm{ran}(\iota) \subset \mathrm{dom}(\partial_{X:B})$。反过来，对于任意 $f(X) \in \mathrm{dom}(\widehat{\partial}_{X:B})$，存在一个序列 $\{p_n(X)\}_{n=1}^\infty \subset B\langle X\rangle$，使得 $p_n(X) \xrightarrow{n\to\infty} f(X)$ 属于 $\|\cdot\|$，且 $\partial_{X:B}[p_n(X)] \xrightarrow{n\to\infty} \widehat{\partial}_{X:B}[f(X)]$ 属于 $\|\cdot\|_\pi$。于是，我们有

$$\begin{aligned}|||p_n(X) - p_m(X)|||_{(1)} &= \|p_n(X) - p_m(X)\| + \|\partial_{X:B}[p_n(X)] - \partial_{X:B}[p_m(X)]\|_\pi \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \|f(X) - f(X)\| + \|\widehat{\partial}_{X:B}[f(X)] - \widehat{\partial}_{X:B}[f(X)]\|_\pi = 0.\end{aligned}$$

因此，存在一个 $\eta \in B^{(1)}(X)$，使得 $p_n(X) \xrightarrow{n\to\infty} \eta$ 属于 $|||\cdot|||_{(1)}$，并且我们有 $f(X) = \iota[\eta]$。因此，$\mathrm{dom}(\partial_{X:B}) \subset \mathrm{ran}(\iota)$。□

现在我们可以证明主要定理了。

定理 2.3（无算子系数的 Poincar´e 不等式）。对于任意 $f(X) \in \widehat{\mathrm{dom}}(\partial_{X:B})$，我们有

$$|f(X) - E[f(X)]|_2 \le 2|X|_2\|\widehat{\partial}_{X:B}[f(X)]\|_\pi,$$

或者等价地，根据引理 2.2，对于任意 $f(X) \in B^{(1)}(X)$，将 $\widetilde{\partial}_{X:B}[f(X)]$替换为 $\widehat{\partial}_{X:B}[f(X)]$, 时，同一不等式仍然成立，其中 $\|\cdot\|_\pi$ 是 $C^*(B\langle X\rangle)^{\widehat{\otimes}2}$上的射影张量范数。

证明。由 E 的连续性以及范数的连续性，只需证明该不等式对任意非交换$\widehat{\quad}$$\widetilde{\quad}$多项式 $p(X) \in B\langle X\rangle$ 成立（在这种情况下，当然有 $\partial_{X:B}[p(X)] = \partial_{X:B}[p(X)] = \partial_{X:B}[p(X)]$），并记 μ 为从 $B\langle X\rangle^{\otimes 2}$ 到 $B\langle X\rangle$的乘法映射。设 $\sharp$ 是定义在 $B\langle X\rangle^{\otimes 2}$ 上的双线性映射，使得对于每个 $a_i \in B\langle X\rangle$，均有 $(a_1 \otimes a_2)\sharp(a_3 \otimes a_4) = (a_1a_3) \otimes (a_4a_2)$。对于任意 $p(X) \in B\langle X\rangle$ 以及任意表达式$\partial_{X:B}[p(X)] = \sum_{i=1}^{N} q_i,1(X) \otimes q_i,2(X) \in B\langle X\rangle^{\otimes 2}$，其中单项式为 $q_{i,j}(X)$，我们有

$$(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes E))(\partial_{X:B}[p(X)]\sharp(X \otimes 1 - 1 \otimes X)) = \sum_{i=1}^{N}(q_{i,1}(X)XE[q_{i,2}(X)] - q_{i,1}(X)E[Xq_{i,2}(X)]).$$

另一方面，对于任意单项式 $q(X) = b_0Xb_1 \cdots Xb_n \in B\langle X\rangle$，我们有

$$\begin{aligned}
\partial_{X:B}[q(X)]\sharp(X \otimes 1 - 1 \otimes X) &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_0Xb_1 \cdots b_{i-1} \otimes b_iX \cdots Xb_n\right)\sharp(X \otimes 1 - 1 \otimes X) \\
&= b_0X \otimes b_1 \cdots Xb_n - b_0 \otimes Xb_1 \cdots Xb_n \\
&\quad + b_0Xb_1X \otimes b_2 \cdots Xb_n - b_0Xb_1 \otimes Xb_2 \cdots Xb_n \\
&\quad + b_0Xb_1Xb_2X \otimes b_3 \cdots Xb_n - b_0Xb_1Xb_2 \otimes Xb_3 \cdots Xb_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + b_0Xb_1X \cdots b_{n-1}X \otimes b_n - b_0Xb_1X \cdots b_{n-1} \otimes Xb_n.
\end{aligned}$$

由于 E 是一个 B-双模映射，因此可得

$$\begin{aligned}
(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes E))(\partial_{X:B}[q(X)]\sharp(X \otimes 1 - 1 \otimes X)) &= b_0XE[b_1 \cdots Xb_n] - b_0E[Xb_1 \cdots Xb_n] \\
&\quad + b_0Xb_1XE[b_2 \cdots Xb_n] - b_0Xb_1E[Xb_2 \cdots Xb_n] \\
&\quad + b_0Xb_1Xb_2XE[b_3 \cdots Xb_n] - b_0Xb_1Xb_2E[Xb_3 \cdots Xb_n] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + b_0Xb_1X \cdots b_{n-1}XE[b_n] - b_0Xb_1X \cdots b_{n-1}E[Xb_n] \\
&= b_0XE[b_1 \cdots Xb_n] - E[q(X)] \\
&\quad + b_0Xb_1XE[b_2 \cdots Xb_n] - b_0XE[b_1Xb_2 \cdots Xb_n] \\
&\quad + b_0Xb_1Xb_2XE[b_3 \cdots Xb_n] - b_0Xb_1XE[b_2Xb_3 \cdots Xb_n] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + q(X) - b_0Xb_1X \cdots XE[b_{n-1}Xb_n] \\
&= q(X) - E[q(X)].
\end{aligned}$$

由线性性可得

$$(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes E))(\partial_{X:B}[p(X)]\sharp(X \otimes 1 - 1 \otimes X)) = p(X) - E[p(X)]$$

对任意 $p(X) \in B\langle X\rangle$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
|p(X) - E[p(X)]|_2 &= |(\mu \circ (\mathrm{id} \otimes E))(\partial_{X:B}[p]\sharp(X \otimes 1 - 1 \otimes X))|_2 \\
&= \left|\sum_{i=1}^{N}(q_{i,1}(X)XE[q_{i,2}(X)] - q_{i,1}(X)E[Xq_{i,2}(X)])\right|_2 \\
&\le \sum_{i=1}^{N}(|q_{i,1}(X)XE[q_{i,2}(X)]|_2 + |q_{i,1}(X)E[Xq_{i,2}(X)]|_2) \\
&\le 2|X|_2 \sum_{i=1}^{N} \|q_{i,1}(X)\| \cdot \|q_{i,2}(X)\|
\end{aligned}$$

因为 τ 是迹的，且 E 是压缩的。由此可得

$$|p(X) - E[p(X)]|_2 \leq 2|X|_2 \|\partial_{X:B}[p(X)]\|_\pi$$

根据射影张量范数的定义。 □

即使将 L^2-范数替换为算子范数，不等式仍然成立。证明完全相同。

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$推论 2.4。 $\partial_{X:B}$ 和 $\partial_{X:B}$ 的核都恰好是 B。

由 $\|\partial_{X:B}[p(X)]\| \leq \|\partial_{X:B}[p(X)]\|_\pi$ 对每个 $p(X) \in B\langle X\rangle$成立、引理 2.1(4) 和引理 2.2，可得 $\{f(X) \mid f(t) \in B_R\{t\}\} \subset B^{(1)}(X) = \mathrm{dom}(\widehat{\partial}_{X:B}) \subset \mathrm{dom}(\overline{\partial}_{X:B})$，其中 $\|X\| < R$且 $\overline{\partial}_{X:B}$是 $\widehat{\partial}_{X:B}$的扩张（借助 H85，命题 2.2]所给出的从 $M^{\widehat{\otimes}2}$ 到 $M^{\overline{\otimes}2}$ 的自然嵌入）。因此，推论 2.4 表明， $\overline{\partial}_{X:B}$ 在 $B^{(1)}(X)$上的限制的核为 B。这是对 V00，引理 3.4]的改进。

References

[H85] U. Haagerup，关于 C^*-代数上双线性形式的格罗滕迪克不等式， *Adv. Math.*，56，第 2 期（1985），93–116。[MS17] J. Mingo、R. Speicher，《自由概率》，菲尔兹数学研究所专著丛书，Springer，2017。[V98] D. Voiculescu，自由概率论中熵及费舍尔信息量的类似物 V. 非交换希尔伯特变换， *Invent. Math.* **132**（1998），189–227。[V00] D. Voiculescu，自由差商的余代数与自由概率， *IMRN*，2000，第 2 期（2000），79-106。[AIM06]美国数学研究所于 2006 年举办的“自由分析”研讨会提出的问题：https://aimath.org/WWN/freeanalysis/freeanalysis.pdf

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, 464-8602, Japan
Email address: hyuga.ito.e6@math.nagoya-u.ac.jp