arXiv:2301.08480v1 [math.RA] 20 Jan 2023

演化代数的演化算子集

D. FERNANDEZ-TERNERO、V.M. GOMEZ-SOUSA 和 J. NUNEZ-VALDES

Abstract. 定义在演化代数上的自同构可以在其上产生有限个或无限个演化算子。本文探讨了这一问题，以及其他与演化代数的演化算子更为相关的问题。在定义演化代数的演化算子集这一概念后，本文还讨论了平凡与非平凡演化算子集之间的区别，并研究了这些概念的若干性质，同时给出了上述问题的多个例子。

1. Introduction

演化代数最早由 Jianjun Paul Tian 在其 2004 年的博士学位论文中提出（[8]）。这类代数是非结合且交换的，但与李代数、马尔采夫代数或约旦代数等许多其他非结合代数不同，演化代数并非由一系列恒等式刻画。域 K 上的演化代数 $E \equiv (E, +, \cdot)$ 是一种 $\mathbb{K}$-代数，且存在一个自然基，也就是一个基 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$，使得对所有 $i \neq j$，都有 $e_i \cdot e_j = 0$。满足 $e_j^2 = e_j \cdot e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ 的标量 a_{ij} 称为结构常数，而矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为结构矩阵。此外，若对所有 j，都有 $e_j^2 \neq 0$，则称该演化代数为非退化；否则称为退化。因此，演化代数的所有动力学信息都集中在这个矩阵中，本文所研究的算子便由此定义。

固定一个自然基，线性映射 $L : E \to E$ 将每个生成元映射为其平方，$L(e_j) = e_j^2 = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$，称为与 $\mathcal{B}$ 相关联的演化算子。显然，$M_{\mathcal{B}}(L) = A$，即，

日期：2023年1月23日。2010年数学主题分类。47C05，17D92，17A36，17A20。关键词和短语。演化代数、演化算子、自同构。第一和第二作者的研究部分受西班牙科学与创新部项目 PID2020-118753GB-I00 资助。所有作者的研究均部分受到安达卢西亚自治区 FQM–326研究组的资助。

该线性变换的矩阵表示就是结构矩阵。

迄今为止，文献中关于演化代数演化算子的研究寥寥无几，[5, 6, 4, 7, 9] 仅有少数几篇论文涉及这一主题。本文深入探讨与该算子相关的不同方面，以弥补这一研究空白，并提出便于研究这一领域的新性质。

由于演化算子取决于所选的自然基，因此它并不唯一。由此自然引出以下问题

- 演化算子是否具有共同的性质?
- 两个演化算子在何时表示同一个线性映射?
- 将所有演化算子都写在同一组基下时，它们之间有何关系?
- 是否存在将演化算子与自同构联系起来的方法?

本文旨在以一般的方式回答这些问题。为此，我们将在第 2 节简要介绍后续研究所需的主要定义和性质，并在第 3 节探讨自同构与演化算子之间的联系。最后，在第 4 节中，我们将研究所有演化算子构成的集合的结构，以找出这些线性映射之间的联系。

2. Preliminaries

下面我们定义一些将在全文中反复用到的概念。

定义 1. 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 为两个 $n\times m$ 矩阵。我们定义以下矩阵运算

- Hadamard乘积 $A\odot B=$({v3)。
- Hadamard幂 $A^{(n)}=\underbrace{A\odot\cdots\odot A}_{n\text{ 次}}$。
- $A*B=(c_{ij}^{k})$ 一个 $n\times \frac{m(m-1)}{2}$ 矩阵，其列由满足 $i<j$ 的有序对 (i,j) 标记，并按字典序排列。列 (i,j) 为 $A_{*i}\odot B_{*j}$，也就是说，它是 A 的第 i 列与 B 的第 j 列的 Hadamard乘积。

以下结果的证明可参见 [3], ，它使我们能够将代数的乘法与 Hadamard乘积及演化算子联系起来。

命题 1. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B}$，结构矩阵为 A。那么，下图交换

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\odot} & E \\ & \searrow^{\cdot} & \downarrow L \\ & & E \end{array}$$

其中，$\odot$：$E \times E \to E$ 定义为

$$x \odot y = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \odot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \, e_j.$$

等价地，写成矩阵形式可得

$$(x \cdot y)_{\mathcal{B}} = A\left(x_{\mathcal{B}} \odot y_{\mathcal{B}}\right).$$

回顾一下，给定两个代数 A 和 A'，若线性映射 $f : A \to A'$满足：对于任意的 $x, y \in A$，均有 $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$，则称其为代数同态（简称同态）。从一个代数到其自身的同态称为自同态，而双射自同态称为自同构。

自同态的以下刻画众所周知。我们借此给出一个比[8]中所示证明更简短的替代证明。

命题 2. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B}$，结构矩阵为 A。那么，线性映射 $g : E \to E$ 是同态，当且仅当 $A(G * G) = 0$ 且 $AG^{(2)} = GA$，其中$G = M_{\mathcal{B}}(g)$。

证明。线性映射 g 是同态，当且仅当 $g(e_i) \cdot g(e_j) = g(e_i \cdot e_j) = g(0) = 0$ 且 $g(e_j)^2 = g(e_j^2)$。相对于 $\mathcal{B}$ 取坐标，并利用命题 1，第一个等式为

$$0 = (g(e_i) \cdot g(e_j))_{\mathcal{B}} = A\left(g(e_i)_{\mathcal{B}} \odot g(e_j)_{\mathcal{B}}\right) = A\left(G_{*i} \odot G_{*j}\right),$$

因此它等价于 $A(G * G) = 0$。由于

$$\left(g(e_j)^2\right)_{\mathcal{B}} = Ag(e_j)_{\mathcal{B}}^{(2)} = AG_{*j}^{(2)},$$

$$\left(g(e_j^2)\right)_{\mathcal{B}} = G\left(e_j^2\right)_{\mathcal{B}} = GA_{*j},$$

第二个等式等价于 $AG^{(2)} = GA$。 □

我们以 [2] 中给出的以下结果结束这些预备知识。

定理 3. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$，结构矩阵为 $A = (a_{ij})$。设 $\mathcal{B}' = \{\eta_j = \sum_{i=1}^{n} g_{ij} e_i : j = 1, \ldots, n\}$ 是 E 的另一组基，且 $supp(\eta_j) = \{i : g_{ij} \neq 0\} = \{i_1, \ldots, i_r\}$。

- 若 $\eta_j^2 = 0$，则 $e_{i_1}^2 = \cdots = e_{i_r}^2 = 0$。
- 若 $\eta_j^2 \neq 0$，则 $rank(\{e_{i_1}^2, \ldots, e_{i_r}^2\}) = 1$。

定义 2. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B}$。

- 我们称 E 具有唯一自然基，如果 E 的任何其他自然基都可通过重新排列并乘以非零标量而得到 B 。
- 我们称 E 具有性质 (2LI)，如果对于 $\mathcal{B}$中的任意两个不同向量 e_i、 e_j， $\{e_i^2, e_j^2\}$ 线性无关。

推论 4. 设 E 是一个非退化演化代数。那么以下断言等价：

(1) E 有唯一自然基。(2) E 具有性质 (2LI)。

退化演化代数不满足上述任何一条断言。

3. Automorphisms and evolution operators

命题 5. 设 $g : E \to E$ 是演化代数 E 的一个自同构，该代数的自然基为 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$，结构矩阵为 $A = (a_{ij})$。那么， $\mathcal{B}' = \{g(e_i) : i = 1, \ldots, n\}$ 是 E 的一个自然基，而与此基关联的演化算子 L' 满足：

$$M_{\mathcal{B}'}(L') = A = M_{\mathcal{B}}(L).$$

此外， $M_{\mathcal{B}}(L') = GAG^{-1}$ ，且这两个算子是同一个线性映射，当且仅当 $AG = GA$，其中 $G = M_{\mathcal{B}}(g)$。

证明。如果 $i \neq j$，那么 $g(e_i) \cdot g(e_j) = g(e_i \cdot e_j) = g(0) = 0$，因此 $\mathcal{B}'$ 是一个自然基。

其次，演化算子 L' 将 $\mathcal{B}'$ 中的每个元素映射为其平方

$$g(e_i)^2 = g(e_i^2) = g\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g(e_k),$$

也就是说， $[g(e_i)^2]_{\mathcal{B}'} = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})^t$，这是 A 的第 i 列。因此可得 $M_{\mathcal{B}'}(L') = A$。

最后，根据 $\mathcal{B}'$的定义，我们有 $G = M(\mathcal{B}', \mathcal{B})$，因此 $M_{\mathcal{B}}(L') = M(\mathcal{B}', \mathcal{B}) M_{\mathcal{B}'}(L') M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = GAG^{-1}$。该算子与 L相同，当且仅当 $A = GAG^{-1}$；换言之， $AG = GA$。

□

注3. 在与上述相同的假设下，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$， $G^n A G^{-n}$ 都是相对于基 $\mathcal{B}$的演化算子的矩阵，因为g^n 也是一个自同构。

下面给出两个例子，分别说明 $G^n A G^{-n}$ 提供有限个和无限个演化算子。

例4. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} =\{e_1, e_2, e_3\}$ ，结构矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & a & b \\ (\sqrt{2}-1)a & (\sqrt{2}-1)a & (\sqrt{2}-1)b \\ c & c & d \end{pmatrix},$$

其中 a、 b、 c、 $d \in \mathbb{C}$为某些元素。考虑可逆线性映射

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

它满足 $G^{-1} = G$。该映射是一个自同构，因为

$$A(G * G) = A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ and } AG^{(2)} = A = GA.$$

于是， $\mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)\ \ e_3 \right\}$是一个自然基，其演化算子满足 $M_{\mathcal{B}'}(L') = A$。该算子关于基 $\mathcal{B}$ 的表达式为

$$M_{\mathcal{B}}(L') = GAG^{-1} = GAG = AG = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a & 0 & b \\ (2-\sqrt{2})a & 0 & (\sqrt{2}-1)b \\ \sqrt{2}c & 0 & d \end{pmatrix},$$

当且仅当 a 或 c 非零时，它才与 A 不同。在此假设下， L 和 L' 不是同一个线性映射，因此存在两个不同的演化算子。注意，由于 $G^2 = G$，矩阵$G^n A G^{-n}$ 是 A 或 AG。

下面的例子表明，可能存在无穷多个彼此不同的演化算子，但它们相对于自然基具有相同的矩阵。

例5. 设 E 是一个以自然基 $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ 为基且结构矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2}\\ -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2}\end{pmatrix},$$

考虑可逆线性映射

$$G=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & -\frac{4i}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\frac{4i}{3} & -\frac{5}{3} & 0\end{pmatrix},$$

它满足 $G^{-1}=G^t$。该映射是一个自同构，因为

$$A(G*G)=A\begin{pmatrix}-\frac{20i}{9} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \frac{20i}{9} & 0 & 0\end{pmatrix}=0 \text{ and } AG^{(2)}=A=GA.$$

于是， $\mathcal{B}'=\left\{\frac{1}{3}(5e_1-4ie_3)\ -\frac{1}{3}(4ie_1+5e_3)\,e_2\right\}$ 是一个自然基，其演化算子满足 $M_{\mathcal{B}'}(L')=A$。相对于基 $\mathcal{B}$，该演化算子的表达式为

$$M_{\mathcal{B}}(L')=GAG^{-1}=GAG^t=AG^t=\begin{pmatrix}\frac{5-4i}{3} & 1 & -\frac{5+4i}{3}\\ -\frac{4+5i}{6} & -\frac{i}{2} & \frac{-4+5i}{6}\\ -\frac{4+5i}{6} & -\frac{i}{2} & \frac{-4+5i}{6}\end{pmatrix},$$

这不同于 A，因此 L 和 L' 不是同一个线性映射。下面说明，对于 $n\geq 0$，矩阵 G^nAG^{-n} 可以给出无穷多个演化算子，并且它们彼此各不相同。

由于 $GA=A$，因此 $G^nAG^{-n}=AG^{-n}=A(G^t)^n$。反设存在 $m>n\geq 0$，使得 $A(G^t)^m=A(G^t)^n$，或者等价地

$$A((G^t)^k-I)=0, \tag{1}$$

其中 $k=m-n$。 G^t 的特征值为 1、 λ 和 $\frac{1}{\lambda}$，其中

$$\lambda=\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\,i.$$

由于 G^t 有三个不同的特征值，因此它可对角化，所以存在 P 使得 $G^t=PDP^{-1}$，其中 $D=diag(1,\lambda,\frac{1}{\lambda})$。于是，(1) 等价于 $AP(D^k-I)P^{-1}=0$，因此 $AP(D^k-I)=0$。记 P 的第 i 列为 p_i。于是我们有

$$0=A\begin{pmatrix}| & | & |\\ p_1 & p_2 & p_3\\ | & | & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^k-1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^k}-1\end{pmatrix}=$$

$$= A \begin{pmatrix} 0 & | & | \\ 0 & (\lambda^k - 1)p_2 & (\frac{1}{\lambda^k} - 1)p_3 \\ 0 & | & | \end{pmatrix}.$$

我们分两种情况讨论

- 如果 $\lambda^k \neq 1$，则 $p_2, p_3 \in null(A)$。因此，$0 = AP(D - I)P^{-1} = A(G^t - I)$，这与 $AG^t \neq A$ 矛盾。
- 如果 $\lambda^k = 1$，由于 λ 的辐角为 α =反余弦 $\left(\frac{1}{3}\right)$，则 $k\alpha = 2\pi l$，其中 $l \in \mathbb{Z}$。这等价于 $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{2l}{k}$，而这与 $\frac{\alpha}{\pi}$ 不是有理数矛盾。

在前面的例子中，我们用到了以下命题，该命题由 Aigner 和 Ziegler 在 [1] 中给出。

命题 6. 对每个奇整数 $n \geq 3$，数 $\frac{1}{\pi}$ 反余弦 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 都是无理数。

由命题 5 可得以下结果。

推论 7. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$，且满足性质 (2LI)。则 $Aut(E) \subseteq S_n \rtimes (\mathbb{K}^\times)^n$。

证明. 设 g 是一个自同构。那么，$\mathcal{B}' = \{g(e_i) : i = 1, \ldots, n\}$ 是由命题 5 得到的一个自然基。由于 E 具有性质 (2LI)，因此根据推论 4，E 有唯一自然基。也就是说，$\mathcal{B}'$ 可由 $\mathcal{B}$ 经过重排并乘以非零标量得到。□

命题 8. 设 E 是一个实演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$，结构矩阵为 $A = (a_{ij})$。假设存在 $\pi \in S_n$，使得对于所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $a_{i\pi(i)} \neq 0$。那么，$Aut(E) \cap (\mathbb{R}^\times)^n = \{id\}$。

证明。线性映射 g 满足 $g \in Aut(E) \cap (\mathbb{R}^\times)^n$ 当且仅当 $G = M_{\mathcal{B}}(g) = Diag(\lambda)$，其中某个 $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n$，$\lambda_i \neq 0$，$A(G * G) = 0$ 和 $AG^{(2)} = GA$。恒等映射 $A(G * G) = 0$ 显然成立，并且 $AG^{(2)} = GA$ 等价于 $a_{ij}\lambda_j^2 = \lambda_i a_{ij}$，即 $a_{ij} = 0$ 或 $\lambda_i = \lambda_j^2$。

将 π 写成不相交循环的乘积，$\pi = c_1 \circ \cdots \circ c_r$。对于所有 i，存在唯一的 j 使得 $i \in supp(c_j)$。令 l_j 为循环 c_j 的循环长度。于是，

$$\lambda_i = \lambda_{c_j(i)}^2 = \cdots = \lambda_{c_j^{l_j}(i)}^{2^{l_j}} = \lambda_i^{2^{l_j}}.$$

方程 $\lambda_i = \lambda_i^{2^{l_j}}$ 唯一的实数非零解是 $\lambda_i = 1$，因此 $g = id$。□

命题9. 设 E 是一个实演化代数，其自然基为$\mathcal{B}=\{e_i:\ i\in\Lambda=\{1,\dots,n\}\}$，结构矩阵为 $A=（a_{ij}）$，且没有零行。那么， $Aut（E）\cap（\mathbb{R}^{\times}）^n=\{id\}$。

证明。我们对 n 进行归纳。对于 $n=1$，这是显而易见的。我们假设该命题对维数 $n-1$ 成立，以证明它对维数 n 也成立。

若 $A=Diag(\lambda)P$，其中 $\lambda=(\lambda_i)_{i\in\Lambda}$、 $\lambda_i\neq 0$ 和 P 是一个置换矩阵，则结论由命题 8 得出。

在另一种情况下，如命题 8 的证明所示，我们有 $g\in Aut(E)\cap(\mathbb{R}^{\times})^n$ 当且仅当 $G=M_{\mathcal{B}}(g)=Diag(\lambda)$，且 $a_{ij}=0$ 或 $\lambda_i=\lambda_j^2$，对所有 $i,j\in\Lambda$ 均成立。由于 $A\neq Diag(\lambda)P$，存在 $k\in\Lambda$，使得矩阵 $A'=(a_{ij})_{i,\ j\in\Lambda\setminus\{k\}}$ 没有零行。根据归纳假设，对所有 $i\in\Lambda\setminus\{k\}$， $\lambda_i=1$。由于第 k 行非零，存在 l 使得 $a_{kl}\neq 0$，于是 $\lambda_k=\lambda_l^2$。若 $k\neq l$，则$\lambda_k=\lambda_l^2=1^2=1$。若 $k=l$，则 $\lambda_k=\lambda_k^2$，且该方程的唯一非零解为 $\lambda_k=1$。因此，对所有 $i\in\Lambda$， $\lambda_i=1$，故$g=id$。□

例6. 设 E 是一个复演化代数，其自然基为 $\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$，结构矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix},$$

其中 a、 $b\neq 0$。考虑线性映射 $g:\ E\to E$，满足 $G=M_{\mathcal{B}}(g)=Diag(\lambda_1,\lambda_2)$，且$\lambda_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\lambda_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$。那么，$g\in Aut(E)\cap(\mathbb{C}^{\times})^n$。

例7. 设 E 是一个实演化代数，其自然基为$\mathcal{B}=\{e_1,e_2\}$，结构矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

其中 a、 $b\neq 0$。考虑线性映射 $g:\ E\to E$，满足 $G=M_{\mathcal{B}}(g)=Diag(1,-1)$。那么， $g\in Aut(E)\cap(\mathbb{R}^{\times})^n$。

命题10. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B}=\{e_i:\ i=1,\dots,n\}$，结构矩阵为 $A=(a_{ij})$。那么， $S_n\subseteq Aut(E)$当且仅当 $A=\alpha J+\beta I$，其中 J是全1矩阵，且 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$。

证明. 设 P 为一个置换矩阵。当且仅当 $A(P*P)=0$且 $AP^{(2)}=PA$时，该置换才是一个自同构。第一个等式显然成立，第二个等式等价于 $AP=PA$。与任意置换矩阵都可交换的矩阵只有形如 $\alpha J+\beta I$的矩阵。□

4. Set of evolution operators

命题 11. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B}=\{e_i\colon\ i=1,\ldots,n\}$，结构矩阵为 $A=(a_{ij})$。设 $\mathcal{B}'=\{\eta_i\colon\ i=1,\ldots,n\}$ 是 E 的另一组基，且 $G=M_{\mathcal{B}}(g)$，其中 g 是线性映射 $g(e_i)=\eta_i$。那么，$\mathcal{B}'$ 是自然基，当且仅当 $A(G*G)=0$。在这种情况下，与该基相关联的演化算子 L' 满足

$$M_{\mathcal{B}'}(L')=G^{-1}AG^{(2)}, M_{\mathcal{B}}(L')=AG^{(2)}G^{-1}.$$

此外，当且仅当 $AG=AG^{(2)}$ 时，这两个算子是同一个线性映射。

证明。基 $\mathcal{B}'$ 是自然基，当且仅当对所有 $i\neq j$ 都有 $\eta_i\cdot\eta_j=0$。根据 g 的定义，这等价于 $g(e_i)\cdot g(e_j)=0$。相对于 $\mathcal{B}$ 取坐标，

$$0=(g(e_i)\cdot g(e_j))_{\mathcal{B}}=A\left(g(e_i)_{\mathcal{B}}\odot g(e_j)_{\mathcal{B}}\right)=A\left(G_{*i}\odot G_{*j}\right),$$

因此，这等价于 $A(G*G)=0$。由于对于所有 $j=1$，……，n

$$\left(\eta_j^2\right)_{\mathcal{B}'}=M(\mathcal{B},\mathcal{B}')\left(\eta_j^2\right)_{\mathcal{B}}=G^{-1}A\left(\eta_j\right)_{\mathcal{B}}^{(2)}=G^{-1}AG_{*j}^{(2)},$$

于是 $M_{\mathcal{B}'}(L')=G^{-1}AG^{(2)}$。最后，

$$M_{\mathcal{B}}(L')=M(\mathcal{B}',\mathcal{B})M_{\mathcal{B}'}(L')M(\mathcal{B},\mathcal{B}')=GG^{-1}AG^{(2)}G^{-1}=AG^{(2)}G^{-1}.$$

当且仅当 $A=AG^{(2)}G^{-1}$ 时，该算子与 L 相同，换言之，$AG=AG^{(2)}$。□

定义 8. 给定一个演化代数 E，其自然基为 $\mathcal{B}$，结构矩阵为 A，我们将相对于其自身自然基的所有演化算子组成的集合定义为

$$\mathcal{L}=\left\{G^{-1}AG^{(2)}:A(G*G)=0,rank(G)=n\right\}$$

以及相对于自然基 $\mathcal{B}$ 的集合定义为

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}}=\left\{AG^{(2)}G^{-1}:A(G*G)=0,rank(G)=n\right\}.$$

命题 12. 演化代数 E 的所有演化算子具有相同的秩。

证明. 设 $\mathcal{B}$、$\mathcal{B}'$ 为两个自然基，L、L' 分别为与这些基相关联的演化算子。设 $A:=M_{\mathcal{B}}(L)$ 且 $A':=M_{\mathcal{B}'}(L')=G^{-1}AG^{(2)}$。那么，

$$rank(A')=rank(G^{-1}AG^{(2)})=rank(AG^{(2)})\leq rank(A).$$

交换 A 和 A' 的角色，可得 $rank(A')\leq rank(A)$。因此 $rank(A)=rank(A')$。□

命题13. $ADiag(\lambda) \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 对所有 $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ ， 满足 $\lambda_i \neq 0$，对所有 $i = 1, \ldots, n$。

证明. 设 $G = Diag(\lambda)$。则， $G*G$是零矩阵，且 $A(G*G) = 0$，因此 $AG^{(2)}G^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$。也就是说，

$$\begin{aligned} AG^{(2)}G^{-1} &= ADiag\,(\lambda)^{(2)}\, Diag\,(\lambda)^{-1} = \\ &= ADiag\left(\lambda^{(2)}\right) Diag\left(\lambda^{(-1)}\right) = \\ &= ADiag\left(\lambda^{(2)}\lambda^{(-1)}\right) = ADiag(\lambda) \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

□

定义 9. 若 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ ， 则称其为平凡的

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}} = \{ADiag(\lambda) : \lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n, \lambda_i \neq 0\},$$

若为半平凡的

$$\mathcal{L}_{\mathcal{B}} \subseteq \{ADiag(\lambda) : \lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n\}.$$

命题14. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$，结构矩阵为 $A = (a_{ij})$，且满足性质 (2LI)。那么， $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 是平凡的。

证明. 若 E 满足性质 (2LI)，则根据推论 4， E 有唯一自然基，即 $G = Diag(\lambda)P$，其中 $\lambda_i \neq 0$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$ 成立，且P 是一个置换矩阵。那么，

$$\begin{aligned} AG^{(2)}G^{-1} &= A(Diag(\lambda)P)^{(2)}(Diag(\lambda)P)^{-1} = \\ &= ADiag(\lambda)^{(2)}PP^{-1}Diag(\lambda)^{-1} = \\ &= ADiag(\lambda^{(2)})Diag(\lambda^{(-1)}) = ADiag(\lambda). \end{aligned}$$

□

以下例子表明，如果 E 不满足 (2LI)，那么$L_{\mathcal{B}}$ 可能是平凡的，也可能不是。

例10. 设 E 是演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ ，结构矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},$$

与 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$。那么， $null(A) = \{x_1 = 0\}$ 和 $G = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$满足 $A(G * G) = 0$，当且仅当 $g_1 g_2 = 0$。容易看出

• 如果 $g_1 = 0$，那么

$$AG^{(2)}G^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g_2^2 \\ g_3^2 & g_4^2 \end{pmatrix} \frac{1}{det(G)} \begin{pmatrix} g_4 & -g_2 \\ -g_3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-g_2 g_3} \begin{pmatrix} -a g_2^2 g_3 & 0 \\ -b g_2^2 g_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a g_2 & 0 \\ b g_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

• 若 $g_2 = 0$，则

$$AG^{(2)}G^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 & 0 \\ g_3^2 & g_4^2 \end{pmatrix} \frac{1}{det(G)} \begin{pmatrix} g_4 & 0 \\ -g_3 & g_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{g_1 g_4} \begin{pmatrix} a g_1^2 g_4 & 0 \\ b g_1^2 g_4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a g_4 & 0 \\ b g_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此， $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 是平凡的。

例11. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$，结构矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},$$

其中 $a \neq 0$ 或 $b \neq 0$。那么， $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 满足 $A(G * G) = 0$，并且

$$AG^{(2)}G^{-1} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{det(G)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 2b \end{pmatrix}.$$

注意，该矩阵不具有 $ADiag(\lambda_1, \lambda_2)$ 的形式，其中 $\lambda_i \neq 0$，因此 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 不是平凡的。尽管如此， $AG^{(2)}G^{-1} = ADiag(0,2)$，所以 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 可能是半平凡的。

命题15. 设 E 是一个具有自然基 $\mathcal{B} = \{e_i : \ i = 1, \ldots, n\}$的演化代数。那么， $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$是半平凡的。

证明. 设 $\mathcal{B}' = \{\eta_i : \ i = 1, \ldots, n\}$ 是另一个自然基，并记 $e_j = \sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \eta_{i_k}$，其中 $g'_{i_k j} \neq 0$。我们分两种情况讨论

• 如果 $e_j^2 = 0$，那么根据定理 3，我们可以推导出 $\eta_{i_k}^2 = 0$。因此

$$L'(e_j) = L'\left(\sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \eta_{i_k}\right) = \sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} L'(\eta_{i_k}) = \sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \eta_{i_k}^2 = 0,$$

$$L(e_j) = e_j^2 = 0.$$

Hence $L'(e_j) = L(e_j)$.

• 若 $e_j^2 \neq 0$，则由定理 3 可推得，对于某个 $v \in E$， $\eta_{i_k}^2 = \alpha_{i_k} v$

$$L'(e_j) = \sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \eta_{i_k}^2 = \left(\sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \alpha_{i_k} \right) v,$$

$$L(e_j) = e_j^2 = \left(\sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \eta_{i_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^{r_j} g'^2_{i_k j} \eta_{i_k}^2 = \left(\sum_{k=1}^{r_j} g'^2_{i_k j} \alpha_{i_k} \right) v \neq 0.$$

$$\text{Hence } L'(e_j) = \lambda_j L(e_j) \text{ with } \lambda_j = \frac{\sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \alpha_{i_k}}{\sum_{k=1}^{r_j} g'^2_{i_k j} \alpha_{i_k}}.$$

因此，存在 λ_j，使得对于所有 $j = 1, \ldots, n$， $L'(e_j) = \lambda_j L(e_j)$。由此我们推得 $L_{\mathcal{B}}$ 是半平凡的，因为 $M_{\mathcal{B}}(L') = M_{\mathcal{B}}(L) Diag(\lambda) = A Diag(\lambda)$，其中 $\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^n$。□

注 12. 在前面的证明中，我们不能断言 E 是平凡的，因为必须有 $\lambda_j \neq 0$，也就是说，对于所有满足 $e_j^2 \neq 0$ 的 $j = 1, \ldots, n$，$\sum_{k=1}^{r_j} g'_{i_k j} \alpha_{i_k} \neq 0$。

命题 16. 设 E 是一个演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$。假设存在 r, s 和 $\alpha \neq 0$，使得 $e_r^2 = \alpha e_s^2$ 且 $e_s^2 \neq 0$。那么， $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 不是平凡的。

证明。设 β 使得 $\beta^2 = \alpha$，并考虑基 $\mathcal{B}' = \{\eta_i : i = 1, \ldots, n\}$，其中

$$\eta_i = \begin{cases} e_i & \text{if } i \neq r, s, \\ e_r + \beta e_s & \text{if } i = r, \\ e_r - \beta e_s & \text{if } i = s. \end{cases}$$

那么，由于 $\mathcal{B}'$， $\mathcal{B}'$ 是一个自然基

$$\eta_r \cdot \eta_s = (e_r + \beta e_s) \cdot (e_r - \beta e_s) = e_r^2 - \beta^2 e_s^2 = e_r^2 - \alpha e_s^2 = 0.$$

此外，由于 $\eta_r^2 = \eta_s^2 = (1 + \alpha) e_s^2$，我们有

$$L'(e_s) = L' \left(\frac{1}{2\beta} (\eta_r - \eta_s) \right) = \frac{1}{2\beta} (\eta_r^2 - \eta_s^2) = 0.$$

由于 $e_s^2 \neq 0$，因此 $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 并非平凡。 □

推论 17. 设 E 是一个非退化演化代数，其自然基为 $\mathcal{B} = \{e_i : i = 1, \ldots, n\}$，结构矩阵 A 不满足性质 (2LI)。那么， $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 并非平凡。

推论 18. 设 E 是一个非退化演化代数，其自然基为 $\mathcal{B}$。那么，以下断言等价

(1) E 具有唯一自然基。

(2) E 具有性质 (2LI)。

(3) $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 是平凡的。

因此， $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 是平凡的这一事实是代数的内在性质，也就是说，它不依赖于自然基 $\mathcal{B}$。

5. 结论

在本文中，我们将演化算子与同态联系起来，并引入了诸如演化代数的演化算子集等新概念，进而研究该集合是否平凡。据我们所知，文献中尚无其他论文研究不同演化算子之间的关系；我们的工作可以作为这一主题研究的起点，而该领域仍有一些问题悬而未决。例如，可以研究在退化情形下， $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ 平凡或半平凡这一性质是否取决于自然基 $\mathcal{B}$ 。

References

[1] M. Aigner 和 G. Ziegler。《来自 THE BOOK 的证明》。Springer-Verlag, 2009 年。[2] N. Boudi、Y. Cabrera 和 M. Siles。演化代数中的自然族。《Publicacions Matem`àtiques》，66(1):159–181，2022 年。[3] Y. Cabrera、M. Siles 和 M.V. Velasco。三维演化代数的分类。《Linear Algebra Appl.》，524:68–108，2017 年。[4] D. Fern´andez-Ternero、V. M. G´omez-Sousa 和 J. N´u˜nez-Vald´es。演化算子为同态的演化代数。《Comput Math Methods》，3(6):e1200:14pp，2021 年。[5] D. Fern´andez-Ternero、V. M. G´omez-Sousa 和 J. N´u˜nez-Vald´es。演化代数的演化算子。《Linear Multilinear Algebra》，2021 年。[6]D. Fern´andez-Ternero、V. M. G´omez-Sousa 和 J. N´u˜nez-Vald´es。利用演化算子对演化代数进行分类。《Math Comput Appl.》，26(3):57:10pp，2021 年。[7] I. Paniello。遗传余代数中的演化算子。《Linear Algebra Appl.》，614:197–207，2021 年。[8] J. P. Tian。演化代数理论。博士论文，河滨，加利福尼亚大学，2004 年。[9]R. Varro。特征 2 下的演化算子。《Commun Algebra.》，49(2):590–613，2021 年。

几何与拓扑系，塞维利亚大学，塔尔菲亚街（无门牌号），塞维利亚，41012，西班牙。desamfer@us.es, victor.manuel.gomez.sousa@gmail.com, jnvalde@us.es