用于模拟编织支架部署的机器学习与降阶建模。

Beatrice Bisighini[a,b,c], Miquel Aguirre[d,e,a], Marco Evangelos Biancolini[c], Federica Trovalusci[c], DavidPerrin[b], St´ephane Avril[a,*], Baptiste Pierrat[a]

[a] *Mines Saint-Etienne, Univ Jean Monnet, INSERM, U 1059 Sainbiose, Centre CIS, F-42023 Saint-Etienne, France*
[b] *Predisurge, 10 rue Marius Patinaud, Grande Usine Creative 2, 42000 Saint-Etienne, France*
[c] *University Tor Vergata, Department of Enterprise Engineering, Via del Politecnico 1, 00133 Rome, Italy*
[d] *Laboratori de Càlcul Numèric, Universitat Politècnica de Catalunya, Jordi Girona 1, E-08034, Barcelona, Spain*
[e] *International Centre for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Gran Capità, 08034, Barcelona, Spain*

arXiv:2301.08511v1 [cs.CE] 20 Jan 2023

摘要

使用血流导向装置进行腔内重建，为颅内动脉瘤的微创治疗开创了一种新范式。这些高密度编织支架在母血管内释放后所呈现的构型难以预测，仅凭医学容积图像可能不足以妥善规划治疗。因此，本文提出一种快速、准确的机器学习与降阶建模框架，该框架基于有限元仿真，可在治疗规划和介入操作阶段为临床医生提供帮助。框架首先通过分类步骤，预先判断仿真能否成功（即支架与血管能否良好贴合），并从临床角度评估其可行性；随后通过回归步骤，给出释放后的支架构型的近似解。后者采用非侵入式降阶建模方案实现，该方案结合了本征正交分解算法与高斯过程回归。我们在带有囊状动脉瘤的理想化颅内动脉模型上验证了这一工作流，并研究了六种几何参数和手术参数对支架释放结果的影响。该两步工作流对部署条件的分类准确率最高可达 95%，并能实时预测支架部署构型，平均预测误差始终不超过三维旋转血管造影的空间分辨率（0.15 毫米）。这些结果令人鼓舞，表明该技术能够在几毫秒内完成仿真，同时保持支架部署构型的力学真实性和可预测性。

关键词：编织支架、梁单元、接触力学、降阶建模、机器学习

1. 引言

颅内动脉瘤（IAs）是脑部动脉的局部扩张，由动脉壁退行性变弱所致。囊状或水泡状动脉瘤是最常见的颅内动脉瘤。其在普通人群中的患病率估计约为 2-3% [1]。颅内动脉瘤的发病率为每 10 万人年 10 例；一旦破裂，会导致蛛网膜下腔出血，这是一种危及生命的卒中，致残率和死亡率均很高 [2, 3]。因此，发现直径大于 5/7 毫米的颅内动脉瘤时，通常建议尽早治疗，将动脉瘤囊排除在脑循环之外 [4]。如今，血管内治疗方案已成为首选干预方式，因为与侵入性技术（如夹闭术）相比，其并发症发生率较低[5]。

*通讯作者：St´ephane Avril（avril@emse.fr）。

采用血流导向装置进行腔内重建，为颅内动脉瘤的微创治疗开创了一种新模式，可替代通过弹簧圈栓塞进行的瘤囊内栓塞 [6, 7]。血流导向装置是由低孔隙率编织支架构成的自膨式装置。得益于这种结构，它们具有很高的柔韧性，且能抵抗折弯。因此，它们非常适用于迂曲血管和宽颈颅内动脉瘤。这些支架有多种规格，半径和长度各不相同。目前，外科医生仅依据临床经验以及术前不久采集的医学体积图像（如三维旋转血管造影或计算机断层血管造影）上的测量结果来选择支架尺寸。

然而，这些装置部署于母血管后所形成的构型难以预测，仅凭常规三维医学影像可能不足以妥善规划治疗。相关困难可能延长介入手术时间。此外，还需要使用更高剂量的血管造影对比剂和麻醉药物。所有这些因素都会增加患者发生术后并发症的风险。因此，亟需开发能够实时模拟血流导向装置在患者特异性血管内部署过程的计算模型，以协助临床医生进行治疗规划和介入操作 [8]。

编织支架的力学行为通常采用有限元模型进行模拟，其中使用梁单元对金属丝进行离散化 [9–12]；然而，仅有少数研究对血流导向装置进行了数值建模[13–15]。由于自由度数量庞大，且必须求解装置与血管壁之间的接触问题，这些传统技术所需的计算时间非常长。为克服这一局限，并使计算模型适用于实时临床应用，文献中已有快速虚拟支架置入方法的报道 [16–18]。这些方法通过简化支架的力学行为和/或其与血管壁的接触过程（例如，采用质点弹簧模型或主动轮廓模型），来预测支架部署构型。

降阶建模在计算机辅助手术中也日益受到关注，因为它能够在保留数值问题内在物理特性的同时，降低其计算复杂度和成本 [19–22]。构建降阶模型（ROMs）最强大且应用最广泛的技术之一是降阶基（RB）方法。降阶基方法适用于需要针对不同参数值进行大量求解的非线性问题 [23, 24]。在生物力学中，参数化可以涉及边界条件和初始条件 [25–27]，载荷 [28]，以及所研究的几何域 [29–31]。后者有时通过统计形状模型处理，从而能够依据相同特征比较不同的解剖结构 [32–34]。

通过利用这类参数化问题的解之间的内在相似性，可以实现其实时仿真。原始全阶模型（FOM）最重要的特征，即降阶基（RBs），可以通过对一组高保真解进行本征正交分解（POD）来提取。此类数据集的构建和降阶基的提取统称为离线 阶段。随后，未见参数值对应的近似解可表示为降阶基的线性组合（在线阶段）。这些方法的显著优势在于，如果在线 阶段与离线 阶段完全解耦，那么在线 阶段执行的计算就与全阶模型的维度无关。基于降阶基的方法在在线 阶段的实现方式上有所不同：侵入式方法依赖于向降阶基空间进行投影来生成降阶模型 [35, 36]；非侵入式方法则利用在高保真数据集上训练的回归模型，学习从参数到降阶基空间中解的映射 [37–40]。在效率方面，非侵入式方法优于侵入式方法，因为它们在在线阶段无需求解非线性方程组，只需评估回归模型即可。不过，为确保解的准确性，这些方法需要非常庞大的训练数据集。近年来，物理信息神经网络（PINNs）作为一种颇具前景的替代方案崭露头角 [32, 41, 42]。

在本研究中，我们首次实现了基于机器学习（ML）的降阶模型方案，用于预测支架部署构型。为评估其可行性，我们创建了一种参数化合成几何，可控制血管半径、曲率和动脉瘤尺寸。在创建高保真数据集时，还考虑了有关部署位置的手术决策。如果在给定部署条件下，支架未落入动脉瘤内部且与血管壁贴合良好，则从临床角度来看，该次释放被视为成功。由于在释放失败后，临床上并不需要预测支架构型，因此，本文提出的虚拟框架包括两个步骤（图 1）：第一步为分类 步骤，用于先验判定一次仿真是否会成功，随后是回归 步骤，用于提供支架释放构型的近似解。此外，作为我们前期工作的延续， [43],我们提出了一种快速执行编织支架部署有限元仿真的策略，以减少构建用于训练的高保真数据集所需的计算时间。

本文其余部分 本文的组织结构如下。第 2.1节概述了用于生成 e

高保真数据集的方法，重点介绍血流导向装置模型（2.1.1）、合成动脉瘤模型（2.1.2），以及用于执行支架释放有限元仿真的方案（2.1.3）。第 2.2 节介绍分类模型，第 2.3 节介绍基于机器学习的降阶模型。第 3 节和 4节展示并讨论了这些模型在未见过的场景下的测试结果。最后，第 5 节给出总结性评述。

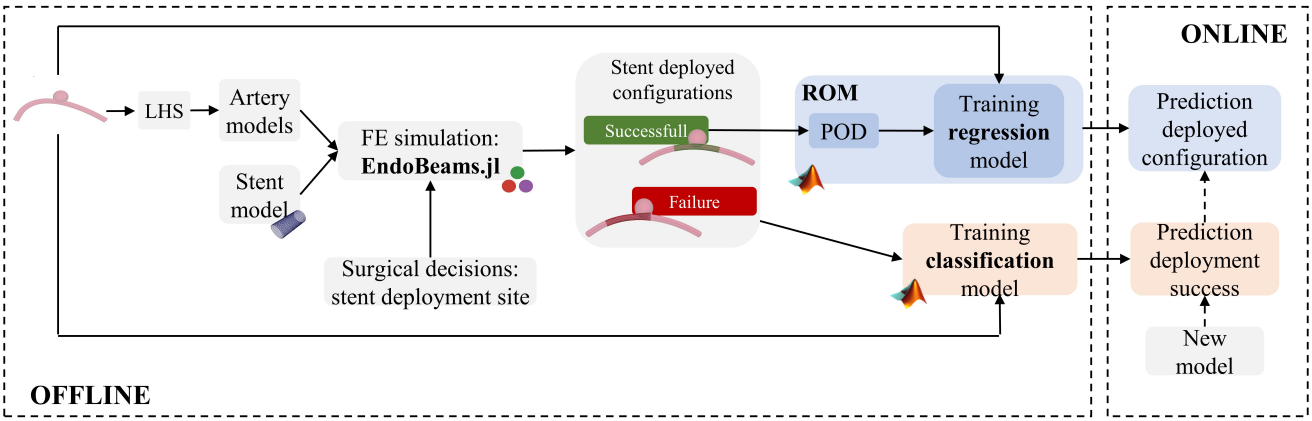


图1： 用于预测支架部署仿真结果的虚拟工作流程。

2. 方法

2.1. 高保真模拟

2.1.1. 编织支架建模

编织支架被建模为由圆形横截面的细金属丝组成的管状网（图 2**A**）。对于半径为 R_s、长度为 L_s、由 N_w 根半径为 R_w 的金属丝构成且具有 N_{cells} 个重复单元的支架，节点位置由以下方程组定义：

$$x_{n,i} = (R_s + R_w) \cdot \cos(orient \cdot i \cdot d\theta + \Theta_n), \tag{1}$$
$$y_{n,i} = (R_s + R_w) \cdot \sin(orient \cdot i \cdot d\theta + \Theta_n), \tag{2}$$
$$z_{n,i} = n \cdot \tan(\phi), \tag{3}$$

其中 $n \in [0, N_w/2]$ 和 $i \in [0, N_{cells}]$，并且 $orient$ 分别取 1 或 -1，表示顺时针和逆时针方向的金属丝；$d\theta = 2\pi/(N_w/2)$、$\Theta_n = n \cdot 2\pi/(N_w/2)$，而 $\phi = L_s/N_{cells}$ 为螺距角。

在本研究中，这些几何参数的取值对应于一种通用血流导向装置：$N_w = 48$、R_s= 2.6 毫米、R_w = 0.014 毫米、L = 15 毫米、N_{cells} = 70。支架由 Phynox合金（一种钴铬合金）制成，并被建模为线弹性材料，其杨氏模量为 E = 225 GPa，泊松系数为 ν = 0.33，密度为 $\rho = 9.13{\cdot}10^3$ kg/m^3。

2.1.2. 动脉和动脉瘤建模

释放支架 在一个呈现囊状动脉瘤的颅内动脉参数化理想模型中 .
血管中心线 使用平面二次 B´ézier 曲线定义：

$$\mathbf{B}(t) = (1-t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2, \quad t \in [0,1], \tag{4}$$

其中 P_0, P_2 为固定点，P_1 是将纳入参数化的控制点。这些点位于二维平面内，因此该样条曲线唯一的自由度是 P_1的 y、z 坐标。曲线 B(t)从 P_0 出发，沿 P_1, 的方向延伸，然后弯曲至 P_2。贝´zier 曲线可用于定义平滑、连续的曲线，其形状类似于颅内动脉的曲率 [44, 45]。模型采用可视化工具包（VTK）软件构建 [46]。通过 vtkTubeFilter() 函数生成动脉，该函数可围绕一条线生成管状结构。其直径（D_v）沿中心线保持恒定。随后，使用 vtkSphereSource() 创建一个直径为D_a 的球形理想化动脉瘤，将球体中心 C$_a$ 置于血管中心线的中点，并对相对 y距离进行参数化。通过布尔并集，将球体并入动脉模型（图 3A）。总之，血管几何形状完全由 5 个参数定义：$y_{\mathbf{P}_1}$、$z_{\mathbf{P}_1}$、D_v、D_a、$y_{\mathbf{C}_a}$。

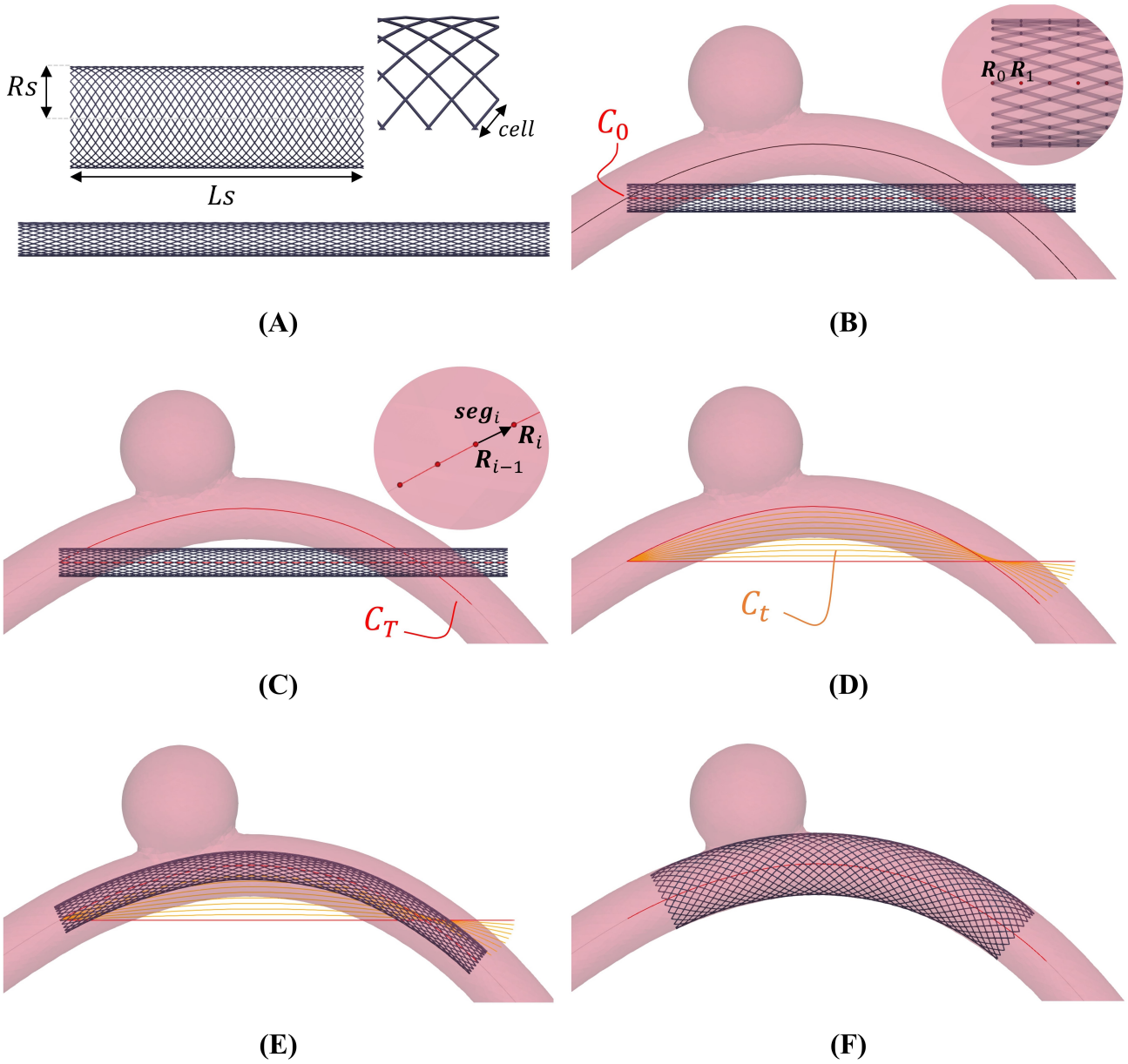


图 2： 支架释放策略。为更好地显示支架，丝材厚度已放大（2×）。**(A)**未压握和压握支架。**(B)** 压握支架和初始笔直的中心线（C_0）。**(C)** 支架的最终中心线（C_T）。**(D)** 中间中心线（C_t）。**(E)**定位后的支架。**(F)** 释放后的支架。

2.1.3. 编织支架部署的有限元仿真

仿真采用 EndoBeams.jl进行，这是一个内部开发的开源有限元建模框架，用于数值仿真梁与刚性表面之间的摩擦接触相互作用 [43]。该软件已通过若干公开基准测试以及商业软件 Abaqus（Simulia、达索系统，普罗维登斯，罗德岛州，美国）进行验证。因此，支架结构采用梁单元离散，所得网格由 3408 个节点和 3360 个梁单元组成。为避免对梁与梁之间的接触进行渲染，在交错编织丝材的每个互连处施加基于罚函数的约束。EndoBeams.jl 中实现的接触算法依赖于接触面的隐式表示，即有符号距离场（SDF） [47]。动脉模型的 SDF 使用 Julia 软件包 SignedDistanceField.jl 计算 [48], ，该软件包只需输入以 *.stl* 文件形式提供的三角网格（图 3B）。假设血管壁为刚性，因此整个仿真过程中 SDF 保持不变。

用于进行支架释放仿真的策略受 [18,49, 50] 中提出的工作启发。该方法兼容使用有符号距离函数来处理血管-支架接触，并且

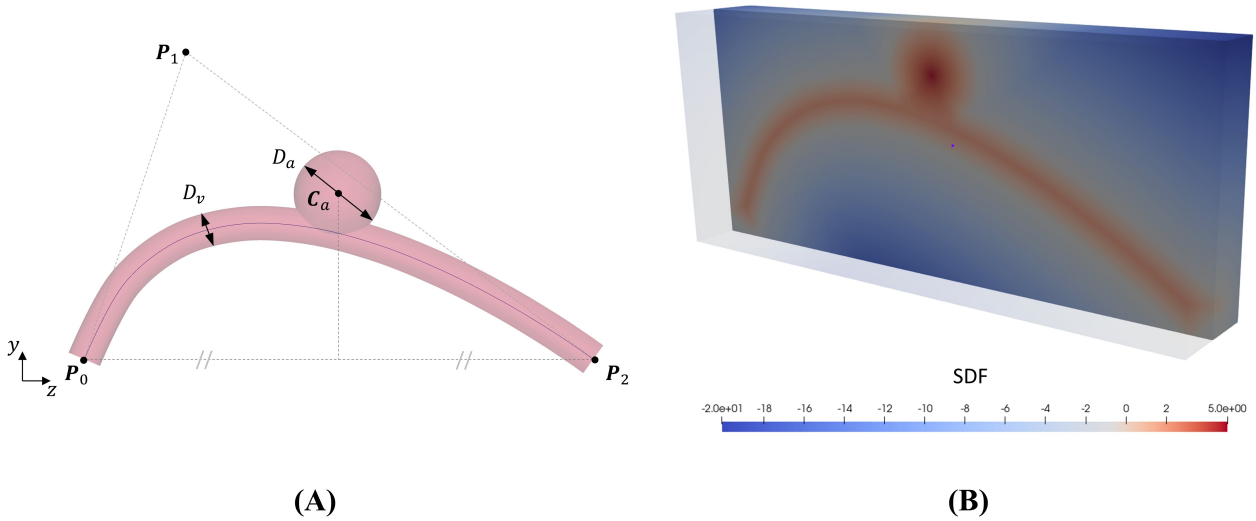


图 3：动脉和动脉瘤建模。（**A**）呈现囊状动脉瘤的颅内动脉参数化理想模型：贝塞尔点$\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$,动脉直径 D_v, 动脉瘤直径 D_a ，中心$\mathbf{C}a$。（**B**）理想动脉和动脉瘤模型的符号距离函数截面。

可替代文献中以往通常采用的虚拟导管方法 [51]。由于我们的目标是获得部署模拟结束时的支架构型，因此我们重点关注准静态模拟。仿真分为三个步骤：（1）压握；（2）定位；以及（3）释放。

首先，通过锁定编织支架的周向自由度，并对其所有节点施加大小为（$R_{stent} - R_{crimped}$）的径向位移，对编织支架进行压握，其中 $R_{crimped}$ 表示压握后支架的目标半径（图2**A**）。

位于同一 z 平面上的编织支架节点可分组为 N_r 个环，并为每个环引入一个中心点 $\mathbf{R}_i$，其中 $i = 1 \dots N_r$（图 2B）。这些点定义了压握后支架的初始直线中心线（C_0）。将支架移位，使 $\mathbf{R}_0$ 与沿血管中心线选定的部署位置重合。支架的最终中心线（C_T）通过将 C_0 投影到血管中心线上计算得出（图 2C），以保持支架中心线的总长度不变。 C_0，因此 C_T，可细分为线段，即沿中心线连接相邻点的向量（$\text{seg}_i = \|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{i-1}\|$）。第一个点 $\mathbf{R}_0$ 被视为与 z 轴对齐。为每个线段指定一个旋转，以使其与前一线段重新对齐。每个线段的旋转角度（θ_i）和旋转轴（ax_i）可按如下方式计算：

$$\mathbf{ax}_i = \frac{\mathbf{seg}_i \times \mathbf{seg}_{i-1}}{\|\mathbf{seg}_i\|\|\mathbf{seg}_{i-1}\|} \tag{5}$$

$$\theta_i = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{seg}_i \cdot \mathbf{seg}_{i-1}}{\|\mathbf{seg}_i\|\|\mathbf{seg}_{i-1}\|}\right) \tag{6}$$

因此，可以为每个线段定义一个旋转矩阵 $\mathcal{M}_i$ 。通过累积应用这些旋转，我们可以将 C_T 与 z轴对齐，从而得到 C_0:

$$\mathcal{M}_{tot,i} = \prod_{k=1}^{i} \mathcal{M}_i \tag{7}$$

该技术的优势在于，可以通过将 C_t除以期望构型的数量，并仅对 C_T 应用这一部分旋转，从而获得 C_T 与 C_0 之间的中间位置（ θ_i ）（图 2**D**）。这些中间位置用于驱动物理模拟，在所有位于同一环上的支架节点与其对应点 $\mathbf{R}_i$ 位于 C_0之间实施运动学约束；计算 C_t 与 C_0 的坐标差，并将所得位移依次施加到 C_0 的每个点上，使支架发生弯曲（图 2**E**）。

最后，支架可在血管内自由变形，并与血管壁发生接触（见图2**F**）。当动能低于某一阈值（10^{-12} 毫焦）时，停止仿真；此时系统达到静力学平衡。

2.1.4. 高保真数据集的创建

研究解剖特征和手术决策对最终支架构型的影响。因此，我们考虑一组几何特征，用于描述动脉和动脉瘤的几何形态，以及沿血管中心线的支架部署位置；我们将这组通用参数称为仿真参数，并将其收集在向量 $\boldsymbol{\mu}$ 中。

为创建高保真数据集，我们考虑了以下仿真参数：

$$\boldsymbol{\mu}_B = \left[\; y_{\mathbf{P}_1}, \quad z_{\mathbf{P}_1}, \quad D_v, \quad D_a, \quad y_{\mathbf{C}_a}, \quad \eta \; \right] \tag{8}$$

其中， $y_{\mathbf{P}_1}$ 和 $z_{\mathbf{P}_1}$ 是中间贝塞尔曲线点的 y 和 z 坐标， $y_{\mathbf{C}_a}$ 是动脉瘤中心点的 y 坐标， η 是支架沿血管中心线的位置。由于支架错位的影响是本研究的目标之一，我们考虑的部署位置是支架的一端落在动脉瘤颈部区域内的位置。

采用拉丁超立方抽样（LHS）方法生成 N_s 个不同的 $\boldsymbol{\mu}_B$取值；随后创建相应的动脉模型，并在每个模型中进行支架部署仿真，具体方法见第2.1.3节。使用 Julia 软件包 LatinHypercubeSampling.jl [52]创建 LHS 方案。仿真参数的取值范围参考了文献中报告的范围 [53, 54]：对于 D_v，我们考虑的范围为[2,4]毫米；对于 D_a，范围为 [5,10] 毫米。

或者，将仿真参数 $\boldsymbol{\mu}_B$ 作为机器学习模型的输入值，并使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 其中，不再使用贝塞尔曲线的中点（$\mathbf{P}_1$）和支架部署位置（η），而是使用定位后的支架中心线（C_T）上 y 和 z 点（$\mathbf{Q}_i$）的坐标N_{cl}：

$$\boldsymbol{\mu}_{cl} = \left[\; y_{\mathbf{Q}_1}, \quad z_{\mathbf{Q}_1}, \quad \cdots, \quad y_{\mathbf{Q}_{N_{cl}}}, \quad z_{\mathbf{Q}_{N_{cl}}}, \quad D_v, \quad D_a, \quad y_{\mathbf{C}_a} \; \right]. \tag{9}$$

$\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 向量分量根据部署条件通过几何方法计算，无需进行有限元仿真。

2.2. 二元分类

在高保真数据集中，从临床角度来看，如果支架末端与动脉壁接触且未落入动脉瘤囊内，则认为部署方案“成功”；否则，将仿真结果标记为“失败”（图4）。此分类通过检查仿真结束时支架末端是否有一个或多个节点位于动脉瘤内来自动完成。由于动脉瘤被建模为球体，因此可以解析计算其有符号距离函数（SDF）；据此，当节点$\mathbf{x}_p$ 到表面的距离为正时，即认为该节点位于动脉瘤内：

$$||\mathbf{C}_a - \mathbf{x}_p|| - R_a - r_w \geq 0. \tag{10}$$

结果标注完成后，使用监督式机器学习算法进行训练，以学习仿真参数 $\boldsymbol{\mu}$ 与相应解输出之间的关系：模型建立后，即可将新的、未见过的场景分配到两个类别之一。分类在 Matlab（MathWorks，美国马萨诸塞州纳蒂克）中完成。为此，对比了以下分类器的性能 [55]：

- 使用 fitctree() 函数创建并拟合逻辑回归（LR）模型；
- 使用 fitcknn() 函数创建并拟合 K近邻（k-NN）模型；
- 使用 fitcnb() 函数创建并拟合朴素贝叶斯（NB）模型；
- 使用 fitctree() 函数创建并拟合决策树（DT）模型；
- 创建并拟合一个人工神经网络（ANN）模型，该模型包含三层，每层大小为 [10,10,10] ，并使用双曲函数 tanh 作为激活函数；拟合时使用 fitnn() 函数；
- 使用 fitsvm() 函数创建并拟合一个采用二阶多项式核的支持向量机（SVM）模型。

架构 e 和超参数值使用 ClassifierLearnerAp 为每个机器学习模型选取 p.

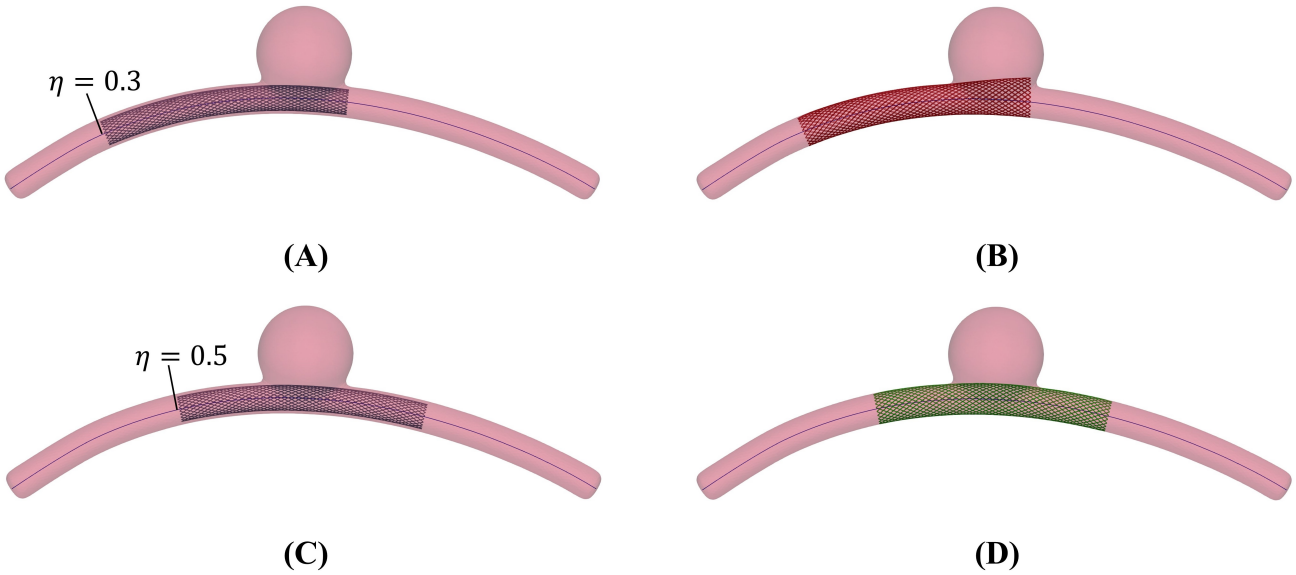


图4： 沿血管中心线不同部署位置的成功与失败部署结果示例，η。为更清楚地显示支架，丝材厚度经过放大（2×）。**（A）**支架位于$\eta = 0.3$。**（B）**部署失败：着陆区位于动脉瘤腔内。**（C）**支架位于 $\eta = 0.5$。**（D）**部署成功：支架与血管壁贴合良好。

2.2.1. 指标

采用五项指标评估训练好的分类器的性能。这些指标通过统计真正例（TPs）、真负例（TNs）、假正例（FPs）和假负例（FNs）计算得出，这些数据汇总在混淆矩阵中。其表达式如下：

- 准确率 $=$ ~~真正例+真负例~~/~~真正例~~+假负例+真负例+假正例：表示分类器的表现如何，而不考虑标签的含义；
- 灵敏度（或召回率或真正例率）$=$ ~~真正例~~/~~真正例~~+假负例：表示分类器预测成功部署条件的能力；
- 特异度（或真负例率）$=$ ~~TN~~/~~TN~~+FP：它表示分类器预测部署失败条件的能力；
- 精确率 $=$ TP/~~TP~~+~~FP~~：它表示预测值彼此接近的程度；
- F1分数 $=$ 2 ~~精确率·召回率~~/~~精确~~率+召回率：它将精确率和召回率综合为一个数值，是一种更全面的准确度衡量指标。

另一种评估分类性能的实用工具是受试者工作特征（ROC）曲线，它以截断阈值为变量，绘制分类器的真正例率（灵敏度）与假正例率（1-特异度）的关系。与 ROC 曲线相关的指标是曲线下面积（AUC）。ROC 曲线越接近图表的左上角（因此 AUC 值越高），分类器就越准确。

2.3. 降阶建模

若成功完成部署，则采用基于机器学习的降阶建模方法，计算所考虑血管中支架部署构型的近似解。首先，可以考虑训练机器学习算法，以学习仿真参数与仿真结束时节点位移向量之间的关系。然而，鉴于支架模型包含大量自由度（在本例中为 ~10000 自由度），此类输出向量的规模非常大，训练时间也会因此变得很长。降阶建模通过本征正交分解，从训练数据集中提取最重要的特征——降阶基，从而降低原始问题的维数 [27, 37, 56, 57]。随后，使用监督式机器学习算法建立仿真参数与以降阶基空间表示的解之间的关系。最后，对于任意仿真参数组合，都可以实时还原支架部署构型的近似解。

2.3.1. 本征正交分解

此处仅介绍POD算法背后的理论；感兴趣的读者可参阅[58]。计算出高保真数据集后，通过将高保真解 **S** 排列为矩阵的列，构建快照矩阵 $\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu})$:

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}_1) & | & \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}_2) & | & \dots & | & \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}_{N_s}) \end{array} \right]. \tag{11}$$

这些向量中的每一个都代表一个快照，并包含准静态部署仿真结束时的节点位移:

$$\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}) = \left[\begin{array}{ccccccc} u_{x,1}, & u_{y,1}, & u_{z,1}, & \dots, & u_{x,N_n}, & u_{y,N_n}, & u_{z,N_n} \end{array} \right], \tag{12}$$

其中， N_n 是支架网格中的节点数，因此高保真问题的维度为 $N_h = 3 \cdot N_n$。

POD算法依赖于对**S**进行奇异值分解（SVD）:

$$\underset{N_h \times N_s}{\mathbf{S}} = \underset{N_h \times N_h}{\mathbf{U}} \quad \underset{N_s \times N_h}{\boldsymbol{\Sigma}} \quad \underset{N_s \times N_s}{\mathbf{Z}^T}, \tag{13}$$

其中 $\mathbf{U} = \left[\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_{N_h}\right]$ 是左奇异向量矩阵，$\mathbf{Z} = \left[\mathbf{z}_1|\mathbf{z}_2|\cdots|\mathbf{z}_{N_s}\right]$ 是右奇异向量矩阵，而 $\boldsymbol{\Sigma} = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{N_s})$ 包含**S**的奇异值，并按从大到小的顺序排列（$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{N_s} \geq 0$）。

施密特-埃克哈特-扬定理指出，如果奇异值迅速衰减，则**S**的列 Col(**S**) 可以由**S**的前 L 个左奇异向量很好地近似，即 Col(**U**)。因此，给定容差 ε_{POD}， L可以确定为满足以下条件的最小整数:

$$\frac{\sum_{i=1}^{L} \sigma_i}{\sum_{i=1}^{N_s} \sigma_i} \geq 1 - \varepsilon_{POD}. \tag{14}$$

列向量 $\left[\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2|\cdots|\mathbf{u}_L\right]$ 表示模型的降阶基，并组装成矩阵**V**。

高保真解$\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu})$现在可以投影到由**V**定义的降阶空间:

$$\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}) \approx \mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{V}\mathbf{u}_L(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{u}_{rb}(\boldsymbol{\mu}), \tag{15}$$

其中，由于**U** 是正交的，$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ ，$\mathbf{u}_L$ 是与**V**的列基相关联的 L 投影系数，而$\mathbf{u}_{rb}(\boldsymbol{\mu})$是投影到降阶空间中的解。

2.3.2. 高斯过程回归

按照 Guo 在 [37], 中的提议，采用高斯过程回归（GPR）来近似任意仿真参数组合下的高保真解。此处仅简要介绍单输出高斯过程回归的理论，更多详情见 [59]。将单输出高斯过程回归扩展到多输出问题的方法，是对各个输出分别建模。这种方法称为独立单输出高斯过程回归（IGPR）。

设 $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 为一个通用训练数据集，其中$\mathbf{x}_i$ 表示一个输入向量， y_i 表示对应的输出。我们假设 y_i 是未知回归函数($f(\mathbf{x}_i)$的含噪观测值:

$$y_i = f(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2). \tag{16}$$

高斯过程回归通过计算所有符合输入数据的可接受函数的概率分布，并在输入新的输入数据时进行预测。为此，可将 $f(\mathbf{x}_i)$视为服从高斯过程（GP）:

$$f(\mathbf{x}_i) \sim \mathrm{GP}(0, \kappa(\mathbf{x}, \mathbf{x}')). \tag{17}$$

高斯过程是随机变量的集合，其中任意有限个随机变量都服从联合高斯分布。它由均值函数（为简便起见，设为0）和协方差函数 $\kappa\mathbf{x},\mathbf{x}'$ 完全描述，后者称为核函数，应根据所研究的问题谨慎选择。最常用的是平方指数 （SE）核函数，也称为径向基函数 （RBF）核函数:

$$\kappa(x_i, x_j) = \sigma_\kappa^2 \exp\left(-\frac{||x_i - x_j||^2}{2l}\right), \tag{18}$$

wh其中，标准差 σ_κ 和长度尺度 l 表示两个核函数超参数 rs.

根据高斯过程的定义，输出的先验高斯分布为：

$$\mathbf{y}|\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{K}_y), \quad \mathbf{K}_y = \kappa(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \sigma^2\mathbf{I}, \tag{19}$$

其中 $\mathbf{y} = \{y_i, y_2, \cdots, y_N\}$ 和 $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N]$。

对以下内容的预测 利用联合概率分布，对新的输入数据 $\mathbf{X}^*$ 上的无噪声输出 $\mathbf{f}^*$ 进行预测 y 分布：

$$\mathbf{f}, \mathbf{f}^*|\mathbf{X}, \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}^* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}^* \\ \mathbf{K}^{*\mathrm{T}} & \mathbf{K}^{**} \end{bmatrix}\right), \tag{20}$$

其中 $\mathbf{K}^{**} = \kappa(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*)$ 和 $\mathbf{K}^* = \kappa(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*)$。因此，根据高斯条件定理，$\mathbf{f}^*$ 的后验预测分布为：

$$\mathbf{f}^*|\mathbf{X}, \mathbf{X}^*, \mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{C}), \quad \mathbf{m} = \mathbf{K}^{*\mathrm{T}}\mathbf{K}_y^{-1}\mathbf{y}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{K}^{**} - \mathbf{K}^{*\mathrm{T}}\mathbf{K}_y^{-1}\mathbf{K}^*. \tag{21}$$

ˆ 在本研究中，基于一组训练数据构建高斯过程回归模型 $\boldsymbol{f}$，其中预测因子为仿真参数 $\boldsymbol{\mu}$，输出为从高保真解计算得到的投影系数 $\mathbf{u}_L(\boldsymbol{\mu})$，计算方式如下：

$$\boldsymbol{\mu} \to \hat{\mathbf{u}}_L(\boldsymbol{\mu}) \approx \hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\mu}) \quad \text{trained from} \quad (\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{V}^T\mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}_i)). \tag{22}$$

训练完成后，该模型可用于预测任意给定的、未见过的仿真参数值 $\boldsymbol{\mu}^*$ 对应的投影系数，即 ˆ$\mathbf{u}_L(\boldsymbol{\mu}^*)$。这样便可按如下方式恢复 FO 解：

$$\mathbf{u}_p(\boldsymbol{\mu}^*) = \mathbf{V}\hat{\mathbf{u}}_L(\boldsymbol{\mu}^*) \approx \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu}^*). \tag{23}$$

M ATLAB 函数 fitrgp() 用于构建采用 $Mat\acute{e}rn\ 5/2$ 核函数的高斯过程回归模型 ：

$$\kappa(x_i, x_j) = \sigma_\kappa^2 \exp\left(1 + \frac{\sqrt{5}r}{\sigma_l} + \frac{5r^2}{3\sigma_l^2}\exp\left(-\frac{\sqrt{5}r}{\sigma_l}\right)\right), \tag{24}$$

其中 $r = \sqrt{(x_i - x_j)^{\mathrm{T}}(x_i - x_j)}$。训练完成后，我们可以使用函数 predictExactWithCov() 获取任意未见过的预测因子组合对应的投影系数。高斯过程回归的强大之处在于，预测结果是一个多元正态分布，其特征由均值向量和协方差矩阵描述：$\mathcal{N}(\mathbf{u}_L, \mathbf{K}_L)$。因此，FO 解也服从多元正态分布，$\mathcal{N}(\mathbf{u}_P = \mathbf{V}\mathbf{u}_L, \mathbf{K}_P = \mathbf{V}\mathbf{K}_L\mathbf{V}^T)$。我们可以使用 MATLAB 函数 mvnrnd() 从该分布中采样，以直观展示预测的不确定性。由于在 MATLAB 中我们只能使用 IGPR，即每个投影系数对应一个高斯过程回归模型，因此协方差矩阵为对角矩阵。

2.3.3. 指标

对于测试案例，通过计算支架网格每个节点处的三种绝对误差，将基于机器学习的降阶模型结果与高保真解进行比较：

- 降阶误差，$\mathrm{E}_{rb} = ||\mathbf{u}_{rb}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu})||$；
- 预测误差，$\mathrm{E}_p = ||\mathbf{u}_p(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{u}_h(\boldsymbol{\mu})||$；
- 高斯过程回归误差，$\mathrm{E}_{gpr} = \mathrm{E}_p - \mathrm{E}_{rb}$。

在节点级，这些误差对应于成对节点之间的距离。单个解的准确率可通过网格节点上的平均误差（AE）或最大误差（ME）来评估：例如，对于降阶误差，我们得到 AE_{rb} 和 ME_{rb}。全局变量可通过对测试数据集上的这些值取平均来计算：例如，对于降阶误差，我们将 AE_{rb} 视为测试解中 AE_{rb} 的平均值，将 ME_{rb} 视为测试解中 ME_{rb} 的平均值。

3. 结果

3.1. 二元分类：部署成功预测

本节将介绍 分类模型的结果。为研究数据集大小对预测能力 机器学习模型的性能，我们首先创建了一个包含 $N_s = 900$ 个仿真的数据集，然后通过使用 g

N_s	$N_{success}$	$N_{failure}$	$N_{train,class}$	$N_{test,class}$	$N_{train,regr}$	$N_{train,regr}$
150	97	53	50	100	47	50
300	196	104	200	100	146	50
600	396	204	500	100	346	50
900	605	295	800	100	555	50

表1： 二元分类器（$N_{train、class}$, $N_{test、class}$）和基于机器学习的降阶模型（$N_{train、regr}$, $N_{test、regr}$）的训练样本数和测试样本数。

来自 `subLHCoptim()` 函数（该函数属于 LatinHypercubeSampling.jl 软件包），我们定义了三个最优子空间，并采用了 $N_s = \{150,300,600\}$。遵循与 [39], 类似的方法，我们为测试四个不同的数据集，选取了固定数量的样本（N_{test}= 100）。表 1报告了用于机器学习训练和测试的样本数量。训练前对输入数据进行了标准化。

四种不同数据集大小对应的指标值列于表2中。对于 $N_{train} = 200$，不同分类模型的混淆矩阵见图5。使用 $N_{train} = 200$时，NB、人工神经网络和支持向量机模型的 AUC 均大于 96%。扩充训练数据集后，所有分类模型的性能均有所提升。总体而言，逻辑回归模型的表现最差：无论数据集大小如何，其指标均低于 90%。精确率尤其低（最高值为 = 32.3%）：如图5**A**所示，该模型主要无法正确预测负例（故障）。对于最小的数据集，支持向量机模型表现最佳，其准确率、特异度和精确率均大于 90%。在考虑 $N_{train} = 500$时，支持向量机和人工神经网络模型的所有验证指标均大于 90%。K近邻、决策树和朴素贝叶斯模型在准确率和特异度方面也表现良好（介于 83% 和 96% 之间）；然而，与支持向量机和人工神经网络相比，它们的精确率较低，因而 F1分数也较低（最高为 83.3%）。人工神经网络和支持向量机模型的特异度（97%）、精确率（93.9%）和 F1分数（92%）最高；而灵敏度最高的是朴素贝叶斯模型（95.8%）。在考虑最大数据集 $N_{train} = 800$时，仅观察到少数指标有所改善，例如朴素贝叶斯模型的特异度从 95.8% 提升至 100%。然而，大多数指标趋于稳定，甚至有所下降：模型很可能出现了过拟合。分类结果与使用 $\boldsymbol{\mu}_B$ 作为预测因子有关；使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 进行分类并未观察到性能提升。

N_s	分类模型	准确率	灵敏度	特异度	精确率	F1分数
150	逻辑回归	75.0%	87.5%	73.9%	22.5%	35.8%
	K近邻	86.0%	81.4%	87.6%	70.9%	75.8%
	决策树	89.0%	100%*	86.2%	64.5%	78.4%
	朴素贝叶斯	89.0%	45.4%	70.5%	30.3%	36.3%
	ANN	80.0%	61.7%	96.2%	93.5%*	74.3%
	SVM*	93.0%*	85.2%	96.9%*	93.5%*	89.2%*
300	逻辑回归	67.0%	45.4%	73.0%	32.2%	37.7%
	K近邻	80%	66.6%	86.5%	70.9%	68.7%
	决策树	87%	82.1%*	88.8%	74.1%	77.9%
	朴素贝叶斯	87%	76.4%	92.4%	83.8%	80.0%
	ANN*	91.0%*	78.9%	98.3%*	96.7%*	86.9%*
	SVM	90.0%	80.0%	95.3%	90.3%	84.8%
600	逻辑回归	74%	77.7%	73.6%	22.5%	35.0%
	K近邻	83.0%	73.3%	87.1%	70.9%	72.1%
	决策树	89.0%	88.4%	88.4%	74.1%	80.7%
	朴素贝叶斯	91.0%	95.8%*	89.4%	74.1%	83.6%
	ANN*	95.0%*	90.6%	97.0%*	93.5%*	92.0%*
	SVM*	95.0%*	90.6%	97.0%*	93.5%*	92.0%*
900	逻辑回归	75.0%	87.5%	73.9%	12.1%	19.5%
	K近邻	86.0%	81.4%	87.6%	70.9%	75.8%
	决策树	89.0%	83.3%	91.4%	80.6%	81.9%
	朴素贝叶斯	89.0%	100.0%*	86.2%	64.5%	78.4%
	ANN*	94.0%*	87.8%	97.0%*	93.5%*	90.6%*
	SVM	93%	85.2%	96.9%	93.5%*	89.2%

表2： 分类器性能分析。六种机器学习模型针对 N_{train} ={50,200,500,800} 的评估指标。每个类别的最佳结果均已突出显示。

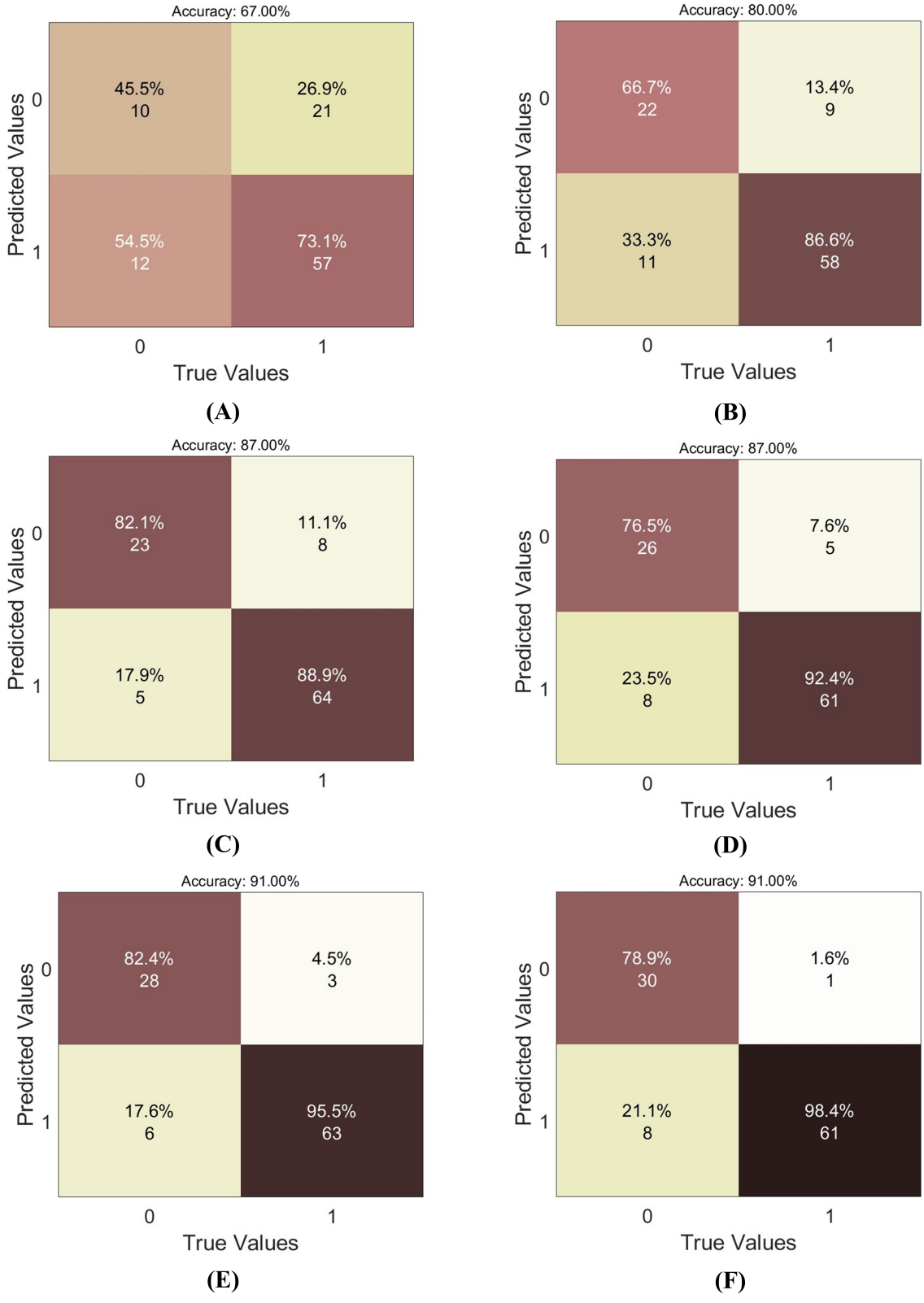


图 5： 分类器性能分析。 $N_{train} = 200$ 的六种机器学习模型的混淆矩阵。**(A)**逻辑回归。**(B)**K近邻。**(C)** 朴素贝叶斯。**(D)** 决策树。**(E)** 人工神经网络。**(F)** 支持向量机。

3.2. 降阶建模：支架部署构型的预测

本节介绍基于机器学习的降阶模型的结果。与分类模型的处理方法类似，我们首先采用一个包含 $N_s = 900$ 次仿真的数据集，然后定义了三个最优子空间，分别包含 $N_s = \{150,300,\ 600\}$。接着，我们仅使用成功的部署仿真构建了四个数据集，分别包含 $N_{success} = \{97,\ 196,396,\ 555\}$，并选取固定数量的样本（$N_{test} = 50$）用于测试。表 1报告了用于基于机器学习的降阶模型训练和测试的样本数量。训练前对输入和输出数据进行了标准化。评估预测误差时，考虑了目前用于颅内动脉瘤检测和治疗的成像技术的空间分辨率 [60, 61]：磁共振血管成像（MRA）$= 0$为0.6–1毫米，计算机断层血管造影（CTA）$= 0$为0.4–0.7毫米，数字减影血管造影（DSA）$= 0$为0.2毫米，三维旋转血管造影（3DRA）$= 0$为0.15毫米。

如第2.3节所述，降阶基的数量 L 是根据快照矩阵的奇异值确定的。图6**A**展示了奇异值累积和相对于其总和的归一化结果：该图显示了前 L个奇异值在 $N_{train} = \{47,146,346,555\}$条件下保留的总方差比例。如表3所示，无论数据集大小如何，前 4 个降阶基都涵盖了输入数据中 90% 以上的总方差（$\varepsilon_{POD} = 0.1$），前 10 个降阶基则涵盖了 99% 以上（$\varepsilon_{POD} = 0.01$）。如图6**B**所示，采用超过 15 个降阶基对预测精度的提升并不显著：事实上，对于 N_{train}的任意取值，随着纳入的降阶基增多，平均降阶误差都会趋近于 0，而平均预测误差和高斯过程回归误差则趋于稳定，在 $L = 15$附近形成平台。因此，在后续分析中采用 $L = 15$ 。

目前所呈现的结果与使用 $\boldsymbol{\mu}_B$ 作为预测因子有关。如表4所报告并在图7中所示，改用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 后，预测误差显著降低：使用 $N_{cl} = 3$ 时，平均预测误差比使用 $\boldsymbol{\mu}_B$ 低5.65×，而最大预测误差低2.84× 。随着所考虑点数 N_{cl} 的增加，预测误差进一步略有下降：使用 $N_{cl} = 5$ 时，平均值和最大值分别低1.11× 和1.03×；使用 $N_{cl} = 8$ 时，分别低1.08× 和1.04× 。使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 时，平均预测误差大于三维旋转血管造影空间分辨率的测试样本比例为零；最大预测误差大于计算机断层血管成像空间分辨率的测试样本数同样为零。最大预测误差大于三维旋转血管造影空间分辨率的测试样本比例，则从使用 $\boldsymbol{\mu}_B$ 时的64%降至使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 时的10%。使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 所带来的改进不仅体现在测试数据集内预测误差方差的降低，也体现在单个测试解中：对与高斯过程回归输出相对应的多元正态分布进行采样时，可以观察到这一点，具体解释见2.3.2节。在图9中，我们报告了从高斯过程回归预测的支架网格第一个节点位移分布中抽取的100个点的位置。使用$\boldsymbol{\mu}_B$ 时，这些点的分布更为分散；而使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 时，它们则高度集中在节点均值周围，这意味着使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 时预测位移值的不确定性低于使用 $\boldsymbol{\mu}_B$ 时。

最后，我们分析了训练样本数量对基于机器学习的降阶模型性能的影响。考 $N_{train} = 47$ 相较于 $N_{train} = 146$，平均预测误差低 1.92× ，最大预测误差低 1.84× 。与采用$N_{train} = 346$ 而非 $N_{train} = 146$相比，平均预测误差和最大预测误差分别略微降低 1.14× 和 1.04×。从图8 可以看出，进一步扩大训练数据集后，预测误差会收敛至采用 $N_{train} = 346$ 时达到的值。

4. 讨论

在本研究中，我们提出了一种快速、准确的编织支架部署分析方法。该方法包含一个两步工作流：首先，利用有限元仿真训练机器学习模型，以对成功和失败的仿真进行分类；随后，训练基于机器学习的降阶模型，以近似支架在所研究血管中的部署构型。我们通过研究几何参数与手术参数组合对支架部署仿真结果的影响，对该方法进行了验证。为此，我们采用了一个参数化理想模型，该模型描述了患有囊状动脉瘤的颅内动脉。所提出的模型基于先前的研究，旨在开发一个优化框架，用于对采用梁单元离散化的线状结构与刚性表面之间的摩擦接触相互作用进行数值仿真。在此基础上，我们提出了一种高效的编织支架部署仿真方法，从而缩短了机器学习训练所需仿真的计算时间。采用第 2.1 节提出的方案，支架部署有限元仿真的平均计算时间为 15 分钟。因此，我们能够在可接受的时间内构建大型数据集。例如，本分析中使用的最大数据集 $N_s = 900$ 可在 20 个集群节点上于 12 小时内创建，每个节点配备 2.6 GHz 英特尔至强 Gold 6132 处理器和 6 GB 内存。

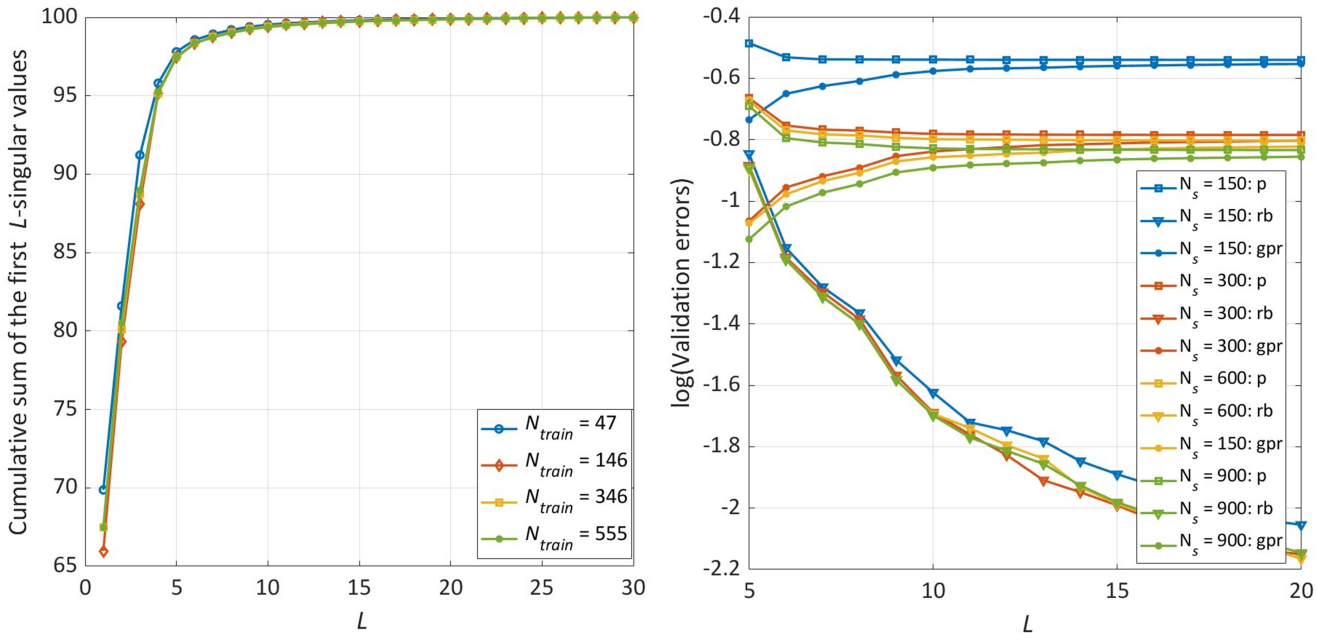


图6： 对降阶基数量（L）和训练数据库大小（N_{train}）进行的敏感性分析。结果采用贝塞尔曲线参数（$\boldsymbol{\mu}_B$）作为高斯过程回归预测因子得到。（**A**）快照矩阵（$\boldsymbol{S}$）的方差中由奇异值分解的前 L 个分量解释的百分比。（**B**）~~AE~~$_{rb}$、AE$_p$ 和AE$_{gpr}$在对数尺度下的变化。

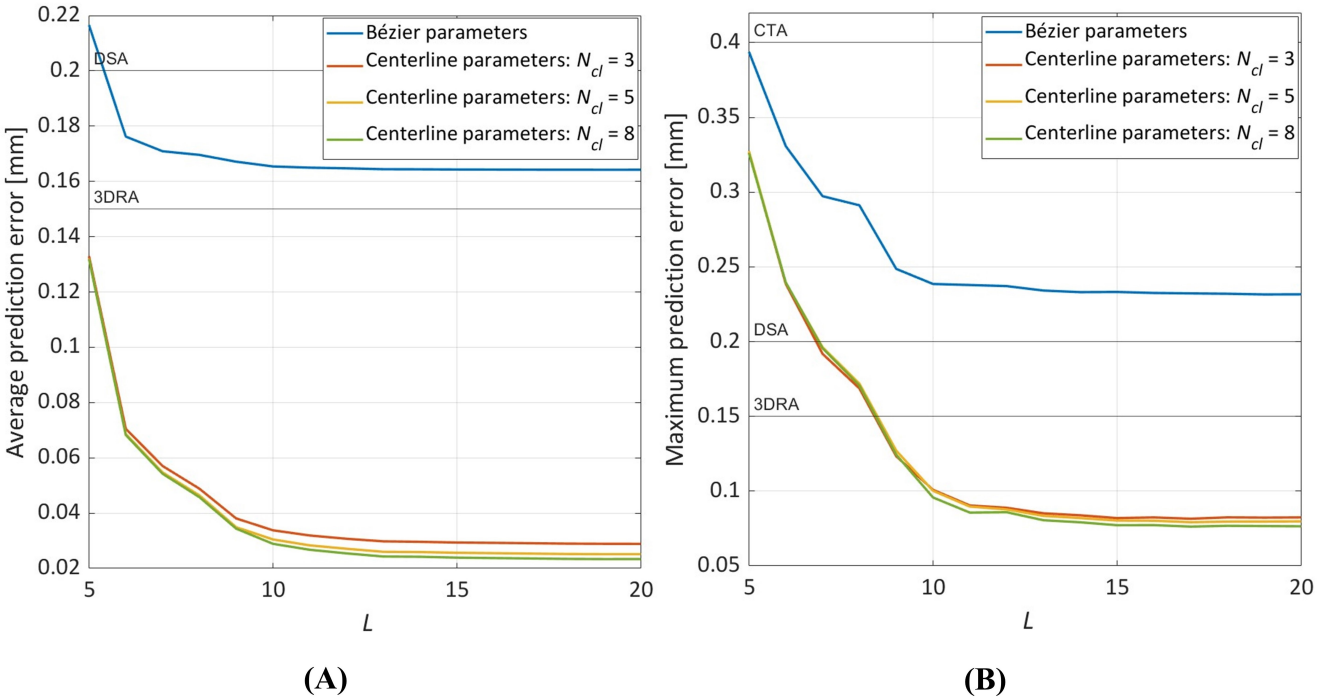
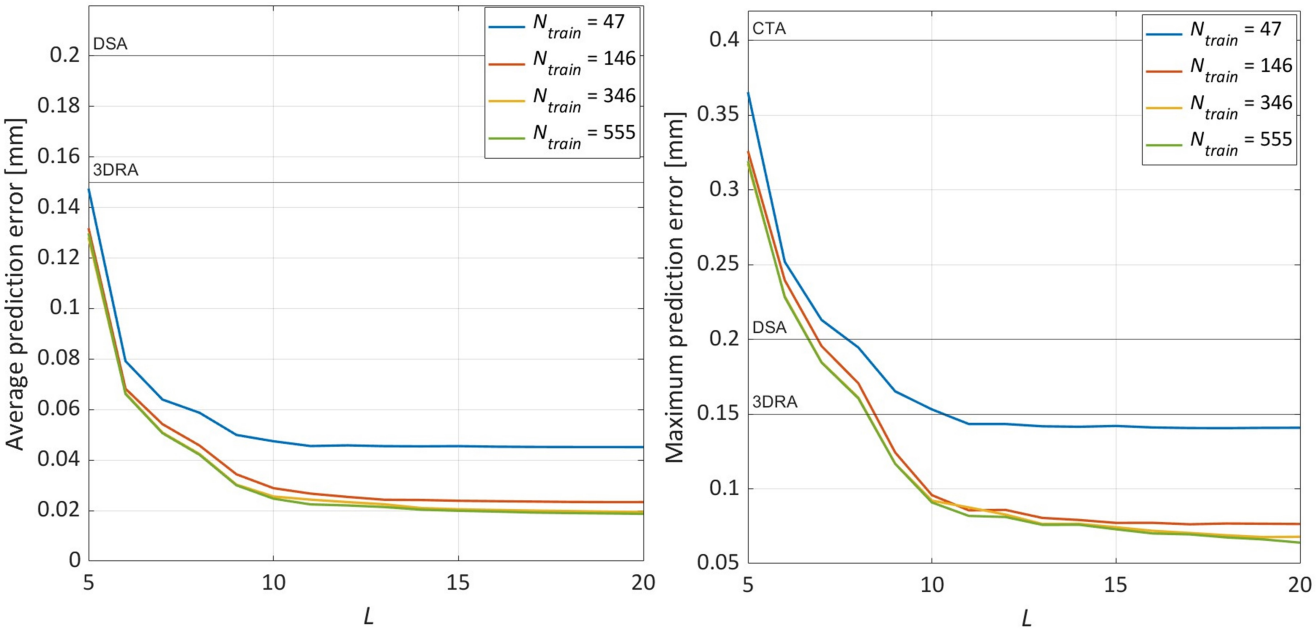


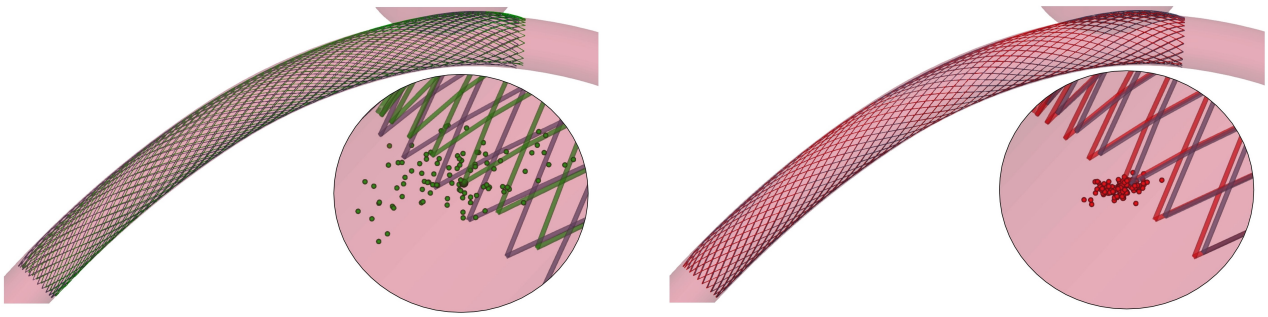
图7： 对用作高斯过程回归预测因子的参数进行的敏感性分析：贝塞尔曲线参数（$\boldsymbol{\mu}_B$）与中心线点参数（$\boldsymbol{\mu}_{cl}$）的比较。结果采用 $L = 15$ 和 $N_{train} = 146$得到。（**A**）AE$_p$的变化。（**B**）ME$_p$的变化。

我们在不同规模的数据集上训练了六种机器学习模型，并获得了准确率为 80%–91% 的分类器；即使数据集相对较小（$N_{train} = 146$），它们也能准确预测部署结果。将数据集规模扩大至$N_{train} = 346$，并使用支持向量机和神经网络模型后，我们实现了二元分类，所有验证指标均达到 89%–97%。该模型所面向的手术需求要求我们优先容忍假阴性的出现，而不是



(A) **(B)**

图8： 针对训练数据库规模的敏感性分析（N_{train}）。结果基于 $L = 15$ 获得，并使用中心线点参数（$\boldsymbol{\mu}_{cl}$，含 $N_{cl} = 8$）作为高斯过程回归预测因子。（**A**）AE$_p$的变化。（**B**）ME$_p$的变化。



(A) **(B)**

图9： 测试数据集中的两个示例：重点展示在高斯过程回归预测的多元正态分布内抽取的100个点，这些点对应支架网格第一个节点的位移。（**A**）使用 $\boldsymbol{\mu}_B$ 作为预测因子的高保真（黑色）和预测（绿色）解。（**B**）使用 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$ 作为预测因子的高保真（黑色）和预测（红色）解。

假阳性，即我们宁愿将一次成功的模拟误判为失败，也不愿反过来。因此，为了尽量减少假阳性的出现，应优先选择特异度高的模型。因此，对于 $N_{train} = 47$，我们会选择支持向量机模型；对于 $N_{train} = 146$，则选择人工神经网络模型。如图10所示，假阴性误分类可能是因为在这些情况下，支架处于一种“边界”状态，其一端恰好落在动脉瘤颈之后。若引入可变形壁，这些情况很可能会归为“失败”。部分假阳性也观察到类似情况，即支架的一端落在动脉瘤颈之前、位于动脉瘤内，但并未找到能够清楚解释所有假阳性的原因。

对于回归，采用POD算法提取降阶基，并使用高斯过程回归模型建立仿真参数值与投影系数之间的映射。结果表明，高斯过程回归模型受到输入参数的显著影响：在保持输出数据不变、将预测因子从$\boldsymbol{\mu}_B$ 改为 $\boldsymbol{\mu}_{cl}$的情况下，平均预测误差可降低超过 5×。这种误差降低可归因于这些替代预测因子与输出变量之间的非线性关系较弱。我们开展了

N_{train}	ε_{POD}	L	$\overline{\text{AE}_{rb}}$±SD [mm]	$\overline{\text{ME}_{rb}}$±SD [mm]	$\overline{\text{AE}_{p}}$±SD [mm]	$\overline{\text{ME}_{p}}$±SD [mm]
47	0.1	3	0.730±0.588	1.797±1.797	0.813±0.628	1.842±1.343
	0.01	8	0.043±0.025	0.171±0.097	0.289±0.238	0.460±0.324
	0.001	25	0.008±0.004	0.036±0.025	0.288±0.239	0.437±0.325
146	0.1	4	0.271±0.168	0.728±0.483	0.331±0.189	0.757±0.429
	0.01	9	0.027±0.016	0.111±0.065	0.167±0.119	0.249±0.146
	0.001	58	0.003±0.002	0.014±0.008	0.164±0.120	0.232±0.147
346	0.1	4	0.271±0.166	0.723±0.469	0.329±0.182	0.746±0.413
	0.01	10	0.020±0.010	0.078±0.042	0.159±0.119	0.217±0.130
	0.001	99	0.002±0.001	0.008±0.004	0.157±0.120	0.198±0.131
555	0.1	4	0.270±0.161	0.724±0.463	0.323±0.172	0.744±0.403
	0.01	10	0.020±0.010	0.077±0.041	0.148±0.111	0.204±0.121
	0.001	124	0.001±0.001	0.006±0.003	0.146±0.112	0.181±0.121

表3： 考虑不同容差（ε_{POD}）、降阶基数量（L）和训练数据库规模（N_{train}）时，基于机器学习的降阶模型性能分析。结果使用贝塞尔曲线参数（$\boldsymbol{\mu}_B$）作为高斯过程回归预测因子获得。

预测因子	$\overline{\text{AE}_{p}}$±SD [mm]	$N_{\text{AE}_p>0.15\text{毫米}=3\text{DRA}}$	$\overline{\text{ME}_{p}}$±SD [mm]	$N_{\text{ME}_p>0.15\text{毫米}=3\text{DRA}}$	$N_{\text{ME}_p>0.4\text{毫米}=\text{CA}}$
B´ezier	0.164±0.120	26(52%)	0.233±0.147	32(64%)	4(8%)
$N_{cl}=3$	0.029±0.020	0(0%)	0.082±0.058	5(10%)	0(0%)
$N_{cl}=5$	0.026±0.017	0(0%)	0.080±0.059	5(10%)	0(0%)
$N_{cl}=8$	0.024±0.017	0(0%)	0.077±0.058	6(12%)	0(0%)

表4： 比较以贝塞尔曲线参数（$\boldsymbol{\mu}_B$）和中心线点参数（$\boldsymbol{\mu}_{cl}$）作为高斯过程回归预测因子的基于机器学习的降阶模型性能分析。结果通过 $L=15$ 和 $N_{train}=146$获得。

针对问题降维时应纳入的降阶基数量以及训练数据集大小进行了敏感性分析。结果表明，当降阶基数量较少（15个）时，预测误差便趋于稳定。另一方面，使用47个训练样本时，我们能够将最大预测误差控制在略低于三维旋转血管造影空间分辨率的水平；使用147个训练样本时，则能将其降至0.07毫米，即三维旋转血管造影空间分辨率的一半。在我们的分析中，平均预测误差始终不超过0.15毫米（三维旋转血管造影空间分辨率），最大预测误差始终不超过0.4毫米（计算机断层血管成像空间分辨率），且在90%的测试案例中低于0.15毫米（三维旋转血管造影空间分辨率）。观察图11所示的测试示例可以发现，预测误差分布均匀，支架构型能够很好地适应血管曲率。根据这些结果，我们可以得出结论：0.01–0.05毫米范围内的预测误差可得到与高保真结果非常接近的近似支架；即使数据集相对较小（47次仿真），也能达到这一误差水平。在预测误差较大的情况中（图11**C** 和11**E**），最大差异出现在支架末端。这些情况对应于同一种“边界”情形，该情形也会影响分类模型：支架的一个末端恰好落在动脉瘤颈之后。如上所述，在这种情况下，若引入可变形壁，支架很可能会在动脉瘤腔内滑动，导致部署失败。由于离线阶段（降阶基提取和回归模型训练）与在线阶段（预测新解）完全解耦，计算成本从采用所提出的有限元仿真方案时所需的 ∼15 分钟降至几毫秒。

此处展示的结果令人鼓舞，因为它们表明，机器学习和降阶建模技术能够处理支架释放问题中的非线性，并准确地模拟其结果。然而，这种方法仍存在一些需要解决的局限性。首先，主要局限在于一次只能考虑一种支架几何形状：实际上，支架网格的变化会导致自由度数量不同，从而产生无法在快照矩阵 **S** 中组装的位移向量。因此，若要考虑不同尺寸的支架，就需要分别构建降阶模型。不过，血流导向装置的尺寸种类有限，因此构建不同的模型或许可行。此外，本项目采用的 IGPR 方法无法对输出之间的相关性进行建模；未来可考虑采用多输出高斯过程回归方法 [62]。其次，此处所考虑的支架和血管有限元模型都基于一些简化假设：具体而言，对血管采用刚性壁假设，对支架的丝材连接处采用基于罚函数的约束。可变形模型以及更通用的梁-

梁接触公式将增加高保真仿真的计算成本，提高所建模问题的复杂程度，因此需要更大的训练数据集。此外，可变形壁很可能会改变支架释放模拟的结果，尤其是在上文讨论的“边界”情形下。最后，本研究采用的血管几何形状与患者特异性几何形状相差较大。引入更多参数将需要更多基函数（因此也需要更大的训练数据集），才能准确预测解。因此，应探索高效的训练数据集构建算法，尽可能缩小数据集规模，同时也应考虑其他用于回归的机器学习算法，例如神经网络。

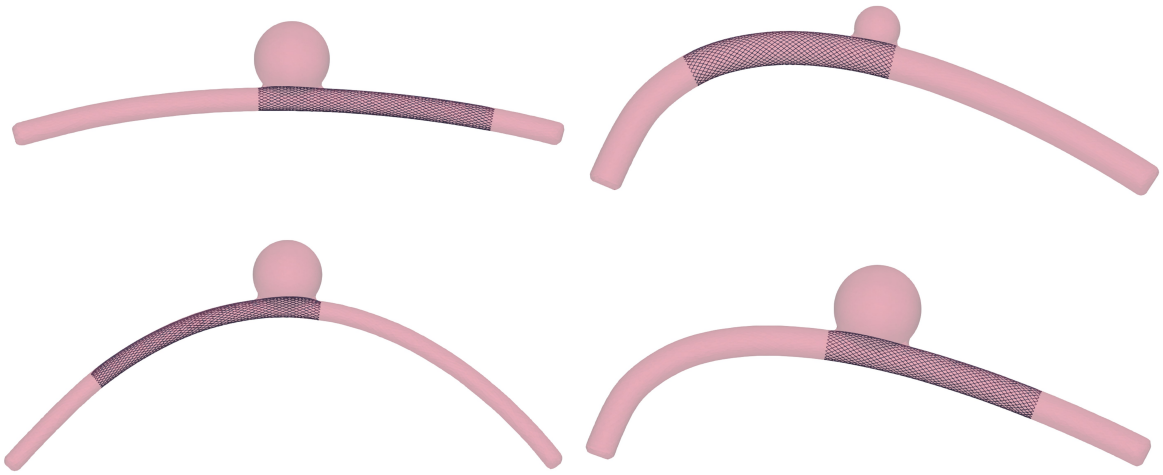


图10： 测试数据集中四个被错误分类为假负例的示例。

5. 结论

本研究首次尝试将有限元仿真、机器学习和降阶建模结合起来，用于分析编织支架部署。研究通过一个可控制一组几何特征的理想化血管模型，验证了该方法的可行性。在创建高保真数据集时，也考虑了手术决策。该两步工作流可对部署条件进行分类，准确率最高可达95%；还能实时预测支架部署构型，其最大预测误差始终低于计算机断层血管造影的空间分辨率（0.4毫米），并且在90%的测试案例中低于三维旋转血管造影的空间分辨率（0.15毫米）。尽管血管形状经过简化，且假设血管壁为刚性，本研究仍能代表临床场景，并且无需修改即可扩展至更贴近实际的应用。目前的工作重点是了解完整描述患者特异性模型所需的参数数量。为在降阶模型中表示此类几何形状，我们将采用统计形状模型，而非本文所述的参数化方法。未来，临床医生可在颅内动脉瘤手术前及术中使用类似的计算工具，排除可能导致部署失败的条件，根据部署位置直观查看支架构型，并检查所选器械是否覆盖一条或多条侧支。

6. 资助与致谢

本项目在MeDiTaTe项目框架内开展，该项目获得欧盟地平线2020研究与创新计划资助（资助协议859836）。Miquel Aguirre的工作部分由西班牙大学部资助、在加泰罗尼亚理工大学设立的玛丽亚·萨姆布拉诺研究奖学金提供支持。

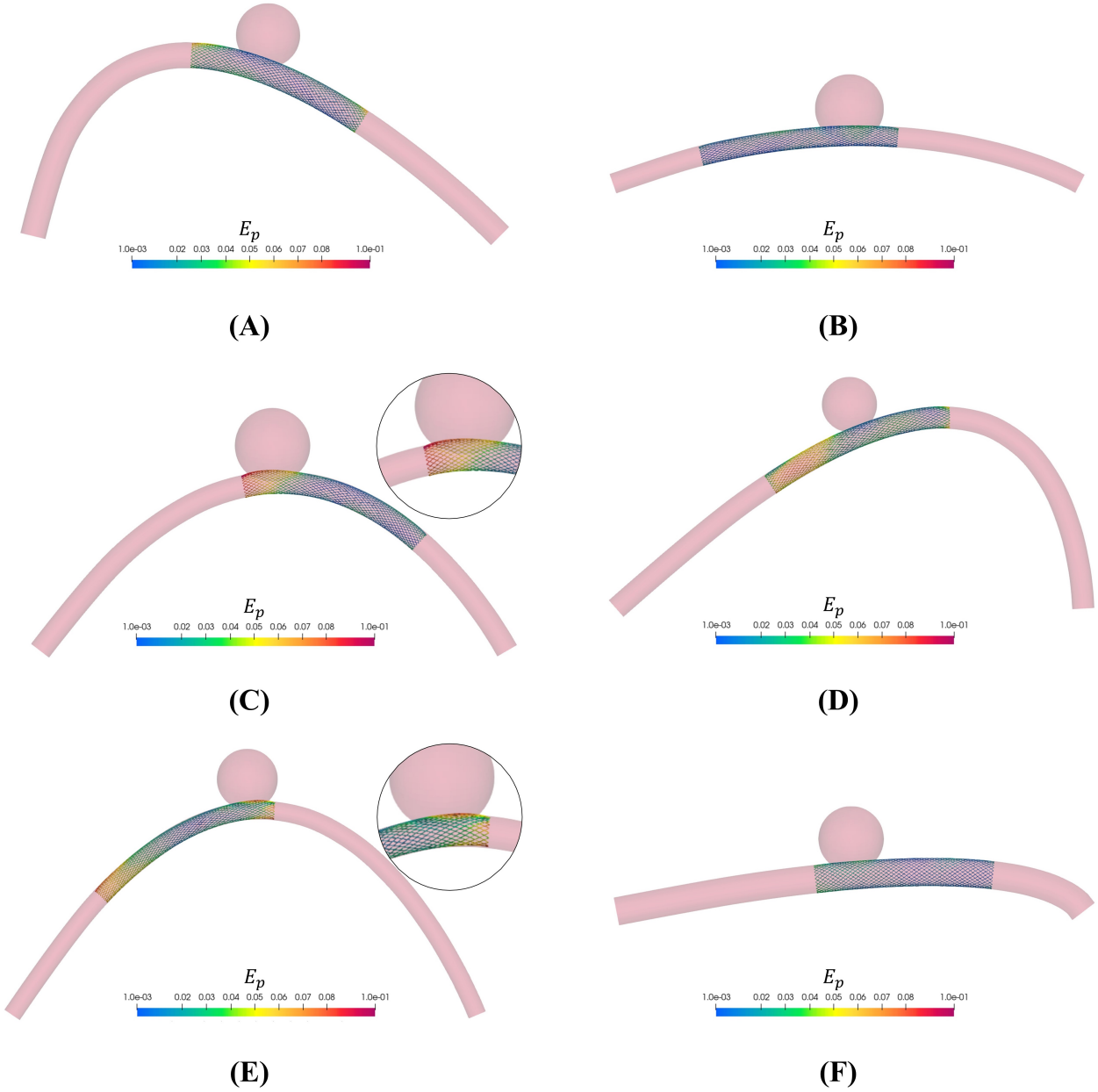


图11： 测试数据集中的六个示例。高保真解与预测解之间的节点绝对误差 E_p 以彩色映射图显示。作为对比尺度，我们报告了每个解对应的血管和动脉瘤直径。丝材厚度经过放大（2×），以便更清晰地观察支架。**(A)** $D_v = 3.3$ 毫米，$D_a = 8.24$ 毫米。**(B)** $D_v = 2.62$ 毫米，$D_a = 8.84$ 毫米。**(C)** $D_v = 2.9$ 毫米，$D_a = 9.68$ 毫米。**(D)** $D_v = 2.84$ 毫米，$D_a = 7.08$ 毫米。**(E)**$D_v = 2.38$ 毫米，$D_a = 7.86$ 毫米。**(F)** $D_v = 3.62$ 毫米，$D_a = 8.4$ 毫米。

参考文献

[1] G. J. Rinkel, M. Djibuti, A. Algra, J. Van Gijn, 颅内动脉瘤的患病率及破裂风险：系统综述, Stroke 29 (1) (1998) 251–256. doi:10.1161/01.STR.29.1.251. [2] M. H. Vlak, A. Algra, R. Brandenburg, G. J. Rinkel, 未破裂颅内动脉瘤的患病率，重点关注性别、年龄、合并症、国家和时间段：系统综述和荟萃分析, The Lancet Neurology 10 (7) (2011) 626–636. http://dx.doi.org/10.1016/S1474-4422(11)70109-0 doi:10.1016/S1474-4422(11)70109-0. 网址[3] D. Wiebers, 未破裂颅内动脉瘤：自然病程、临床结局以及外科和血管内治疗的风险, Lancet 362 (Jul 12) (2003) 103–110. [4] M. Rahman, J. Smietana, E. Hauck, B. Hoh, N. Hopkins, A. Siddiqui, E. I. Levy, H. Meng, J. Mocco, 尺寸比与颅内动脉瘤破裂状态相关：一项前瞻性研究, Stroke 41 (5) (2010) 916–920. doi:10.1161/STROKEAHA.109.574244. [5] A. Liu, J. Huang, 颅内动脉瘤的治疗：夹闭术与弹簧圈栓塞, Current Cardiology Reports 17 (9) (2015). doi:10.1007/s11886-015-0628-2.

[6] L. Pierot, 《颅内动脉瘤治疗中的血流导向装置：现状如何？》, 神经放射学杂志 38 (1) (2011) 40–46. doi:10.1016/j.neurad.2010.12.002. [7] P. I. Durso, G. Lanzino, H. J. Cloft, D. F. Kallmes, 《颅内动脉瘤的血流导向治疗：综述》, Stroke 42 (8) (2011) 2363–2368. doi:10.1161/STROKEAHA.111.620328.[8] C. Karmonik, C. M. Strother, X. Chen, F. Deinzer, R. Klucznik, M. E. Mawad, 《借助虚拟母动脉重建进行颅内动脉瘤支架辅助弹簧圈栓塞》, 美国神经放射学杂志 26 (9) (2005) 2368–2370. [9] F. Auricchio, M. Conti, M. De Beule, G. De Santis, B. Verhegghe, 《颈动脉支架置入模拟：从患者特异性影像到有限元分析》, 医学工程与物理 33 (3) (2011) 281–289. doi:10.1016/j.medengphy.2010.10.011. [10] A. Zaccaria, F. Migliavacca, G. Pennati, L. Petrini, 《编织支架建模：几何重建和接触策略的比较》, 生物力学杂志 107 (2020) 109841. doi:10.1016/j.jbiomech.2020.109841. [11] C. G. McKenna, T. J. Vaughan, 《裸支架和聚合物覆膜自膨式编织金属丝支架设计参数的有限元研究》, 生物医学材料力学行为杂志 115 2020 2021 104305 doi:10.1016/j.jmbbm.2020.104305 (December) ( ) . . [12] S. Shiozaki, T. Otani, S. Fujimura, H. Takao, S. Wada, 《编织支架释放的计算建模：阐释支架压扁机制》, 生物医学工程数值方法国际期刊 (March) (2020) 1–14. doi:10.1002/cnm.3335.[13] D. Ma, G. F. Dargush, S. K. Natarajan, E. I. Levy, A. H. Siddiqui, H. Meng, 《患者特异性颅内动脉瘤中神经血管血流导向装置释放和机械扩张的计算机建模》, 生物力学杂志 45 (13) (2012) 2256–2263. doi:10.1016/j.jbiomech.2012.06.013. [14] W. Fu, Q. Xia, 《血流导向装置与颅内动脉瘤母动脉的相互作用：一项计算研究》, 应用仿生学与生物力学 2017 (2017). doi:10.1155/2017/3751202. [15] D. Ma, T. M. Dumont, H. Kosukegawa, M. Ohta, X. Yang, A. H. Siddiqui, H. Meng, 《颅内动脉瘤血流导向治疗的高保真虚拟支架置入（HiFiVS）：体外与计算机模拟研究》, 生物医学工程年鉴 41 (10) (2013) 2143–2156. doi:10.1007/s10439-013-0808-4.[16] I. Larrabide, M. Kim, L. Augsburger, M. C. Villa-Uriol, D. R¨ufenacht, A. F. Frangi, 《自膨式支架的快速虚拟释放：方法及其在颅内动脉瘤支架置入中的体外评估》, 医学图像分析 16 (3) (2012) 721–730. doi:10.1016/j.media.2010.04.009. [17] J. Zhong, Y. Long, H. Yan, Q. Meng, J. Zhao, Y. Zhang, X. Yang, H. Li, 《采用主动轮廓模型快速虚拟置入颅内动脉瘤支架》, Scientific Reports 6 (January) (2016) 1–9. doi:10.1038/srep21724. [18] K. Spranger, C. Capelli, G. M. Bosi, S. Schievano, Y. Ventikos, 《采用有限元分析和遗传算法对实时虚拟支架置入算法进行比较与校准》, 计算力学与工程方法 293 (2015) 462–480. doi:10.1016/j.cma.2015.03.022. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2015.03.022 [19] S. Niroomandi, I. Alfaro, D. Gonzalez, S. Niroomandi, I. Alfaro, D. Gonzalez, F. Chinesta, R. Time, 《通过降阶建模和扩展有限元技术实现手术实时模拟》引用此版本：(2017) 0–15. [20] A. Mena, D. Bel, I. Alfaro, D. Gonz´alez, E. Cueto, F. Chinesta, 《构建基于模型降阶的胰腺手术模拟器》, 工程科学高级建模与仿真 2 (1) (2015) 1–16. doi:10.1186/s40323-015-0049-1. [21] S. Niroomandi, I. Alfaro, E. Cueto, F. Chinesta, 《基于降阶模型的软组织实时仿真中对大变形的考量》, 生物医学中的计算方法与程序 105 (1) (2012) 1–12. doi:10.1016/j.cmpb.2010.06.012. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.cmpb.2010.06.012 [22] N. D. Santo, A. Manzoni, S. Pagani, 《降阶建模在心血管系统中的应用》, Applications (2020) 251–278doi:10.1515/9783110499001-008.[23] J. S. Hesthaven, G. Rozza, B. Stamm, 《参数化偏微分方程的认证降阶基方法》, no. December 2017, 2015. doi:10.1007/978-3-319-22470-1. [24] A. Quarteroni, A. Manzoni, F. Negri, 《偏微分方程的降阶基方法：导论》, 2015 doi:..10.1007/978-3-319-15431-2 [25] M. Girfoglio, F. Ballarin, G. Infantino, F. Nicol´o, A. Montalto, G. Rozza, R. Scrofani, M. Comisso, F. Musumeci, 《左心室辅助装置存在时患者特异性主动脉血流的非侵入式PODI-ROM》, 医学工程与物理 107 (July 2021) (2022) 16–23. doi:10.1016/j.medengphy.2022.103849. [26] G. H. Chang, C. M. Schirmer, Y. Modarres-Sadeghi, 《基于本征正交分解的腹主动脉瘤壁面剪切应力降阶模型》, 生物力学杂志 54 (2017) 33–43. doi:10.1016/j.jbiomech.2017.01.035. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2017.01.035 [27] S. Bridio, G. Luraghi, F. Migliavacca, S. Pant, A. Garcıa-Gonz´alez, J. F. Rodriguez Matas, 《用于快速估算取栓手术过程中血栓应变的低维代理模型》, 生物医学材料力学行为杂志, 修订中 137 (June 2022) (2022). doi:10.1016/j.jmbbm.2022.105577. [28] M. E. Biancolini, P. P. Valentini, 《通过交互式雕刻、网格变形和力反馈进行虚拟人体骨骼建模》, 交互式设计与制造国际期刊 (IJIDeM) 12 (4) (2018) 1223–1234. doi:10.1007/s12008-018-0487-3. URL https://doi.org/10.1007/s12008-018-0487-3 [29] E. Kardampiki, E. Vignali, D. Haxhiademi, D. Federici, E. Ferrante, S. Porziani, A. Chiappa, C. Groth, M. Cioffi, M. E. Biancolini, E. Costa, S. Celi, 《改良Blalock–Taussig分流术形态的血流动力学效应：基于降阶建模的计算分析》, Electronics (Switzerland) 11 (13) (2022). doi:10.3390/electronics11131930.[30] F. Ballarin, 《冠状动脉旁路移植物患者特异性血流动力学的降阶模型》(2015)。URL http://hdl.handle.net/10589/102804 [31] M. E. Biancolini, K. Capellini, E. Costa, C. Groth, S. Celi, 《借助径向基函数网格变形和降阶模型快速交互式计算流体力学血流动力学评估：升主动脉瘤建模案例》, 交互式设计与制造国际期刊 14 (4) (2020) 1227–1238. doi:10.1007/s12008-020-00694-5. URL https://doi.org/10.1007/s12008-020-00694-5 [32] S. Buoso, T. Joyce, S. Kozerke, 《利用参数化物理信息神经网络对左心室生物物理模型进行个体化》, 医学图像分析 71 (2021) 102066. doi:10.1016/j.media.2021.102066. URL https://doi.org/10.1016/j.media.2021.102066 [33] N. Lauzeral, D. Borzacchiello, M. Kugler, D. George, Y. R´emond, A. Hostettler, F. Chinesta, 《用于计算医学应用中人体肝脏患者特异性力学模型构建的模型降阶方法》, 生物医学中的计算方法与程序 170 (2019) 95–106. doi:10.1016/j.cmpb.2019.01.003. URL https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2019.01.003

[34] F. Cosentino, G. M. Raffa, G. Gentile, V. Agnese, D. Bellavia, M. Pilato, S. Pasta, 《升主动脉瘤的统计形状分析：形状与生物力学描述符之间的相关性》, Journal of Personalized Medicine 10 (2) (2020) 1–14. doi:10.3390/jpm10020028. [35] F. Ballarin, E. Faggiano, S. Ippolito, A. Manzoni, A. Quarteroni, G. Rozza, R. Scrofani, 《基于POD-Galerkin方法和血管形状参数化的冠状动脉旁路移植物患者特异性血流动力学快速仿真》, Journal of Computational Physics 315 (2016) 609–628. doi:10.1016/j.jcp.2016.03.065. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2016.03.065
[36] F. Ballarin, A. Manzoni, A. Quarteroni, G. Rozza, 《参数化定常不可压缩Navier-Stokes方程POD-Galerkin近似的Supremizer稳定化》, International Journal for Numerical Methods in Engineering 102 (5) (2015) 1136–1161. doi:10.1002/nme.4772. [37] M. Guo, J. S. Hesthaven, 《利用高斯过程回归进行非线性结构分析的降阶建模》, 计算力学与工程方法 341 (2018) 807–826. doi:10.1016/j.cma.2018.07.017. URL https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.07.017 [38] M. Guo, J. S. Hesthaven, 《时变问题的数据驱动降阶建模》, 计算力学与工程方法 345 (2019) 75–99. doi:10.1016/j.cma.2018.10.029. URL https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.10.029
[39] J. S. Hesthaven, S. Ubbiali, 《利用神经网络对非线性问题进行非侵入式降阶建模》, Journal of Computational Physics 363 (2018) 55–78. doi:10.1016/j.jcp.2018.02.037. URL https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.02.037
[40] S. Fresca, A. Manzoni, 《POD-DL-ROM：通过本征正交分解增强用于非线性参数化偏微分方程的基于深度学习的降阶模型》(January) (2021). arXiv:2101.11845. URL http://arxiv.org/abs/2101.11845 [41] W. Chen, Q. Wang, J. S. Hesthaven, C. Zhang, 《用于非线性问题降阶建模的物理信息机器学习》, Journal of Computational Physics 446 (2021) 110666. doi:10.1016/j.jcp.2021.110666. URL https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110666 [42] M. Liu, L. Liang, W. Sun, 《面向软生物组织的通用物理信息神经网络本构模型》, 计算力学与工程方法 372 (2020) 113402. doi:10.1016/j.cma.2020.113402. URL https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113402
[43] B. Bisighini, M. Aguirre, B. Pierrat, D. Perrin, S. Avril, 《EndoBeams.jl：用于心血管力学中梁-表面接触问题的Julia有限元软件包》, Advances in Engineering Software 171 2022 doi:10.1016/j.advengsoft.2022. (June) ( ). . 103173
[44] J. Zy-lkowski, G. Rosiak, D. Spinczyk, 《基于贝´ zier样条曲线的血管树几何形状半自动测量与描述：在脑动脉中的应用》, BioMedical Engineering Online 17 1 2018 1 21 doi:10.1186/s12938-018-0547-8 ( ) ( ) – . . URL https://doi.org/10.1186/s12938-018-0547-8
[45] M. Danu, C. I. Nita, A. Vizitiu, C. Suciu, L. M. Itu, 《基于深度学习的合成血管表面生成》, 2019 23 2019 2019 662 rd International Conference on System Theory, Control and Computing, ICSTCC - Proceedings ( ) – 667 doi:10.1109/ICSTCC.2019.8885576 .[46] VTK可视化工具包, [访问日期：2022-01-18]. URL https://vtk.org [47] M. Aguirre, S. Avril, 《利用离散符号距离场描述梁与刚性表面间摩擦接触动力学的隐式三维协转公式》, 计算力学与工程方法 371 2020 113275 doi:10.1016/j.cma. ( ) . . URL https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113275 2020.113275
[48] [2022 01 18] SignedDistanceField.jl, 访问日期：- - . URL https://gitlab.emse.fr/pierrat/SignedDistanceField.jl
[49] D. Perrin, P. Badel, L. Orgeas, C. Geindreau, A. Dumenil, J. N. Albertini, S. Avril, 《覆膜支架释放的患者特异性数值模拟：基于三个临床病例的验证》, 生物力学杂志 48 10 2015 1868 1875 doi:10.1016/j. ( ) ( ) – . . jbiomech.2015.04.031
[50] A. Hemmler, B. Lutz, C. Reeps, G. Kalender, M. W. Gee, 《腹主动脉瘤血管内修复的计算机模拟方法》, Biomechanics and Modeling in Mechanobiology 17 (4) (2018) 1139–1164. doi:10.1007/s10237-018-1020-0. URL https://doi.org/10.1007/s10237-018-1020-0 [51] S. D. Bock, F. Iannaccone, G. D. Santis, M. D. Beule, P. Mortier, B. Verhegghe, P. Segers, 《变幻莫测的血管：支架设计和血管几何形状对颅内动脉瘤支架释放力学的影响》, 生物力学杂志 45 (8) (2012) 1353–1359. doi:10.1016/j.jbiomech.2012.03.012. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2012.03.012
[52] MrUrq/LatinHypercubeSampling.jl：用于创建优化拉丁超立方抽样方案的Julia软件包, [访问日期：2022-10-12]. URL https://github.com/MrUrq/LatinHypercubeSampling.jl [53] J. Krejza, M. Arkuszewski, S. E. Kasner, J. Weigele, A. Ustymowicz, R. W. Hurst, B. L. Cucchiara, S. R. Messe, 《男女颈动脉直径及其与身体和颈部尺寸的关系》, Stroke 37 4 2006 1103 1105 doi:10.1161/01.STR. ( ) ( ) – . . 0000206440.48756.f7
[54] M. Li, Z. Jiang, H. Yu, T. Hong, 《尺寸比：预测脑动脉瘤破裂的形态学因素？》, The Canadian journal of neurological sciences. Le journal canadien des sciences neurologiques 40 3 2013 366 371 doi: ( ) ( ) – . . 10.1017/S0317167100014323
[55] A. Singh, N. Thakur, A. Sharma, 《监督机器学习算法综述》, Proceedings of the 10 2016 3 2016 2016 1310 1315th INDIACom; rd International Conference on Computing for Sustainable Global Development, INDIACom ( ) – . [56] S. Fresca, A. Manzoni, 《POD-DL-ROM：通过本征正交分解增强用于非线性参数化偏微分方程的基于深度学习的降阶模型》, 计算力学与工程方法 388 2022 114181 arXiv: ( ) . , 2101.11845 doi:10.1016/j.cma.2021.114181. URL https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114181 [57] S. Han, C. M. Schirmer, Y. Modarres-Sadeghi, 《患者特异性脑动脉瘤降阶模型：用于快速评估和治疗规划》, 生物力学杂志 103 (2020) 109653. doi:10.1016/j.jbiomech.2020.109653. URL https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2020.109653

[58] A. Chatterjee, 《本征正交分解导论》78 (7) (2000)。[59] A. Car
`
2018 71 112doi:10.1016/ e,
B978-0-12-811788-0.00004-4。
E. Camporeale, 《回归》, 《空间天气机器学习技术》 () –。[60] L. Hacein-Bey, J. M. Provenzale, 颅内动脉瘤的当前成像评估与治疗, 《美国放射学杂志》196 (1) (2011) 32–44。 doi:10.2214/AJR.10.5329。[61] C. Maupu, H. Lebas, Y. Boulaftali, 《颅内动脉瘤成像方式: 所见远不止表象》, 心血管医学前沿 9 (2月) (2022) 1–9。 doi:10.3389/fcvm.2022.793072。[62] H. Liu, J. Cai, Y. S. Ong, 关于多输出高斯过程回归的说明, 《知识工程系统》144 (2018) 102–121。 doi:10.1016/j.knosys.2017.12.034。URL
https://doi.org/10.1016/j.knosys.2017.12.034