arXiv:2301.08538v1 [math.AT] 20 Jan 2023

有限决定模的有限表示

EERO HYRY 和 MARKUS KLEMETTI

摘要。本文研究拓扑数据分析中所研究的持久模的若干"温和性"概念。特别地，我们证明，添加无穷点后，所谓的有限决定模便成为有限表示模。

引言

本文的研究动机来自拓扑数据分析，这是一门研究数据形状的新兴数学领域。拓扑数据分析的主要方法之一是持久同调。在持久同调中，人们通过为数据关联一个过滤拓扑空间来研究数据。以一个域作为系数取同调，可得到一个由向量空间和线性映射构成的图表。这个图表称为持久模。在标准情形下，过滤由$\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{R}$索引，但索引集可以是任意偏序集。Carlsson 和 Zomorodian 指出，可以将由 $\mathbb{Z}^n$ 索引的持久模视为 $\mathbb{Z}^n$分次的 n 变量多项式环上的模（参见 [2, 第 78 页，定理 1]）。这为在拓扑数据分析中运用交换代数和代数几何方法开辟了道路。然而，也必须考虑更一般的索引集。更形式地说，以域k 为系数、由偏序集 C 索引的持久模，是一个从 C（视为一个范畴）到 k向量空间范畴的函子。为求一般性，本文不采用域 k，而倾向于使用任意交换环 R。遵循表示论的术语，我们称函子 $\mathsf{C} \to R$-**模**为一个 R C-模。依照这一术语，持久模便是一个 kC-向量空间。

持久模不一定是有限表示的。因此，出于计算方面的原因，人们为它们引入了若干种"温和性"概念。在此背景下，Miller 在 [7, 第 24 页，定义 4.1] 中将一个 RC-模 M 通过偏序集 D 的一种编码定义为一个偏序集态射 $f\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，以及一个 RD-模 N，使得限制 $\mathrm{res}_f N \cong M$。我们在 [4, 第 22 页，定义 4.1] 中将一个 RC-模 M 定义为 S-确定的，如果存在一个子集 $S \subseteq \mathsf{C}$，使得 $\mathrm{Supp}(M) \subseteq {\uparrow}S$，并且对每个 $c \leq d$ 属于 C 的元素，以下蕴含成立

$$S \cap {\downarrow}c = S \cap {\downarrow}d \;\Rightarrow\; M(c \leq d) \text{ is an isomorphism}$$

成立。对于任意 $T \subseteq$C，我们使用通常的记号

$${\uparrow}T := \{c \in \mathcal{C} \mid t \leq c \text{ for some } t \in T\}$$

日期：2023 年 1 月 19 日。2010 年 数学主题分类。55N31，13E15。关键词和短语。持久模、有限确定、有限表示。

and

$$\downarrow T := \{c \in \mathcal{C} \mid c \leq t \text{ for some } t \in T\}$$

分别表示由 T 生成的上集和由 T 共生成的下集。这是"正向 a-确定的" $\mathbb{N}^n$-分次模这一概念的直接推广，其中 $a \in \mathbb{N}^n$ 的定义见 [6, 第 186 页，定义 2.1]。可以将它们看作由其在区间 $[0, a] \subseteq \mathbb{N}^n$ 上的限制所确定的模。它们是有限生成的。正向 a-确定的模一直受到交换代数学家的广泛研究。例如参见 [1] 及其中的参考文献。

˜现在假设 $S \subseteq$C 是一个有限集。我们将考虑 S 的所有子集的极小˜上界所构成的集合 S。我们将定义一个函子 α: C $\to S$ ，将 C 中的一个元素映射到所有低于它的 S元素的唯一极小上界。在主要结果——定理 2.5 中，我们将证明：对于某个有限的 $S \subseteq$ C， M 是有限确定的，当且仅当 α 是 M的一个编码。

Miller 在 [6, 第 186 页，定义 2.1] 中给出的定义还包括所谓的"有限确定"模。它们还在拓扑数据分析的背景下于 [7]中得到进一步研究。有限确定模是 $\mathbb{Z}^n$-分次模，完全由其在区间 $[a, b] \subseteq \mathbb{Z}^n$上的限制所确定。一般而言，它们并非有限表示。然而，作为定理 2.5 的推论，我们将在定理 4.7 中证明，在向 $\mathbb{Z}^n$添加无穷点之后，有限确定模实际上变为有限表示。这里我们遵循 Perling 的一个想法（见 [8,第 16] 页）。我们还将在命题 4.13 中证明，我们使用的术语与 [8]中所用的容许偏序集术语相一致。

1. 预备知识

本文始终采用范畴论的术语。我们总是假设 C 是一个小范畴，且 R 是一个交换环。对于任意集合X，我们用 $R[X]$ 表示由 X生成的自由 R-模。一个 RC-模是从 C 到 R-模范畴的函子。 RC-模之间的态射是一个自然变换。关于 RC-模的更多细节，请参见 [5] 和 [10]。

首先回忆一下，一个 RC -模 M 称为 d

- 有限生成，如果存在一个满态射

$$\bigoplus_{i \in I} R[\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c_i, -)] \to M,$$

其中 I 是一个有限集，并且对所有 $i \in I$， $c_i \in$ C;

- 有限表示，若存在一个正合列

$$\bigoplus_{j \in J} R[\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(d_j, -)] \to \bigoplus_{i \in I} R[\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c_i, -)] \to M \to 0,$$

其中 I 和 J 是有限集，且对所有 $i \in I$ 和 $j \in J$， $c_i, d_j \in$ C。

例如，参见 [9]。

设 φ: $S \to$ C 是小范畴之间的一个函子。回顾一下，*restriction* res$_\varphi$: R C-**Mod** $\to R S$-**Mod** 是由对 φ 前复合定义的函子，而 *induction* ind$_\varphi$: $R S$-**Mod** $\to R$C-**Mod** 是沿 φ 的左 Kan 延拓。诱导函子是限制函子的左伴随。这个伴随的余单位为每个 RC-模 M 给出了典范态射

$$\mu_M \colon \mathrm{ind}_\varphi \, \mathrm{res}_\varphi \, M \to M.$$

更明确地说，对于任意 RC-模 M 和 RS-模 N，我们有逐点公式

$$(\mathrm{res}_\varphi M)(s) = M(\varphi(s)) \quad \text{and} \quad (\mathrm{ind}_\varphi N)(c) = \operatorname*{colim}_{(t,u)\in(\varphi/c)} N(t)$$

对所有 $s \in S$ 和 $c \in$ C。这里，(φ/c) 表示切片范畴。其对象是对 $(s,\ u)$，其中 $s \in S$ 和 $u\colon \varphi(s) \to c$ 是 C 中的态射。对于 $(s,\ u)$，$(t,\ v) \in \mathrm{Ob}(\varphi/c)$，态射 $(s,\ u) \to (t,\ v)$ 是 S 中的态射 f，且满足 $v\varphi(f) = u$。我们通常假设 S 是 C 的全子范畴，且 φ 是包含函子。在这种情况下，我们使用记号 res_S 和 ind_S，而不使用 res_φ 和 ind_φ。如果 C 还是一个偏序集，则后一个公式给出

$$(\mathrm{ind}_S N)(c) = \operatorname*{colim}_{t\in S,\ t\le c} N(t).$$

设 C 是一个小范畴，且 $S \subseteq$ C 是一个全子范畴。若自然态射是 S生成的，则称一个 RC-模 M

$$\rho_M\colon \bigoplus_{s\in S} M(s)[\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(s,-)] \to M$$

是一个满态射。这里

$$M(s)[\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(s,-)] := M(s) \otimes_R R[\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(s,-)],$$

其中张量积是逐点取的。由于态射 ρ_M 可经由典范态射 μ_M分解，我们看到，M 是 S生成的，当且仅当 μ_M 是一个满态射。

依照 [3, 第 13 页，命题 2.14], ，我们称 M 是 S-表示的，如果它是 S生成的，并且满足以下条件：给定一个 RC-模的正合列

$$0 \to L \to N \to M \to 0,$$

其中 N 是 S生成的，则 L 是 S生成的。[3, 第 13 页，命题 2.14],证明了，M 是 S 表示的，当且仅当 μ_M 是一个同构。

2. 强有界偏序集上的模

为了证明定理 2.5，我们需要回顾一些序理论。下文中，C 始终表示一个偏序集。

记号 2.1. 设 $S \subseteq$C 是一个有限子集。我们用 $\mathsf{mub}(S)$ 表示 S 的极小上界集合。若 S 是有限的，则定义

$$\hat{S} := \bigcup_{\emptyset\neq S'\subseteq S} \mathrm{mub}(S').$$

$\hat{}$ 换言之，S 是 S 的非空子集的极小上界集合。

若偏序集 C 中每个有限 $S \subseteq$C 都在 C 中有唯一的极小上界，则称 C 为强上有界。如果 C 强上有界，则 $\hat{S}$ 是有限的。C 强上有界等价于 C 是有界并半格。另请注意，若 C 强上有界，则 C 也是弱上有界且极小上界完备，定义见[4, 第 23 页，定义 4.5、定义 4.6]。

设 C 强上有界，且 $S \subseteq$ C 是一个有限集。从现在起，我们将 $\mathsf{mub}(S)$ 视为 C 中的一个元素，而不是一个（单元素）集合。

特别地，$\hat{S}$ 中的每个元素都具有 $\mathrm{mub}(S')$ 的形式，其中 $S' \subseteq S$ 是一个非空子集。将 C 看作一个并半格，我们有并运算

$$a \vee b := \mathrm{mub}(a, b) := \mathrm{mub}(\{a, b\}).$$

将此运算扩展到有限集后，我们得到的运算与取极小上界相同。

引理 2.2. 设 $\mathcal{C}$ 强上有界，且 $S \subseteq \mathcal{C}$ 是一个有限子集。$\hat{\hat{S}} = \hat{S}$。

证明。 一个元素 $s \in S$ 可以写成

$$s = \mathrm{mub}(\mathrm{mub}(S_1), \ldots, \mathrm{mub}(S_n)),$$

其中 $S_1, .., S_n$ 是 S 的（有限）非空子集。由于并半格中的并运算满足结合律，我们可知

$$s = \bigvee_{i=1}^{n} (\bigvee S_i) = \bigvee (\bigcup_{i=1}^{n} S_i).$$

这意味着 $s = \mathrm{mub}(S_1 \cup \cdots \cup S_n)$，根据定义，它属于 $\hat{S}$。 □

假设 C 强上有界。那么 C 有一个最小元 $\mathrm{min}(\mathsf{C}) = \mathrm{mub}(\emptyset)$。令 $S \subseteq \mathsf{C}$ 为一个有限子集。记

$$\tilde{S} := \hat{S} \cup \{\min(\mathcal{C})\}.$$

我们定义一个偏序集态射 $\alpha_S \colon \mathsf{C} \to S$，其定义如下：

$$\alpha_S(c) = \mathrm{mub}(S \cap {\downarrow} c)$$

对每个 $c \in \mathsf{C}$ 都成立。换言之，α_S 将每个 $c \in \mathsf{C}$ 映射为其下方 S 的元素的极小上界。为了证明 α_S 确实是一个偏序集态射，设 $c \leq d$ 属于 C。那么 $S \cap {\downarrow} c \subseteq S \cap {\downarrow} d$，这意味着 $\alpha_S(c) \leq \alpha_S(d)$。

命题 2.3. 设 $\mathcal{C}$ 强上有界，且 $S \subseteq \mathcal{C}$ 是一个有限子集。那么 $\alpha_S = \alpha_{\hat{S}} = \alpha_{\tilde{S}}$。

证明。 利用引理 2.2，我们首先注意到 $S = S$ 和 $\hat{S} = \hat{S}$。设 $c \in \mathsf{C}$。我们断言

$$\mathrm{mub}(S \cap {\downarrow} c) = \mathrm{mub}(\hat{S} \cap {\downarrow} c) = \mathrm{mub}(\tilde{S} \cap {\downarrow} c).$$

后一个等式由以下事实得出：对于所有子集 $T \subseteq \mathsf{C}$，我们都有 $\mathrm{mub}(T) = \mathrm{mub}(T \cup \{\mathrm{min}(\mathsf{C})\})$。特别地，如果 $T = \emptyset$，则 $\mathrm{mub}(T) = \mathrm{min}(\mathsf{C})$。

对于第一个等式，由于 $S \subseteq \hat{S}$，因此 $\mathrm{mub}(S \cap {\downarrow} c) \in \hat{S} = \hat{S}$，其中等式由引理 2.2 得出。根据 $\hat{S}$ 的定义，我们现在可以写成

$$\mathrm{mub}(\hat{S} \cap {\downarrow} c) = \mathrm{mub}(s_1, \ldots, s_n),$$

其中 $s_1, \ldots, s_n \in S$。此外，$\mathrm{mub}(\hat{S} \cap {\downarrow} c) \leq c$，因此我们也有 $s_1, \ldots, s_n \leq c$。这意味着

$$\mathrm{mub}(s_1, \ldots, s_n) \leq \mathrm{mub}(S \cap {\downarrow} c),$$

至此，证明完成。 □

受命题 2.3 的启发，若不会引起混淆，我们将直接写作 α，而不写 α_S。在继续讨论本节的主要定理之前，我们还需要一个引理。

引理 2.4. 设$\mathcal{C}$ 强上有界，且 $S \subseteq \mathcal{C}$ 是一个有限子集。那么 $\hat{} S \cap {\downarrow}\alpha(c) = \hat{} S \cap {\downarrow}c$ 对所有 $c \in \mathcal{C}$均成立。

证明。设 $c \in \mathsf{C}$。我们立即看到 $\hat{} S \cap {\downarrow}\alpha(c) \subseteq \hat{} S \cap {\downarrow}c$，因为 $\alpha(c) \leq c$。假设 $d \in \hat{} S \cap {\downarrow}c$。我们需要证明 $d \leq \alpha(c)$。由命题 2.3 可知这一点成立，因为此时

$$\alpha(c) = \alpha_{\hat{S}}(c) = \mathrm{mub}(\hat{S} \cap {\downarrow}c).$$

□

设 C 强上有界，设 M 是一个 $R\mathsf{C}$-模，并设 $S \subseteq \mathsf{C}$ 是一个有限子集。态射 α 导出一个自然变换

$$T_\alpha \colon \mathrm{res}_\alpha \mathrm{res}_{\tilde{S}} M \to M,$$

其中，对任意 $c \in \mathsf{C}$，$T_{\alpha,\ c}$ 是该态射

$$M(\alpha(c) \leq c) \colon (\mathrm{res}_\alpha \mathrm{res}_{\tilde{S}} M)(c) = M(\alpha(c)) \to M(c).$$

现在我们可以证明主要结果了

定理 2.5。设$\mathcal{C}$ 是强上有界的，且 M 是一个 $R\mathcal{C}$-模。给定$\mathcal{C}$的有限子集 $S \subseteq$，以下条件等价：

1) 对所有$\mathcal{C}$中的 $c \leq d$，

$$S \cap {\downarrow}c = S \cap {\downarrow}d \ \Rightarrow\ M(c \leq d) \textit{ is an isomorphism};$$

2) $T_\alpha : \mathrm{res}_\alpha \mathrm{res}_{\tilde{S}} M \to M$是一个同构；3) α 是 M的一个编码。

若$\min(\mathcal{C}) \in S$，则条件 *1)* 表示 M 是由 S决定的。

证明。首先假设 1) 成立。我们不妨假设 S 包含 C 的最小元，因此 $\mathrm{Supp}(M) \subseteq {\uparrow}S = \mathsf{C}$。这不会影响集合 $\hat{}_{\tilde{S}}$或 S，也不会影响函子 α。因此 M 由 S决定。我们已在 [4, 第 25 页，$\hat{}$推论 4.13] 证明了，由 S决定的模是 $\hat{}S$-表示的。引理 2.2 现在告诉我们，$\hat{}\ M$是S-表示的。因此 $M \cong \mathsf{ind}_{\hat{S}} \mathsf{res}_{\hat{S}} M$。这意味着对于 $c \in \mathsf{C}$,

$$(\mathrm{res}_\alpha \mathrm{res}_{\tilde{S}} M)(c) = M(\alpha(c)) \cong \operatorname*{colim}_{d \leq \alpha(c),\ d \in \hat{S}} M(d).$$

此外，由引理 2.4，我们得到

$$\operatorname*{colim}_{d \leq \alpha(c),\ d \in \hat{S}} M(d) = \operatorname*{colim}_{d \leq c,\ d \in \hat{S}} M(d) = (\mathrm{ind}_{\hat{S}} \mathrm{res}_{\hat{S}} M)(c) \cong M(c).$$

˜如果条件 2) 成立，我们立即看到，带有 RS-模 $\mathsf{res}_{\tilde{S}} M$ 的函子 α 是 M 的一种编码。

最后，假设 3) 成立。设 $c \leq d$ 和 $S \cap {\downarrow}c = S \cap {\downarrow}d$。我们需要证明 $M(c \leq d)$ 是一个同构。由于 α是 M的一个编码，˜因此存在一个 RS-模 N，使得 $\mathsf{res}_\alpha N \cong M$。这里，$\mathsf{res}_\alpha N(c \leq d)$ 是态射 $N(\alpha(c) \leq \alpha(d))$。我们注意到

$$\alpha(c) = \mathrm{mub}(S \cap {\downarrow}c) = \mathrm{mub}(S \cap {\downarrow}d) = \alpha(d),$$

因此，态射 $\mathrm{res}_\alpha N(c \le d)$ 是一个同构。于是 $M(c \le d)$ 是一个同构。因此 1) 成立。
□

3. 添加无穷点

更好地理解 $R\mathbb{Z}^n$-模的一种方法是扩展集合 $\mathbb{Z}^n$，使其包含无穷远点。Perling 在 [8] 中采用了这一思想。令 $\overline{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$。显然，$\overline{\mathbb{Z}}^n$ 继承了来自 $\mathbb{Z}^n$ 的偏序集结构。任意 $R\mathbb{Z}^n$-模 M 都可以通过如下定义自然地扩展为一个 $R\overline{\mathbb{Z}}^n$-模 $\overline{M}$：

$$\overline{M}(c) = \lim_{d \ge c,\ d \in \mathbb{Z}^n} M(d)$$

对所有 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$ 均成立。更形式化地说，这是关于包含映射 $\mathbb{Z}^n \to \overline{\mathbb{Z}}^n$ 的 M 余诱导。函子 $M \mapsto \overline{M}$ 在范畴 $R\mathbb{Z}^n$-**模** 与其在 $R\overline{\mathbb{Z}}^n$-**模** 中的本质像之间建立了范畴等价。

设 $S \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 是一个有限非空子集。我们用 $\mathrm{mlb}(S)$ 表示 S 的（唯一）最大下界。本节将定义一个与 α“对偶”的态射 β。其思路是将一个元素映射到 S 中所有高于它的元素的最大下界。态射 β 将在证明我们的主要结果定理 4.7 中发挥关键作用。

我们将范围限制在 $\overline{\mathbb{Z}}^n$ 的笛卡尔的 子集，即形如 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ 的子集，其中 S_1、. . . 、 S_n 是 $\overline{\mathbb{Z}}$ 的子集。在这种情况下，我们可以按坐标计算 α 和 β。我们先来看下面这个观察。

命题 3.1. 设对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$p_i\colon \overline{\mathbb{Z}}^n \to \overline{\mathbb{Z}}$ 是典范投影，并设 $S \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 是一个有限非空子集。那么

1) $\mathrm{mub}(S) = (\max(p_1(S)), \ldots, \max(p_n(S)))$;
2) $\mathrm{mlb}(S) = (\min(p_1(S)), \ldots, \min(p_n(S)))$.

证明. 由于 1) 和 2) 的证明方式相同，这里我们只给出 1) 的证明。设 $i \in \{1, \ldots, n\}$。$\max(p_i(S))$ 的存在性源于 $p_i(S)$ 非空、线性有序且有限。记

$$d = (d_1, \ldots, d_n) := \mathrm{mub}(S).$$

我们将证明 $d_i = \max(p_i(S))$。首先，由于 d 是 S 的上界，且典范投影 p_i 保持序关系，我们得到 $d_i = p_i(d) \ge \max(p_i(S))$。其次，若 $\max(p_i(S)) < d_i$，则

$$d' := (d_1, \ldots, d_{i-1}, \max(p_i(S)), d_{i+1}, \ldots, d_n)$$

是 S 的一个上界，使得 $d' < d$，这与 d 的极小性矛盾。因此 $d_i = \max(p_i(S))$。
□

设 $S := S_1 \times \cdots \times S_n \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 是一个笛卡尔子集。我们记

$$\overline{S} = \tilde{S_1} \times \cdots \times \tilde{S_n},$$

~其中，对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $S_i = S_i \cup \{-\infty\} \subseteq \overline{\mathbb{Z}}$。注意，如果 S 是有限的，那么 $\overline{S}$ 也是有限的。

例 3.2. 令 $a \le b$ 属于 $\mathbb{Z}^n$。我们记作 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_n)$。对于闭区间

$$[a, b] = \{c \in \mathbb{Z}^n \mid a \le c \le b\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

我们有

$$\begin{aligned}\overline{[a,b]} &= \widetilde{[a_1,b_1]} \times \cdots \times \widetilde{[a_n,b_n]} \\ &= \{(c_1,\ldots,c_n) \mid a_i \le c_i \le b_i \text{ or } c_i = -\infty \ (i \in \{1,\ldots,n\})\}.\end{aligned}$$

现在我们有

引理 3.3. 设 $S := S_1 \times \cdots \times S_n \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 为一个有限笛卡尔子集，并设$T \subseteq S$ 为一个有限非空子集。那么

1）$\mathrm{mub}(T) \in S$;

2）$\mathrm{mlb}(T) \in S$;

3） $\overline{S} = \overline{S}$.

证明。 为证明 1)，令 p_i为对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$的典范投影 $\overline{\mathbb{Z}}^n \to \overline{\mathbb{Z}}$。由命题 3.1 1)，可得

$$\mathrm{mub}(T) = (\max(p_1(T)),\ldots,\max(p_n(T))).$$

因此 $\mathrm{mub}(T) \in S$，因为对于所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$， $p_i(T) \subseteq p_i(S) = S_i$。

接下来，2) 的证明与 1) 相同，此时使用命题 3.1 2)。

ˆ 最后，对于 3)，注意到 $\overline{S}$ 是有限的笛卡尔子集，因此由 1) 可知 $\overline{S} = \overline{S}$。由于$\overline{S}$ 已经包含了 $\overline{\mathbb{Z}}^n$的最小元，因此得到

$$\tilde{\overline{S}} = \hat{\overline{S}} \cup \{(-\infty,\ldots,-\infty)\} = \overline{S} \cup \{(-\infty,\ldots,-\infty)\} = \overline{S}.$$

□

令 $S := S_1 \times \cdots \times S_n \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 为有限的笛卡尔子集。由于根据引理 3.3 3)有 $\overline{S} = \overline{S}$，我们得到一个偏序集态射 $\alpha := \alpha_{\overline{S}} : \overline{\mathbb{Z}}^n \to \overline{S}$，其中

$$\alpha(c) = \mathrm{mub}(\overline{S} \cap {\downarrow}c)$$

对于所有 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$。根据引理 3.3 2)，现在我们可以通过令其为如下形式来定义一个“对偶”偏序集态射$\beta := \beta_S : \overline{S} \to S$

$$\beta(c) = \mathrm{mlb}(S \cap {\uparrow}c)$$

对所有 $c \in \overline{S}$。这里的集合 $S \cap {\uparrow}c$ 始终非空，因为 S 是 $\overline{S}$ 中的终对象。

现在我们可以给出 α 和 β 的逐坐标公式。

命题 3.4. 对于所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$，我们记 $\alpha_i := \alpha_{\overline{S_i}}$ 和 $\beta_i := \beta_{S_i}$。对于 $c := (c_1,\ldots,c_n) \in \overline{\mathbb{Z}}^n$，有

1) $\alpha(c) = (\alpha_1(c_1),\ldots,\alpha_n(c_n))$;

2) *if* $c \in \overline{S}$, *then* $\beta(c) = (\beta_1(c_1),\ldots,\beta_n(c_n))$.

证明。 为了证明 1)，我们首先证明

$$p_i(\overline{S} \cap {\downarrow}c) = \overline{S_i} \cap {\downarrow}c_i,$$

其中 $p_i : \overline{\mathbb{Z}}^n \to \overline{\mathbb{Z}}$是对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 的典范投影。由于 $p_i(\overline{S}) = \overline{S_i}$且 $p_i({\downarrow}c) = {\downarrow}c_i$，我们可得 $p_i(\overline{S} \cap {\downarrow}c) \subseteq \overline{S_i} \cap {\downarrow}c_i$。反过来，设 $d \in \overline{S_i} \cap {\downarrow}c_i$。那么 $d \le c_i$，因此我们有一个元素

$$d' := (-\infty,\ldots,-\infty,d,-\infty,\ldots,-\infty) \in \overline{S} \cap {\downarrow}c$$

使得 $p_i(d') = d_\circ$ 因此 $p_i(\overline{S} \cap \downarrow c) = \overline{S_i} \cap \downarrow c_{i\circ}$ 现在，利用这一结果和命题 3.1 1)，我们得到

$$\begin{aligned}\alpha(c) &= \mathrm{mub}(\overline{S} \cap \downarrow c) \\ &= (\max(\overline{S_1} \cap \downarrow c_1), \ldots, \max(\overline{S_n} \cap \downarrow c_n)) \\ &= (\alpha_1(c_1), \ldots, \alpha_n(c_n)).\end{aligned}$$

对于 2），证明类似。令 $c \in \overline{S}_\circ$ 我们先证明

$$p_i(S \cap \uparrow c) = S_i \cap \uparrow c.$$

由 $p_i(S) = S_i$ 和 $p_i(\uparrow c) = \uparrow c_i$，可知 $p_i(S \cap \uparrow c) \subseteq S_i \cap \uparrow c_{i\circ}$ 接下来，假设 $d \in S_i \cap \uparrow c_{i\circ}$ 由于 $c \in \overline{S}$，存在一个元素 $s := (s_1, \ldots, s_n) \in S$ 使得 $s \geq c_\circ$ 因为 $d \geq c_i$ 且 S 是笛卡尔的，我们又有一个元素

$$d' := (s_1, \ldots, s_{i-1}, d, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S \cap \uparrow c$$

使得 $p_i(d') = d_\circ$ 因此 $p_i(S \cap \uparrow c) = S_i \cap \uparrow c_\circ$ 为完成证明，我们使用命题 3.1 2）：

$$\begin{aligned}\beta(c) &= \mathrm{mlb}(S \cap \uparrow c) \\ &= (\min(S_1 \cap \uparrow c_1), \ldots, \min(S_n \cap \uparrow c_n)) \\ &= (\beta_1(c_1), \ldots, \beta_n(c_n)).\end{aligned}$$

□

我们注意到，在以下意义下， α 和 $\beta \circ \alpha$ 是“连续的”。

命题 3.5。令 $c := (c_1, \ldots, c_n) \in \overline{\mathbb{Z}}^n$。

1) 如果 N 是一个 $R\overline{S}$-模，那么

$$\lim_{d \geq c,\ d \in \mathbb{Z}^n} N(\alpha(d)) \cong N(\alpha(c)).$$

2) 如果 Q 是一个 RS-模，那么

$$\lim_{d \geq c,\ d \in \mathbb{Z}^n} Q((\beta \circ \alpha)(d)) \cong Q((\beta \circ \alpha)(c)).$$

证明。 对于 1)，假设 N 是一个 $R\overline{S}$-模。令 $c' := (c'_1, \ldots, c'_n) \in \overline{\mathbb{Z}}^n$ 如下：对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们令 $a_i =$ 为 $\min(S_i \cap \mathbb{Z})$（如果存在），并且

$$c'_i := \begin{cases} \max(c_i, 0), \text{ if } S_i \cap \mathbb{Z} = \emptyset; \\ \max(c_i, a_i - 1), \text{ otherwise.} \end{cases}$$

这保证了我们始终有 $c \leq c'$ 和 $c' \in \mathbb{Z}^n$。采用命题 3.4 中的记号，我们可以写成

$$\alpha(c) = (\alpha_1(c_1), \ldots, \alpha_n(c_n)).$$

令 $i \in \{1, \ldots, n\}$。如果 $S_i \cap \mathbb{Z} = \emptyset$，那么 $\alpha_i(c'_i) = -\infty = \alpha_i(c_i)$。类似地，如果 $c'_i = a_i - 1$，那么 $\alpha_i(c'_i) = -\infty = \alpha_i(c_i)$。因此，在所有情况下都有 $\alpha(c) = \alpha(c')$。由于 α 是一个偏序集态射，我们看到对于所有满足 $c \leq d \leq c'$ 的 $d \in \mathbb{Z}^n$，

$$\alpha(c) = \alpha(d) = \alpha(c'),$$

因此

$$N(\alpha(c)) = N(\alpha(d)) = N(\alpha(c')).$$

此外，由于集合 $\{d \in \mathbb{Z}^n \mid c \le d \le c'\}$ 是集合 $\{d \in \mathbb{Z}^n \mid c \le d\}$ 的初始子集，我们有

$$\lim_{d \ge c,\ d \in \mathbb{Z}^n} N(\alpha(d)) \cong \lim_{c \le d \le c',\ d \in \mathbb{Z}^n} N(\alpha(d)) \cong N(\alpha(c)).$$

接下来，对于 2)，令 Q 为一个 RS-模。现在 $\mathsf{res}_\beta Q$ 是一个 $R\overline{S}$-模，因此由 1) 可得

$$\lim_{d \ge c,\ d \in \mathbb{Z}^n} (\mathrm{res}_\beta Q)(\alpha(d)) \cong (\mathrm{res}_\beta Q)(\alpha(c)).$$

另一方面，根据定义，对于所有 $e \in \overline{\mathbb{Z}}^n$，

$$(\mathrm{res}_\beta Q)(\alpha(e)) = Q(\beta(\alpha(e))) = Q((\beta \circ \alpha)(e)).$$

这意味着我们可以将上述同构写为

$$\lim_{d \ge c,\ d \in \mathbb{Z}^n} Q((\beta \circ \alpha)(d)) \cong Q((\beta \circ \alpha)(c)).$$

□

推论 3.6. 令 N 为一个 $R\overline{\mathbb{Z}}^n$-模，并令 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$。那么

1) $\lim_{d \ge c,\ d \in \mathbb{Z}^n} N(\alpha(d)) \cong N(\alpha(c))$;
2) $\lim_{d \ge c,\ d \in \mathbb{Z}^n} N((\beta \circ \alpha)(d)) \cong N((\beta \circ \alpha)(c))$.

证明。对于 1)，注意到 $\mathsf{res}_{\overline{S}} N$ 是一个 $R\overline{S}$-模，其中对于所有 $d \in \overline{S}$，$(\mathsf{res}_{\overline{S}} N)(d) = N(d)$。因此，我们可以应用命题 3.5 1) 得到结论。对于 2)，我们对 RS-模 $\mathsf{res}_S N$应用命题 3.5 2)。□

4. 有限确定模

设 M 是一个 $R\mathsf{C}$-模。若对所有 $c \in \mathsf{C}$，$M(c)$ 都是有限表示的，我们就称 M 为逐点有限表示。稍微推广 Miller 在 [7, 第 25 页，例 4.5], 中的定义（其中 $R = k$ 是一个域），若一个 $R\mathbb{Z}^n$-模 M 满足：M 是逐点有限表示的，并且对于某个 $a \le b \in \mathbb{Z}^n$，凸投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a,b]$ 给出 M一个由闭区间$[a,b] \subseteq \mathbb{Z}^n$编码的表示，则称其为有限确定。这里，凸投影 π 将 $\mathbb{Z}^n$ 中的每个点映到区间 $[a,b]$中离它最近的点。若 $a = (a_1,\dots,a_n)$ 和 $b = (b_1,\dots,b_n)$，则对任意c，有：$= (c_1,\dots,c_n) \in \mathbb{Z}^n$，

$$\pi(c) = (\pi_1(c_1),\dots,\pi_n(c_n)),$$

其中

$$\pi_i(c_i) = \max(a_i, \min(c_i, b_i))$$

对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$。注意，逐点有限表示的 $R\mathbb{Z}^n$-模 M是有限确定的，当且仅当存在一个闭区间 $[a,b] \subseteq \mathbb{Z}^n$，使得当 c_i位于 $[a_i,b_i]$之外时，态射 $M(c \le c + e_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ 都是同构。

注 4.1。设 M 是一个 $R\mathbb{Z}^n$-模。那么，M 可由闭区间$[a,b]$及凸投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a,b]$ 编码，当且仅当 $M \cong \mathsf{res}_\pi \mathsf{res}_{[a,b]} M$。事实上，若对于某个 $R[a,b]$-模 N，有 $M \cong \mathsf{res}_\pi N$，则对所有 $c \in \mathbb{Z}^n$，我们有

$$M(c) \cong (\mathrm{res}_\pi N)(c) = N(\pi(c)) = N(\pi(\pi(c))) \cong M(\pi(c))$$

因为对所有 $c \in \mathbb{Z}^n$, $\pi(\pi(c)) = \pi(c)$ 都成立。

现在我们想探究有限决定性的概念与我们的 S-决定性概念之间的关系，其中 S 是有限的，且 M 是逐点有限表示的。虽然对于有限确定模，$\mathrm{Supp}(M) \subseteq {\uparrow}S$ 这一要求未必成立，但我们有如下结论：

命题 4.2. 设 M 是一个 $R\mathbb{Z}^n$-模，且 a、$b \in \mathbb{Z}^n$ 满足 $a \leq b$。令$u := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$。若 M 是 $[a+u, b]$-确定的，则 M 可通过闭区间 $[a, b]$ 编码，并配有凸投影 $\pi\colon\ \mathbb{Z}^n \to [a, b]$。若 $\mathrm{支撑}(M) \subseteq {\uparrow}a$，则逆向蕴含也成立。

证明。对于第一个蕴含，假设 M 是 $[a+u, b]$-确定的。记作$a = (a_1, \ldots, a_n)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_n)$。令 $c := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$。注意，若对某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 有 $c_i \leq a_i$，则也有 $\pi_i(c_i) \leq a_i$，因此 $c, \pi(c) \notin \mathrm{支撑}(M)$。否则 $c > a$，此时 $\pi(c) \leq c$ 且 $[a+u, b] \cap {\downarrow}\pi(c) = [a+u, b] \cap {\downarrow}c$。因此，根据 $[a+u, b]$-确定模的定义，$M(\pi(c)) \to M(c)$ 是一个同构，并且 $M \cong \mathrm{res}_\pi \mathrm{res}_{[a,b]} M$。

为证明逆命题，假设 $\mathrm{Supp}(M) \subseteq {\uparrow}a$ and M 具有由闭区间 $[a, b]$ 及编码凸投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a, b]$给出的编码。令$c := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$。设对于某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，有 $c_i < a_i$。由条件 $\mathrm{Supp}(M) \subseteq {\uparrow}a$，可知 $M(c) = 0$。由于 M是有限确定的，我们还得到 $M(\pi(c)) = M(c) = 0$。因此，若对于某个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，有 $c_i \leq a_i$，则 $M(c) = 0$。若情况并非如此，则有 $c \geq a + u$。取 $\mathbf{C}$ 中的 $c \leq d$，使得 $a + u \leq c \leq d$且 $[a+u, b] \cap {\downarrow}c = [a+u, b] \cap {\downarrow}d$。这意味着 $\pi(c) = \pi(d)$，因此 $M(c \leq d)$ 是一个同构。□

接下来，我们需要将注意力转向 $R\overline{\mathbb{Z}}^n$-模。设 $a \leq b$ in $\mathbb{Z}^n$。沿用第 3 节的记号，我们将考察情形 $S = [a, b]$。特别地，我们有 $\alpha = \alpha_{\overline{[a,b]}}$ and $\beta = \beta_{[a,b]}$。命题 3.4 给出了 α and β的公式。若$c := (c_1, \ldots, c_n) \in \overline{\mathbb{Z}}^n$ and $d := (d_1, \ldots, d_n) \in \overline{[a, b]}$，则

$$\alpha(c) = (\alpha_1(c_1), \ldots, \alpha_n(c_n)) \quad \text{and} \quad \beta(d) = (\beta_1(d_1), \ldots, \beta_n(d_n)).$$

对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$，有 $\alpha_i := \alpha_{\overline{S_i}}$and $\beta_i := \beta_{S_i}$。具体而言，

$$\alpha_i(c_i) = \begin{cases} -\infty, \text{ if } c_i < a_i; \\ c_i, \text{ if } a_i \leq c_i \leq b_i; \\ b_i, \text{ if } c_i > b_i \end{cases} \quad \text{and} \quad \beta_i(d_i) = \begin{cases} a_i, \text{ if } d_i = -\infty; \\ d_i, \text{ otherwise} \end{cases}$$

对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 都成立。下一个命题表明，复合映射 $\beta \circ \alpha$是从 $\mathbb{Z}^n$ 到$\overline{\mathbb{Z}}^n$的凸投影 π 的一个扩张。

命题 4.3. 设 $\pi\colon\ \mathbb{Z}^n \to [a, b]$ 为凸投影。那么对于任意$c := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$，

$$\pi(c) = (\beta \circ \alpha)(c).$$

证明。首先假设 $n = 1$。回顾 $\pi(c) = \max(a, \min(c, b))$。现在分三种情况：

- 如果 $c \in [a, b]$，则 $(\beta \circ \alpha)(c) = \beta(c) = c = \pi(c)$；
- 如果 $c < a$，则 $(\beta \circ \alpha)(c) = \beta(-\infty) = a = \pi(c)$；
- 如果 $c > b$，则 $(\beta \circ \alpha)(c) = \beta(b) = b = \pi(c)$。

接下来假设 $n > 1$。利用命题 3.4，我们可以写成

$$\alpha(c) = (\alpha_1(c_1), \ldots, \alpha_n(c_n)) \quad \text{and} \quad \beta(d) = (\beta_1(d_1), \ldots, \beta_n(d_n))$$

对所有 $d \in \overline{[a,b]}$ 都成立。同样，回忆一下

$$\pi(c) = (\pi_1(c_1), \ldots, \pi_n(c_n)).$$

现在由情形 $n = 1$ 可知

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(c) &= \beta(\alpha_1(c_1), \ldots, \alpha_n(c_n)) \\ &= ((\beta_1 \circ \alpha_1)(c_1), \ldots, (\beta_n \circ \alpha_n)(c_n)) \\ &= (\pi_1(c_1), \ldots, \pi_n(c_n)) \\ &= \pi(c).\end{aligned}$$

□

注记 4.4. 为使记号更简洁，我们只对 α 的像中的元素定义了 β 。当然，我们也可以完全对偶地定义 β ，从从下方强有界的偏序集出发，将点 ∞ 添加到 $\mathbb{Z}$，并对偶地定义集合 $\underline{S}$ ，使之对应于 $\overline{S}$。这样一来，便会得到如下情形:

$$(\beta|_{\overline{S}} \circ \alpha)(c) = (\alpha|_{\underline{S}} \circ \beta)(c) = \pi(c)$$

对所有 $c \in \mathbb{Z}^n$ 均成立。换言之，结果是相同的。

我们在注 4.1 中看到，如果 M 由带有凸投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a,b]$的闭区间 $[a,b]$ 编码，那么对所有 $c \in \mathbb{Z}^n$，都有 $M(c) \cong M(\pi(c))$。另一方面，根据定理 2.5，如果 M是S-决定的且 $S \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 有限，那么对所有 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$，都有 $\overline{M}(\alpha(c)) \cong \overline{M}(c)$。为了证明定理 4.7，接下来我们将证明，对于 β ，这两种情形下都适用类似的结果。

命题 4.5. 设 $u := (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$. 设 M为一个 $R\mathbb{Z}^n$-模，并令$c \in \overline{[a,b]}$。

1) 如果 M 可由带有凸投影$\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a,b]$的闭区间 $[a,b]$ 编码，那么 $\overline{M}(c) \cong M(\beta(c))$。2) 如果 $\overline{M}$是 $\overline{[a+u,b]}$-决定的，那么 $\overline{M}(c) \cong M(\beta(c))$。

证明。 为证明 1)，假设 M 有一个由闭区间 $[a,b]$及凸投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a,b]$给出的编码。于是，根据 $\overline{M}$的定义，

$$\overline{M}(c) = \lim_{d \geq c,\ d \in \mathbb{Z}^n} M(d).$$

该编码给出：对于所有 $d \in \mathbb{Z}^n$， $M(d) \cong M(\pi(d))$。这意味着

$$\overline{M}(c) \cong \lim_{d \geq c,\ d \in \mathbb{Z}^n} M(\pi(d)).$$

现在我们可以应用推论 3.6，得到 $\overline{M}(c) \cong M(\beta(\alpha(c)))$。注意，$c \in \overline{[a,b]}$ 意味着 $\alpha(c) = c$。因此 $\overline{M}(c) \cong M(\beta(c))$.

接下来，为证明 2)，设 $\overline{M}$ 是 $\overline{[a+u,b]}$-决定的。由于 $c \leq \beta(c)$，因此只需证明 $\overline{[a+u,b]} \cap \downarrow c = \overline{[a+u,b]} \cap \downarrow \beta(c)$。我们立即得到 $\downarrow c \subseteq \downarrow \beta(c)$。对于反向，设 $d := (d_1, \ldots, d_n) \in \overline{[a+u,b]} \cap \downarrow \beta(c)$。我们要证明 $d \leq c$。回忆一下，我们可以写成 $\beta(c) = (\beta_1(c_1), \ldots, \beta_n(c_n))$，其中

$$\beta_i(c_i) = \begin{cases} a_i, \text{ if } c_i = -\infty; \\ c_i, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$。设 $i \in \{1, \dots, n\}$。若 $\beta_i(c_i) = c_i$，则有 $d_i \leq \beta_i(c_i) = c_i$。否则，若 $\beta_i(c_i) = a_i$，则必有 $d_i = c_i = -\infty$，因为$d_i, c_i \in \overline{[a_i + 1, b_i]}$。由此可得 $d \leq c$。□

注 4.6. 设 M 是逐点有限表示的 $R\mathbb{Z}^n$-模，并设 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$。若 M是有限确定的，且其凸投影为 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a, b]$，那么根据命题 4.5 的证明，我们有 $\overline{M}(c) \cong M((\beta \circ \alpha)(c))$，因此 $\overline{M}$是逐点有限表示的。

现在我们可以陈述

定理 4.7. 设 M 是逐点有限表示的 $R\mathbb{Z}^n$-模。则下列条件等价:

1) M 是有限确定的；2) $\overline{M}$ 是某个有限 $S \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 所确定的 S；3) $\overline{M}$ 是有限表示的。

证明. 我们先证明 1) 和 2) 等价。注意，对于任意有限子集 $S \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$，总可以找到 $a, b \in \mathbb{Z}^n$，使得 $S \subseteq \overline{[a + u, b]}$。考虑函子

$$\alpha' = \alpha_{\overline{[a+u,b]}}\colon \overline{\mathbb{Z}}^n \to \overline{[a + u, b]},$$

并将其在 $\mathbb{Z}^n$ 上的限制记为$\overline{\alpha}$。根据定理 2.5，$\overline{M}$ 是有限确定的，当且仅当 $\overline{M}$ 由 α' 编码。也就是说，对于某个 $R\overline{[a + u, b]}$-模 N，$\overline{M} \cong \operatorname{res}_{\alpha'} N$。限制到 $\mathbb{Z}^n$ 上后，我们看到

$$M \cong \operatorname{res}_{\mathbb{Z}^n} \operatorname{res}_{\alpha'} N = \operatorname{res}_{\overline{\alpha}} N,$$

因此 $\overline{\alpha}$ 编码了 M。反过来，若 M 由 $\overline{\alpha}$ 编码，则 $\overline{M}$ 显然有一个由 α' 给出的编码，因为 $\overline{\alpha}$ 是对象上的满射。接下来，我们注意到 β 到$\overline{[a + u, b]}$ 的限制，

$$\overline{\beta}\colon \overline{[a + u, b]} \to [a, b].$$

是偏序集同构。因此，$\overline{\beta} \circ \overline{\alpha}$ 是 M 的一个编码，当且仅当 $\overline{\alpha}$ 是 M 的一个编码。由于 $\overline{\beta} \circ \overline{\alpha} = \pi$，这些条件等价于 M 有限确定。具体而言，对于所有 $c \in \mathbb{Z}^n$，我们有 $(\overline{\beta} \circ \overline{\alpha})(c) = (\beta \circ \alpha')(c)$，其中

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha')(c)_i &= \begin{cases} \beta_i(-\infty), \text{ if } c_i = a_i, \\ \beta_i(\alpha_i(c_i)), \text{else.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_i, \text{ if } c_i = a_i, \\ \pi_i(c_i), \text{else.} \end{cases} \\ &= \pi(c)_i\end{aligned}$$

对所有 $i \in \{1, \dots, n\}$。

最后，我们注意到，2) 与 3) 等价这一结论可由先前的论文 [4, 第 25 页，定理 4.15] 的主要结果推出。对于 $\overline{\mathbb{Z}}^n$-模，该结果指出：逐点有限表示且对某个有限 $S \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ S-确定，等价于有限表示。此外，请注意注 4.6，其中表明 $\overline{M}$ 是逐点有限表示的。□

现在我们可以给出命题 4.2 的一个“强化”版本。

推论 4.8. 若 M 是一个 $R\mathbb{Z}^n$-模，且 $a, b \in \mathbb{Z}^n$ 满足 $a \leq b$，则以下条件等价：

1) M 由凸投影 $\pi\colon \mathbb{Z}^n \to [a,b]$ 编码；2) $\overline{M}$ 是 $\overline{[a+u,b]}$-有限确定的，其中 $u := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}^n$。

证明。我们在定理 4.7 的证明中证明了 2) 蕴含 1)。反过来，假设 1) 成立。设 $c \leq d$ 属于 $\overline{\mathbb{Z}}^n$，且满足 $[a+u,b] \cap {\downarrow}c = [a+u,b] \cap {\downarrow}d$。逐坐标而言，对于 $i \in \{1, \ldots, n\}$，这意味着 $c_i = d_i$、$b_i \leq c_i < d_i$ 或 $c_i < d_i \leq a_i$。无论哪种情况，$(\beta \circ \alpha)(c) = (\beta \circ \alpha)(d)$，因此

$$\overline{M}(c) \cong M((\beta \circ \alpha)(c)) = M((\beta \circ \alpha)(d)) \cong \overline{M}(d).$$

因此，$M(c \leq d)$ 是一个同构，而 M 是 $\overline{[a+u,b]}$-有限确定的。 □

为了证明定理 4.7 和推论 4.8，采用拓扑数据分析的视角来考察模的元素的出生与消亡会很方便。给定一个 $R\mathbb{Z}^n$ 模 M，可以追踪元素 $x \in \overline{M}(c)$（其中 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$）在经由同态 $M(c \leq c')$、$(c, c' \in \overline{\mathbb{Z}}^n)$ 映射时如何演变。我们称元素 x 在 c 出生，若它不属于任何态射 $M(c' \leq c)$（其中 $c' < c$）的像。另一方面，若对所有 $c \leq c' < c''$，x 在 c'' 死亡，也就是说 $M(c \leq c'')(x) = 0$，但 $M(c \leq c')(m) \neq 0$。

现在考虑一个 $R\mathbb{Z}^2$-模 M，它是有限确定的，并令 $\pi\colon \mathbb{Z}^2 \to [a,b]$ 为相应的凸投影。注意，方框 $[a,b]$ 最左侧的边和底边上不会有新元素出生或消亡。这是因为这两条边上的每个元素此前都已出现过无穷多次，并且出生于某个无穷远点。记作 $a = (a_1, a_2)$。例如，若某个元素（比如 $x \in M((a_1, c))$）在 $[a,b]$ 的最左侧边上，于 $M((a_1, c+1))$ 映射为零，那么 $x \in \overline{M}((-\infty, c))$ 也会在 $\overline{M}((-\infty, c+1))$ 中映射为零。因此，x 并非在点 $(a_1, c+1)$ “死亡”，而是在无穷远点 $(-\infty, c+1) \in \overline{[a+u,b]}$ 死亡。

注记 4.9。设 M 是一个 $R\mathbb{Z}^n$-模，且 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$。考虑自然态射

$$\lambda_{\overline{M},c}\colon \operatorname*{colim}_{d \leq c, d \in \overline{[a+u,b]}} \overline{M}(d) \to \overline{M}(c).$$

根据 [4, 第 15 页，定义 3.6], , 若 c 满足 $\lambda_{\overline{M},\,c}$ 是非满射，则称其为出生；若 $\lambda_{\overline{M},\,c}$ 是非单射，则称其为死亡。此外，假设 $\overline{M}$ 是 $\overline{[a+u,b]}$-有限确定的，且出生的表现“足够良好”。也就是说，对于任意出生 c，模 $\overline{M}(c)/\operatorname{Im}\lambda_{\overline{M},\,c}$ 都是投射模。当然，若 R 是一个域，则这一条件成立。然后，正如我们在 [4, 第 21 页、注记 3.27], 中讨论的那样，出生与消亡表明了 M 的极小生成元和关系的位置。

在下一个例子中，我们将说明，对于一个有限确定模 M，扩张 $\overline{M}$ 在无穷点处的出生与消亡如何保证 $\overline{M}$ 存在有限表示。

例4.10. 设 M 是一个 $R\mathbb{Z}^2$-模，其在对象上的定义为

$$M(c) = \begin{cases} R, & \text{if } c \leq (0,0); \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对所有 $c \in \mathbb{Z}^2$均成立，且态射 $R \to R$ 始终为id_R。那么 M 是有限确定的，其凸投影为 $\pi\colon \mathbb{Z}^2 \to [(0,\ 0),\ (1,\ 1)]$。现在，根据注释 4.8，$\overline{M}$ 是 $[(1,\ 1),\ (1,\ 1)]$- 确定的。这里 $[(1,\ 1),\ (1,\ 1)]$ 是集合

$$\{(-\infty,-\infty),(1,-\infty),(-\infty,1),(1,1)\}.$$

特别地，我们有 $\overline{M}((-\infty,\ -\infty)) = R$，并且

$$\overline{M}((-\infty,1)) = \overline{M}((1,-\infty)) = \overline{M}((1,1)) = 0.$$

此外，根据定理 4.7，$\overline{M}$ 现在是有限表示的。更具体地说，我们有一个 $R\overline{\mathbb{Z}}^2$-模的正合列

$$K \to N \to \overline{M} \to 0,$$

其中

$$N = R[\mathrm{Mor}_{\overline{\mathbb{Z}}^2}((-\infty,-\infty),-)]$$

and

$$K = R[\mathrm{Mor}_{\overline{\mathbb{Z}}^2}((1,-\infty),-)] \oplus R[\mathrm{Mor}_{\overline{\mathbb{Z}}^2}((-\infty,1),-)].$$

这里，$(-\infty,\ -\infty)$ 是 M 唯一的出生，而 $(1,\ -\infty)$ 和 $(-\infty,\ 1)$ 是死亡。

例4.11。如果 k 是一个域，那么众所周知，有限生成的 $k\mathbb{Z}^n$-模是有限表示的。然而，这一结果并不适用于 $k\overline{\mathbb{Z}}^n$-模。作为一个反例，考虑一个 $k\mathbb{Z}^2$-模 M，其中

$$M((x,y)) = \begin{cases} k, \text{ if } x+y<0; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

显然，$\overline{M}$ 是有限生成的，其唯一的出生点位于（$-\infty,\ -\infty$）。它不是有限表示的，因为对所有 $n \in \mathbb{Z}$，死亡都发生在点（$n,\ -n$）。

最后，我们想将定理 4.7 与 Perling（[8]）的工作联系起来。回顾一下，若子集 $L \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$ 对每个有限子集 $S \subseteq L$ 都满足 $\mathrm{mub}(S) \in L$，则称其为并半格。˄ 注意，这等价于条件 $L = L_\wedge$。给定一个并半格$L \subseteq \overline{\mathbb{Z}}^n$，依照 Perling 在 [8, 第 3 章第 16–19 页1], 中的做法，我们定义压缩函子

$$\mathrm{zip}_L\colon R\mathbb{Z}^n\text{-}\mathbf{Mod} \to RL\text{-}\mathbf{Mod}$$

以及解压函子

$$\mathrm{unzip}_L\colon RL\text{-}\mathbf{Mod} \to R\overline{\mathbb{Z}}^n\text{-}\mathbf{Mod}.$$

与 Perling 不同，我们不假设 R 是一个域。压缩函子将一个 $R\mathbb{Z}^n$-模 M 映射为 RL-模 $\mathrm{res}_L \overline{M}$；而解压函子则将一个$RL$-模 N 映射为由下式定义的 $R\overline{\mathbb{Z}}^n$-模 $\mathrm{unzip}_L N$

$$(\mathrm{unzip}_L N)(c) = \begin{cases} N(\mathrm{mub}(L \cap {\downarrow}c)), \text{ if } L \cap {\downarrow}c \neq \emptyset; \\ 0, \text{ otherwise} \end{cases}$$

对所有 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$。注意，$\mathrm{Supp}(\mathrm{unzip}_L N) \subseteq {\uparrow}L$。

注记 4.12。事实证明，当L 为有限且 $\alpha := \alpha_L$时，unzip_L 本质上与res_α是同一回事。稍有复杂之处在于，unzip_L 是为$\sim RL$-模定义的，而res_α 是为 RL-模定义的。不过，我们可以通过如下方式将一个$\sim RL$-模 N 扩展为一个 RL-模 $\tilde{N}$：

$$\tilde{N}((-\infty,\ldots,-\infty)) = 0,$$

˜　　˜若（$-\infty$，.....，$-\infty$）$\notin L$，否则为 N（c）$= N$（c）。以这种方式定义模 N˜后，我们看到$\mathsf{unzip}_L\, N \cong \mathsf{res}_\alpha\, N$。

给定一个 $R\mathbb{Z}^n$-模 M，并半格 L在 [8, 第 18 页，定义 3.4] 中称为 M-可容许，当且仅当条件 $\overline{M} \cong \mathsf{unzip}_L\, \mathsf{zip}_L\, M$成立。由此得到下面的命题。

命题 4.13。设 M 是一个 $R\mathbb{Z}^n$-模，L是一个有限并半格。则 L 是 M-可容许的，当且仅当 $\overline{M}$ 是 L-有限确定的。

证明。设 $c \in \overline{\mathbb{Z}}^n$。采用前面的记号，我们看到

$$\operatorname{unzip}_L \operatorname{zip}_L M = \operatorname{unzip}_L \operatorname{res}_L \overline{M} \cong \operatorname{res}_\alpha \widetilde{\operatorname{res}_L \overline{M}},$$

其中

$$(\operatorname{res}_\alpha \widetilde{\operatorname{res}_L \overline{M}})(c) = \begin{cases} (\operatorname{res}_\alpha \operatorname{res}_{\tilde{L}} \overline{M})(c), \text{ if } L \cap {\downarrow}c \neq \emptyset; \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

首先假设 $\overline{M} \cong \mathsf{unzip}_L\, \mathsf{zip}_L\, M$。若 $L \cap {\downarrow}c = \emptyset$，根据函子 unzip_L 的定义，我们有 $\overline{M}(c) = 0$。但在这种情况下，$\alpha(c) \leq c$，因此 $L \cap {\downarrow}\alpha(c) = \emptyset$。再次利用 unzip_L 的定义，可得

$$(\operatorname{res}_\alpha \operatorname{res}_{\tilde{L}} \overline{M})(c) = \overline{M}(\alpha(c)) = 0.$$

另一方面，若存在一个元素 $d \in L \cap {\downarrow}c$，则由上面的公式可得，$\overline{M}(c) \cong (\mathsf{res}_\alpha \operatorname{res}_{\tilde{L}} \overline{M})(c)$。因此，

$$\overline{M} \cong \operatorname{res}_\alpha \operatorname{res}_{\tilde{L}} \overline{M}$$

且 $\mathsf{Supp}(\overline{M}) \subseteq {\uparrow}L$，所以由定理 2.5，$\overline{M}$ 是 L-确定的。

反过来，假设 $\overline{M}$ 是 L-确定的。由定理 2.5，我们有 $\overline{M} \cong \mathsf{res}_\alpha \operatorname{res}_{\tilde{L}} \overline{M}$，且 $\mathsf{Supp}(\overline{M}) \subseteq {\uparrow}L$。上面的公式表明

$$(\operatorname{unzip}_L \operatorname{zip}_L M)(c) = (\operatorname{res}_\alpha \operatorname{res}_{\tilde{L}} \overline{M})(c)$$

对所有 $c \in {\uparrow}L$ 都成立。若 $c \notin {\uparrow}L$，则 $c \notin \mathsf{Supp}(\overline{M})$，这意味着 $\overline{M}(c) = 0$。此时，根据函子 unzip_L 的定义，我们还有 $(\mathsf{unzip}_L\, \mathsf{zip}_L\, M)(c) = 0$。因此存在一个同构

$$\overline{M} \cong \operatorname{unzip}_L \operatorname{zip}_L M.$$

□

参考文献

[1] M. Brun 和 G. Fløystad，单项式环上的 *Auslander–Reiten* 平移，《数学进展》**226** (2011)，第 1 期，952–991。[2] G. Carlsson 和 A. Zomorodian，多维持久性理论，《离散与计算几何》**42** (2009)，第 1 期，71–93。[3] A. Djament，多项式函子的有限性´´，《数学基础》**233**(2016)，197–256。[4] E. Hyry 和 M. Klemetti，广义持久性与分次结构，《同调、同伦与应用》**24** (2022)，第 1 期，27–53。[5] W. L ¨uck，变换群与代数 *K* 理论，Springer，1989年。[6] E. Miller，*Alexander* 对偶函子与单项式支撑的局部对偶，《代数杂志》**231** (2000年)，第 1 期，180–234。[7] E. Miller，偏序集上模的同调代数，arXiv 电子预印本（2020年7月），arXiv:2008.00063，网址：2008.00063。[8] M. Perling，环面层的解消与上同调：仿射情形，《国际数学杂志》**24**(2013年)，第 09 期，1350069。

[9] N. Popescu，阿贝尔范畴及其在环与模中的应用，第 3 卷，Academic Press，1973。[10] T. tom Dieck，变换群与表示论，第 766 卷，Springer，2006。电子邮件地址： eero.hyry@tuni.fi

信息技术与通信科学学院，坦佩雷大学，Kanslerinrinne 1（Pinni B），坦佩雷，33100，芬兰

电子邮件地址： markus.o.klemetti@gmail.com

信息技术与通信科学学院，坦佩雷大学，Kanslerinrinne 1（Pinni B），坦佩雷，33100，芬兰