arXiv:2301.08548v1 [math.CA] 20 Jan 2023

具有生长滞后响应的变输入恒化器模型的一致持久性判据及周期情形的完整分析

Mauro Rodriguez Cartabia 和 Daniel Sepúlveda Oehninger

摘要。我们研究了一个单物种恒化器模型，其中营养物输入和稀释率均可变，且生长具有滞后（固定）响应。本文的首要目标是证明，持久性意味着一致持久性。随后，我们聚焦于一种特殊情形：营养物输入和稀释率具有相同周期，且生长存在滞后响应。我们得到了一个阈值，该阈值决定模型是否具有（一致）持久性，或者每个解的生物量是否趋于消失。此外，我们证明，持久性等价于存在唯一的非平凡周期解。我们还证明该解具有吸引性。值得指出的是，在任何情况下，我们都不需要对时滞的大小施加限制。

关键词：恒化器、持久性、周期情形、时滞。

1. 引言

我们考虑在恒化器中培养一种微生物，其生长受一种限制性底物制约；在可变环境下，底物消耗与种群增长之间存在时滞。也就是说，稀释率和底物输入浓度都会随时间变化。Caperon [5]和 Ellermeyer等人 [9]的研究均记载了在恒化器的生物量增长中考虑时滞的必要性。此外，任何种群都会受到随时间变化的环境波动影响，例如光照周期或季节，因此研究非自治种群模型十分重要，参见 Smith和Waltman 的著作 [15, 第 7] 章。

Amster、Robledo 和 Sepúlveda 在 [3] 中研究并推导了适用于上述情形的一个（周期版本）模型。本文首先研究具有一般输入的模型，然后施加周期性条件。因此，固定一个非负常数 τ，并考虑如下系统

$$\begin{aligned} s'(t) &= D(t)s^{(0)}(t) - D(t)s(t) - p(s(t))x(t), && t \geq 0, \\ x'(t) &= x(t-\tau)p(s(t-\tau))e^{-\int_{t-\tau}^{t} D(h)dh} - D(t)x(t), && t \geq 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

带有初始条件

$$(s, x)\Big|_{[-\tau,0]} = \left(s^{in}, x^{in}\right).$$

这些初始条件必须是在区间 $[-\tau, 0]$ 上定义的非负时间函数。这里， $s(t)$ 和 $x(t)$ 分别表示时间 t 时生物反应器内的底物和生物量密度；稀释率和营养物输入浓度 $D(t)$ 和 $s^{(0)}(t)$ 分别是非负连续的，且

对于 $t \geq 0$，它们是有界函数。在这类模型中，通常用特定的消耗函数 p： $[0, \infty) \to [0, \infty)$ 来描述底物消耗与生物量增长之间的关系，该函数满足：

假设1.1. p 属于 C^1类， $p'(s) > 0$ 对每个 $s \geq 0$ 和 $p(0) = 0$均成立。

首先，我们着重研究一致持久性。持久性这一概念在种群模型理论中具有重要意义，最早由[4, 12], 提出。由于生态学和动力系统研究者对其兴趣日益浓厚，该概念也愈发受到重视。Ellermeyer在 [8] 中证明了自治情形下系统（1.1）的持久性判据；Ellermeyer等人在 [10] 中给出了生长具有瞬时响应的非自治情形下系统（1.1）的持久性判据（$\tau = 0$）。近期，Rodriguez Cartabia在 [14] 中研究了系统（1.1），得到了微生物种群具有持久性的充要条件。在持久性的若干概念中，从应用角度看，一致持久性更为理想，因为它是一个更稳健的概念，参见[4, 引言]。我们发现，针对系统（1.1）这一主题的研究尚有不足。因此，据我们所知，定理 2.1 首次指出，系统（1.1）的持久性意味着一致持久性。粗略地说，存在一个内在界 $\delta > 0$，使得（s, x）的每个1.1）解，只要其初始条件非零（见定义2.1），就满足：从某个时刻起， $x \geq \delta$。

其次，我们关注 $s^{(0)}(t)$ 和 $D(t)$ 为周期函数的情形。在[3] 中，作者利用广义Leray-Schauder度延拓定理，得到了周期解存在的充分条件；并应用隐函数定理证明，当时滞较小时，非平凡周期解是唯一的。我们强调，这些结果基于对系统（1.1）比所需条件更强的假设。因此，据我们所知，本文的结果首次对周期情形进行了全面研究。定理 2.2指出，如果系统（1.1）不持久，则所有解都趋于洗出。换言之，我们得到了生物量消失的阈值。接下来，我们着重研究正周期解的存在性问题。定理 2.3 证明，如果系统（1.1）是持久的，则存在一个非平凡周期解。关键在于将 Horn 不动点定理 [13, 定理 6] 与定理 2.1结合起来证明这一结果。最后，定理2.4指出，该正周期解唯一且具有吸引性。总之，我们证明了系统（1.1）持久，当且仅当存在唯一的非平凡吸引周期解。

最后，我们强调，与时滞微分方程领域中的若干结果不同，本文中的所有证明均无需对固定时滞施加任何限制；也就是说，无论时滞大小如何，所有结论都成立。

本文其余部分安排如下。第2 节将更详细地介绍该主题的相关研究，给出定义并陈述定理。第3 节将介绍以往研究的结果以及证明所需的若干引理。第4 节将证明定理2.1 ； 最后，第5节将给出定理2.2、2.3和2.4的证明。

2. 结果

经典恒化器模型的提出引起了数学界的关注，数学界利用该模型研究控制、种间

竞争和持久性等问题。对连续搅拌釜反应器的深入认识促使人们对经典模型进行了若干改进。为简要回顾以往的研究，首先考虑 Caperon 的工作 [5] ，其中报告了营养物消耗与生物量增长之间存在时滞的实验证据。考虑到这一时滞，作者提出了一个类似于下述系统的模型：

$$\begin{aligned} s'(t) &= Ds^{(0)} - Ds(t) - p(s(t))x(t), \\ x'(t) &= x(t)p(s(t-\tau)) - Dx(t). \end{aligned}$$

Amster、Robledo 和 Sepúlveda [2] 考虑了该模型的一个版本，其中底物浓度具有周期性，并得到了正周期解存在的充要条件。另一方面，值得一提的是，Caraballo 等人于 [6] 修改了该系统，引入了可变（有界）时滞，并在洗出之外纳入了微生物死亡这一因素。

Freedman 等人 [11] 以及 Ellermeyer [8, 9],提出了另一种方法，用于对恒化器中物种生长过程存在时滞的情况进行建模，他们提出了以下系统：

$$\begin{aligned} s'(t) &= Ds^{(0)} - Ds(t) - p(s(t))x(t), \\ x'(t) &= x(t-\tau)p(s(t-\tau))e^{-D\tau} - Dx(t). \end{aligned}$$

注意，系统（1.1）是一个扩展模型，其中纳入了可变营养物输入和可变稀释率。研究时滞微分方程系统的持久性时遇到的一个困难是，状态空间并非局部紧集，因此有必要寻找新的方法来判定持久性，参见 [1]。为了研究持久性，在 [14] 中，作者扩展了 [10, 定理 3] 给出的判据，将生长过程中具有固定时滞的情形纳入其中。作者给出了系统（3.1）持久性的充要判据（见定理1.1）。因此，本文旨在延续这一研究，因为我们的首要目标是证明这些持久性判据同样意味着一致持久性。

我们在本小节结束时指出，本文其余部分均作如下假设：

假设 2.1。 $s^{(0)}(t)$ 有正数常量作为上下界， $D(t)$非负且有正数常量作为上界，并且 $D(t)$的积分发散。

2.1. **主要定义**。 在介绍本文所得定理之前，我们先给出本文涉及的定义。

定义 2.1 (非零初始条件)。 我们称(s^{in}, x^{in}) 为非零初始条件，如果其时间函数非负，并且 $x^{in}(0) > 0$ ，或者存在 $t_* \in [-\tau, 0]$ 使得 $s^{in}(t_*) > 0$ 且 $x^{in}(t_*) > 0$。

给定系统 (s, x) 的一个解，我们记1.1)

$$(s, x)(t) = (s, x)(t, (s^{in}, x^{in})) \tag{2.1}$$

当初始条件固定时。

定义 2.2 (持久性定义). 系统（*1.1*）称为 （强）持久的，如果

$$\liminf_{t\to\infty} x(t,(s^{in},x^{in}))>0,\quad \text{for all not null } (s^{in},x^{in}).$$

系统（*1.1*）称为一致持久的，如果存在某个 $\delta>0$ 使得

$$\liminf_{t\to\infty} x(t,(s^{in},x^{in}))>\delta,\quad \text{for all not null } (s^{in},x^{in}).$$

注意，在没有生物量的情况下，系统（1.1）变为线性微分方程

$$z'(t)=D(t)\left(s^{(0)}(t)-z(t)\right). \tag{2.2}$$

我们强调，方程（2.2）的任何具有正初始条件z_0 的解对所有 $t\geq 0$ 也都是正的。这一点很容易通过将解写成以下形式看出

$$z(t)=e^{-\int_0^t D(r)\,dr}z_0+\int_0^t e^{-\int_r^t D(r)\,dr}s^{(0)}(r)dr.$$

此外，对于 $D(t)$ 和 $s^{(0)}(t)$ 为有界连续函数时，($z(t)$ 的每个解都满足2.2):

$$\lim_{t\to+\infty}(z(t)-z^*(t))=0,$$

其中 $z^*(t)$ 是2.2在 $\mathbb{R}$上的唯一有界解，定义为

$$z^*(t):=\int_{-\infty}^t e^{-\int_h^t D(r)\,dr}D(h)s^{(0)}(h)dh. \tag{2.3}$$

我们称 (z^*,0) 为冲洗解；为简便起见，有时也仅将 z^*称为冲洗解。

定义 2.3 (灭绝)。 如果系统 *(1.1)* 的解 （s， x）趋于灭绝，则称该解

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0.$$

2.2. **一般非自治模型的结果**。 现在我们陈述本文的第一个主要结果。值得回顾的是，在本文中我们始终考虑$\tau\geq 0$ ，尤其是，所有结果也适用于无时滞的情形。

定理 2.1 (一致持久性)。 系统 *(1.1)* 是持久的，当且仅当它是一致持久的。

此外，如果系统具有持久性，那么存在 $\delta>0$ ，使得对于所有$R>0$和 $\alpha>0$，都有 $T^{in}=T^{in}(R,\alpha)\geq 0$，并且对于满足 $||(s^{in},x^{in})||\leq R$ 且 $x(\tau)\geq\alpha$ 的任意具有非零初始条件的解 (s,x)，都有 $x(t)\geq\delta$ ，对所有 $t\geq T^{in}$. 均成立

2.3. **周期模型的结果**。 固定一个常数 $\omega>0$。考虑到稀释率 $D(t)$ 和输入营养物浓度 $s^{(0)}(t)$ 均为正的ω-周期函数，我们想知道持久性是否是存在正的 ω-周期解的充要条件，其中系统为（1.1）。

定理 2.2 (灭绝)。 如果系统（*1.1*）的周期版本不具有持久性，那么每个解都会趋于灭绝。也就是说，在这种情况下，每个解都会趋于冲洗解。

请注意，后一结果的逆命题显而易见。

定理 2.3 （周期解的存在性）。若系统（1.1）是持久的，则至少存在一个正的 ω-周期解。

定理 2.4 (周期解的吸引性)。 在定理 2.3 的假设下，存在唯一的正 ω-周期解，它以指数速度吸引所有非零初始条件的解。

注2.1 (周期情形的完整分析)。 根据定理 2.2，注意到如果系统（1.1）不是持久的，则不存在正的 ω-周期解。因此，综合所有结果可得，系统（1.1）一致持久当且仅当存在唯一的吸引的正 ω-周期解。

3. 预备知识

3.1. **预备知识**。 系统（1.1）所给模型的推导基于对函数 $y(t$ 的考察，该函数表示在时间区间 $[t-\tau,t]$ 内被生物量吸收、并在时刻 t 仍留在生物反应器中的底物量，该函数定义如下:

$$y(t):=\int_{t-\tau}^{t}x(h)p(s(h))e^{-\int_{h}^{t}D(r)\,dr}\,dh. \tag{3.1}$$

要获得本文的结果，关键在于方程（1.1）的解与函数 $z^*(t)$ 和 $y(t)$ 之间的关系。

接下来，我们定义

$$c(t):=c(0)e^{-\int_{0}^{t}D(r)\,dr}+\int_{-\tau}^{t-\tau}c(h)p(z^*(h))e^{-\int_{h}^{t}D(r)\,dr}\,dh,\quad t\geq 0$$

并假设对所有 $\theta\in[-\tau,0]$， $c(\theta)\geq 0$，其中 $c(0)>0$ 是线性方程的一个解

$$c'(t)=-D(t)c(t)+c(t-\tau)p(z^*(t-\tau))e^{-\int_{t-\tau}^{t}D(r)\,dr}.$$

由于对所有 $t\geq 0$， $c(t)>0$，我们可以定义函数

$$\varphi(t):=\frac{c(t)}{c(t+\tau)}e^{-\int_{t}^{t+\tau}D(r)\,dr},\quad t\geq 0. \tag{3.2}$$

该函数与任何解 $(s,x)(t)$ 无关，是系统（1.1）固有的，也是确定持久性的关键。它的显式表达式为

$$\varphi(t)=\frac{c(0)e^{-\int_{0}^{t}D(r)\,dr}+\int_{-\tau}^{t-\tau}c(h)p(z^*(h))e^{-\int_{h}^{t}D(r)\,dr}\,dh}{c(0)e^{-\int_{0}^{t}D(r)\,dr}+\int_{-\tau}^{t}c(h)p(z^*(h))e^{-\int_{h}^{t}D(r)\,dr}\,dh}.$$

注意， c 的倍数会产生相同的 φ，且 φ 的像包含于$(0,1]$。

另一方面，与 $\varphi(t)$相关，给定一个满足非零初始条件的系统 $(s,x)(t)$（1.1）的解，我们定义函数 $\psi(t)=\psi(s,x)(t)$如下:

$$\psi(t):=\frac{x(t)}{x(t+\tau)}e^{-\int_{t}^{t+\tau}D(r)dr},\quad t\geq 0. \tag{3.3}$$

将（3.3）代入（1.1）的第二个方程，可得

$$x(t+\tau)=x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t+\tau}[p(s(h-\tau))\psi(h-\tau)-D(h)]dh},\quad t\geq t_0\geq\tau. \tag{3.4}$$

此外，将前一个方程与 $t_0 = t$ 代入方程（3.3），可得

$$\psi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^{t} p(s(h))\psi(h)dh}, \quad t \geq \tau. \tag{3.5}$$

我们指出，在本文中，对于涉及 $z^*(t)$、$s(t)$、$x(t)$ 或 $y(t)$ 的求和，我们会简化对时间的依赖。例如，我们记作 $(x + y)(t)$，而不写作$x(t) + y(t)$。

我们引入本文中将使用的其他记号。考虑带有范数的巴拿赫空间 $\mathsf{C} := C([-\tau, 0] \to \mathbb{R}^2)$

$$\|\phi\| = \max_{t\in[-\tau,0]} |\phi(t)| = \max_{t\in[-\tau,0]} \sqrt{\phi_1^2(t) + \phi_2^2(t)}.$$

通常，对于给定的连续函数 $\phi\colon [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}^2$ 以及任意 $t \geq 0$，我们定义$\phi_t \in \mathsf{C}$ 为

$$\phi_t(h) = \phi(t + h) \tag{3.6}$$

对于 $h \in [-\tau, 0]$。最后，对于一个 ω-周期函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们将其平均值记为

$$\langle f \rangle := \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t)\, dt.$$

3.2. **预备知识结果**。回顾假设 2.1 并考虑 $s^{(0)}$和 D 均由正数常量从上界约束 $\overline{s}$ 和 $\overline{D}$分别如此，并且 $s^{(0)}$ 由一个正数常量从下界约束 $\underline{s}$。注意，根据 z^*（2.3）中的定义可得 $z^*(t) \leq \overline{s}$ 对所有 t均成立。

下面给出了系统（1.1）的一种持久性判据的替代表述。证明见 [14, 定理 2。1]。

定理 3.1（持久性判据）。令 τ 为任意非负常数，并令$z^*(t)$ 和 $\varphi(t)$ 分别为由（2.3）和（3.2）定义的函数。

因此，系统（1.1）是持久的，当且仅当存在正数常量 η和 T 使得

$$\int_{t_1}^{t_2} p(z^*(t-\tau))\varphi(t-\tau)\, dt > \int_{t_1}^{t_2} (D(t) + \eta)\, dt \tag{3.7}$$

对所有 $t_1 > T$、$t_2 - t_1 > T$。

当 $s^{(0)}(t)$ 和 $D(t)$ 为 ω-周期函数这一特殊情形下，我们有以下结果。

定理 *3.2*（ω-周期情形的持久性）。设 τ 为任意非负常数，并假设函数 $s^{(0)}(t)$ 和 $D(t)$ 是 ω- 周期的。那么 $z^*(t)$ 是 ω- 周期的，且存在唯一的 $c(t)$（相差一个常数因子），使得在 *(3.2)* 中定义的 $\varphi(t)$ 是 ω-周期的。因此，系统 *(1.1)* 持久当且仅当

$$\langle p(z^*)\varphi \rangle > \langle D \rangle.$$

证明见 [14, 定理 3。1]。

为陈述必要的引理，我们现在引入一个函数 $f\colon [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}^+$，其上界为正数常量 M，并且满足

$$0 < \inf_{t\geq -\tau} f(t).$$

此外，我们假设 M 满足

$$M \geq \frac{1}{4\tau + 1}. \tag{3.8}$$

另考虑函数 $g\colon [-\tau, \infty) \to \mathbb{R}^+$，它满足如下性质：存在 $t_g \geq \tau$，使得

$$g(t) \leq M, \quad t \geq t_g - \tau. \tag{3.9}$$

本节最后陈述四个引理，它们是证明我们的一致持久性结果的基础。证明可见[14, 引理 4.1、引理 4.2、引理 4.4 和引理 4。5], 。我们注意到，最后一个证明正是要求（3.8）的原因。

引理 3.1。函数 $z^*(t)$ $s(t)$ $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别由（2.3）、（1.1）和（3.1）给出，满足

$$(z^* - s - x - y)(t) = (z^* - s - x - y)(0) e^{-\int_0^t D(r)\, dr}.$$

此外，它们都有上界。

引理 3.2. 函数 $\varphi(t)$ 定义于 (3.2) 满足

$$\varphi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^t \varphi(h) p(z^*(h))\, dh}.$$

引理 3.3. 设 $0 \leq t_0 < t_1$、$\tau > 0$ 和 $\varphi\colon [t_0 - \tau, \infty) \to (0, 1]$ 满足

$$\varphi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^t f(h)\varphi(h)\, dh}$$

对所有 $t > t_0$. 。假设存在 $\varepsilon > 0$，使得 $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$ 对所有 $t \in [t_0, t_1]$成立。˜那么存在 $\psi\colon [t_0 - \tau, \infty) \to (0, 1]$，满足

$$\tilde{\psi}(t) = e^{-\int_{t-\tau}^t g(h)\tilde{\psi}(h)\, dh}$$

对所有 $t > t_0$，并且满足

$$|\varphi(t) - \tilde{\psi}(t)| < 2\varepsilon\tau e^{2M(t-t_0)}$$

对所有 $t \in [t_0 - \tau, t_1]$。

引理 3.4。令 $t_0 \geq t_g$, $\tau > 0$ 并考虑函数 $\varphi, \psi\colon [t_0 - \tau, \infty) \to (0, 1]$满足

$$\varphi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^t f(h)\varphi(h)\, dh},$$
$$\psi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^t f(h)\psi(h)\, dh}$$

对所有 $t \geq t_0$ 均成立。因此

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < 3M\sqrt{\frac{(t - t_0)}{\inf f}}\left(1 - e^{-M\tau}\right)^{(t-t_0)/(2\tau) - 1/2}$$

对所有 $t \geq t_0$，其中 下确界 $f =$ 下确界$_{t \in [-\tau, \infty)} f(t)$。

4. 非自治情形下一致持久性的证明

4.1. **证明思路。** 为证明定理 2.1 ，我们细化 [14, 定理 2 的证明。1]注意，如果系统 (1.1) 具有持久性，那么它满足不等式 (3.7给出的条件。为用反证法证明一致持久性，考虑 x 足够小。于是 y 也很小，因此 $s \approx z^*$ (见引理 3.1)，这意味着 $\varphi \approx \psi$ 并且

$$\int p(z^*)\varphi \approx \int p(s)\psi,$$

若假设不等式 (D ，则它大于 3.7的积分。最后，根据方程 (3.4) x 不可能在时间趋于无穷时趋于零，因此我们得到矛盾。

此外，注意 x 在开始时可能极小。接下来我们首先证明，存在一个时间 T_*^{in} （它取决于初始条件的范数大小 (s^{in}, x^{in}) 以及 x 在时间 τ的取值），使得我们可以确保 x 增长 得足够多(见不等式 (4.7))。最后，一旦 x 足够大，我们便能证明，在此后所有正时间内，它都远离零。

4.2. **非自治恒化器模型的辅助引理。** 以下结果是对 [14, 引理 4.5] 的便捷改写。

引理 4.1. 设 $\tau \geq 0$ 和函数 $\varphi, \psi\colon [-\tau, \infty) \to (0, 1]$ 满足

$$\varphi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^{t} f(h)\varphi(h)\,dh},$$
$$\psi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^{t} g(h)\psi(h)\,dh}$$

˜对 $t \geq t_g$成立。给定 $\eta > 0$，存在正数常量 ε 和 T，使得：对所有$t_0 \geq t_g$ 和 $I \geq 0$，若

$$|f(t) - g(t)| < \varepsilon$$

˜对 $t \in [t_0, t_0 + T + I]$成立，则

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < \frac{\eta}{4M} \tag{4.1}$$

˜ ˜对所有 $t \in [t_0 + T, t_0 + T + I]$成立。

证明。 首先注意，若 $\tau = 0$，则 $\varphi(t) = \psi(t) = 1$ ，无需证明。因此，设 $\tau > 0$。由于

$$3M\sqrt{\frac{t}{\inf f}}\left(1 - e^{-M\tau}\right)^{t/(2\tau)-1/2}$$

当 t 趋于无穷大时，˜趋于零，因此我们选取 $T > 0$ 使得

$$3M\sqrt{\frac{t}{\inf f}}\left(1 - e^{-M\tau}\right)^{t/(2\tau)-1/2} < \eta/2, \quad t \geq \tilde{T}.$$

此外，令 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\varepsilon < \frac{\eta e^{-2M\tilde{T}}}{4\tau}.$$

现在固定 $t_0 \geq t_g$、 $I \geq 0$，并假设

$$|f(t) - g(t)| < \varepsilon$$

˜对所有 $t \in [t_0, t_0 + T + I]$ 均成立。我们将证明

$$|f(t_0 + \tilde{T} + a) - g(t_0 + \tilde{T} + a)| < \eta, \quad \text{for all } a \in [0, I]. \tag{4.2}$$

˜令 $a \in [0, I]$ 并考虑 $\psi\colon \ [t_0 + a - \tau, \infty) \to (0, 1]$ 由引理给出的函数3.3且满足二者

$$\tilde{\psi}(t) = e^{-\int_{t-\tau}^{t} g(h)\tilde{\psi}(h)\, dh},$$

对所有 $t > t_0 + a$ 和

$$|\varphi(t) - \tilde{\psi}(t)| < 2\varepsilon\tau e^{2M(t-t_0-a)}$$

˜对所有 $t \in [t_0 + a - \tau, t_0 + T + I]$. 特别地，将上述不等式与 ε 的定义结合可得

$$|\varphi(t_0 + \tilde{T} + a) - \tilde{\psi}(t_0 + \tilde{T} + a)| < 2\varepsilon\tau e^{2M\tilde{T}} < \eta/2.$$

˜此外，将引理 3.4 应用于 ψ 和 ψ，我们得到

$$|\psi(t) - \tilde{\psi}(t)| < 3M\sqrt{\frac{(t - t_0)}{\inf f}}\left(1 - e^{-M\tau}\right)^{(t-t_0)/(2\tau)-1/2} < \eta/2$$

˜对于 $t \geq t_0 + T$。因此，可得

$$\begin{aligned} |\varphi(t_0 + \tilde{T} + a) - \psi(t_0 + \tilde{T} + a)| &\leq |\varphi(t_0 + \tilde{T} + a) - \tilde{\psi}(t_0 + \tilde{T} + a)| \\ &\quad + |\tilde{\psi}(t_0 + \tilde{T} + a) - \psi(t_0 + \tilde{T} + a)| \\ &< \eta \end{aligned}$$

且不等式（4.2）得证。 □

4.3. **定理 2.1 的证明**。令 $f(t) = p(z^*(t))$，并固定

$$M = \max\left\{p\left(2\overline{s^{(0)}}\right), \frac{1}{4\tau + 1}\right\}. \tag{4.3}$$

证明。假设系统（1.1）是持久的，则定理 3.1 表明存在正数常量 η 和 T，使得

$$\int_{t_1}^{t_2} p(z^*(t - \tau))\varphi(t - \tau)\, dt > \int_{t_1}^{t_2} (D(t) + \eta)\, dt \tag{4.4}$$

对于所有 $t_1 > T, t_2 - t_1 > T$，其中 $\varphi(t)$ 仅取决于 $p(z^*(t))$。证明的其余部分将分为四个步骤，其中固定 η, T 和 $\varphi(t)$。

步骤 *1.* 首先，我们定义一些基本常数，它们不依赖于某个特定的解。由于 $s^{(0)}(t)$ 有正数常量作为下界，且 $z^*(0) > 0$，我们推知 $p(z^*(t))$ 也有正数常量作为下界。正如我们已经˜给定了一个 η，令 T 和 ε 为引理4.1给出的常数。注意，函数 $f(t)$ 和 $\varphi(t)$ 都是固定的。此外，可以将 ε 考虑得足够小，使得

$$\varepsilon \leq \eta/4. \tag{4.5}$$

为完成第一步，我们定义

$$L := \max_{\xi \in [0, 2\overline{s^{(0)}}]} p'(\xi),$$

and

$$\delta := \frac{\varepsilon e^{-\overline{D}(\tilde{T}+T+2\tau)}}{2L(1 + M\tau)}.$$

步骤*2*。现在设 R 和 α 为正数常量。我们回顾定理 2.1 的陈述：存在 $T^{in}(R,\alpha) \geq 0$，使得对于给定的 $x(t) \geq \delta$，对所有 $t \geq T^{in}$.因此，考虑 $t_0 \geq \tau$ 使得

$$\left(\overline{s^{(0)}} + 2R + Rp(R)\tau\right) e^{-\int_0^{t_0-\tau} D(r)\,dr} \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2L}, \overline{s^{(0)}}\right\} \tag{4.6}$$

并定义

$$\begin{aligned} I^{in} &= \max\left\{T, \frac{2}{\eta}\ln\left(\frac{\varepsilon e^{\overline{D}(t_0+\tilde{T})}}{2L\alpha(1+M\tau)}\right)\right\}, \\ T^{in} &= t_0 + \tilde{T} + I^{in} + \tau. \end{aligned}$$

给定（s（t） x（t））系统（1.1）的一个特解，使得 $\|$（s^{in}， x^{in}）$\| \leq R$并且 x（τ）$\geq \alpha$我们首先证明存在 $T_*^{in} \in [t_0-\tau, T^{in}]$ 使得

$$x(T_*^{in}) \geq \frac{\varepsilon}{2L(1+M\tau)}. \tag{4.7}$$

为了得到矛盾，我们假设相反的情况。特别地，

$$x(t) < \frac{\varepsilon}{2L(1+M\tau)} \tag{4.8}$$

对所有 $t \in [t_0-\tau, T^{in}-\tau]$。

首先，注意到对于 $t \geq 0$，可得

$$y(t) \leq \int_{t-\tau}^{t} x(h)p(s(h))\,dh \leq \int_{t-\tau}^{t} \|x_t\|p(\|s_t\|)\,dh \leq \|x_t\|p(\|s_t\|)\tau \tag{4.9}$$

其中我们使用式（3.6）中引入的记号。

其次，利用引理 3.1 以及在 $t = 0$处取值的前一个不等式，并结合初始数据的性质，可得

$$\begin{aligned} |(z^* - s - x - y)(t)| &\leq |(z^* - s - x - y)(0)| e^{-\int_0^t D(r)\,dr} \\ &\leq \left(z^*(0) + ||s^{in}|| + ||x^{in}|| + y(0)\right) e^{-\int_0^t D(r)\,dr} \\ &\leq \left(\overline{s} + 2R + Rp(R)\tau\right) e^{-\int_0^t D(r)\,dr}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

现在，根据解 $(s,x)(t)$，定义 $g(t) := p(s(t))$，并考虑由式 (3.3) 给出的函数$\psi(t) = \psi(s,x)(t)$。我们断言，若 $t_0 = t_g$，则 $p(s(t))$ 满足 (3.9)。事实上，考虑 $t \geq t_0 - \tau$。于是，利用对所有 t 均有 $z^*(t) \leq \overline{s}$（回顾定义 (2.3)），以及不等式 (4.6) 和 (4.10)，可得

$$s(t) \leq (s+x+y)(t) \leq |(z^* - s - x - y)(t)| + z^*(t) \leq 2\,\overline{s},$$

且（3.9）由 M 在式（4.3）中的定义成立。我们指出，构造满足（p（s（t））的 3.9)，是为了应用引理 4.1。

接下来，将（4.9）与（3.9）和（4.8）结合，可得

$$y(t) \leq \frac{M\tau\varepsilon}{2L(1+M\tau)}$$

对所有 $t \in [t_0, T^{in}-\tau]$。

现在，将这一最后的不等式与（4.6）、（4.8）和（4.10）结合起来，可得

$$\begin{aligned}|(z^*-s)(t)| &\le |(z^*-s-x-y)(t)| + (x+y)(t)\\ &\le (\overline{s}+2R+Rp(R)\tau)\, e^{-\int_0^t D(r)dr} + \frac{\varepsilon}{2L(1+M\tau)} + \frac{M\tau\varepsilon}{2L(1+M\tau)}\\ &\le \frac{\varepsilon}{2L} + \frac{\varepsilon}{2L(1+M\tau)} + \frac{M\tau\varepsilon}{2L(1+M\tau)}\\ &= \varepsilon/L,\end{aligned}$$

对所有 $t\in[t_0, T^{in}-\tau]$ 均成立。于是，由中值定理及 L 的定义可得

$$|p(z^*(t))-p(s(t))| \le L|(z^*-s)(t)| < \varepsilon$$

在相同的时间区间内。回想一下 $T^{in}-\tau = t_0+\tilde{T}+I^{in}$ 并应用引理4.1，其中 $I=I^{in}$。由此可推得（4.1）成立，结合（4.5）可得

$$\begin{aligned}|p(z^*(t))\varphi(t)-p(s(t))\psi(t)| &\le |p(z^*(t))\varphi(t)-p(z^*(t))\psi(t)|\\ &\quad + |p(z^*(t))\psi(t)-p(s(t))\psi(t)|\\ &\le p(z^*(t))|\varphi(t)-\psi(t)| + |p(z^*(t))-p(s(t))|\psi(t)\\ &\le M\frac{\eta}{4M}+\frac{\eta}{4}\\ &= \eta/2,\end{aligned}$$

然后

$$p(z^*(t))\varphi(t)-\eta/2 \le p(s(t))\psi(t) \tag{4.11}$$

对于 $t\in[t_0+\tilde{T}, T^{in}-\tau]$。

由于 $t_0+\tilde{T}-\tau = T^{in}-I^{in}$，并由式（4.4）和（4.11）可推得

$$\begin{aligned}&\int_{T^{in}-I^{in}}^{T^{in}} (p(s(h-\tau))\psi(h-\tau)-D(h))\,dh\\ &\quad\ge \int_{T^{in}-I^{in}}^{T^{in}} (p(z^*(h-\tau))\varphi(h-\tau)-\eta/2-D(h))\,dh\\ &\quad\ge \int_{T^{in}-I^{in}}^{T^{in}} \eta/2\,dh\\ &\quad= I^{in}\eta/2.\end{aligned} \tag{4.12}$$

由系统（1.1）的第二个方程可得以下不等式

$$\frac{d}{dt}x(t) \ge -\overline{D}x(t), \tag{4.13}$$

结合假设 $x(\tau)\ge\alpha$ 可得

$$x(T^{in}-I^{in}) = x(t_0+\tilde{T}+\tau) \ge e^{-\overline{D}(t_0+\tilde{T})}x(\tau) \ge e^{-\overline{D}(t_0+\tilde{T})}\alpha.$$

现在利用（3.4），由上述不等式和（4.12），再结合I^{in} 的定义，可得

$$\begin{aligned} x(T^{in}) &= x(T^{in}-I^{in})e^{\int_{T^{in}-I^{in}}^{T^{in}}(p(s(h-\tau))\psi(h-\tau)-D(h))\,dh} \\ &\geq e^{-\overline{D}(t_0+\tilde{T})}\alpha e^{I^{in}\eta/2} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2L(1+M\tau)}, \end{aligned}$$

这与（4.8）矛盾，因此存在 $T_*^{in}\leq T^{in}$ 满足（4.7）。

步骤 *3*。 还需证明，对于所有 $t\geq T^{in}$， $x(t)\geq\delta$ 。我们将证明上述结论对 $t\geq T_*^{in}$ 成立。为此，定义

$$\mathcal{S}=\left\{t\geq T_*^{in}: x(h)\geq\delta \text{ for all } h\in[T_*^{in},t]\right\}.$$

我们断言

$$T_*^{in}+\tilde{T}+T+2\tau\in\mathcal{S}. \tag{4.14}$$

令 $h\in[T_*^{in},T_*^{in}+\tilde{T}+T+2\tau]$，如前所述（3.4）、（4.13）、（4.12，结合 T_*^{in}的性质以及 δ的定义，可得

$$x(h)\geq x(T_*^{in})e^{-\int_{T_*^{in}}^{h}D(r)\,dr}\geq\frac{\varepsilon e^{-\overline{D}(h-T_*^{in})}}{2L(1+M\tau)}\geq\frac{\varepsilon e^{-\overline{D}(\tilde{T}+T+2\tau)}}{2L(1+M\tau)}\geq\delta$$

并且（4.14）成立。

接下来我们定义 $t^*:=\sup\mathcal{S}$，并断言 $t^*=\infty$。反设我们的断言不成立，即 $T_*^{in}+\tilde{T}+T+2\tau<t^*<\infty.$。由 $x(t)$ 的连续性可知

$$x(t^*)=\delta. \tag{4.15}$$

˜再由（4.13），对所有 $t\in[t^*-T-T-2\tau,t^*]$，有

$$x(t^*)\geq x(t)e^{-\int_t^{t^*}D(r)\,dr}\geq x(t)e^{-\overline{D}(\tilde{T}+T+2\tau)},$$

这意味着

$$x(t)\leq\delta e^{\overline{D}(\tilde{T}+T+2\tau)}=\frac{\varepsilon}{2L(1+M\tau)}$$

根据 δ的定义。我们重复步骤2中的推理，但现在应用引理 4.1 并考虑 $I=T$。注意

$$y(t)\leq\frac{M\tau\varepsilon}{2L(1+M\tau)}$$

˜对于 $t\in[t^*-T-T-\tau,t^*]$，因此我们可以推得

$$|p(z^*(t-\tau))\varphi(t-\tau)-p(s(t-\tau))\psi(t)|\leq\eta/2$$

对于 $t\in[t^*-T,t^*]$，因此

$$\int_{t^*-T}^{t^*}(p(s(h-\tau))\psi(h-\tau)-D(h))\,dh\geq T\eta/2.$$

最后，结合（3.4）、前面的不等式以及 $t^*-T\in\mathcal{S}$这一事实，可得

$$x(t^*)=x(t^*-T)e^{\int_{t^*-T}^{t^*}[p(s(h-\tau))\psi(h-\tau)-D(h)]dh}\geq x(t^*-T)e^{T\eta/2}>x(t^*-T)\geq\delta$$

因此，我们得到了与（4.15）矛盾的结论，所以 t^* 是无穷的，定理得证。□

5. 周期情形的证明

5.1. **证明思路**。根据定理3.2 若

$$\langle p(z^*)\varphi\rangle > \langle D\rangle$$

那么系统（1.1）是持久的。因此，定理 2.2 是一个逆向判据，即每个解趋于灭绝，当且仅当

$$\langle p(z^*)\varphi\rangle \le \langle D\rangle. \tag{5.1}$$

因此，这个不等式是生物量消失的阈值。我们用反证法证明定理2.2。假设

$$\limsup x(t) > 0$$

那么 z^* 从某个时刻起大于 s 。由引理 5.1 $\int p(z^*)\varphi$ 大于 $\int p(s)\psi$ （相差一个常数）。因此，若

$$\langle p(z^*)\varphi\rangle < \langle D\rangle$$

then

$$e^{\int (p(z^*(t-\tau))\varphi(t-\tau)-D(t))dt}$$

趋于零，这意味着

$$e^{\int (p(s(t-\tau))\varphi(t-\tau)-D(t))dt}$$

趋于零，并再次利用等式（3.4），便得到矛盾。若

$$\langle p(z^*)\varphi\rangle = \langle D\rangle$$

我们借鉴证明 [2, 定理 1] 的思路来证明

$$\int (p(z^*)\varphi - p(s)\psi)$$

趋于无穷，并重复前面的思路以得到矛盾。

如前所述，定理2.3 旨在结合定理[13, 定理 6] 与定理2.1，运用 Horn 不动点定理。为此，我们定义三个凸集 $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \mathcal{C}$，其中 S_0 且 S_2 是紧集，而 S_1 是开集（相对于 S_2）。受证明 [16, 定理 1] 的启发，我们利用阿尔泽拉-阿斯科利定理证明 S_0 和 S_2的紧性。因此，将 Horn 定理应用于庞加莱算子，可得一个正的 ω-周期解，前提是系统（1.1）是持久的。我们强调，我们将 S_1 显式表示为 S_2 与一个开集的交集。这确保了 S_1 是相对于 S_2 的开集，并且满足 Horn 定理的假设。

最后，为了引入定理2.4 的证明，先考虑无时滞的情形（$\tau = 0$）。固定一个（s_1, x_1）解，其初始条件非零，并取一个（s_2, x_2）正的 ω-周期解。注意，当时间足够大时，$s_1 + x_1 \approx z^*$，且 $s_2 + x_2 = z^*$，这意味着 $x_1 - x_2 \approx -(s_1 - s_2)$，于是

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(s_1 - s_2) &= -D(s_1 - s_2) - x_1 p(s_1) + x_2 p(s_2) \\
&= -D(s_1 - s_2) - x_1(p(s_1) - p(s_2)) - (x_1 - x_2)p(s_2) \\
&= -D(s_1 - s_2) - x_1 p'(\zeta)(s_1 - s_2) - (x_1 - x_2)p(s_2) \\
&\approx -(s_1 - s_2)(D + x_1 p'(\zeta) - p(s_2))
\end{aligned}$$

为简洁起见，这里省略时间依赖关系。注意，$\langle D\rangle = \langle p(s_2)\rangle$，因为 x_2 是 ω-周期的（回顾（3.4），并注意到 $\psi = 1$）。那么，如果系统是持久的，x_1 从某个时刻起便有一个正数常量作为其下界，并且 $s_1 - s_2$ 当时间趋于无穷时趋于零。这表明（s_2，x_2）是吸引的。为将这一思路应用于一般情形（$\tau \geq 0$），并借鉴 [7, 引理 2。4], 中给出的广义 Gronwall 型不等式，目标是定义一个适当的函数 w，使其界定 $s_1 - s_2$，并在时间趋于无穷时趋于零。

5.2. **周期性恒化器的辅助引理**。 我们需要以下引理，其灵感源自 [14, 引理 4.3]。

引理 5.1。 设 $t_0 \geq 0$ 和 $\tau > 0$。考虑 $\varphi, \psi: [t_0 - \tau, \infty) \to (0, 1]$ 满足

$$\varphi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^{t} f(h)\varphi(h)\,dh},$$
$$\psi(t) = e^{-\int_{t-\tau}^{t} g(h)\psi(h)\,dh}$$

对所有 $t > t_0$ 均成立，并假设对所有 $t \geq t_0$，$f(t) \geq g(t)$。那么

$$\int_{t_1}^{t_2} f(h-\tau)\varphi(h-\tau)\,dh + \tau M \geq \int_{t_1}^{t_2} g(h-\tau)\psi(h-\tau)\,dh$$

对所有 $t_2 \geq t_1 \geq t_0$。

证明。 证明分为三个步骤。

步骤 *1*。 注意，若对 $t \geq t_0$，有 $\varphi(t) \leq \psi(t)$，则可得

$$e^{\int_{t-\tau}^{t}(f(h)\varphi(h)-g(h)\psi(h))\,dh} = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \geq 1$$

这意味着

$$\int_{t-\tau}^{t} (f(h)\varphi(h) - g(h)\psi(h))\,dh \geq 0.$$

另一方面，若存在 $h_2 \geq h_1 \geq t_0$ 使得对所有$t \in [h_1, h_2]$，$\varphi(t) \geq \psi(t)$，则

$$\int_{h_1}^{h_2} (f(h)\varphi(h) - g(h)\psi(h))\,dh \geq 0,$$

因为

$$f(t)\varphi(t) - g(t)\psi(t) \geq g(t)\varphi(t) - g(t)\varphi(t) = 0.$$

步骤*2*。我们断言，存在一个有限递减序列 $\{h_n\}_{1\leq n\leq N} \subset \mathbb{R}$，满足以下性质：对于所有 $1 \leq n \leq N-1$，$\varphi(h_n) \leq \psi(h_n)$，并且如果 $\varphi(t) \geq \psi(t)$

$$t \in I = \bigcup_{n=1}^{N-1} [h_{n+1}, h_n - \tau] \cup [h_1, t_2 - \tau].$$

事实上，定义

$$h_1 = \begin{cases} t_2 - \tau & \text{if } \varphi(t_2-\tau) < \psi(t_2-\tau), \\ \inf\{t \geq t_1 - \tau : \varphi(h) \geq \psi(h) \text{ for all } h \in [t, t_2 - \tau]\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $n \geq 1$ 且当 $t_1 \leq h_n - \tau$ 时，定义

$$h_{n+1} = \begin{cases} h_n - \tau & \text{if } \varphi(h_n - \tau) < \psi(h_n - \tau), \\ \inf \left\{ \begin{array}{c} t \geq t_1 - \tau : \varphi(h) \geq \psi(h) \\ \text{for all } h \in [t, h_n - \tau] \end{array} \right\} & \text{否则。} \end{cases}$$

注意，当 $t_1 > h_N \geq t_1 - \tau$ 满足断言中的陈述时，序列便结束。此外，根据递减序列 $\{h_n\}_{1 \leq n \leq N}$ 的定义以及步骤 1，我们得到以下不等式

$$\begin{array}{rcl} \int_{h_n - \tau}^{h_n} f(h)\varphi(h)\,dh & \geq & \int_{h_n - \tau}^{h_n} g(h)\psi(h)\,dh, \text{ for all } 1 \leq n \leq N-1, \\ \int_I f(h)\varphi(h)\,dh & \geq & \int_I g(h)\psi(h)\,dh. \end{array} \tag{5.2}$$

由此可得

$$\int_{h_N}^{t_2 - \tau} f(h)\varphi(h)\,dh \geq \int_{h_N}^{t_2 - \tau} g(h)\psi(h)\,dh.$$

步骤 *3*。最后，注意到

$$\begin{aligned} \int_{t_1 - \tau}^{t_2 - \tau} f(h)\varphi(h)\,dh &\geq \int_{h_N}^{t_2 - \tau} f(h)\varphi(h)\,dh \\ &\geq \int_{h_N - \tau}^{t_2 - \tau} g(h)\psi(h)\,dh \\ &= \int_{t_1 - \tau}^{t_2 - \tau} g(h)\psi(h)\,dh - \int_{t_1 - \tau}^{h_N - \tau} g(h)\psi(h)\,dh \\ &\geq \int_{t_1 - \tau}^{t_2 - \tau} g(h)\psi(h)\,dh - \tau M, \end{aligned}$$

引理得证。 □

以下引理是定理 2.4 证明的基础。将其应用于系统（1.1）的周期解，它表明 $(x + y)$ $(t - \tau)$ 经过τ 个时间单位的稀释后恰好等于 x (t) 。

引理 5.2。 系统（$(s,\ x)$ (t) *1.1*）的每个解，若初始条件非零，且在（*3.1*）中定义的相应函数 y (t) 满足

$$x(t) - (x+y)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t} D(r)dr} = \left(x(\tau)e^{\int_0^{\tau} D(r)\,dr} - (x+y)(0) \right) e^{-\int_0^t D(r)dr}$$

对所有 $t \geq \tau$. 在特殊情况下，若 $(s,\ x)$ (t) 是一个 ω-周期（非平凡）解，则有

$$x(t) = (x+y)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t} D(r)dr}.$$

证明。 首先，请注意，对于具有非零初始条件的给定解 $(s, x)(t)$，可得

$$\frac{d}{dt}(x+y)(t-\tau) = -D(t-\tau)(x+y)(t-\tau) + x(t-\tau)p(s(t-\tau))$$

因此

$$\frac{d}{dt}\left((x+y)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t}D(r)\,dr}\right)=x(t-\tau)p(s(t-\tau))e^{-\int_{t-\tau}^{t}D(r)\,dr}$$
$$-D(t)(x+y)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t}D(r)\,dr}.$$

由此我们推得

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)-(x+y)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t}D(r)\,dr}\right)=$$
$$-D(t)\left(x(t)-(x+y)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t}D(r)\,dr}\right)$$

这给出了引理的第一部分 a.

注意

$$\left|x(t)-(x+y)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t}D(r)\,dr}\right|\to 0 \tag{5.3}$$

当 t 趋于无穷时。特别地，如果（s， x）（t）是（1.1）的非平凡周期解，则（5.3）的右端也是一个 ω-周期函数，并且当t 趋于无穷时收敛于零，因此它恒等于零，证明完成。□

5.3. **定理2.2的证明**。

证明。 假设系统（1.1）不是持久的，给定一个解（s， x）（t），我们将证明 x（t）当 $t\to\infty$时趋于零。如果 $\lim_{t\to\infty}x$（t） $=0$，则无需证明。否则，存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}x(t)>\varepsilon \tag{5.4}$$

并寻求矛盾。利用引理 3.1，可得

$$|(z^*-s-x-y)(t)|\to 0,\quad t\to\infty.$$

此外，由于函数 $z^*(t)$ $s(t)$ $x(t)$ 和 $y(t)$ 为正，且

$$|(z^*-s-x-y)(t)|<\varepsilon$$

从某个时间起，根据（5.4），我们可以得出存在 $t_0\geq 0$ 使得 z^*（t_0） $\geq s$（t_0）。此外， z^*（t） $-s$（t）满足

$$\frac{d}{dt}(z^*-s)(t)=-D(t)(z^*-s)(t)+x(t)p(s(t))\geq -D(t)(z^*-s)(t)$$

因此，根据上述微分不等式，我们可知 $z^*(t)$ $\geq$ $s(t)$，其中 $t\geq t_0$。注意，根据假设，系统（1.1）不是持久的，因此下列等式之一成立

$$\langle D\rangle>\langle p(z^*)\varphi\rangle, \tag{5.5}$$

or

$$\langle D\rangle=\langle p(z^*)\varphi\rangle. \tag{5.6}$$

证明的其余部分自然分为两种情形。

情形*1*。假设（5.5）成立。再次考虑函数 $f(t) = p(z^*(t))$ 和 $g(t) = p(s(t))$，于是由（3.4）和引理 5.1 可得，对于 $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(p(s(r-\tau))\psi(r-\tau)-D(r))\,dr} \\ &= x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(p(s(r-\tau))\psi(r-\tau)-p(z^*(r-\tau)\varphi(r-\tau))\,dr+\int_{t_0}^{t}(p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau)-D(r))\,dr} \\ &\leq x(t_0)e^{\tau M}e^{-\int_{t_0}^{t}(D(r)-p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau))\,dr}. \end{aligned}$$

由（5.5）可得 x（t） $\to 0$ 因为 $t \to \infty$，从而得到矛盾。情形*2*。现在假设（5.6）成立。我们断言

$$\int_{t_0}^{t}(p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau) - p(s(r-\tau))\psi(r-\tau))\,dr \to \infty \tag{5.7}$$

如 $t \to \infty$。事实上，否则我们可以找到 $K > 0$，使得：对于所有 $t > t_0$，存在 $t_1 > t$，使得

$$\int_{t_0-\tau}^{t_1-\tau}(p(z^*(r))\varphi(r) - p(s(r))\psi(r))\,dh < K.$$

现在将上述不等式与引理 5.1 结合，我们得到对于所有 $t > t_0$ 可推出

$$\begin{aligned} \int_{t_0-\tau}^{t-\tau}(p(z^*(r))\varphi(r) - p(s(r))\psi(r))\,dr &= \int_{t_0-\tau}^{t_1-\tau}(p(z^*(r))\varphi(r) - p(s(r))\psi(r))\,dr \\ &\quad - \int_{t-\tau}^{t_1-\tau}(p(z^*(r))\varphi(r) - p(s(r))\psi(r))\,dr \\ &\leq K + \tau M. \end{aligned}$$

因此，由（3.4）可得，对于所有 $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} \ln(x(t)) &= \ln(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t}(p(s(r-\tau))\psi(r-\tau) - D(r))\,dr \\ &= \ln(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t}(p(s(r-\tau))p(\psi(r-\tau) - p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau))\,dr \\ &\quad + \int_{t_0}^{t}(p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau) - D(r))\,dr \\ &\geq \ln(x(t_0)) - K - \tau M + \min_{l\in[0,\omega]}\int_{0}^{l}(p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau) - D(r))\,dr, \end{aligned}$$

这意味着，对于所有 $t \geq t_0$，$\ln(x(t))$ 有下界，即解是持久的。这与我们的假设矛盾，因此（5.7）得证。

现在，再次利用 3.4）对于 $t \geq t_0$，可得

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}p(s(r-\tau))\psi(r-\tau)-D(r)\,dr} \\ &= x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}p(s(r-\tau))\psi(r-\tau)-p(z^*(r-\tau)\varphi(r)\,dr+\int_{t_0}^{t}p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau)-D(r)\,dr}. \end{aligned}$$

最后，注意到（5.6）意味着对于所有 $t \geq t_0$，我们都有

$$\int_{t_0}^{t}p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau) - D(r)\,dr \leq \max_{l\in[0,\omega]}\int_{0}^{l}p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau) - D(r)\,dr,$$

因此我们得到

$$x(t) \le x(t_0) M e^{-\int_{t_0}^{t} p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau) - p(s(r-\tau)\psi(r-\tau)\,dr},$$

其中 $M := \max_{t\in[0,\omega]} \left\{ e^{\int_0^t p(z^*(r-\tau))\varphi(r-\tau) - D(r)\,dr} \right\}$。由（5.7）我们得到$x(t) \to 0$ 当 $t \to \infty$时，这与（5.4）矛盾，故证明完成。 □

5.4. **定理2.3的证明**。

证明。 证明分为两个步骤，我们回顾 $\mathcal{C} := C([-\tau, 0] \to \mathbb{R}^2)$。步骤 *1*。 令 $\delta > 0$ 为定理 2.1 给出的值，并考虑

$$T^{in} = T^{in}(R, \alpha) \quad \text{with } R = 3\,\overline{s} \quad \text{and } \alpha = e^{-\overline{D}\tau}\delta/2.$$

现在断言，具有初始条件的系统 (1.1) 的任意解

$$\|(s^{in}, x^{in})\| \le 3\,\overline{s}$$

满足

$$\|(s, x)_t\| \le R_0 \text{ for all } t \ge 0, \tag{5.8}$$

其中

$$R_0 = z^*(0) + 6\,\overline{s} + 3\,\overline{s}p\,(3\,\overline{s})\,\tau + \overline{s}.$$

为证明这一点，首先注意到，利用定理 2.1 的证明中推导 (4.9) 时所用的论证，可得

$$|y(0)| \le \|(s^{in}, x^{in})\| p(\|(s^{in}, x^{in})\|)\tau \le 3\,\overline{s}p(3\,\overline{s})\tau.$$

根据 R_0 的定义，并再次应用引理 3.1 ，我们得到

$$\begin{aligned} |(s,x)(t)| &\le (s+x)(t) \\ &\le (s+x+y)(t) \\ &\le |(z^* - s - x - y)(t)| + |z^*(t)| \\ &\le |(z^* - s - x - y)(0)| e^{-\int_0^t D} + |z^*(t)| \\ &\le \max\{z^*(0), (s+x+y)(0)\} + \overline{s} \\ &\le z^*(0) + 6\,\overline{s} + 3\,\overline{s}p\,(3\,\overline{s})\,\tau + \overline{s} \\ &= R_0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

对所有 $t \ge -\tau$ 均成立。

步骤*2*. 定义

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \phi \in \mathcal{C} : |\phi(h) - \phi(r)| \le \sqrt{2} R_0 \left(\overline{D} + p(R_0)\right) |h - r| \text{ for all } h,\, r \in [-\tau, 0] \right\} \\ S_0 &= \{\phi \in S : \|\phi\| \le 2\,\overline{s},\, |\phi_2(0)| \ge \delta\}, \\ S_1 &= \{\phi \in S : \|\phi\| < 3\,\overline{s},\, |\phi_2(0)| > \delta/2\}, \\ S_2 &= \left\{ \phi \in S : \|\phi\| \le R_0,\, |\phi_2(0)| \ge e^{-\overline{D}T^{in}} \delta/2 \right\}. \end{aligned}$$

注意， $S_0 \subset S_1 \subset S_2$ 是 C 的凸子集， S_0 和 S_2 则由阿尔泽拉-阿斯科利定理可知是紧集，并且

$$S_1 = S_2 \cap \{\phi \in \mathcal{C} : \|\phi\| < 3\,\overline{s},\, |\phi_2(0)| > \delta/2\}$$

因此， S_1 相对于 S_2是开集。

接下来，我们定义庞加莱算子如下：

$$\begin{aligned} P: \quad S_2 &\to \quad \mathcal{C} \\ \phi &\mapsto (s,x)(\cdot+\omega,\phi). \end{aligned}$$

其中（s， x）（t， ϕ）是系统（1.1）在时间 t、初始条件为 ϕ 时的解（回顾（2.1））。注意，对于给定的 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$， P^k（ϕ）是时间区间 t， ϕ）上的解（ $[k\omega-\tau,k\omega]$（包括 $k\omega-\tau<0$ 时）。

要应用 Horn 不动点定理，我们需要证明 P^k（S_1）对 $\subseteq S_2$ 所有$k\in\mathbb{N}$均成立。令 $\phi\in S_1$，并令（s， x）为对应于初始条件ϕ的解，只需证明（s， x）$_t\in S_2$ 对于 $t\geq 0$ 成立。由方程（5.8）可得|（s， x）$_t|\leq R_0$ 而对于 $t\leq T^{in}$，不等式（4.12）推出

$$|x(t)|\geq e^{-\overline{D}t}|x(0)|\geq e^{-\overline{D}T^{in}}\delta/2.$$

因此

$$x(\tau)\geq e^{-\overline{D}\tau}\delta/2 \tag{5.10}$$

因此，利用定理2.1，如果 $t\geq T^{in}$，那么

$$|x(t)|\geq\delta\geq e^{-\overline{D}T^{in}}\delta/2.$$

现在可以看出

$$\begin{aligned} |(s,x)(h)-(s,x)(r)| &= \sqrt{(s(h)-s(r))^2+(x(h)-x(r))^2} \\ &= \sqrt{s'^2(\xi_s)(h-r)^2+x'^2(\xi_x)(h-r)^2} \\ &= |h-r|\left(\Big(D(\xi_s)(s^{(0)}(\xi_s)-s(\xi_s))-x(\xi_s)p(s(\xi_s))\Big)^2\right. \\ &\quad \left.+\left(-D(\xi_x)x(\xi_x)+x(\xi_x-\tau)p(s(\xi_x-\tau))e^{-\int_{\xi_x-\tau}^{\xi_x}D(r)\,dr}\right)^2\right)^{1/2} \\ &\leq |h-r|\left(\big(\overline{D}R_0+R_0p(R_0)\big)^2+\big(\overline{D}R_0+R_0p(R_0)\big)^2\right)^{1/2} \\ &= |h-r|\sqrt{2}R_0\left(\overline{D}+p(R_0)\right) \end{aligned}$$

对所有 h， $r\geq 0$ 以及介于 h 和 r之间的 ξ_s,ξ_x 均成立。因此

$$(s,x)\Big|_{[k\omega-\tau,k\omega]}=P^k(\phi)\in S_2,\quad \text{for all } k\in\mathbb{N}.$$

接下来，我们需要证明存在 $m\in\mathbb{N}$，使得若 $k\geq m$，则 $P^k(\phi)\in S_0$。令 $T\geq T^{in}$ 满足

$$R_0e^{-\int_0^T D(r)\,dr}\leq\overline{s}.$$

若 $t\geq T$，则再次利用定理2.1 并考虑（5.10），可得$|x(t)|\geq\delta$。再按照式（（s， x）(t) |）中的方法估计5.9）一次，我们得到

$$|(s,x)(t)|\leq R_0e^{-\int_0^t D(r)\,dr}+\overline{s}\leq 2\,\overline{s}.$$

与前面一样，可得

$$|(s,x)(h)-(s,x)(r)|\leq|h-r|\sqrt{2}R_0\left(\overline{D}+p(R_0)\right)$$

对于所有 h， $r\geq 0$。因此，如果 $k\omega\geq m\omega\geq T$我们得到

$$(s,x)\Big|_{[k\omega-\tau,k\omega]}=P^k(\phi)\in S_0.$$

最后，根据 Horn 不动点定理 [13, 定理 6], 存在一个 P 其第二个坐标为正的固定点。□

5.5. **定理2.4的证明**。

证明。 考虑一个没有零初始条件的解（s_1, x_1），以及一个非平凡周期解（s_2, x_2），其存在性已在定理2.3中得到证明。证明将分为三个步骤。

步骤 *1*。 注意，引理 3.1 给出 $z^*(t-\tau) = (s_2+x_2+y_2)(t-\tau)$，于是

$$x_2(t) + \frac{(s_2 - z^*)(t-\tau)x_2(t)}{(x_2+y_2)(t-\tau)} = 0.$$

另一方面，同时利用引理 5.2，我们得到

$$\begin{aligned} x_1(t) + \frac{(s_1 - z^*)(t-\tau)x_2(t)}{(x_2+y_2)(t-\tau)} &= x_1(t) + (s_1 - z^*)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t} D(r)\,dr} \\ &= x_1(t) - (x_1+y_1)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t} D(r)\,dr} \\ &\quad + (s_1+x_1+y_1-z^*)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t} D(r)\,dr} \\ &= \left(x_1(\tau)e^{\int_0^{\tau} D(r)\,dr} - (x_1+y_1)(0)\right)e^{-\int_0^t D(r)dr} \\ &\quad + (s_1+x_1+y_1-z^*)(0)e^{-\int_0^t D(r)\,dr} \\ &= -C_0 e^{-\int_0^t D(r)\,dr}, \end{aligned}$$

其中

$$C_0 = (z^* - s_1)(0) - x(\tau)e^{\int_0^{\tau} D(r)\,dr}.$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} (x_1-x_2)(t) &= -(s_1-s_2)(t-\tau)\frac{x_2(t)}{(x_2+y_2)(t-\tau)} \\ &\quad + \left(\frac{(s_1-z^*)(t-\tau)x_2(t)}{(x_2+y_2)(t-\tau)} + x_1(t) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{(s_2-z^*)(t-\tau)x_2(t)}{(x_2+y_2)(t-\tau)} - x_2(t)\right) \\ &= -(s_1-s_2)(t-\tau)\frac{x_2(t)}{(x_2+y_2)(t-\tau)} - C_0 e^{-\int_0^t D(r)\,dr}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

因此，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(s_1-s_2)(t) &= -D(t)(s_1-s_2)(t) - x_1(t)p(s_1(t)) + x_2(t)p(s_2(t)) \\ &= -D(t)(s_1-s_2)(t) - x_1(t)(p(s_1(t)) - p(s_2(t))) \\ &\quad - (x_1-x_2)(t)p(s_2(t)) \\ &= -D(t)(s_1-s_2)(t) - x_1(t)p'(\xi)(s_1-s_2)(t) \\ &\quad - (x_1-x_2)(t)p(s_2(t)) \\ &= -(s_1-s_2)(t)(D(t)+x_1(t)p'(\xi)) \\ &\quad + (s_1-s_2)(t-\tau)\frac{x_2(t)p(s_2(t))}{(x_2+y_2)(t-\tau)} + C_0 p(s_2(t))e^{-\int_0^t D(r)\,dr}\end{aligned}$$

其中 $\xi = \xi(t) \in (s_1(t)\ s_2(t))$，但为简单起见，我们不写出对 t 的依赖关系。

步骤*2.* 定义

$$m = \min_{t\geq\tau}\{x_1(t)p'(\xi(t))\}.$$

由于该系统具有持久性， p' 为正，且 s_1、 s_2 有上界，因此我们可推得 $m > 0$。此外，考虑函数

$$J(\varepsilon) = -m + \max_{h\in[0,\omega]}\left\{\frac{x_2(h)p(s_2(h))}{(x_2+y_2)(h)}\right\}(e^{\tau\varepsilon}-1) + 3\varepsilon/2.$$

注意到 $J(0) < 0$，因此我们可以取一个正数 ε，使得 $\varepsilon < \mathrm{h}D\mathrm{i}/2$ 且 $J(\varepsilon) \leq 0$。还要注意，存在 $t_0 \geq \omega$ 使得

$$C_0 \max_{h\in[0,\omega]}\{p(s_2(h))\}\, e^{-\int_0^{t_0-\omega} D(r)\,dr} \leq \min_{h\in[0,\omega]}\left\{\frac{\varepsilon\,(x_2+y_2)(h)}{2}\right\}. \tag{5.12}$$

综合以上考虑，定义

$$w(t) = \max_{h\in[t_0-\tau,t_0]}\left\{\frac{(s_1-s_2)(h)}{(x_2+y_2)(h)}, 1\right\}(x_2+y_2)(t)e^{-(t-t_0)\varepsilon}, \quad t \geq t_0-\tau,$$

and

$$\mathcal{S} = \{t \geq t_0 : (s_1-s_2)(h) \leq w(h) \text{ for all } h \in [t_0,t]\}.$$

注意，S 是一个非空集合，因为 $t_0 \in$S。我们断言 $T^* =$sup S 是无限的。反之，假设 T^* 是有限的。因此，根据中值定理，存在 $t^* \in [T^*, T^*+\tau)$ 使得

$$\frac{d}{dt}(s_1-s_2)(t^*) \geq \frac{d}{dt}w(t^*), \quad (s_1-s_2)(t^*) > w(t^*) > 0. \tag{5.13}$$

注意到

$$\begin{aligned}w(t-\tau) &= \max_{h\in[t_0-\tau,t_0]}\left\{\frac{(s_1-s_2)(h)}{(x_2+y_2)(h)}, 1\right\}(x_2+y_2)(t-\tau)\frac{(x_2+y_2)(t)}{(x_2+y_2)(t)}e^{-(t-t_0)\varepsilon}e^{\tau\varepsilon} \\ &= w(t)\frac{(x_2+y_2)(t-\tau)}{(x_2+y_2)(t)}e^{\tau\varepsilon},\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}w(t) = &\max_{h\in[t_0-\tau,t_0]}\left\{\frac{(s_1-s_2)(h)}{(x_2+y_2)(h)},1\right\}\\ &e^{-(t-t_0)\varepsilon}\left(-D(t)(x_2+y_2)(t)-x_2(t)p(s_2(t))-\varepsilon(x_2+y_2)(t)\right)\\ &= w(t)\left(-D(t)-\frac{x_2(t)}{(x_2+y_2)(t)}p(s_2(t))-\varepsilon\right).\end{aligned}$$

此外，利用（5.12），对于 $t\geq t_0$，我们有

$$\begin{aligned}C_0p(s_2(t))e^{-\int_0^t D(r)\,dr} &\leq \min_{h\in[0,\omega]}\left\{\frac{\varepsilon\,(x_2+y_2)(h)}{2}\right\}e^{-\int_{t_0-\omega}^t D(r)\,dr}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}(x_2+y_2)(t)e^{-(t-t_0)\varepsilon}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}w(t),\end{aligned}$$

由不等式得到

$$e^{(t-t_0)\varepsilon-\int_{t_0-\omega}^t D(r)\,dr}\leq 1,$$

由于 $\varepsilon\leq \mathrm{h}D\mathrm{i}/2$，该式成立。现在，对上一步的 s_1-s_2 求导，并利用上述估计，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(s_1-s_2)(t^*) &\leq -(s_1-s_2)(t^*)(D(t^*)+m)+(s_1-s_2)(t^*-\tau)\frac{x_2(t^*)p(s_2)(t^*)}{(x_2+y_2)(t^*-\tau)}\\ &\quad + C_0p(s_2(t^*))e^{-\int_0^{t^*}D(r)\,dr}\\ &< -w(t^*)(D(t^*)+m)+w(t^*-\tau)\frac{x_2(t^*)p(s_2)(t^*)}{(x_2+y_2)(t^*-\tau)}+\frac{\varepsilon}{2}w(t^*)\\ &= w(t^*)\left(-D(t^*)-m+\frac{x_2(t^*)p(s_2)(t^*)}{(x_2+y_2)(t^*)}e^{\tau\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\\ &< w(t^*)\left(-D(t^*)+\frac{x_2(t^*)p(s_2)(t^*)}{(x_2+y_2)(t^*)}-\varepsilon\right)\\ &= \frac{d}{dt}w(t^*)\end{aligned}$$

其中我们使用了 ε 的定义。这与（5.13）矛盾，因此，$\sup\mathcal{S}=\infty$。步骤 *3*。 按照类似的推理，这次针对 s_2-s_1，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(s_2-s_1)(t) &\leq -(s_2-s_1)(t)(D(t)+x_1(t)p'(\xi))\\ &\quad +(s_2-s_1)(t-\tau)\frac{x_2(t)p(s_2(t))}{(x_2+y_2)(t-\tau)}+(-C_0)\,p(s_2(t))e^{-\int_0^t D(r)\,dr}\end{aligned}$$

并且由于以下原因，我们得到了所需的结果

$$|(s_1-s_2)(t)|\leq\max_{h\in[t_0-\tau,t_0]}\left\{\frac{(s_1-s_2)(h)}{(x_2+y_2)(h)},1\right\}(x_2+y_2)(t)e^{-(t-t_0)\varepsilon}$$

当 t 趋于无穷大时，它趋于零（注意，我们不知道 C_0 的符号）。

尚需证明，当 $x_1(t)$ 趋于无穷大时，它趋于 $x_2(t)$。当 t 趋于无穷大时，由方程（5.11）可得

$$|(x_1 - x_2)(t)| = \left|(s_1 - s_2)(t-\tau)e^{-\int_{t-\tau}^{t} D(r)\,dr} + C_0 e^{-\int_0^t D(r)\,dr}\right|$$
$$\leq |(s_1 - s_2)(t-\tau)| + |C_0| e^{-\int_0^t D(r)\,dr}$$

并且我们得出结论：当 t 趋于无穷时，$|(x_1 - x_2)(t)|$ 以指数速度趋于零。

最后，对于周期解的唯一性，只需注意到，两个周期解之间的距离只有在所有时间都为零时才会趋于零。

□

致谢

本研究部分由 PROGRAMA REGIONAL MATH-AMSUD MATH2020006 资助。第一作者获得 CONICET 项目 PIP 11220200100175CO 的资助。第二作者获得 FONDECYT 11190457 的资助。

参考文献

[1] Pablo Amster 和 Melanie Bondorevsky。时滞微分方程系统的持久性与周期解。《应用数学与计算》，403 126193, 2021 3 : 。Pablo Amster、[2] Gonzalo Robledo 和 Daniel Sepúlveda。具有周期性营养物供给和生长时滞的恒化器动力学。《非线性》，33 11 5839, 2020 3, 13 ( ): 。Pablo Amster、[3] Gonzalo Robledo 和 Daniel Sepúlveda。具有周期性输入的延迟恒化器的 ω-周期解的存在性。《非线性分析：现实世界应用》，55 103134, 2020 1, 2 : 。Geoffrey Butler、Herb I Freedman 和 Paul Waltman。一致持久系统。《美国数学会会刊》，页码 425 430, 1986 2 – 。[4] John Caperon。球等鞭金藻在硝酸盐浓度变化环境中的种群生长响应时滞。《生态学》，50 2 188 192, 1969 1, 3 ( ): – 。[5] Tomás Caraballo、Xiaoying Han 和 Peter E Kloeden。具有可变时滞的非自治恒化器。《SIAM数学分析杂志》，47 3 2178 2199, 2015 3 ( ): – 。[6] Young Pil Choi 和 Jan Haskovec。具有归一化通信权重和时滞的 Cucker-Smale模型。《动力学及相关模型》，10 4 1011 1033, 2017 14 ( ): – 。[7] Sean F Ellermeyer。恒化器中的竞争：具有生长滞后响应模型的全局渐近行为。《SIAM应用数学杂志》，54 465，1994年 2 456( ): – 。2, 3[8] Sean F Ellermeyer、Jerald Hendrix 和 Nariman Ghoochan。细菌连续培养中延迟生长响应的理论与实证研究。《理论生物学杂志》，222 4 485 494, 2003 1, 3 ( ): – 。[9] Sean F Ellermeyer、Sergei S Pilyugin 和 Ray Redheffer。具有可变营养物输入的恒化器持久性判据。《微分方程杂志》，171 1 132 147, 2001 2, 3 ( ): – 。[10] Herbert I Freedman、Joseph WH So 和 Paul Waltman。具有时滞的恒化器竞争。IMACS年刊：计算与应用数学，5 1 4, 1989 3 ( ): 。[11] Herbert I Freedman 和 Paul Waltman。若干三物种食物链模型的数学分析。《数学生物科学》，33 3 4 257 276, 1977 2 (-): – 。[12] WA Horn。巴拿赫空间中紧映射与流的一些不动点定理。《美国数学会汇刊》，149 2 391 404, 1970 2, 13, 20 ( ): – 。[13] Mauro Rodriguez Cartabia。具有可变营养物输入、可变洗出率及生长滞后响应的恒化器持久性判据。arXiv预印本 arXiv:2204 09735, 2022年 2, 3, 6, 7, 8, 14 。.[14] Hal L Smith 和 Paul Waltman。《恒化器理论：微生物竞争动力学》，第 13 卷。剑桥大学出版社，1995年。1

[16] Zhidong Teng、Linfei Nie 和 Xining Fang。泛函微分方程一般周期脉冲种群系统的周期解及其应用。《计算机与应用数学》，61(9):2690–2703，2011。13电子邮箱：
mrodriguezcartabia@dm.uba.ar， daniel.sepulveda@utem.cl