arXiv:2301.08561v1 [math.AP] 8 Jan 2023

三重非线性热敏电阻问题的全局吸引子的存在性结果

MOULAY RCHID SIDI AMMI、IBRAHIM DAHI、
ABDERRAHMANEEL HACHIMI 和 DELFIM F. M. TORRES

Abstract. 我们研究了 Sobolev 空间中三重非线性热敏电阻问题的有界弱解的存在性与唯一性。此外，我们证明了吸收集的存在性，并由此证明了全局吸引子的存在性。

1. 引言

热敏电阻由迈克尔·法拉第于1833年发现。他注意到，硫化银的电阻降低时，温度会升高。关于热敏电阻问题的大量研究可见于 [1, 9, 10, 15, 17]。

热敏电阻是一种电路元件，可用作限流器或温度传感器。它通常是一个小圆柱体，由一种电导率高度依赖于温度的陶瓷材料制成。热敏电阻能够调节流经导体器件的电流所产生的热量。热敏电阻问题受到广泛关注。请参阅 [4, 7, 10, 12, 17, 19] 及其中的参考文献。

热敏电阻通常用作各种工业设备中的温度控制装置，应用范围从航天器到空调控制器。它们还常用于医疗领域，以测量局部和全身温度；用于气象学，以进行天气预报；以及用于化学工业，作为过程温度传感器。 [23]中对热敏电阻及其在电子学和其他行业中的应用作了详细介绍。

热敏电阻分为两种：负温度系数和正温度系数，其温度系数分别为负和正。负温度系数热敏电阻是一种温度传感器，它利用陶瓷和金属复合材料的电阻特性来测量温度。负温度系数传感器在温度感测方面具有诸多优势，包括体积小、长期稳定性好，以及准确度和精度高。正温度系数电涌保护器的工作原理如下：当电路中的电流突然增大时，器件会发热，导致其电导率大幅下降，从而有效切断电路。本文中，我们

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35A01，35A02，46E35。
Key words and phrases. 存在性；唯一性；热敏电阻问题；Sobolev 空间；全局吸引子； ω–极限；不变集；absobsing 集；半群。本文是论文的 19 页预印本，论文的最终定稿发表于《Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. (MJPAA)》，ISSN：在线版 2351-8227 – 印刷版 2605-6364。

考虑如下的一般非局部热敏电阻问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha(v)}{\partial s} - \Delta_m v = \kappa \dfrac{f(v)}{(\int_\Omega f(v)dx)^2}, & \text{in} \quad Q, \\ \alpha(v(x,0)) = \alpha(v_0), & \text{in} \quad \Omega, \\ v = 0, & \text{on} \quad \Gamma\times]0,M[. \end{cases} \tag{1.1}$$

问题（1.1）描述了电流流经某种材料时产生的温度扩散，其中 $f(v)$ 表示导体的电阻，而 $f(v)$ $(\int_\Omega f(v)dx)^2$ 表示（1.1）中的非局部项。这里，$Q = \Omega \times [0,M]$，其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ ~~中的有界开子~~集，$N \geq 1$，且 M 是一个正常数。

问题（1.1）是 Kaval- laris 和 Nadzieja 的研究 [16] 中所提出问题的推广。对于 $\alpha(v) = v$ 和 $m = 2$，可得到 Lacey 的研究 [17]，中出现的经典热敏电阻问题模型，它是下列问题的一种变换：

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \nabla \cdot (\kappa(v)\nabla v) + \rho(v)|\nabla \psi|^2, \\ \nabla \cdot (\rho(v)\nabla \psi) &= 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中，κ 是热导率，ψ 是电势，而 $\rho(v)$ 表示电导率。电导率通常是一个正函数，假设其在某一临界温度处会骤降数个数量级，并在更高温度下基本保持为零。这一特性对于热敏电阻作为热电开关的预期功能至关重要。

在 $\alpha(v) = v$ 和 $m = 2$ 的情形下，文献 [10] 建立了问题（1.1）有界弱解的存在性与唯一性结果。许多作者在对 f 和 m 作出不同假设的条件下，证明了最优控制的存在性。例如，可参见 [14]。另一方面，其他作者对（1.1）和（1.2）进行了数值计算，例如 [6, 21, 22, 28]，其中所选参数对应于实际器件。此外，文献 [13] 研究了 $N = 1$ 情形下的问题（1.2）。本文将现有关于非局部热敏电阻问题的研究拓展至三重非线性情形。

设 B 为 Ω 的面积，I 为满足 $\kappa = I^2/B^2$ 的电流，并令 Δ_m 定义为

$$\Delta_m v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{m-2}\nabla v) \ \forall m \geq 2.$$

我们进一步说明（1.1）中的各项。假设：

(H1) $v_0 \in L^\infty(\Omega)$；(H2) $\alpha: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 连续递增函数，满足 $\alpha(0) = 0$且对于所有 $s \in \mathbb{R}$，$\alpha'(s) \geq \lambda > 0$；(H3) f 是一个具有紧支集的 Lipschitz 连续函数，并满足

$$\sigma \leq f(s), \text{ for all } s \in \mathbb{R}, \text{ for a positive constant } \sigma.$$

本文其余部分安排如下。第2节汇集了若干基本概念和一些已知结果，这些内容对本文的研究有所帮助。第3节讨论问题（1.1）的正则化问题的经典解的存在性。第4节证明正则化问题的有界弱解的存在性。随后，在第5节中，我们给出使该

解唯一的充分条件。第6节证明了吸收集和全局吸引子的存在性。最后，我们在第7节给出一些总结性意见。

2. Preliminaries

本节汇总一些对我们有用的已知结果。

定义1（参见 [5]）。设 α 是一个连续递增函数，且 $\alpha(0)=0$。对于 $s\in\mathbb{R}$，我们定义

$$\Psi(s)=\int_0^s \alpha(t)dt.$$

Ψ 的勒让德变换 Ψ^* 定义为

$$\Psi^*(t)=\sup_{r\in\mathbb{R}}\{rt-\Psi(t)\}. \tag{2.1}$$

特别地，我们得到

$$\Psi^*(\alpha(t))=t\alpha(t)-\Psi(t). \tag{2.2}$$

注2. 若 $v\in L^\infty(Q)$，则 $\alpha(v)\in L^\infty(Q)$。由等式 (2.2) 可知，$\Psi^*(\alpha(v))$ 也有界。

引理3（见 [26]）。假设 z 是一个非负绝对连续函数，满足以下不等式：

$$z'(s)\le hz(s)+g(s),\ for\ s\ge s_0,$$

其中 h 和 g 是定义在 $[0,M]$ 上的两个非负可积函数。那么，对每个 $s\in[0,M]$，

$$z(s)\le \exp\left(\int_0^s h(\tau)d\tau\right)\cdot\left[z(0)+\int_0^s g(\tau)d\tau\right].$$

引理4（Ghidaglia引理 [26]）。设 z 是定义在 $]0,\infty[$ 上的正绝对连续函数，且满足不等式

$$z'+\delta z^q\le\eta$$

成立，其中 $q>1$、$\delta>0$、$\eta\ge0$。那么，

$$z(s)\le\left(\frac{\eta}{\delta}\right)^{1/q}+(\delta(q-1)s)^{-1/(q-1)}$$

对所有 $s\ge0$ 均成立。

引理 5（见 [2]）。若 $v\in L^m\left(0,M;\ W^{1,\ m}(\Omega)\right)$ 且

$$\frac{\partial\alpha(v)}{\partial s}\in L^{m'}\left(0,M;W^{-1,m'}(\Omega))\right),$$

then

$$\left\langle\frac{\partial\alpha(v)}{\partial s},v\right\rangle_{W^{-1,m'}(\Omega),W^{1,m}(\Omega)}=\frac{d}{ds}\int_\Omega\Psi^*(\alpha(v)).$$

为了研究全局（普适）吸引子的存在性，我们引入以下定义。

定义 6（参见 [26]）。设 $\mathcal{B}\subset F$ 和 $\mathcal{U}$ 是满足 $\mathcal{U}\subset\mathcal{B}$的开有界集。若 $\mathcal{U}$中每个有界集的轨道经过一段时间（该时间可能取决于该集合）后进入 $\mathcal{B}$，则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{U}$ 中的一个吸收集：

$$\forall\mathcal{B}_0\subset\mathcal{U},\quad \mathcal{B}_0\ bounded,$$
$$\exists s_0(\mathcal{B}_0)\ such\ that\ S(s)\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B},\quad \forall s\ge s_0(\mathcal{B}_0).$$

定义 7（参见 [26]）。若集合 $A \subset F$ 满足以下条件，则称其为半群 $(S(s))_{s\geq 0}$的一个全局吸引子：

(1) $A \subset F$ 是一个非空不变紧集，(2) 集合 $A \subset F$ 吸引任意

有界集 $\mathcal{B} \subset F$，也就是说，

$dist\,(S(s)\mathcal{B}, A) \to 0$ 当 $s \to +\infty$时，使得 $dist(D, B) = \sup_{a\in D} \inf_{b\in B} \|a-b\|_F$.

3. Regularized problems

本节首先介绍我们的逼近格式。然后，我们证明正则化问题存在弱解。为了设计正则化格式，我们考虑

$$\begin{gathered} \alpha_r \text{ is of class } \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ where } 0<\lambda<\alpha_r', \\ \alpha_r(0)=0,\ \alpha_r \longrightarrow \alpha \text{ in } \mathcal{C}_{loc}(\mathbb{R}) \text{ and } |\alpha_r| \leq |\alpha|, \\ f_r \text{ is of class } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \\ f_r \to f, \text{in } L^1(Q) \text{ and a.e in } Q, \\ f_r \text{ satisfies } (H3)\,. \end{gathered} \tag{3.1}$$

初始条件按照 [11, 命题 3 的证明（第 761], 页）进行正则化，即

$$v_{r,0} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \text{ such that } v_{r,0} \to v_0 \text{ in } L^\infty(\Omega),\ \|v_{r,0}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)} + 1. \tag{3.2}$$

于是，我们得到如下正则化问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s} - \Delta_m^r v = \kappa \dfrac{f_r(v_r)}{(\int_\Omega f_r(v_r)dx)^2}, & \text{in} \qquad Q=\Omega\times[0,M], \\ \alpha_r(v_{r,x}(0)) = \alpha_r(v_{r,0}), & \text{in} \qquad \Omega, \\ v_r = 0, & \text{on} \qquad \Gamma\times]0,M[, \end{cases} \tag{3.3}$$

where $\Delta_m^r v = \operatorname{div}\left(\left(|\nabla v|^2 + r \right)^{\dfrac{m-2}{2}} \nabla v \right)$, $m \geq 2$.

定理 8. 假设假设 $(H1)$–$(H3)$ 成立，则问题 (3.3) 存在一个解。

下面的引理在定理 8 的证明中起着关键作用。

引理 9. 对所有 $r>0$，有

$$\| v_r \|_{L^\infty(Q)} \leq C(M, \| v_0 \|_{L^\infty(\Omega)}),$$

其中 $C(M, \| v_0 \|_{L^\infty(\Omega)})$ 是一个正常数。

证明。将问题 (3.3) 的第一个方程乘以 $\left[(\alpha_r(v_r) - \alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}$($s_0$ 是一个正常数，其中 $|v_r| > s_0$)，并在 Ω 上积分，得到

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s} \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1} - \int_\Omega \Delta_m^r v_r \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1} \\ &= \int_\Omega \frac{\kappa \cdot f_r(v_r)}{\left(\int_\Omega f_r(v_r)dx\right)^2} \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\frac{1}{p+2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+2} = \int_\Omega \Delta_m^r v_r \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1} + \int_\Omega \frac{\kappa\cdot f_r(v_r)}{\left(\int_\Omega f_r(v_r)dx\right)^2}\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}.$$

那么，

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+2} = \int_\Omega \Delta_m^r v_r \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1} + \int_\Omega \frac{\kappa\cdot f_r(v_r)}{\left(\int_\Omega f_r(v_r)dx\right)^2}\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}. \quad (3.4)$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Delta_m^r v_r \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}\\
&= \int_\Omega \operatorname{div}\left(\left(|\nabla v_r|^2+r\right)^{\frac{m-2}{2}}\nabla v_r\right)\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}\\
&= -(p+1)\int_\Omega \left(\left(|\nabla v_r|^2+r\right)^{\frac{m-2}{2}}|\nabla v_r|^2\right)\alpha_r'(v_r)\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p}\\
&\quad + \int_{\partial\Omega}\left(\left(|\nabla v_r|^2+r\right)^{\frac{m-2}{2}}\frac{\partial v_r}{\partial \nu}\right)\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}.
\end{aligned}$$

$m-2$由于$\left(|\nabla v_r|^2+r\right)^{\frac{m-2}{2}}|\nabla v_r|^2\geq 0$ 和 $\alpha_r'>0$,
我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+2}\\
&\leq \int_{\partial\Omega}\left(\left(|\nabla v_r|^2+r\right)^{\frac{m-2}{2}}\frac{\partial v_r}{\partial \nu}\right)\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}\\
&\quad + \int_\Omega \frac{\kappa\cdot f_r(v)}{\left(\int_\Omega f_r(v)dx\right)^2}\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

利用（$H3$），我们有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\kappa\cdot f_r(v_r)}{(\int_\Omega f_r(v_r)dx)^2}\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}\\
&\quad\leq \frac{\kappa}{(\sigma\cdot meas(\Omega))^2}\int_\Omega f_r(v_r)\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}.
\end{aligned}$$

由于 f_r 满足 (H3)，可得

$$\begin{aligned}
f_r\left(v_r(x,t)\right) &= f_r\left(v_r(x,t)\right)\chi_{\{v_r(x,t)\in supp(f)\}} + f_r\left(v_r(x,t)\right)\chi_{\{v_r(x,t)\notin supp(f)\}}\\
&\leq f_r\left(v_r(x,t)\right)\chi_{\{v_r(x,t)\in supp(f)\}}.
\end{aligned}$$

若 $v_r(x,t) \in supp(f)$，则可知 $(v_r(x,t))_r$ 有界。因此，存在一个正常数 C_0，使得

$$\int_\Omega f_r(v_r)\left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1} \le C_0 \int_\Omega \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}.$$

牢记这一点，对于正常数 C_1，我们有

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+2} \le C_1 \int_\Omega \left[(\alpha(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1}. \tag{3.6}$$

根据 H¨older 不等式，存在正常数 C_j、$j=2$、3、4，使得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+1} &\le (meas(\Omega))\frac{1}{p+1}\cdot\left(\int_\Omega \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+2}\right)\frac{p+1}{p+2}\\ &\le C_2\left[z_p(s)\right]^{p+1},\end{aligned}$$

其中 $z_p(s) := \| (\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+ \|_{L^{p+2}(\Omega)}$。根据（3.6），我们有

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega \left[(\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+\right]^{p+2} \le C_3\left[z_p(s)\right]^{p+1}.$$

于是，

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\left[z_p(s)\right]^{p+2} \le C_3\left[z_p(s)\right]^{p+1}, \tag{3.7}$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[z_p(s)\right] \le C_3,$$

由此可得

$$[z_p(s)-z_p(0)] \le C_3 M,$$

这意味着

$$z_p(s) \le z_p(0) + C_3 M.$$

令 p 趋于无穷大，我们得到

$$\| (\alpha_r(v_r)-\alpha_r(s_0))^+ \|_{L^\infty(\Omega)} \le C_4. \tag{3.8}$$

现在，令 $u_r = -v_r$，并考虑以下问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\alpha}_r(u_r)}{\partial s} - \Delta_m^r u_r = \kappa \dfrac{\tilde{f}_r(u_r)}{\left(\int_\Omega \tilde{f}_r(v_r)dx\right)^2} =: \tilde{g}(u_r) & \text{in} \quad Q, \\ \tilde{\alpha}_r(u_{x,r}(0)) = \tilde{\alpha}_r(u_0) & \text{in} \quad \Omega, \\ u_r = 0 & \text{on} \quad \Gamma\times]0,M[, \end{cases} \tag{3.9}$$

˜其中，$\tilde{\alpha}_r(\tau) = -\alpha_r(-\tau)$，$\tilde{g}_r(\tau) = -g_r(-\tau)$，且 $f_r(\tau) = -f_r(-\tau)$。这些函数分别满足 α、g 和 f 所满足的相同条件。采用推导（3.8）时的相同论证，可得

$$\| (\tilde{\alpha}_r(u_r)-\tilde{\alpha}_r(s_0))^+ \|_{L^\infty(\Omega)} \le C_5, \tag{3.10}$$

这等价于

$$\| (-\alpha_r(-v_r(s))+\alpha_r(-s_0))^+ \|_{L^\infty(\Omega)} \le C_5.$$

由 (3.8) 和 (3.10)，我们推得存在正常数 C 使得

$$\| v_r(s) \|_{L^\infty(\Omega)} \le C(M, \| v_0 \|_{L^\infty(\Omega)}), \quad \text{for all } s \in [0,M].$$

引理得证。 □

定理 8 的证明。根据引理 9 和假设（$H1$）–（$H3$），由 Ladyzenskaya 的经典结果（见 [18, 第 457–459] 页），可知正则化问题（3.3）存在经典解。□

4. Existence of a weak solution

定义 10。若 $v \in L^{\infty}(Q) \cap L^{m}\left(0, M;\ W^{1,m}(\Omega)\right) \cap L^{\infty}\left(t, M;\ W^{1,m}(\Omega)\right), t > 0$，则称其为问题（1.1）的有界弱解，若其满足以下恒等式：

$$\int_{0}^{M} \left\langle \frac{\partial \alpha(v)}{\partial s}, u \right\rangle - \int_{Q} |\nabla v|^{m-2} \nabla v \nabla u = \kappa \int_{Q} \frac{f(v)}{(\int_{\Omega} f(v)dx)^{2}} u, \tag{4.1}$$

对所有 $u \in \left(L^{m}\left(0, M;\ W^{1,m}(\Omega)\right) \cap L^{\infty}(Q)\right)$ 均成立。此外，若有

$$u \in \left(W^{1,1}\left(0, M; L^{1}(\Omega)\right) \cap L^{m}\left(0, M; W^{1,m}(\Omega)\right)\right)$$

其中 $u(\cdot, M) = 0$，则

$$\int_{0}^{M} \left\langle \frac{\partial \alpha(v)}{\partial s}, u \right\rangle = -\int_{0}^{M} \int_{\Omega} \left[\alpha(v) - \alpha(v_0)\right] \partial_s u,$$

其中，对偶积定义为 $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{W^{-1,\ m'}(\Omega)\ W^{1,\ m}(\Omega)}$。

注 11. 由于 α_r 是一个递增函数，且 $|\alpha_r| \leq |\alpha|$，因此利用引理 9，我们还可得 $(\alpha_r(v_r))_r$ 有界。

我们现在的计划是推导出后续所需的充分先验估计。

引理 12. 对所有 $r > 0$，我们有

$$||v_r||_{L^{m}(0,M;W^{1,m}(\Omega))} \leq C_6, \tag{4.2}$$

其中 C_6 是一个与 r无关的正常数。

证明。将 (3.3) 的第一个方程乘以 v_r 并积分，得到

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s} v_r - \int_{\Omega} \Delta_m^r v_r v_r = \int_{\Omega} \kappa \frac{f_r(v_r)}{(\int_{\Omega} f_r(v_r)dx)^{2}} v_r. \tag{4.3}$$

应用 (2.2)，可得

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s} v_r = \int_{\Omega} \frac{\partial \left[\Psi^{*}\left(\alpha_r(v_r)\right)\right]}{\partial s}.$$

另一方面，利用格林公式，得到

$$\int_{\Omega} \Delta_m^r v_r v_r = -\int_{\Omega} \left(|\nabla v_r|^{2} + r\right)^{\frac{m-2}{2}} \nabla v_r \nabla v_r + \int_{\partial\Omega} \left(|\nabla v_r|^{2} + r\right) \frac{\partial v_r}{\partial \nu} \cdot v_r.$$

代入 (4.3)，得到

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s} v_r + \int_{\Omega} \left(|\nabla v_r|^{2} + r\right)^{\frac{m-2}{2}} |\nabla v_r|^{2} = \int_{\Omega} \frac{\kappa \cdot f_r(v_r)}{(\int_{\Omega} f_r(v_r)dx)^{2}} v_r - \int_{\partial\Omega} \left(|\nabla v_r|^{m-2} + r\right) \frac{\partial v_r}{\partial \nu} \cdot v_r,$$

$$\int_\Omega \left(\mid \nabla v_r \mid^2 + r\right)^{\frac{m-2}{2}} \mid \nabla v_r \mid^2 = \int_\Omega \frac{\kappa \cdot f_r(v_r)}{\left(\int_\Omega f_r(v_r)dx\right)^2} v_r - \int_\Omega \frac{\partial \left[\Psi^* \left(\alpha_r(v_r)\right)\right]}{\partial s} - \int_{\partial\Omega} \left(\mid \nabla v_r \mid^{m-2} + r\right) \frac{\partial v_r}{\partial \nu} \cdot v_r.$$

然后，利用边界条件，得到

$$\int_0^M \int_\Omega \left(\mid \nabla v_r \mid^2 + r\right)^{\frac{m-2}{2}} \mid \nabla v_r \mid^2 = \int_0^M \int_\Omega \frac{\kappa \cdot f_r(v_r)}{\left(\int_\Omega f_r(v_r)dx\right)^2} v_r - \int_0^M \int_\Omega \frac{\partial \left[\Psi^* \left(\alpha_r(v_r)\right)\right]}{\partial s}. \tag{4.4}$$

由注2可知，$\left(\Psi^* \left(\alpha_r(v_r)\right)\right)_r$ 有界。借助假设 $(H3)$ 和引理 9，存在一个正常数 C_7，使得

$$\begin{aligned}
&\int_0^M \int_\Omega \kappa \frac{f_r(v_r)}{\left(\int_\Omega f_r(v_r)dx\right)^2} v_r - \int_0^M \int_\Omega \frac{\partial \left[\Psi^* \left(\alpha_r(v_r)\right)\right]}{\partial s} \\
&\leq \int_0^M \int_\Omega \kappa \frac{f_r(v_r)}{\left(\int_\Omega f_r(v_r)dx\right)^2} v_r \\
&\quad - \int_\Omega \Psi^* \left(\alpha_r(v_r(\cdot, M))\right) + \int_\Omega \Psi^* \left(\alpha_r(v_r(\cdot, 0))\right) \\
&\leq \frac{\kappa}{\left(\sigma \cdot meas(\Omega)\right)^2} \int_0^M \int_\Omega f_r(v_r) \cdot \mid v_r \mid \\
&\quad + 2 \cdot \max\left\{\left|\int_\Omega \Psi^* \left(\alpha_r(v_r(\cdot, M))\right)\right|, \left|\int_\Omega \Psi^* \left(\alpha_r(v_r(\cdot, 0))\right)\right|\right\} \leq C_7.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\int_0^M \int_\Omega |\nabla v_r|^m \leq \int_0^M \int_\Omega \left(\mid \nabla v_r \mid^2 + r\right)^{\frac{m-2}{2}} \mid \nabla v_r \mid^2 \leq C_7.$$

我们推得 $v_r \in L^m\left(0, M;\ W^{1,\ m}(\Omega)\right)$。 □

注 13. 不等式 (4.2) 与杨氏不等式结合可推出

$$\left(\left(\mid \nabla v_r \mid^2 + r\right)^{\frac{m-2}{2}} \nabla v_r\right)_r$$

在 $L^{m'}\left(0, M \text{ 中有界};\ W^{1,m'}(\Omega)\right)$。

以下引理进一步给出了 v_r 的上界。

引理 14. 对于所有 $r, s > 0$，存在正常数 $C(t)$、$C(t, M)$ 和 $C_1(t, M)$，使得以下不等式成立：

$$||v_r(s)||_{W^{1,m}(\Omega)} \leq C(t), \quad \text{for all } s \geq t, \tag{4.5}$$

$$\int_t^M \int_\Omega \alpha_r'(v_r) \left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 \leq C(t, M), \tag{4.6}$$

$$\int_t^M \int_\Omega \left(\frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s}\right)^2 \leq C_1(t, M). \tag{4.7}$$

证明. 将问题 (3.3) 的第一个方程乘以 $\dfrac{\partial v_r}{\partial s}$，并进行积分，我们得到

$$\int_\Omega \frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s}\frac{\partial v_r}{\partial s} - \int_\Omega \Delta_m^r v_r \frac{\partial v_r}{\partial s} = \int_\Omega \kappa \frac{f_r(v_r)}{(\int_\Omega f_r(v_r)dx)^2}\frac{\partial v_r}{\partial s}. \tag{4.8}$$

由于

$$\int_\Omega \frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s}\frac{\partial v_r}{\partial s} = \int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2,$$

等式（4.8）变为

$$\int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 - \int_\Omega \Delta_m^r v_r \frac{\partial v_r}{\partial s} = \int_\Omega \kappa \frac{f_r(v_r)}{(\int_\Omega f_r(v_r)dx)^2}\frac{\partial v_r}{\partial s}.$$

由格林公式可得

$$\int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega \left(|\nabla v_r|^2 + r\right)^{\frac{m}{2}} = \int_\Omega \kappa \frac{f_r(v_r)}{(\int_\Omega f_r(v_r)dx)^2}\frac{\partial v_r}{\partial s}. \tag{4.9}$$

令 $G_r(v_r) := \int_0^{v_r} g_r(s)ds$ 且 $g_r(s) := \dfrac{f_r(s)}{(\int_\Omega f_r(s)dx)^2}$。利用 v_r 的有界性及（3.1），我们有 $\dfrac{\partial G_r(v_r)}{\partial s} \le C_8$。于是可得

$$\int_\Omega g_r(v_r)\frac{\partial v_r}{\partial s} \le C_8 \cdot meas(\Omega).$$

据此，我们推导出

$$\int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega \left(|\nabla v_r|^2 + r\right)^{\frac{m}{2}} \le C_9. \tag{4.10}$$

于是,

$$\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega \left(|\nabla v_r|^2 + r\right)^{\frac{m}{2}} \le C_9 \tag{4.11}$$

并且，利用格朗沃尔引理3，可得

$$\int_\Omega |\nabla v_r|^m \le \frac{1}{m}\int_\Omega \left(|\nabla v_r|^2 + r\right)^{\frac{m}{2}} \le C_{10}. \tag{4.12}$$

根据庞加莱不等式，可得

$$||v_r(s)||_{W^{1,m}(\Omega)} \le C(t), \quad \text{for all } s \ge t.$$

结合不等式（4.10），可得

$$\int_t^M \int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{m}\int_\Omega \left(|\nabla v_r(\cdot, M)|^2 + r\right)^{\frac{m}{2}} \le \frac{1}{m}\int_\Omega \left(|\nabla v_r(\cdot,t)|^2 + r\right)^{\frac{m}{2}} + C_9(M-t). \tag{4.13}$$

现在，将 (4.12) 与 (4.13) 相加，得到

$$\int_t^M \int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{m}\int_\Omega \left(|\nabla v_r(\cdot, M)|^2 + r\right)^{\frac{m}{2}} \le C(t, M).$$

因此，我们有

$$\int_t^M \int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 \leq C(t,M).$$

由于 α 是局部利普希茨函数，因此存在一个正常数 L，使得$\alpha_r' \leq L$。因此，我们得到

$$\int_t^M \int_\Omega \left(\frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s}\right)^2 \leq L\int_t^M \int_\Omega \alpha_r'(v_r)\left(\frac{\partial v_r}{\partial s}\right)^2 \leq C_1(t,M).$$

证明完毕。 □

定理 15. 假设假设（$H1$）–（$H3$）成立。那么，问题（3.3）存在一个弱有界解。

证明. 为了完成定理 15 的证明，我们需要求问题（3.3）的极限。根据引理 9，存在一个子列，仍记为（v_r）$_r$，使得

$$v_r \longrightarrow v \text{ weakly star in } L^\infty(Q).$$

由估计 (4.2) 可知

$$v_r \longrightarrow v \text{ weakly in } L^m\left(0,M;W^{1,m}(\Omega)\right).$$

由于 $(v_r)_r$ 在 $L^\infty\left(t,M;\ W^{1,\ m}(\Omega)\right)$中有界，因此

$$v_r \longrightarrow v \text{ weakly star in } L^\infty\left(t,M;W_0^{1,m}(\Omega)\right).$$

根据 f_r 的假设，我们有 $f_r \longrightarrow f$ 几乎处处成立。这与维塔利定理（见 [20]）结合，推出其在 $L^1(Q)$ 中收敛到 $f(v)$。应用格林公式,

$$\left|\int_0^M \int_\Omega \Delta_m^r v_r u\right| \leq \left|\int_\Omega \left(|\nabla v_r|^2 + r\right)^{\frac{m-2}{2}} \nabla v_r \nabla u\right|, \text{ for } u \in L^m\left(0,M;W_0^{1,m}(\Omega)\right).$$

利用注 13 可知，该不等式右端有界。因此存在 $\vartheta \in L^{m'}\left(0,M;\ W^{-1,\ m'}(\Omega)\right)$，使得

$$\Delta_m^r v_r \longrightarrow \vartheta \text{ weakly in } L^{m'}\left(0,M;W^{-1,m'}(\Omega)\right).$$

经典论证（见 [5]）表明 $\vartheta = \Delta_m v$。

结合 (4.5) 与函数 α_r 的光滑性，可得序列 $(\alpha_r(v_r))_r$ 在 $L^\infty\left(t,M;\ W^{1,m}(\Omega)\right)$ 中有界。另一方面，利用 (4.7)，我们推得对于所有 $t>0$，$\left(\frac{\partial \alpha_r(v_r)}{\partial s}\right)_r$ 在 $L^2\left(t,M;\ L^2(\Omega)\right)$ 中有界。Aubin 引理（见 [25]）使我们可以断定 $(\alpha_r(v_r))_r$ 在 $C\left(]0,M[;\ L^1(\Omega)\right)$ 中相对紧。因此，$\alpha_r(v_r) \longrightarrow \delta$ 在 $C\left(]0,M[;\ L^1(\Omega)\right)$ 中强收敛。因此，与 [5, 第 1048], 页的处理完全类似，可处理 $\delta = \alpha(v)$。为证明解在点 $s=0$ 处的连续性，我们按照 [3] 中的方法进行。由引理 14 可推得，$\alpha_r(v_r) \longrightarrow \alpha(v)$ 在 $C\left([0,M];\ L^1(\Omega)\right)$ 中强收敛。

考虑 $v_0 \in L^\infty(\Omega)$，并取一个满足假设（3.2）的光滑序列 $(v_{r,\ 0})$。因此，$(v_{r,\ 0})$ 有界且收敛于 v_0 in $L^1(\Omega)$。于是，根据控制收敛定理，我们有 $\alpha(v_{r,\ 0}) \longrightarrow \alpha(v_0)$ in $L^1(\Omega)$。现在，我们处理初始数据 $v_0 \in C^1(\bar{\Omega})$。取空间中有界的序列 $(v_{r,\ 0})$

$W^{1,\ m}(\Omega)$，并验证假设（3.2），相应的 $\alpha(v_r)$ 在$s=0$处连续。此外，我们有

$$\begin{aligned}\|\alpha(v(s))-\alpha(v(0))\|_{L^1(\Omega)} \le \|\alpha(v(s))-\alpha(v_r(s))\|_{L^1(\Omega)} + \|\alpha(v_r(s))-\alpha(v_{r,0})\|_{L^1(\Omega)} \\ + \|\alpha(v_{r,0})-\alpha(v_0)\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

由引理16可得

$$\begin{aligned}\|\alpha(v(s))-\alpha(v(0))\|_{L^1(\Omega)} \le e^{Ks}\|\alpha(v_0)-\alpha(v_{r,0})\|_{L^1(\Omega)} \\ + \|\alpha(v_r(s))-\alpha(v_{r,0})\|_{L^1(\Omega)} + \|\alpha(v_{r,0})-\alpha(v_0)\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

当 (4.15) 中的 s 趋于 0 时，(4.15) 右端的所有项都趋于 0。于是，我们推出 $\alpha(v) \in C([0,M];\ L^1(\Omega))$。最后，在 (3.3) 中令 $r \longrightarrow 0$，便得到一个弱有界解的存在性。□

5. Uniqueness of solution

为证明解的唯一性，我们需要施加一些额外的假设。假设存在一个正常数 L_2，使得

$$|f(u)-f(v)| \le L_2 |\alpha(u)-\alpha(v)|. \tag{5.1}$$

引理16. 设 v 和 u 是问题（1.1）的两个解，其初始数据分别为 v_0 和u_0。则有以下不等式:

$$\|\alpha(v(s))-\alpha(u(s))\|_{L^1(\Omega)} \le e^{Ks}\|\alpha(v_0)-\alpha(u_0)\|_{L^1(\Omega)}, \tag{5.2}$$

其中 K 是一个正常数。

证明. 证明与 [8]中的证明类似。 □

为证明下一个结果，我们需要以下引理。

引理 17（Tartar 不等式 [24]）。若 $a,b \in \mathbb{R}^N$，则

$$\left[|a|^{m-2}a-|b|^{m-2}b\right]\cdot(a-b) \ge C(m)\begin{cases}|a-b|^m, & if\ m \ge 2,\\ \frac{|a-b|^2}{(|a|+|b|)^{2-m}}, & if\ 1<m<2,\end{cases} \tag{5.3}$$

对所有 $m>1$，其中当 $m \ge 2$时，$C(m)=2^{2-m}$；当 $1<m<2$时，$C(m)=m-1$。

引理 18. 设 v 和 u 是问题（1.1）的两个解，其初始数据分别为 v_0 和 u_0，且满足 $v_0=u_0$。那么，$v=u$ 在 Q中。

证明. 对于一个较小的正数 μ，令

$$H_\mu(Y)=\min\left\{1,\max\left\{\frac{Y}{\mu},0\right\}\right\},\ \text{for all } Y \in \mathbb{R}.$$

我们取 $H_\mu(v-u)$ 作为测试函数。将问题（1.1）中对应于 u and v 的第一个方程乘以 $H_\mu(v-u)$，再将两个方程相减，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^s\int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}(\alpha(v)-\alpha(u))H_\mu(v-u) - \int_0^s\int_\Omega(\Delta_m v-\Delta_m u)H_\mu(v-u)\\ &=\int_0^s\int_\Omega \kappa\frac{f(v)}{(\int_\Omega f(v)dx)^2}H_\mu(v-u) - \int_0^s\int_\Omega \kappa\frac{f(u)}{(\int_\Omega f(u)dx)^2}H_\mu(v-u).\end{aligned} \tag{5.4}$$

利用格林公式并考虑边界条件，可得

$$\int_0^s \int_\Omega (\Delta_m v)\, H_\mu(v-u) = -\int_0^s \int_\Omega |\nabla v|^{m-2}\nabla v \cdot \nabla(v-u)\cdot H'_\mu(v-u). \quad (5.5)$$

容易验证

$$\int_0^s \int_\Omega (\Delta_m u)\, H_\mu(v-u) = -\int_0^s \int_\Omega |\nabla u|^{m-2}\nabla u \cdot \nabla(v-u)\cdot H'_\mu(v-u). \quad (5.6)$$

由 (5.5) 和 (5.6) 可得

$$\begin{aligned}&\int_0^s \int_\Omega (\Delta_m v - \Delta_m u)\cdot H_\mu(v-u)\\ &= -\int_0^s \int_\Omega \left[|\nabla v|^{m-2}\nabla v - |\nabla u|^{m-2}\nabla u\right]\nabla(v-u)\cdot H'_\mu(v-u).\end{aligned}$$

利用引理 17，可得

$$\int_0^s \int_\Omega (\Delta_m v - \Delta_m u)\cdot H_\mu(v-u) \le 0.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^s \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}(\alpha(v)-\alpha(u))\, H_\mu(v-u) \le &\int_0^s \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}(\alpha(v)-\alpha(u))\, H_\mu(v-u)\\ &-\int_0^s \int_\Omega (\Delta_m v - \Delta_m u)\, H_\mu(v-u).\end{aligned} \quad (5.7)$$

回顾 (5.4) 和 (5.7)，可得

$$\int_0^s \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}(\alpha(v)-\alpha(u))\cdot H_\mu(v-u) \quad \le \quad \int_0^s \int_\Omega \gamma(x)\cdot H_\mu(v-u), \quad (5.8)$$

其中

$$\gamma(x) := \kappa\frac{f(v)}{(\int_\Omega f(v)dx)^2} - \kappa\frac{f(u)}{(\int_\Omega f(u)dx)^2},$$

$$\begin{aligned}\gamma(x)\cdot\chi_{\{v-u>0\}} = &\kappa f(u)\frac{\int_\Omega [f(u)-f(v)]\ \mathrm{d}x \int_\Omega [f(u)+f(v)]\ \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^2\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^2}\cdot\chi_{\{v-u>0\}}\\ &+\kappa\frac{f(v)-f(u)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^2}\cdot\chi_{\{v-u>0\}}.\end{aligned}$$

将此式与（5.1）相加，

$$\begin{aligned}\gamma(x)\cdot\chi_{\{v-u>0\}} \le &\kappa L_2\frac{\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\ \mathrm{d}x\left(\int_\Omega (f(v)+f(u))\ \mathrm{d}x\right)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^2\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^2}f(u)\cdot\chi_{\{v-u>0\}}\\ &+\kappa L_2\frac{(\alpha(v)-\alpha(u))}{\left(\int_\Omega f(v)\ \mathrm{d}x\right)^2}\cdot\chi_{\{v-u>0\}}.\end{aligned} \quad (5.9)$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&\kappa \cdot L_2 \int_0^s \int_\Omega \frac{\left(\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega (f(v)+f(u))\ \mathrm{d}x\right)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^2\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^2} f(u)\cdot\chi_{\{v-u>0\}} \\
&\quad \le 2\kappa\cdot L_2\cdot meas(\Omega)\cdot \sup_{a\in \mathrm{supp}(f)} f(a) \int_0^s \int_\Omega \frac{\left(\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\ \mathrm{d}x\right)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^2\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^2} f(u) \\
&\quad \le 2\kappa\cdot L_2\cdot meas(\Omega)\cdot \left(\sup_{a\in \mathrm{supp}(f)} f(a)\right)^2 \int_0^s \int_\Omega \frac{\left(\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\ \mathrm{d}x\right)}{\left(\int_\Omega f(u)dx\right)^2\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^2}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

由于

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\ \mathrm{d}x &= \int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\cdot\chi_{\{v-u>0\}}\ \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\cdot\chi_{\{v-u\le 0\}}\ \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

且 α 是一个递增函数，因此我们得到

$$\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\ \mathrm{d}x \le \int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))\cdot\chi_{\{v-u>0\}}\ \mathrm{d}x \le \int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))^+\ \mathrm{d}x. \tag{5.11}$$

考虑到 (5.9)–(5.11) 以及关于 f 的假设 $(H3)$，可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \int_\Omega \gamma(x)\cdot\chi_{\{v-u>0\}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&\le \frac{\kappa\cdot L_2}{(meas(\Omega)\sigma)^2}\int_0^s\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))^+\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{2\kappa\cdot L_2\cdot meas(\Omega)}{(meas(\Omega)\cdot\sigma)^4}\cdot\left(\sup_{a\in\mathrm{supp}(f)} f(a)\right)^2 \int_0^s\int_\Omega \left(\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))^+\ \mathrm{d}x\right) \\
&\le \left(\frac{\kappa L_2}{(meas(\Omega)\sigma)^2} + \frac{2\kappa\cdot L_2 (meas(\Omega))^2}{(meas(\Omega)\sigma)^4}\left(\sup_{a\in\mathrm{supp}(f)} f(a)\right)^2\right)\int_0^s\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))^+\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

另一方面，当我们令 μ 趋于零时，得到

$$\int_0^s\int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}(\alpha(v)-\alpha(u))\,H_\mu(v-u) \longrightarrow \int_0^s\int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}(\alpha(v)-\alpha(u))\cdot\chi_{\{v-u>0\}}.$$

我们还得到

$$\int_0^s\int_\Omega \gamma(x)\cdot H_\mu(v-u) \longrightarrow \int_0^s\int_\Omega \gamma(x)\cdot\chi_{\{v-u>0\}}.$$

结合 (5.8) 和 (5.12)，可得存在一个正常数C_{11} 使得

$$\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))^+ \le C_{11}\cdot\int_0^s\int_\Omega (\alpha(v)-\alpha(u))^+. \tag{5.13}$$

应用通常的格朗沃尔引理，得到 $\alpha(v) \le \alpha(u)$。注意到 α 是递增函数，因此特别有 $\alpha(v) = \alpha(u)$ 在 $\{v-u>0\}$中。结合这一点和 (5.3)，可得 $\nabla(v-u)=0$ 在 $\{\mu > v-u>0\}$中。因此，$\max\{0,\min\{v-u,\mu\}\} = C_{12}$，其中 C_{12} 是正常数。由此我们推得

that $v \le u$ 在 Q中。交换 v 和 u的角色，即完成唯一性的证明。□

6. Existence of an absorbing set and the universal attractor

本节首先证明吸收集的存在性，进而证明全局吸引子的存在性。为此，考虑由问题（1.1）生成的连续半群 $(S(s))_{s\ge 0}$ a，使得

$$\begin{array}{rccc} S(s): & L^\infty(\Omega) & \to L^\infty(\Omega) \\ & v_0 & \to \alpha(v(s)), \end{array} \tag{6.1}$$

其中， v 是问题（1.1）的有界弱解。利用定理 8，映射（6.1）是良定义的。现在，我们陈述本文的第二个主要结果。

定理 19. 对于 $m > 2$，$(S(s))_{s\ge 0}$ 存在一个全局吸引子，它在 $W^{1,\ 0}{}^{\ m}(\Omega)$ 中有界。

为了证明定理 19，我们首先证明以下结果。

引理 20. 在假设 $(H1)$–$(H3)$ 下，存在一个正常数 ρ，使得

$$\| v(s) \|_{L^\infty(\Omega)} \le \rho, \quad for\ all\ \ s > 0.$$

证明. 将 (1.1) 的第一个方程乘以 $|\alpha(v)|^p \alpha(v)$，并在 Ω 上积分，可得

$$\int_\Omega \frac{\partial \alpha(v)}{\partial s} |\alpha(v)|^p \alpha(v) - \int_\Omega \Delta_m v \cdot |\alpha(v)|^p \alpha(v) = \kappa \int_\Omega \frac{f(v)}{(\int_\Omega f(v)dx)^2} |\alpha(v)|^p \alpha(v).$$

于是，

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega |\alpha(v)|^{p+2} - \int_\Omega \Delta_m v \cdot |\alpha(v)|^p \alpha(v) = \kappa \int_\Omega \frac{f(v)}{(\int_\Omega f(v)dx)^2} |\alpha(v)|^p \alpha(v).$$

应用格林公式，并利用边界条件，可得

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega |\alpha(v)|^{p+2} + (p+1)\int_\Omega |\nabla v|^m \alpha'(v) |\alpha(v)|^p = \kappa \int_\Omega \frac{f(v)}{(\int_\Omega f(v)dx)^2} |\alpha(v)|^p \alpha(v). \tag{6.2}$$

另一方面，由于 $\alpha'(v) \ge \lambda$，我们有

$$\int_\Omega |\nabla v|^m \alpha'(v) |\alpha(v)|^p \ge \lambda \int_\Omega |\nabla v|^m |\alpha(v)|^p, \quad \text{in } [0, M].$$

现在，我们讨论两种情况。

情况 1. 如果 $|\nabla v| \ge |\alpha(v)|$，则

$$\int_\Omega |\nabla v|^m \alpha'(v) |\alpha(v)|^p \ge \lambda \int_\Omega |\alpha(v)|^{m+p}. \tag{6.3}$$

情形 2。若 $|\nabla(v)| \le |\alpha(v)|$，则有

$$\int_\Omega |\nabla v|^m \alpha'(v) |\alpha(v)|^p \ge \lambda \int_\Omega |\nabla v|^m |\alpha(v)|^p \ge \lambda \int_\Omega |\nabla v|^{m+p}.$$

利用庞加莱不等式，我们推得

$$\int_\Omega |\nabla v|^m \alpha'(v) |\alpha(v)|^p \geq \lambda \cdot C_{13} \int_\Omega |v|^{m+p}, \text{ for a positive constant } C_{13}.$$

函数 α 的光滑性意味着

$$\int_\Omega |\nabla v|^m \alpha'(v) |\alpha(v)|^p \geq \frac{\lambda \cdot C_{13}}{L_1} \int_\Omega |\alpha(v)|^{m+p}, \tag{6.4}$$

其中 L_1 是函数 α 的利普希茨常数。由 (6.2) 和 (6.4) 可知，

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega |\alpha(v)|^{p+2} + \min\left\{\frac{\lambda \cdot C_{13}}{L_1}, \lambda\right\} \cdot \int_\Omega |\alpha(v)|^{m+p} \leq \kappa \int_\Omega \frac{f(v)}{\left(\int_\Omega f(v)dx\right)^2} |\alpha(v)|^p \alpha(v).$$

容易验证

$$\frac{1}{p+2}\frac{\partial}{\partial s}\int_\Omega |\alpha(v)|^{p+2} + \min\left\{\frac{\lambda \cdot C_{13}}{L_1}, \lambda\right\} \cdot \int_\Omega |\alpha(v)|^{m+p} \leq C_{14} \int_\Omega |\alpha(v)|^{p+1},$$

f或一个正常数 14。 C 令 $z_p(s) := \| \alpha(v) \|_{L^{p+2}(\Omega)}$，且 $C_{15} :=$ 为 $\left\{\frac{\lambda \cdot C_{13}}{L_1}, \lambda\right\}$ 中的最小值。利用霍尔德不等式以及 $L^{m+p}(\Omega)$ 到 $L^{p+2}(\Omega)$ 的连续嵌入，可得

$$\frac{\partial z_p(s)}{\partial s} (z_p(s))^{p+1} + C_{15} (z_p(s))^{m+p} \leq C_{14} (z_p(s))^{p+1}.$$

由此可得

$$\frac{\partial z_p(s)}{\partial s} + C_{15} (z_p(s))^{m-1} \leq C_{14}. \tag{6.5}$$

因此，我们可以运用 Ghidaglia 引理 4，得到

$$z_p(s) \leq \left(\frac{C_{14}}{C_{15}}\right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{1}{(C_{15}(m-2)s)^{\frac{1}{m-2}}} := \rho_s. \tag{6.6}$$

令 p 趋于无穷大，可得

$$\| \alpha(v) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq C(\eta)$$

对所有 $s \geq \eta > 0$ 均成立。这意味着

$$\| v(s) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \max\left(|\alpha^{-1}(C(\eta))|, |\alpha^{-1}(-C(\eta))|\right). \tag{6.7}$$

令 $\rho := \max\left(|\alpha^{-1}(C(\eta))|, |\alpha^{-1}(-C(\eta))|\right)$ 为以 0 为中心、半径为 $|)$ 的球。该球是 $L^\infty(\Omega)$ 中的一个吸收集。□

注释21. 由于不等式（4.5）以及范数的下半连续性，在 $W^{1,m}(\Omega)$ 中得到了一个吸收集。这表明

$$||v(s)||_{W^{1,m}(\Omega)} \leq C(t) := \rho_t, \quad \textit{for all } s \geq t.$$

那么，球 $B(0, \rho_t)$ 是 $W^{1,m}(\Omega)$ 中的一个吸收集。

现在，为了证明下面的引理 23，我们证明问题（1.1）的解是 H¨older 连续的。为此，我们设 $\alpha(v) := w$ ，并作如下假设：

$(H4)$ α 是严格递增函数，且 $\alpha^{-1} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;

$(H5)$ $i)$ $\left(\alpha^{-1}(w)\right)'$ 在零点邻域内是退化的，并且存在$z \in [-\eta_0, \eta_0]$， η_0 为正常数，使得

$$\beta_0 |z|^{k_0} \leq \left(\alpha^{-1}(w)\right)' \leq \beta_1 |z|^{k_1} \tag{6.8}$$

对于正常数 β_j 和 k_j， $j = 0$， 1;

$ii)$ 存在两个正常数 e_0 和 e_1 ，使得

$$e_0 \leq \left(\alpha^{-1}(w)\right)' \leq e_1, \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} - \operatorname{div}\left(\left|\left(\alpha^{-1}(w)\right)'\right|^{m-2} \cdot \left(\alpha^{-1}(w)\right)' |\nabla w|^{m-2} \nabla w\right) = \kappa \frac{f(\alpha^{-1}(w))}{\left(\int_\Omega f(\alpha^{-1}(w)) dx\right)^2}, \tag{6.10}$$

$$w = 0, \tag{6.11}$$

对所有 $z \in]-\infty, -\eta_0[\bigcup]\eta_0, +\infty[$。

将（6.10）与文献 [27], 中的（1）对应起来，并利用假设 (H3)–(H5)，我们可以应用以下定理。

定理 22（见 [27]）。假设定理 8成立。那么，在假设 (H3)–(H5) 下，问题（1.1）的解是 H ¨older 连续的。

在下面的引理中，我们证明当 s 足够大时，算子 $(S(s))_{s\geq 0}$ 一致紧。

引理 23. 如果 B 是一个有界集，那么

$$\bigcup_{s \geq s_0} S(s)B$$

对任意 $s \geq s_0$，它都是相对紧的。

证明。由引理 9 可得，集合$\bigcup_{s\geq s_0} S(s)B$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界。此外，近似解一致有界。因此，我们可以应用定理 22，进而由阿尔泽拉定理推出，集合$\bigcup_{s \geq s_0} S(s)B$ 是相对紧的。□

定理 19 的证明。我们需要证明，与问题（1.1）相关的 $(S(s))_{s\geq 0}$ 存在一个全局吸引子。我们考虑以下 ω-极限：

$\omega(B_0) := \{v \in L^\infty(\Omega) : \exists s_n \to +\infty, \exists v_n \in B_0$ 使得 $S(s_n) v_n \to v$ 属于 $L^\infty(\Omega)\}$，其中 $B_0 := S(t)B^{L^\infty(\Omega)}$ 对某个 $t > 0$成立。我们在 [26] 中应用引理 1.1，得到$\omega(B_0)$是一个非空紧不变集。因此，定义 7 的第一个条件成立。对于定义 7 的第二个条件，我们采用反证法。假设 A 不能吸引 $L^\infty(\Omega)$ 中的每个有界集。那么存在一个有界集 B，它不被 A吸引，并且存在 $s_n \to \infty$ 和 $\epsilon > 0$ ，使得

$$dist\,(S(s_n)B, A) \geq \frac{\epsilon}{2}, \tag{6.12}$$

由此可知，对每个 n，都存在 $d_n \in B$ 使得

$$dist\,(S(s_n)d_n, A) \geq \frac{\epsilon}{2}. \tag{6.13}$$

已知 B_0 是 B （一个有界集）的吸收集，则存在 s 使得 $s \geq s_1$，其中 s_1 是正常数，并且有 S（s）$B \subset B_0$。由于 $s_n \to \infty$，因此对于足够大的 n，有 $s_n \geq s_1$ 和 S（s_n）$B \subset B_0$。因此，我们得到

$$\bigcup_{s \geq s_0} S(s_n)d_n \in B_0. \tag{6.14}$$

另一方面，由引理 23 可知，$\bigcup S$（s）B_0 是相对紧的。

因此，序列（S（s_n）d_n）$_n$ 也是相对紧的。因此，存在一个子列，使得

$$S(s_n)d_n \longrightarrow \ell \in L^\infty(\Omega), \text{ as } s_n \longrightarrow \infty.$$

利用半群性质，有

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S(s_n)d_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} S(s_n - s_1)S(s_1)d_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} S(s_n')d_n' = \ell, \tag{6.15}$$

其中 s_n' : $= s_n - s_1$，以及 d_n' : $= S$（s_1）d_n。由此可推得

$$\omega(B_0) := \{v : \exists s_n,\ d_n \text{ such that } S(s_n)d_n \longrightarrow v\}. \tag{6.16}$$

鉴于 $d_n' \in B_0$，那么 s_n' 和 d_n' 分别在（6.16）中起到 s_n 和 d_n的作用。结合这一点和（6.15），我们得到 $\ell \in \omega(B_0) = A$。于是 $dist\,(\ell, A) = 0 < \frac{\epsilon}{2}$。这与不等式（6.13）矛盾。因此， A是全局吸引子。□

7. Conclusions and perspectives

本文证明了含有三重非线性项的非局部热敏电阻问题在 Sobolev 空间中存在唯一的有界弱解。我们还证明了全局吸引子的存在性。未来，我们计划研究全局吸引子的正则性、解的稳定性，以及热敏电阻问题（1.1）的最优控制。

Acknowledgments

Torres 获得了 FCT 通过 CIDMA 和项目 UIDB/04106/2020 提供的资助。

References

[1] P. Agarwal、M. R. Sidi Ammi 和 J. Asad。相容意义下分数阶非局部热敏电阻问题在时间尺度上的存在性与唯一性结果。*Equations* 2021 1 1 11, 2021 *Advances in Difference* ,

( ): – 。[2] H. W. Alt 和 S. Luckhaus。拟线性椭圆抛物型微分方程。 *Mathematische Zeitschrift* 183 3 311 341, 1983 , ( ): – 。[3] F. Andreu、J. M. Maz´on、F. Simondon 和 J. Toledo。带非线性边界条件的退化非线性扩散问题的吸引子。 *Equations* 10 3 347 377, 1998 *Journal of Dynamics and Differential* , ( ): – 。[4] S. N. Antontsev 和 M. Chipot。热敏电阻问题：存在性、光滑性、唯一性与爆破。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 25(4):1128–1156, 1994。[5] D. Blanchard 和 G. Francfort。抛物项不满足任何增长假设的双重非线性热方程研究。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 19(5):1032–1056, 1988。

[6] S. A. C 、 *Applied Mathematics and Computation* 152 3 743 757, 2004 atal。热敏电阻问题的数值解。, ( ): – 。[7] G. Cimatti。导体焦耳热非定常问题弱解的存在性。 *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 162(1):33–42, 1992。[8] J. Diaz 和 F De Thelin。湍流相关模型中出现的一个非线性抛物型问题。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 25(4):1085–1111, 1994。[9] A. El Hachimi 和 M. R. Sidi Ammi。热敏电阻问题：一个非局部抛物型问题。载于 *Proceedings of the 2004-Fez Conference on Differential Equations and Mechanics Electron.* , , 卷 pages – 。 *J. Differ. Equ. Conf* 11, 117 128, 2004 [10] A. El Hachimi、M. R. Sidi Ammi 和 D. F. M. Torres。非局部抛物型热敏电阻型问题解的存在性与唯一性。 *Int. J. Tomogr. Stat.*, 5 07 150 154, (W): – 。[11] J. 2007 arXiv:math/0512629 Filo 和 P. de Mottoni。带非线性边界条件的多孔介质方程解的整体存在性与衰减。 *Communications in Partial Differential Equations*, 17 5 6 737 765, 1992 (-): – 。[12] A. Glitzky、M. Liero 和 G. Nika。大面积有机发光二极管热敏电阻模型的降维。 *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S* 14 11 3953, , ( ): 。[13] M. 2021 T. Gonz´alez Montesinos 和 F. Orteg´on Gallego。具有退化热导率的演化热敏电阻问题。 *Communications on Pure & Applied Analysis* 1 3 313, , ( ): 。[14] D. 2002 H¨omberg、C. Meyer、J. Rehberg 和 W. Ring。热敏电阻问题的最优控制。 *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(5):3449–3481, 2010。[15] V. Hrynkiv 和 S. Koshkin。导电率消失时热敏电阻问题的最优控制。 *Applied Mathematics & Optimization*, 81(2):563–590, 2020。[16] N. I. Kavallaris 和 T. Nadzieja。非局部热敏电阻问题的爆破。 *Proc.* , ( ): – 。[17] A. *Edinb. Math. Soc. (2)* 50 2 389 409, 2007 A. Lacey。非局部欧姆加热模型中的热失控：第一部分：模型推导及若干特殊情形。 *European Journal of Applied Mathematics* 6 2 127 144, , ( ): – 。[18] O. 1995 A. Lady˘zenskaja、V. A. Solonnikov 和 N. N. Ural'ceva。 *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* 1967 。Izdat. “ Nauka”, 莫斯科, 。[19] A. A. Nanwate 和 S. P. Bhairat。广义热敏电阻型问题的适定性。*AIP Conf. Proc.*, 2435(1):Art. 020018, 2022。[20] R. Reynolds 和 C. Swartz。向量值 McShane 积分的 Vitali 收敛定理。 *Mathematica Bohemica*, 129(2):159–176, 2004。[21] M. R. Sidi Ammi 和 D. F. M. Torres。热敏电阻问题所导出的非局部抛物型问题的数值分析。 *Math. Comput. Simulation*, 77(2-3):291–300, 2008。arXiv:0709.0129 [22] M. R. Sidi Ammi 和 D. F. M. Torres。非局部热敏电阻方程的最优控制。*Internat. J. Control*, 85 11 1789 1801, 2012 arXiv:1206.2873 ( ): – 。M. R. Sidi Ammi 和 D. F. M. [23] Torres。分数阶非局部热敏电阻问题的 Galerkin 谱方法。 *Comput. Math. Appl.*, 73 6 1077 1086, 2017 arXiv:1605.07804 ( ): – 。J. Simon。 [24] 非线性边值问题解的正则性。 *Ann. Fac. Sci.* , (-): – 。[25] J. *Toulouse Math.* 3 3 4 247 274, 1981 Simon。空间 $L^p(0,T;B)$ 中的紧集。 *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146:65–96, 1987。[26] R. Temam。力学与物理学中的无限维动力系统。 *Applied Mathematical Sciences* 68 1988 , , 。[27] V. Vespri。某类双重非线性抛物方程解的局部行为。 *Manuscripta Mathematica*, 75(1):65–80, 1992。[28] S. Zhou 和 D. R. Westbrook。热敏电阻方程的数值解。 *Journal of Computational and Applied Mathematics* 79 1 101 118, 1997 , ( ): – 。

Moulay Rchid Sidi Ammi (corresponding author)Department of Mathematics、 AMNEA Group、 MAIS Laboratory、 Faculty of Sciencesand Technics、 Moulay Ismail B. P. 509、 Errachidia、 Morocco.*Email address*: rachidsidiammi@yahoo.fr

Ibrahim DAHI
Department of Mathematics, AMNEA Group, MAIS Laboratory, Faculty of Sciences and Technics, Moulay Ismail B. P. 509, Errachidia, Morocco.
Email address: i.dahi@edu.umi.ac.ma

Abderrahmane El HachimiDepartment of Mathematics, Faculty of Sciences, Mohammed V University of Rabat,Morocco.

Email address: aelahacimi@yahoo.fr

Delfim F. M. TorresR&D Unit CIDMA, Department of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro,Portugal.*Email address*: delfim@ua.pt