arXiv:2301.08575v1 [math.CV] 20 Jan 2023

加权 Bergman 空间上的复合-微分算子

VASUDEVARAO ALLU、HIMADRI HALDER 和 SUBHADIP PAL

摘要。本文研究加权 Bergman 空间上加权复合-微分算子 $D_{n,\psi,\phi}$ 关于共轭 $C_{\mu,\eta}$ 的复对称性，其中 $\mu,\eta \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$。我们给出了算子 $D_{n,\psi,\phi}$ 为厄米算子和正规算子的明确条件。我们还刻画了导数 Hardy 空间上的复对称加权复合-微分算子。

1. 引言

对复合算子的研究始于两个目标：一是为希尔伯特空间或巴拿赫函数空间上的有界算子提供具体实例，二是从不同角度探讨泛函分析中的“不变子空间问题”。很久以前，Banach 和 Stone（见 [21]）证明，紧豪斯多夫空间上连续函数空间之间的线性满射等距算子都属于加权复合算子。许多作者在不同背景下对 Banach-Stone 定理作出了若干有趣的推广和扩展。在已有研究中，函数空间的等距算子，特别是 Hardy 空间 $\mathcal{H}^p$ 上的等距算子，更值得关注（见 [5, 17]）。Forelli [5] 和 Leeuw [17] 证明，对于 $p \geq 1$，Hardy 空间 $\mathcal{H}^p$ 上的满射等距算子恰好都是加权复合算子，但 $p = 2$ 情形除外。Banach-Stone 定理不仅激发并推动了函数空间上等距算子的研究，也为加权复合算子的研究奠定了基础。

令 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 中所有解析函数构成的空间。Hardy 空间 $\mathcal{H}^2$ 是由满足下列条件的函数 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 构成的希尔伯特空间

$$\|f\|^2_{\mathcal{H}^2} = \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty.$$

对于 $-1 < \alpha < \infty$，加权 Bergman 空间 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 是 $\mathbb{D}$上所有满足下列条件的解析函数构成的集合

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}^2_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha \, dA(z) < \infty,$$

其中，$dA(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的归一化面积测度。当 $\alpha = 0$ 时，该空间称为经典 Bergman 空间，记作 $\mathcal{A}^2$（见 [14]）。众所周知，$\mathcal{A}^2_\alpha$ 是一个再生核希尔伯特空间，其在每个 $w \in \mathbb{D}$ 处的再生核函数为，

$$K_w(z) = \frac{1}{(1 - \overline{w}z)^{\alpha+2}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

文件：Allu-Halder-Pal-P2-Compo-1-20-01-23-6-45-pm.tex，打印时间：2023年-1-23，1.23**2020年 数学主题分类。**主要分类号 47B38、47B33、30H20；次要分类号 47A05、47B15。**关键词与短语。**复合算子、微分算子、加权 Bergman 空间、复对称性、导数 Hardy 空间。

对于每个非负整数 n 和 $w \in \mathbb{D}$，令 $K_w^{[n]}(z)$ 为对 n 阶导数进行点求值的再生核，其中

$$K_w^{[n]}(z) = \frac{(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+n+1)z^n}{(1-\overline{w}z)^{n+\alpha+2}},\ z \in \mathbb{D}.$$

可以证明，对于所有 $f \in \mathcal{A}_\alpha^2$，$\left\langle f(z), K_w^{[n]}(z)\right\rangle = f_{(n)}(w)$。对于任意非负整数 n，令

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}z^n,\ \ z \in \mathbb{D},$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 表示标准伽马函数。这里的集合 $\{\gamma_n :\ n \geq 0\}$ 构成了 $\mathcal{A}_\alpha^2$ 的标准正交基（参见 [14]）。

设 $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 和 ϕ 是 $\mathbb{D}$的解析自映射。$\mathcal{H}(\mathbb{D})$上的加权复合算子是由下式定义的线性算子 ψC_ϕ

$$(\psi C_\phi f)(z) = \psi(z) f(\phi(z)),\ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

若 $\psi(z) = 1$，则 ψC_ϕ 化为通常的复合算子 C_ϕ。值得注意的是，每个复合算子在 $\mathcal{H}^2$ 上都是有界的（参见 [1]）。若干作者对 $\mathbb{D}$ 中各种解析函数空间上的复合算子进行了广泛研究。有关复合算子的更详细论述，请参阅 Cowen 和 MacCluer[1]以及 Hedenmalm等人 [14]所著的书籍。

在研究 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 中的函数时，也值得考虑通过微分定义的作用于 $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 的算子。对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 上的 n 阶微分算子定义为 $D^{(n)}(f) = f^{(n)}$。容易看出，$\mathcal{A}_\alpha^2$ 上的 n 阶微分算子不是有界的。然而，对于许多解析自映射 ϕ of $\mathbb{D}$，算子 $C_\phi D^{(n)}$定义为

$$f(z) \to f^n(\phi(z))$$

它在 $\mathcal{A}_\alpha^2$ 上有界。Hibschweiler 和 Portnoy [15] 以及 Ohno [20] 最初研究了这些算子，此后许多研究者也注意到了这些算子（见[3, 4, 12, 13, 22]）。Ohno [20] 和 Stević [22]分别研究了 Hardy 空间上的 $C_\phi D^{(1)}$ 以及加权 Bergman 空间上的 $C_\phi D^{(n)}$ 的有界性与紧性。我们将有界算子 $C_\phi D^{(n)}$ 记为 $D_{n,\ \phi}$。对于 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$，加权复合微分算子$D_{m,\ \psi,\ \phi}$ 定义为

$$(D_{m,\psi,\phi} f)(z) := \psi(z) f^m(\phi(z)),\ \ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}).$$

对于 $m = 0$，算子 $D_{m,\ \psi,\ \phi}$ 化简为 ψC_ϕ。当 $m = 0$ 和 $\psi(z) = 1$时，$D_{m,\ \psi,\ \phi}$化简为复合算子 C_ϕ。对于 $m = 1$ 和 $\psi(z) = 1$，我们有 $D_{m,\ \psi,\ \phi} = C_\phi D$。当 $m = 1$ 和 $\psi(z) = \phi'(z)$时，$D_{m,\ \psi,\ \phi}$ 变为 DC_ϕ。

可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个共轭 是一个反线性映射 $\mathcal{C} :\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，满足 $\langle \mathcal{C}x, \mathcal{C}y\rangle = \langle y, x\rangle$，对所有 $x, y \in \mathcal{H}$ 和 $\mathcal{C}^2 = I$均成立。若存在 $\mathcal{H}$ 上的一个共轭 $\mathcal{C}$ 使得 $T = \mathcal{C}T^*\mathcal{C}$，则称 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 T 是复对称 的。

复对称算子的概念是对复对称矩阵的一种自然推广。在过去二十年里，许多数学家对复对称算子理论进行了广泛研究。这一领域的发展始于

Garcia 和 Putinar [8, 9], 、Garcia 和 Poore [7] 以及 Garcia 和 Wogen [10, 11] 在这一方向上的工作。2014年，Jung 等人 [16] 对 $H^2(\mathbb{D})$ 上的复对称加权复合-微分算子给出了一些刻画。此外，作者还在 [16] 中研究了这些算子的谱性质。2014年，Garcia 和 Hammond [6] 研究了加权 Hardy 空间上的复对称加权复合算子。关于复对称算子的更多有趣方面，可参阅 Fatehi [2], 、Lim 和 Khoi [18], 、Wang 和 Xao [24] 以及 Wang 和 Han [23]的相关研究。

令 $\mathcal{S}^2(\mathbb{D})$ 表示导数属于 Hardy 空间 $\mathcal{H}^2$ 的解析函数空间，其定义为

$$\mathcal{S}^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|^2_{\mathcal{S}^2} = |f(0)|^2 + \|f'\|^2_{\mathcal{H}^2} = |f(0)|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 |f_m|^2 < \infty \right\}.$$

2017年，Gu 和 Luo [12] 在 $\mathcal{S}^2(\mathbb{D})$ 上引入了一个等价范数，并定义了另一个导数 Hardy 空间 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$:

$$\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|^2_{\mathcal{S}^2_1} = \|f\|^2_{\mathcal{H}^2} + \frac{3}{2}\|f'\|^2_{\mathcal{A}^2} + \frac{1}{2}\|f'\|^2_{\mathcal{H}^2} < \infty \right\}$$

$$= \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \|f\|^2_{\mathcal{S}^2_1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+2)}{2} |f_m|^2 < \infty \right\}.$$

对于 $f, g \in \mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$, $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$ 上的内积定义为

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}^2_1} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^2} + \frac{3}{2}\langle f', g' \rangle_{\mathcal{A}^2} + \frac{1}{2}\langle f', g' \rangle_{\mathcal{H}^2}.$$

对于任意 $w \in \mathbb{D}$，定义

$$K_w(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m (\overline{w} z)^m, \ z \in \mathbb{D},$$

其中

$$\delta_m = \frac{2}{(m+1)(m+2)} \quad \text{for } m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

显然,

$$\langle f(z), K_w(z) \rangle_{\mathcal{S}^2_1} = f(w), \quad z \in \mathbb{D}.$$

因此， K_w 是 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$的再生核函数。对于任意 $w \in \mathbb{D}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们将 n阶导数的点求值再生核定义为

$$K_w^{[n]}(z) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} \delta_m (\overline{w})^{m-n} z^m$$

使得对于所有 $z \in \mathbb{D}$， $\left\langle f, \ K_w^{[n]} \right\rangle = f^{(n)}(w)$。此外，我们注意到，对于任意 $f \in \mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$,

$$\left\langle f, D^*_{n,\psi,\phi} K_w(z) \right\rangle_{\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})} = \langle D_{n,\psi,\phi} f, K_w(z) \rangle_{\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})} = \psi(w) f^{(n)}(\phi(w)) = \left\langle f, \overline{\psi(w)} K^{[n]}_{\phi(w)} \right\rangle_{\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})}.$$

因此， $D^*_{n,\ \psi,\ \phi} K_w(z) = \psi(\overline{w}) K^{[n]}_{\phi\ w}$ （）。

本文的主要目的是研究关于共轭 $C_{\mu,\ \eta}$ 的复对称加权复合-微分算子，该算子作用于加权 Bergman 空间 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 以及导数 Hardy 空间$\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$。对于 μ，η 在单位圆 $\{z \in \mathbb{C}$ 上: $|z| = 1\}$，$C_{\mu,\ \eta}$ 定义为

$$C_{\mu,\eta}f(z) = \mu\overline{f(\overline{\eta z})}$$

对所有解析函数 f。本文结构安排如下。在定理 2.1 中，我们刻画了满足以下条件的函数 ψ 和 ϕ：$D_{n,\psi,\phi}$ 在 A^2_α 上关于共轭$C_{\mu,\eta}$是复对称的。当 ϕ 是 $\mathbb{D}$上的自同构时，定理 2.2 给出了使 $D_{n,\psi,\phi}$ 有界且为 $C_{\mu,\eta}$- 对称的 ϕ 的显式形式。在定理 2.3 中，我们得到了 $D_{n,\psi,\phi}$ 为正规算子的充分条件；而定理 3.7 则讨论了$D_{n,\psi,\phi}$ 为厄米算子的充要条件。在定理 2.5 中，我们刻画了满足以下条件的函数 ψ和 ϕ：$D_{n,\psi,\phi}$ 在 A^2_α 上关于共轭 $C_{\mu,\eta}$ 是复对称的。对于 $n = 1$，定理 2.1、2.4 和 2.5 推广了 Liu 等人最近证明的结果[19]。

2. 主要结果

我们研究加权 Bergman 空间$\mathcal{A}^2_\alpha$上的加权复合-微分算子。首先，我们证明以下引理，以证明我们的主要结果之一。在全文中，我们用 $p = (\alpha + 2)(\alpha + 3)\cdots(\alpha + n + 1)$ 表示。

引理 2.1. 设 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 的解析自映射，且 $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 满足 $D_{n,\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$上有界。则对任意 $w \in \mathbb{D}$,

$$D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z) = \overline{\psi(w)}K^{[n]}_{\phi(w)}.$$

现在，我们给出关于 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 上加权复合-微分算子在共轭 $C_{\mu,\eta}$下复对称性的完全刻画。

定理 2.1. 设 $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射，且 $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 满足 $\psi \neq 0$，并且 $D_{n,\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$上有界。则$D_{n,\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 上关于共轭$C_{\mu,\eta}$ 是复对称的，当且仅当，

$$\psi(z) = \frac{az^n}{(1-\eta bz)^{n+\alpha+2}} \quad and \quad \phi(z) = b + \frac{cz}{1-\eta bz} \ \ for\ all\ z \in \mathbb{D},$$

其中 a，$c \in \mathbb{C}$ 且 $b \in \mathbb{D}$。

在以下结果中，我们给出使 ϕ 成为 $\mathbb{D}$ 上的自同构的 ϕ 条件，并给出算子 $D_{n,\ \psi,\ \phi}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 上关于共轭 $C_{\mu,\ \eta}$ 复对称的条件。

定理 2.2. 设 $n \in \mathbb{N}$, ϕ 是 $\mathbb{D}$ 上的自同构，且 $\psi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ 不恒为零，使得 $D_{n,\ \psi,\ \phi}$ 有界，并且 $C_{\mu,\ \eta}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 上是对称的。则以下结论之一成立：

(a) $\phi(z) = -\xi z$ *with* $|\xi| = 1$ *for some* $\xi \in \mathbb{C}$.

(b)

$$\phi(z) = \frac{\overline{a_0}}{\eta a_0} \cdot \frac{a_0 - z}{1 - \overline{a_0}z} \quad for\ some\ a_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}.$$

我们得到使 $C_{\mu,\ \eta}$-对称有界算子 $D_{n,\ \psi,\ \phi}$ 成为正规算子的一个充分条件。定义在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子 T 若满足$TT^* = T^*T$，或对任意 $x \in \mathcal{H}$、$\|Tx\| = \|T^*x\|$均成立，则称其为正规算子。

定理 2.3。设 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 的解析自映射，满足 $\phi(0)=0$，且 $\psi\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 不恒为零，并且对任意 $n\in\mathbb{N}$，算子 $D_{n,\,\psi,\,\phi}$ 是有界的，且关于共轭$C_{\mu,\,\eta}$为复对称算子。那么 $D_{n,\,\psi,\,\phi}$ 是正规算子。

若 $T=T^*$，则称有界线性算子为厄米算子。在下述结果中，我们给出算子$D_{n,\psi,\phi}$在 $\mathcal{A}^2_\alpha$, $n\in\mathbb{N}$ 上为厄米算子的充要条件。

定理 2.4. 设 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 的解析自映射，且 ψ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的非零解析函数，并满足 $D_{n,\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 上有界。那么，$D_{n,\psi,\phi}$ 是厄米算子，当且仅当

$$\psi(z)=\frac{az^n}{(1-\overline{b}z)^{n+\alpha+2}}\ \ and\ \ \phi(z)=b+\frac{cz}{1-\overline{b}z}$$

存在某个 $a,c\in\mathbb{R}$ 和 $b\in\mathbb{D}$，使得

接下来，我们研究导数 Hardy 空间 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$ 上的加权复合-微分算子。我们给出 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$ 上复对称加权复合-微分算子 $D_{n,\psi,\phi}$ 的完全刻画。

定理 2.5. 设 ϕ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析自映射，且 $\psi\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ 满足 $D_{n,\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$上有界。若 $D_{n,\psi,\phi}$在 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$上关于共轭 $C_{\mu,\eta}$是复对称算子，则存在 $a,b,c\in\mathbb{C}$，使得

$$\psi(z)=\frac{a}{n!\delta_n}F_1(z)\ and\ \phi(z)=b+c\frac{(n+3)}{(n+1)^2}\cdot\frac{F_2(z)}{F_1(z)}\ \ for\ all\ z\in\mathbb{D},\tag{2.1}$$

其中

$$F_1(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta b)^{k-n}z^k\ \ and\ \ F_2(z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!}{(k-n-1)!}\delta_k(\eta b)^{k-n-1}z^k.$$

反之，若对于某些 a、b、$c\in\mathbb{C}$，ψ 和 ϕ 由 (2.1) 定义，则 $D_{n、\,\psi、\,\phi}$ 在 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$ 上关于共轭 $C_{\mu、\,\eta}$ 是复对称的，当且仅当 $b=0$ 或 $c=0$ 为零，或二者均为零。

3. Proof of the Main Results

引理 2.1 的证明。令 $f\in\mathcal{A}^2_\alpha$。则

$$\begin{aligned}\left\langle f,D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z)\right\rangle_{\mathcal{A}^2_\alpha}&=\left\langle D_{n,\psi,\phi}f,K_w\right\rangle_{\mathcal{A}^2_\alpha}\\&=\left\langle\psi\cdot f^{(n)}(\phi)K_w\right\rangle_{\mathcal{A}^2_\alpha}\\&=\psi(w)f^{(n)}(\phi(w))=\left\langle f,\overline{\psi(w)}K^{[n]}_{\phi(w)}\right\rangle_{\mathcal{A}^2_\alpha}\end{aligned}$$

对任意 $f\in\mathcal{A}^2_\alpha$均成立。因此，$D^*_{n、\,\psi、\,\phi}K_w(z)=\overline{\psi(w)}K^{[n]}_{\phi\,w}()$。 □

定理 2.1 的证明。设 $D_{n,\psi,\phi}$ 为复对称算子，其共轭为$C_{\mu,\eta}$。则有

$$D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z)=C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z)\tag{3.1}$$

对所有 $z, w \in \mathbb{D}$ 均成立。简单计算可得

$$\begin{aligned} D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z) &= D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}\left(\frac{1}{(1-\overline{w}z)^{\alpha+2}}\right) \\ &= D_{n,\psi,\phi}\left(\frac{\mu}{(1-\eta w z)^{\alpha+2}}\right) \\ &= \frac{\mu p\psi(z)(\eta w)^n}{(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+2}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此，(3.1) 的右端给出

$$C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z) = C_{\mu,\eta}\overline{\psi(w)}K^{[n]}_{\phi(w)} = \frac{\mu p\psi(w)(\eta z)^n}{(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2}}. \tag{3.3}$$

将 (3.2) 和 (3.3) 代入 (3.1)，得到

$$\frac{\mu p\psi(z)(\eta w)^n}{(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+2}} = \frac{\mu p\psi(w)(\eta z)^n}{(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2}} \tag{3.4}$$

对所有 $z, w \in \mathbb{D}$ 均成立。令 (3.4) 中的 $z = 0$，得到

$$\frac{\mu p\psi(0)(\eta w)^n}{(1-\eta w\phi(0))^{n+\alpha+2}} = 0 \tag{3.5}$$

对任意 $z \in \mathbb{D}$ 均成立。由于 $\mu, \eta \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$，容易看出 (3.5) 等价于$\psi(0) = 0$。

令 $\psi(z) = z^m g(z)$，其中 $m \in \mathbb{N}$ 和 g 在 $\mathbb{D}$ 上解析，且 $g(0) \neq 0$。现在我们的目标是证明 $m = n$。若 $m > n$，由 (3.4) 可得

$$\frac{z^{m-n}g(z)}{(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+2}} = \frac{w^{m-n}g(w)}{(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2}} \tag{3.6}$$

对任意 $z, w \in \mathbb{D}$。将 $w = 0$ 代入 (3.6)，得到 $g(0) = 0$，这与 $g(0) \neq 0$这一事实矛盾。若 $m < n$，由 (3.4) 可得

$$\frac{w^{n-m}g(z)}{(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+2}} = \frac{z^{n-m}g(w)}{(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2}}. \tag{3.7}$$

将 $w = 0$ 代入 (3.7)，得到 $g(0) = 0$，这与假设 $g(0) \neq 0$矛盾。因此，$m = n$，于是 (3.4) 化为

$$\frac{g(z)}{(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+2}} = \frac{g(w)}{(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2}} \tag{3.8}$$

对所有 $z, w \in \mathbb{D}$，令 (3.8) 中的 $w = 0$，可得

$$g(z) = \frac{g(0)}{(1-\eta z\phi(0))^{n+\alpha+2}}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \psi(z) &= z^n g(z) \\ &= \frac{az^n}{(1-\eta bz)^{n+\alpha+2}}, \text{ where } a = g(0) \text{ and } b = \phi(0). \end{aligned}$$

将 (3.4) 中的 $\psi(z)$ 代入，可得

$$(1-\eta bz)^{n+\alpha+2}(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+2} = (1-\eta bw)^{n+\alpha+2}(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2} \tag{3.9}$$

对所有 $z, w \in \mathbb{D}$ 均成立。对 (3.9) 两边关于 w 求导，可得

$$\begin{aligned}(3.10)\qquad &(n+\alpha+2)(1-\eta bz)^{n+\alpha+2}(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+1}(-\eta\phi(z))\\ &\quad=(n+\alpha+2)(1-\eta bw)^{n+\alpha+1}(-\eta b)\\ &\quad+(n+\alpha+2)(1-\eta bw)^{n+\alpha+2}(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2}(-\eta z\phi'(w)).\end{aligned}$$

令 $w=0$ 代入（3.10）可得

$$\phi(z)=b+\frac{cz}{1-\eta bz}$$

对所有 $z\in\mathbb{D}$均成立，其中 $c=\phi'(0)$。

反之，设 a、$c\in\mathbb{C}$ 和 $b\in\mathbb{D}$ 满足

$$\psi(z)=\frac{az^n}{(1-\eta bz)^{n+\alpha+2}} \quad \text{and} \quad \phi(z)=b+\frac{cz}{1-\eta bz} \text{ for all } z\in\mathbb{D}.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}(3.11)\qquad D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z)&=\frac{\mu p\psi(z)(\eta w)^n}{(1-\eta w\phi(z))^{n+\alpha+2}}\\ &=\frac{a\mu p(\eta zw)^n}{(1-\eta bz-\eta bw-\eta czw)^{n+\alpha+2}}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(3.12)\qquad C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z)&=C_{\mu,\eta}\overline{\psi(w)}K^{[n]}_{\phi(w)}\\ &=\frac{\mu p\psi(w)(\eta z)^n}{(1-\eta\phi(w)z)^{n+\alpha+2}}\\ &=\frac{a\mu p(\eta zw)^n}{(1-\eta bw-\eta bz-\eta czw)^{n+\alpha+2}}.\end{aligned}$$

由 (3.11) 和 (3.12) 可知

$$D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z)=C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z) \text{ for all } z\in\mathbb{D}.$$

由于再生核函数张成的空间在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 中稠密，因此算子 $D_{n,\ \psi,\ \phi}$ 关于共轭 $C_{\mu,\ \eta}$是复对称的。证毕。□

定理 2.2 的证明。 由于 $D_{n,\ \psi,\ \phi}$ 关于共轭 $C_{\mu,\ \eta}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 上是复对称的，由定理 2.1 可得

$$\phi(z)=b+\frac{cz}{1-\eta bz}, \text{ where } b=\phi(0) \text{ and } c=\phi'(0).$$

由于 ϕi 是 $\mathbb{D}$ 上的一个自同构，因此存在 $a_0\in\mathbb{D}$ 和 $\xi\in\mathbb{C}$，使得 $|\xi|=1$

$$(3.13)\qquad \phi(z)=b+\frac{cz}{1-\eta bz}=\xi\cdot\frac{a_0-z}{1-\overline{a_0}z}$$

对任意 $z\in\mathbb{D}$。容易看出，(3.13) 等价于

$$(3.14)\qquad b-b\overline{a_0}z-\eta b^2z+\eta b^2\overline{a_0}z^2+cz-c\overline{a_0}z^2=\xi\overline{a_0}-\xi z-\eta b\xi a_0z+\xi\eta bz^2$$

对任意 $z \in \mathbb{D}$。比较 (3.14) 两边的常数项，得到 $b = \xi a_0$。再次比较 z 和 z^2的系数，可得以下关系

$$c - b\overline{a_0} - \eta b^2 = -\xi - \eta b \xi a_0, \tag{3.15}$$

and

$$\eta b^2 \overline{a_0} - c\overline{a_0} = \xi \eta b. \tag{3.16}$$

现在我们考虑以下两种情形:

情形 I: 如果 $a_0 = 0$，那么 $b = 0$ ，因此 (3.15) 等价于 $c = -\xi$，这表明

$$\phi(z) = \xi z \text{ with } |\xi| = 1.$$

情形 II: 如果 $a_0 \neq 0$，利用 $b = \xi a_0$ 和 (3.16)，我们得到

$$c = \frac{\xi^2 \eta a_0}{\overline{a_0}} \cdot (|a_0|^2 - 1).$$

利用 (3.15) 中 c 的值，我们得到

$$\xi = \frac{\overline{a_0}}{\eta a_0}.$$

证明至此完成。 □

定理 2.3 的证明。由于 $D_{n,\ \psi,\ \phi}$ 在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 上是 $C_{\mu,\ \eta}$-对称的，且 $\phi(0) = 0$，由定理 2.1 可得

$$\psi(z) = az^n \text{ and } \phi(z) = cz, \quad \text{where } a, c \in \mathbb{C}.$$

那么，对于任意非负整数 k，我们有

$$\begin{aligned}
\|D_{n,\psi,\phi}\gamma_k\|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} |\langle D_{n,\psi,\phi}\gamma_k, \gamma_j\rangle|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left\langle \psi \cdot \gamma_k^{(n)}(\phi), \sqrt{\frac{\Gamma(j+2+\alpha)}{j!\Gamma(2+\alpha)}} z^j \right\rangle \right|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left\langle \frac{k! a c^{k-n}}{(k-n)!} \sqrt{\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}} z^k, \sqrt{\frac{\Gamma(j+2+\alpha)}{j!\Gamma(2+\alpha)}} z^j \right\rangle \right|^2
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left\|D^*_{n,\psi,\phi}\gamma_k\right\|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left|\left\langle D^*_{n,\psi,\phi}\gamma_k, \gamma_j\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} |\langle \gamma_k, D_{n,\psi,\phi}\gamma_j\rangle|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left\langle \sqrt{\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}} z^k, \psi \cdot \gamma_j^{(n)}(\phi) \right\rangle \right|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left| \left\langle \sqrt{\frac{\Gamma(k+2+\alpha)}{k!\Gamma(2+\alpha)}} z^k, \frac{j! a c^{j-n}}{(j-n)!} \sqrt{\frac{\Gamma(j+2+\alpha)}{j!\Gamma(2+\alpha)}} z^j \right\rangle \right|^2 .
\end{aligned}$$

由于集合 $\{\gamma_n\colon\ n\geq 0\}$ 构成了 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 的标准正交基，因此对于任意 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，我们有

$$\|D_{n,\psi,\phi}\gamma_k\|^2=\left\|D^*_{n,\psi,\phi}\gamma_k\right\|^2=|ac^{k-n}|^2\left(\frac{k!}{(k-n)!}\right). \tag{3.17}$$

因此，由 (3.17) 可知 $\|D_{n,\psi,\phi}(f)\|=\left\|D^*_{n,\psi,\phi}(f)\right\|$ 对所有 $f\in\mathcal{A}^2_\alpha$ 均成立，并且 $D_{n,\psi,\phi}$ 是正规算子。证明至此完成。□

定理 2.4 的证明。设 $D_{n,\psi,\phi}$ 是厄米的。那么 $D^*_{n,\psi,\phi}=D_{n,\psi,\phi}$，这等价于

$$D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z)=D_{n,\psi,\phi}K_w(z)\ \text{ for all } z\in\mathbb{D}.$$

注意到

$$D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z)=\frac{pz^n\overline{\psi(w)}}{(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}}\ \text{ and }\ D_{n,\psi,\phi}K_w(z)=\frac{p(\overline{w})^n\psi(z)}{(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+2}}. \tag{3.18}$$

因此，由 (3.18) 可得

$$\frac{pz^n\overline{\psi(w)}}{(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}}=\frac{p(\overline{w})^n\psi(z)}{(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+2}}. \tag{3.19}$$

对所有 $z,w\in\mathbb{D}$ 均成立。在 (3.19) 中令 $w=0$，得到 $\psi(0)=0$。对于 $\psi\in\mathcal{A}^2_\alpha$，若 $\psi(z)=z^mg(z)$，其中 $m\in\mathbb{N}$ 且 g 在 $\mathbb{D}$ 上解析，满足 $g(0)\neq 0$，则可证明 $m=n$。

情形 *I*：若 $m>n$，则 (3.19) 变为

$$\frac{z^{m-n}g(z)}{(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+2}}=\frac{(\overline{w})^{m-n}\overline{g(w)}}{(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}} \tag{3.20}$$

对所有 z、$w\in\mathbb{D}$ 均成立。在 (3.20) 中令 $w=0$，可得 $g(0)=0$，这与假设 $g(0)\neq 0$ 矛盾。

情形 *II*：若 $m<n$，则由 (3.19) 得到

$$\frac{z^{n-m}\overline{g(w)}}{(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}}=\frac{\overline{w}^{n-m}g(z)}{(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+2}} \tag{3.21}$$

对所有 z、$w\in\mathbb{D}$ 均成立。在 (3.21) 中代入 $w=0$，得到 $g(0)=0$，这就产生了矛盾。因此，$m=n$。现在 (3.19) 等价于

$$\frac{\overline{g(w)}}{(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}}=\frac{g(z)}{(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+2}} \tag{3.22}$$

对所有 z、$w\in\mathbb{D}$ 均成立。在 (3.22) 中令 $w=0$，可得

$$g(z)=\frac{\overline{g(0)}}{(1-z\overline{\phi(0)})^{n+\alpha+2}}.$$

因此，

$$\psi(z)=\frac{az^n}{(1-\overline{b}z)^{n+\alpha+2}},\ \text{ where }\ a=\overline{g(0)}\text{ and }b=\phi(0). \tag{3.23}$$

将（3.23）代入（3.19），我们得到

$$a(1-b\overline{w})^{n+\alpha+2}(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}=\overline{a}(1-\overline{b}z)^{n+\alpha+2}(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+2} \tag{3.24}$$

对所有的 $z,w\in\mathbb{D}$ 均成立。若在 (3.24) 中令 $w=0$，则可得 $a=\overline{a}$，进而得到 $a\in\mathbb{R}$。

对方程 (3.24) 两边关于 $\overline{w}$ 求导，得到

$$
\begin{aligned}
(3.25)\qquad & (n+\alpha+2)(1-\overline{b}z)^{n+\alpha+2}(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+1}(-\phi(z)) \\
&= (n+\alpha+2)(1-b\overline{w})^{n+\alpha+1}(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}(-b) \\
&\quad + (n+\alpha+2)(1-b\overline{w})^{n+\alpha+2}(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+1}(-z\phi'(w))
\end{aligned}
$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$。对于 $w = 0$，容易看出 (3.25) 给出

$$
\phi(z) = b + \frac{cz}{1-\overline{b}z},\ z \in \mathbb{D}, \tag{3.26}
$$

其中 $b = \phi(0)$ 和 $c = \phi'(0)$。根据 (3.26)，我们得到 $\phi'(0) = c$。因此，$c = \phi'(0) = \overline{c}$ 这意味着 $c \in \mathbb{R}$。

反之，假设 ψ 和 ϕ 具有 (3.23) 和 (3.26) 所给出的形式。于是我们有

$$
\begin{aligned}
(3.27)\qquad D_{n,\psi,\phi}K_w(z) &= \frac{p(\overline{w})^n\psi(z)}{(1-\overline{w}\phi(z))^{n+\alpha+2}} \\
&= \frac{ap(z\overline{w})^n}{(1-\overline{b}z-b\overline{w}+\overline{w}|b|^2z-\overline{w}cz)^{n+\alpha+2}}
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
(3.28)\qquad D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z) &= \frac{apz^n\overline{\psi(w)}}{(1-z\overline{\phi(w)})^{n+\alpha+2}} \\
&= \frac{ap(z\overline{w})^n}{(1-b\overline{w}-\overline{b}z+\overline{w}|b|^2z-\overline{w}cz)^{n+\alpha+2}}.
\end{aligned}
$$

由 (3.27) 和 (3.28) 可清楚看出，对于所有 $z \in \mathbb{D}$，$D_{n,\ \psi,\ \phi}K_w(z) = D^*_{n,\ \psi,\ \phi}K_w(z)$。由于再生核函数的张成在 $\mathcal{A}^2_\alpha$ 中稠密，因此可得 $D^*_{n,\ \psi,\ \phi} = D_{n,\ \psi,\ \phi}$。证明完成。□

定理 2.5 的证明。设 $D_{n,\ \psi,\ \phi}$ 为复对称算子，其共轭为$C_{\mu,\ \eta}$。则有如下结论：

$$
D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z) = C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z) \tag{3.29}
$$

对所有 $z, w \in \mathbb{D}$。利用 (3.29)，我们得到

$$
\begin{aligned}
D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z) &= D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k(\overline{w}z)^k\right) \\
&= D_{n,\psi,\phi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu\delta_k(\eta wz)^k\right) \\
&= \mu\psi(z)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta w)^k\phi(z)^{k-n}.
\end{aligned}
$$

另一方面,

$$\begin{aligned} C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z) &= C_{\mu,\eta}\overline{\psi(w)}K^{[n]}_{\phi(w)} \\ &= C_{\mu,\eta}\overline{\psi(w)}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k z^k(\overline{\phi(w)})^{k-n} \\ &= \mu\psi(w)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta z)^k\phi(w)^{k-n}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\mu\psi(z)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta w)^k\phi(z)^{k-n} = \mu\psi(w)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta z)^k\phi(w)^{k-n} \tag{3.30}$$

对所有 z、$w\in\mathbb{D}$ 均成立。将 $w=0$ 代入 (3.30)，可得

$$\mu\psi(0)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta z)^k\phi(0)^{k-n}=0,\ \ z\in\mathbb{D}$$

这意味着 $\psi(0)=0$。

设 $\psi(z)=z^m\chi(z)$，其中 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\chi(z)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数，且 $\chi(0)\neq 0$。沿用定理 2.1 和定理 2.4 证明中的类似论证，可容易地证明 $m=n$。因此，(3.30) 变为

$$\chi(z)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k\eta^k(w\phi(z))^{k-n} = \chi(w)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k\eta^k(z\phi(w))^{k-n} \tag{3.31}$$

对所有 z、$w\in\mathbb{D}$ 均成立。若在 (3.31) 中令 $w=0$，则可得

$$\chi(z)=\frac{a}{n!\delta_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta bz)^{k-n},\ \ z\in\mathbb{D},$$

其中，$a=\chi(0)$ 和 $b=\phi(0)$。因此，我们有

$$\psi(z)=\frac{a}{n!\delta_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k z^k(\eta b)^{k-n},\ \ z\in\mathbb{D}. \tag{3.32}$$

将 $\chi(z)$ 的表达式代入式 (3.31)，得到

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta bz)^{k-n}\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k\eta^k(w\phi(z))^{k-n}\right)$$

$$=\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta bw)^{k-n}\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k\eta^k(z\phi(w))^{k-n}\right).$$

对上述关系两边关于 w 求导，得到

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta bz)^{k-n}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}(k-n)\delta_k\eta^k w^{k-n-1}\phi(z)^{k-n}\right)$$

$$=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}(k-n)\delta_k w^{k-n-1}(\eta b)^{k-n}\right)\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k\eta^k(z\phi(w))^{k-n}\right)$$

$$+\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta bw)^{k-n}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}(k-n)\delta_k\eta^k z^{k-n}\phi(w)^{k-n-1}\phi'(w)\right).$$

将 $w=0$ 代入上式，可得

$$\phi(z)=b+\frac{n+3}{(n+1)^2}c\cdot\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k!}{(k-n-1)!}\delta_k(\eta b)^{k-n-1}z^k}{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta b)^{k-n}z^k}\ \text{ for all } z\in\mathbb{D}, \tag{3.33}$$

其中 $c=\phi'(0)$。

反过来，设 ψ 和 ϕ 分别具有 (3.32) 和 (3.33) 所给出的形式，其中 a、b、$c\in\mathbb{C}$ 为某些量。那么容易看出，对于任意 $z\in\mathbb{D}$,

$$\frac{F_2(z)}{F_1(z)}=\frac{(n+1)^2}{n+3}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}d_j(\eta b)^{j-1}z^j$$

其中 $d_1=1$ 和 $d_j\in\mathbb{R}^+$ 对应于 $j=2$、3、$\cdots$。因此，$\phi(z)$ 可写为

$$\phi(z)=b+c\sum_{j=1}^{\infty}d_j(\eta b)^{j-1}z^j. \tag{3.34}$$

对于任意 $n\in\mathbb{N}$，如果对所有 z、$w\in\mathbb{D}$ 都成立 (3.30)，则算子 $D_{n,\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{S}_1^2(\mathbb{D})$ 上将是复对称的，其共轭为 $C_{\mu,\eta}$。

鉴于 (3.32) 和 (3.34)，关系式 (3.30) 等价于

$$\left(\frac{a}{n!\delta_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta b)^{k-n}z^k\right)\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{m!}{(m-n)!}\delta_m(\eta w)^m\left(b+c\sum_{j=1}^{\infty}d_j(\eta b)^{j-1}z^j\right)^{m-n}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{n!\delta_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta b)^{k-n}w^k\right)\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{m!}{(m-n)!}\delta_m(\eta z)^m\left(b+c\sum_{j=1}^{\infty}d_j(\eta b)^{j-1}w^j\right)^{m-n}\right)$$

这意味着

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta b)^{k-n}z^k\right)\left\{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{m!}{(m-n)!}\delta_m(\eta w)^m\left(\sum_{l=0}^{m-n}b^l\left(\sum_{j=1}^{\infty}cd_j(\eta b)^{j-1}z^j\right)^{m-n-l}\right)\right\}$$

$$=\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta b)^{k-n}w^k\right)\left\{\sum_{m=n}^{\infty}\frac{m!}{(m-n)!}\delta_m(\eta z)^m\left(\sum_{l=0}^{m-n}b^l\left(\sum_{j=1}^{\infty}cd_j(\eta b)^{j-1}w^j\right)^{m-n-l}\right)\right\}.$$

比较上述等式两边 $z^{n+2}w^{n+1}$ 的系数，可得

$$(n+1)!\eta^{n+1}\delta_{n+1}\left(\frac{1}{2}(n+2)!\eta^2b^3\delta_{n+1}+\frac{n!\delta_n^2}{(n+1)\delta_{n+1}}d_2\eta bc+n!d_1\eta bc\delta_n\right) \tag{3.35}$$

$$=\frac{1}{2}(n+2)!\eta^{n+2}\delta_{n+2}\left(\frac{2n!d_1bc\delta_n^2}{\delta_{n+1}}+(n+1)!\eta b^3\delta_{n+1}\right).$$

这里注意到，关系式 (3.35) 仅在 $b=0$ 或 $c=0$ 至少有一个为零时成立。现在我们讨论以下情形。

情形 $\boldsymbol{I}$：令 $b=0$ 且 $c\neq 0$。则 $\psi(z)=az^n$ 且 $\phi(z)=cz$。因此，在这种情形下，

$$D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z)=a\mu\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!\delta_kc^{k-n}(\eta zw)^k}=C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z).$$

情形 $\boldsymbol{II}$：令 $b\neq 0$ 且 $c=0$。则有

$$\phi(z)=b\ \text{ and }\ \psi(z)=\frac{a}{n!\delta_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_kz^k(\eta b)^{k-n}.$$

观察可知

$$\begin{aligned}D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z)&=\frac{a\mu}{n!\delta_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_kz^k(\eta b)^{k-n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!}{(k-n)!}\delta_k(\eta w)^kb^{k-n}\\&=C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z).\end{aligned}$$

情形 $\boldsymbol{III}$：设 $b=c=0$。那么 $\phi(z)=0$ 且 $\psi(z)=az^n$。因此，

$$D_{n,\psi,\phi}C_{\mu,\eta}K_w(z)=a\mu n!\delta_n(\eta zw)^n=C_{\mu,\eta}D^*_{n,\psi,\phi}K_w(z).$$

因此，我们得出结论：对于每种情形，$D_{n,\psi,\phi}$ 在 $\mathcal{S}^2_1(\mathbb{D})$ 上是 $C_{\mu,\eta}$-对称的。证明完毕。□

致谢： 第一位署名作者获得 SERB-CRG 资助，第三位署名作者获得 DST-INSPIRE 奖学金（IF 190721）资助，资助单位位于印度新德里。

参考文献

[1] C. C. Cowen 和 B. D. MacCluer，《解析函数空间上的复合算子》，高等数学研究，*CRC* 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州（1995年）。[2]M. Fatehi，复对称加权复合算子，复变函数与椭圆方程 **64**（2019年），710–720。

[3] M. Fatehi 和 C. N. B. Hammond，Hardy 空间上的复合-微分算子，《美国数学会会刊》148（2020年），2893–2900。[4]M. Fatehi 和 C. N. B. Hammond，加权复合-微分算子的正规性与自伴性，《复分析与算子理论》15（2021年），13页。[5] F. Forelli， H^p的等距算子，《加拿大数学杂志》16（1964年），721–728。[6] S. R. Garcia 和 C. N. B. Hammond，哪些加权复合算子是复对称的？《算子理论：进展与应用》236（2014年），171–179。[7] S. Garcia 和 D. Poore，复对称算子的范数闭包：紧算子与加权移位，《泛函分析杂志》264（2013年），691–712。[8] S. R. Garcia 和 M. Putinar，复对称算子及其应用，《美国数学会汇刊》358（2006年），1285–1315。[9] S. Garcia 和 M. Putinar，复对称算子及其应用 II，《美国数学会汇刊》359（2007年），3913–3931。[10] S. Garcia 和 W. Wogen，复对称部分等距算子，《泛函分析杂志》257（2009年），1251–1260。[11] S. Garcia 和 W. Wogen，若干新的复对称算子类，《美国数学会汇刊》362（2010年），6065–6077。[12] C. Gu 和 S. Luo，导数 Hardy 空间 $S^2(\mathbb{D})$ 上的复合算子与乘法算子，《复变函数与椭圆方程》63（2018年），599–624。[13] K. Han 和 M. Wang，Bergman空间上的加权复合-微分算子，《复分析与算子理论》15（2021年），89，17页。[14] H. Hedenmalm、B. Korenblum 和 K. Zhu，《Bergman空间理论》，《数学研究生教材》199，施普林格出版社，纽约，2000年。[15] R. A. Hibschweiler 和 N. Portnoy，Bergman空间与Hardy空间之间先复合后微分，《落基山数学杂志》35（2005年），843–855。[16] S. Jung、Y. Kim、E. Ko 和 J. E. Lee，$H^2(\mathbb{D})$ 上的复对称加权复合算子，《泛函分析杂志》267（2014年），323–351。[17] K. Leeuw、W. Rudin 和 J. Wermer，若干函数空间上的等距算子，《美国数学会会刊》11（1960年），694–698。[18] R. Lim 和 L. H. Khoi， $\mathcal{H}_\gamma(\mathbb{D})$ 上的复对称加权复合算子，《数学分析与应用杂志》464（2018年），101–118。[19] J. Liu、S. Ponnusamy 和 H. Xie，复对称加权复合-微分算子，《线性与多重线性代数》（2022年），数字对象标识符：https://doi.org/10.1080/03081087.2022.204381669。[20] S. Ohno，Hardy 空间之间复合与微分的乘积，《澳大利亚数学会通报》73（2006年），235–243。[21] R. K. Singh 和 J. S. Manhas，《函数空间上的复合算子》，第179卷，阿姆斯特丹：北荷兰出版社，1993年。[22] S. Stević，加权 Bergman 空间上的复合算子与微分算子的乘积，《比利时数学会西蒙·斯蒂文通报》16（2009年），623–635。[23] M. Wang 和 H. Kaikai，多变量中的复对称加权复合算子，《数学分析与应用杂志》474（2019年），961–987。[24] M. Wang 和 X. Yao，多变量中加权复合算子的复对称性，《国际数学杂志》47（2016年），1650017，14页。Vasudevarao Allu，印度理工学院布巴内斯瓦尔分校基础科学学院

R,

布巴内斯瓦尔-752050，奥迪沙，印度。电子邮箱地址：avrao@iitbbs.ac.in Himadri Halder，基础科学学院，印度理工学院布巴内斯瓦尔分校，布巴内斯瓦尔-752050，奥迪沙，印度。电子邮箱地址：himadrihalder119@gmail.com Subhadip Pal，基础科学学院，印度理工学院布巴内斯瓦尔分校，布巴内斯瓦尔-752050，奥迪沙，印度。

电子邮箱地址：subhadippal33@gmail.com