arXiv:2301.08580v1 [math.CV] 19 Jan 2023

分数阶泽尼克函数

Hajar Dkhissi [a]，Allal Ghanmi [a] 和 Safa Snoun[b]

[a] 分析、偏微分方程与谱几何，M.I.A.-S.I. 实验室，CeReMAR，数学系，邮政信箱1014，理学院，拉巴特穆罕默德五世大学，摩洛哥
[b] 数学系，理学院，加贝斯大学，邮编6072，突尼斯

文章历史
编译于2023年1月23日

摘要
我们研究并准确刻画了穿孔单位圆盘上的分数阶泽尼克函数，将经典 Zernike 多项式及其相关的 β-限制泽尼克函数推广至此。我们主要给出后者的谱实现，并证明它们是某种扰动磁（双曲）拉普拉斯算子的正交 L^2-特征函数。所建立的分数阶泽尼克函数的代数与解析性质包括其与特殊函数的联系、零点、正交性，以及它们满足的微分方程、递推公式与运算公式。我们还得到了积分表示，并讨论了它们作为亚纯函数的正则性，推导出其生成函数，其中包括一个“Hardy–Hille 型”的双线性生成函数。此外，我们证明，一个截断子类在相应的希尔伯特空间中构成完备正交系，并由此得到关于第二类广义 Bergman 空间的特定希尔伯特正交分解。

关键词
泽尼克多项式； β 限制的泽尼克函数；分数阶泽尼克函数； β 加权多重 Bergman 空间；零点集；多亚纯性；生成函数；正交性；完备性。

目录

1 引言 22 β-限制的泽尼克函数（谱实现）4

3 分数阶泽尼克函数
93.1 与特殊函数及显式表达式的联系.93.2 多亚纯性.143.3 微分方程.153.4 递推公式与运算公式.173.5 生成函数与双线性生成函数.203.6 积分表示.213.7 完备性.22

联系方式：A. Ghanmi。电子邮箱：allal.ghanmi@um5.ac.ma/ag@fsr.ac.ma

1. 引言

经典实泽尼克多项式是在光学问题的框架下引入的，尤其用于分析圆形反射镜的面形。在泽尼克关于刀口检验和相衬法的论文中[31]，，它们被定义为旋转不变二阶偏微分方程的特征函数。随后，Nijboer 在其著作中使用这些多项式发展了光学像差的衍射理论。此后，它们被广泛用于通过成像系统表达光学测试中的波前数据传播 [14, 15, 20]，，并用于表示光学系统的像差（由大气湍流引起）[26, 29]。它们还用于研究具有圆形光瞳的旋转对称系统中的衍射问题 [24, 32] 以及模式识别 [18, 28]。近年来，它们还被有效地应用于表征分子表面任意部分的形状，并评估蛋白质-蛋白质界面的形状互补性[23]。

广义复版本（称为泽尼克多项式或圆盘多项式）将它们定义为单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}$ 上的正交多项式； $|z| < 1\}$ 在边界处取有限值。它们由罗德里格斯型公式给出

$$\mathcal{Z}^{\gamma}_{m,n}(z,\overline{z}) := (-1)^{m+n}(1-|z|^2)^{-\gamma}\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \overline{z}^n}\left(1-|z|^2\right)^{\gamma+m+n} \tag{1.1}$$

其中非负整数 m、n 及实数 $\gamma > -1$ 可变。该定义与 Koornwinder [19] 给出的定义以及 Dunkl [6] 所研究的定义一致。关于$\mathcal{Z}^{\gamma}_{m,\,n}(z,\bar{z})$ 的代数和解析性质已有许多论文讨论 [1, 19, 30]。相应的 Wiener 型定理和 Paley 型定理由 Kanjin 在[16]中证明。最近发现，它们有助于具体描述不同类型柯西变换的谱性质 [7, 8]。

本文中，我们研究式（1.1）中泽尼克多项式的一种特定推广。具体而言，我们讨论以下函数族

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) := (-1)^m z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^{n+\rho}(1-|z|^2)^{\kappa+m}\right) \tag{1.2}$$

在穿孔单位圆盘上 $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}\setminus\{0\}$，对于固定实数 ρ，$\kappa > -1$ 以及变化的整数 m 和n，满足 $m \geq 0$ 且 $n + \rho \geq 0$。因此，对于任意非负整数 ρ，它们可进一步化为（1.1）中的泽尼克多项式，因为对于每个 $\ell = 0$, 1, $\cdots$我们有

$$z^{\ell}\mathcal{Z}^{\kappa,\ell}_{m,n}(z,\overline{z}) = \frac{\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n+\ell}(z,\overline{z})}{(\kappa+m+1)_{n+\ell}}. \tag{1.3}$$

否则，它们便不再是多项式。对于任意 ρ 的研究可归结为与 $0 \leq \rho < 1$ 对应的子类。更准确地说，我们有

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) = z^{-[\rho]}\mathcal{Z}^{\kappa,\widetilde{\rho}}_{m,n+[\rho]}(z,\overline{z})$$

只要 $n + [\rho] \geq 0$，其中 $[\rho]$ 表示 ρ 的整数部分，且 $0 \leq \widetilde{\rho} = \rho - [\rho] < 1$。这在一定程度上说明了下述定义的合理性；该定义也可由其多重亚纯性质得到说明（见定理3.10）。

定义 1.1。 函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,\,\rho}_{m,\,n}(z,\,\overline{z})$（见（1.2））称为分数阶泽尼克函数。

与满足对称关系 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,\,n}(z,\overline{z}) = \mathcal{Z}^{\kappa}_{m,\,n}(\overline{z},z) = \mathcal{Z}^{\kappa}_{n,\,m}(z,\overline{z})$ 的经典 Zernike 多项式不同（这些关系在其研究中起着至关重要的作用），这一关系对分数阶泽尼克函数不再成立

即使 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}(z,\ \overline{z})$ 中的 ρ 是正整数，分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}(z,\ \overline{z}) = \mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}(\overline{z},\ z)$ 对任意 ρ 都成立，并且由 (1.3) 可得恒等式

$$\overline{\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z})} = \frac{(\kappa+1)_m}{(\kappa+1)_{n+\rho}} z^{\rho}\overline{z}^{-\rho}\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{n+\rho,m-\rho}(z,\overline{z}) \tag{1.4}$$

当 ρ 为非负整数时成立。这尤其表明，函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}(z,\overline{z})$ 的解析性质和谱性质无法直接从泽尼克多项式中推得；当 ρ 不是整数时，其相关性质可能与经典情形截然不同。因此，有必要具体描述固定实数 ρ、$\kappa > -1$时这些函数的代数性质和解析性质。

为此，我们首先考察所谓的 β-受限泽尼克函数 $\psi^{\gamma,\ m^{\eta},\ n}$。我们证明，它们是加权希尔伯特空间 $L^{2,\ {}_{\beta}{}^{\alpha}}(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}, d\mu_{\alpha,\ \beta})$ 中一类特殊的多解析激发态；该空间由所有相对于正测度平方可积的复值函数构成

$$d\mu_{\alpha,\beta}(z) := (1-|z|^2)^{\alpha}|z|^{2\beta}dxdy; \quad z = x+iy,\ \alpha,\beta > -1. \tag{1.5}$$

关于函数 $\psi^{\gamma,m^{\eta},n}$ 的主要结果总结于定理 2.6。具体而言，我们证明，它们构成 $L^{2,\ {}_{\beta}{}^{\alpha}}(\mathbb{D})$ 中一组受扰磁拉普拉斯算子的特征函数，并且彼此正交。该算子本质上是定义在双曲圆盘上的经典磁薛定谔算子，受某种特定势的扰动（磁场为零），用于模拟阿哈罗诺夫–玻姆效应（见注 2.3）。此外，所考察的拉普拉斯算子对应于其最低特征值的 $L^{2,\ {}_{\beta}{}^{\alpha}}$-特征空间，被证明是单位圆盘穿孔圆盘 $\mathbb{D}^*$ 上的 β-修正伯格曼空间 $\mathcal{A}^{2,\ {}_{\beta}{}^{\alpha}}(\mathbb{D})$，该空间近期在 [11, 12] 中提出并得到研究。该算子对应于双曲朗道能级的其他 $L^{2,\ {}_{\beta}{}^{\alpha}}$-特征空间，则可视为 $\mathcal{A}^{2,\ {}_{\beta}{}^{\alpha}}(\mathbb{D})$ 的多解析类比（见注 2.7）。

考虑 $\psi^{\gamma,\ m^{\eta},\ n}$ 的动机在于，它们可视为分数阶泽尼克函数的谱侧。对于 γ 和 η 的特殊取值，它们与 by 密切相关

$$\mathcal{Z}^{\kappa_m,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) = |z|^{2\eta}(1-|z|^2)^{\frac{\alpha+1-\kappa_m}{2}}\psi^{\gamma,\eta}_{m,n}(z,\overline{z}) \tag{1.6}$$

对于 $m,n \geq 0$，其中 $\rho = \beta - 2\eta$，以及对于依赖于 m 且由 $\kappa = \kappa_m = \alpha - 2(\gamma+m) - 1$给出的 κ。然而，无法利用这一最后的事实来恢复分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}(z,\overline{z})$ 的全局性质。只能推导出每个固定的 m, n 和 ρ 在特定 $\kappa = \kappa_m$ 下的局部性质。

为了具体研究 $\mathcal{Z}^{\kappa,m^{\rho},n}(z,\overline{z})$，我们首先建立它们的显式表达式、不同的超几何表示、用雅可比多项式表示的形式，以及它们与式 (1.1) 中复 Zernike 多项式的联系。随后，我们描述 $\mathcal{Z}^{\kappa,m^{\rho},n}(z,\overline{z})$ 的零点集（推论 3.6），并证明这些零点集是以原点为圆心、半径为实雅可比多项式零点的圆。我们讨论它们在希尔伯特空间 $L^{2,\ {}_{\rho}{}^{\kappa}}(\mathbb{D}) = L^2(\mathbb{D}, d\mu_{\kappa,\rho})$ 中的正交性，并显式计算其平方范数。我们还考察它们属于 $\mathbb{D}$ 中特定多亚纯函数类的情况（定理 3.10）。此外，我们研究它们满足的运算公式，包括 Burchnall 型公式，并讨论一些递推关系、它们所满足的微分方程（定理 3.15 和 3.12）等。我们还得到了一些相关的生成函数，例如一个双线性生成函数，它类似于广义拉盖尔多项式的 Hardy–Hille 生成函数。后者可用于推导 $\mathcal{Z}^{\kappa,m^{\rho},n}(z,\overline{z})$ 的特殊积分表示。我们还得到另一种柯西型积分表示，它是单位圆上的一个特殊积分。最后，我们在定理 3.25 中证明，截断分数阶泽尼克

函数

$$\Upsilon_{m,s}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}) := z^s|z|^{-s}\mathcal{Z}_{m,m}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}),\ s\in\mathbb{Z},\ m=0,1,\cdots, \tag{1.7}$$

构成希尔伯特空间 $L^2_{,\rho}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 的正交基。因此，我们定义第二类多重亚纯 Bergman 空间，从而得到相应希尔伯特空间 $L^2_{,\rho}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 的完备微局部正交分解。所得结果将有助于深入研究定义在正实半轴上的构型空间中相关的等距积分变换（Bargmann 型）。

其余各节安排如下。第 2 节通过 Schr¨odinger 因式分解法，对经 β 修正的函数 $\psi^{\gamma}{}_{,m}{}^{\eta}{}_{,n}$ 进行谱实现。本节还证明了 $\psi^{\gamma}{}_{,m}{}^{\eta}{}_{,n}$ 在 $L^2_{,\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$ 中构成一个正交的特征函数系。第 3 节陈述并证明上述分数阶函数的基本性质。

2. β 限制的泽尼克函数（谱实现）

本节关注以下函数

$$\psi_{m,n}^{\gamma,\eta}(z,\overline{z}) = (-1)^m z^{\eta-\beta}\overline{z}^{-\eta}(1-|z|^2)^{\gamma-\alpha+m}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^{n+\beta-2\eta}(1-|z|^2)^{\alpha-2\gamma-m-1}\right) \tag{2.1}$$

对于给定的实数 α、β、γ、η，它们被称为 β-受限泽尼克函数（见下文注释2.7 以作说明）。我们的目标是推导它们的基本性质，并证明它们构成受扰磁拉普拉斯算子的正交系$L^2_{,\beta}{}^{\alpha}$-特征函数，该算子具有如下形式

$$\Delta_{a,b}^{c,d} = \Delta_{hyp} + (1-|z|^2)\left(H_a^b(z)E - H_c^d(z)\overline{E}\right) + H_a^b(z)H_c^d(z)|z|^2 \tag{2.2}$$

作用于加权希尔伯特空间 $L^2_{,\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$，$\alpha$，$\beta>-1$。上文中，$a$、$b$、$c$ 和 d 为给定实数，$\Delta_{hyp} = -(1-|z|^2)^2\partial^2/\partial z\partial\bar{z}$ 是双曲圆盘上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子，$\overline{E} = \overline{z}\partial/\partial\overline{z}$表示复欧拉算子 $E := z\partial/\partial z$ 的复共轭，并且

$$H_a^b(z) := a+b-\frac{b}{|z|^2}. \tag{2.3}$$

值得注意的是，对于 a、b、c、d的特定取值，可以得到双曲单位圆盘上的磁薛定谔算子¨，它表示带电粒子在外部均匀磁场 [3, 5, 10, 13]下运动时的哈密顿量。

为此，我们必须将所考虑的拉普拉斯算子分解为若干一阶微分算子的乘积（从而特别导出它们的罗德里格斯型公式）。因此，若设 $h_{\alpha,\beta}(z) = h(z)^{\alpha}|z|^{2\beta}$其中 $h(z) = 1-|z|^2$，则可考虑一阶微分算子

$$A_{\gamma,\eta}f(z) := h_{1-\gamma,-\eta}(z)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}(h_{\gamma,\eta}f)(z)$$

对于给定的固定实数 γ 和 η。其显式表达式为

$$A_{\gamma,\eta}f(z) = \left\{(1-|z|^2)\frac{\partial}{\partial\overline{z}} - H_{\gamma}^{\eta}(z)\right\}f(z). \tag{2.4}$$

对应的零空间与穿孔单位圆盘上全纯函数的集合 Hol($\mathbb{D}^*$) 密切相关。具体而言，我们有 ker($A_{\gamma,\eta}$) $= h_{-\gamma,-\eta}$Hol($\mathbb{D}^*$)。此外，关于内积，$A_{\gamma,\eta}$ 的形式伴随算子 $A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta}$，

$$\langle f,g\rangle_{\alpha,\beta} := \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}d\mu_{\alpha,\beta}(z) \tag{2.5}$$

在 $L^2_{\alpha,\beta}$($\mathbb{D}$)由下式给出

$$A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta} f(z) := -h_{\gamma-\alpha,\eta-\beta}(z)\frac{\partial}{\partial z}(h_{\alpha-\gamma+1,\beta-\eta}f)(z) \tag{2.6}$$

考虑到常规计算。因此，我们进行

$$\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} = A_{\gamma,\eta}A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta} \quad and \quad \mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma,\eta} = A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta}A_{\gamma,\eta}. \tag{2.7}$$

直接计算可得这些二阶微分算子关于 $\Delta^{c,d}_{a\,b}$，在（2.2）中的显式表达式（证明略）。

引理 2.1。 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta}$，在 z坐标下的表达式为

$$\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} = \Delta^{\gamma-\alpha-1,\eta-\beta}_{\gamma+1,\eta} + (\alpha-\gamma+1).$$

此外，算子 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta}$，和 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma,\eta}$，满足

$$\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} = \mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma+1,\eta} + (\alpha-2\gamma). \tag{2.8}$$

注2.2。对于 $\alpha=-2$ 和 $\beta=0$，有 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} = \mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma+1,\eta} - 2(\gamma+1)$。此外，$H^{\beta-\eta}_{\alpha-\gamma+1} = -H^{\eta}_{\gamma+1}$，因此拉普拉斯算子 $^{\gamma}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta}$，可进一步化简为

$$\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} = -h\left\{h\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}} - H^{\eta}_{\gamma+1}(z)\left(E-\overline{E}\right)\right\} + (H^{\eta}_{\gamma+1}(z))^2|z|^2 - (\gamma+1). \tag{2.9}$$

对于特定的 情形，我们在 $\mathbb{D}$ 上得到类朗道哈密顿量（例如参见 [3, 10, 13] ）.

注 2.3。所考虑的算子 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta}$，以及 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma,\eta}$，可以在几何上实现为与奇异实微分1-形式（矢势）$\theta_{\alpha,\beta} =_{\sim}$ $_{\sim}\theta_\alpha+\theta_\beta$相关联的磁薛定谔算子，其中 $d\theta_\beta=0$，而 $d\theta_\alpha$ 是双曲单位圆盘上的凯勒二形式，差一个乘法常数。更准确地说，我们有

$$\theta_{\alpha,\beta}(z) = \frac{i\alpha\left(\bar{z}dz - zd\bar{z}\right)}{1-|z|^2} - i\beta\left(\frac{dz}{z} - \frac{d\overline{z}}{\overline{z}}\right). \tag{2.10}$$

现在，b 利用恒等式（2.8），我们可以得到以下结果（证明从略 ）.

引理 2.4. 以下交换规则成立

$$
\begin{aligned}
&(i) && \mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} A_{\gamma,\eta} = A_{\gamma,\eta}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma,\eta} \quad and \quad A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} = \mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma,\eta} A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta}.\\
&(ii) && \mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+1,\eta} = A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+1,\eta}\left(\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma+1,\eta} + (\alpha-2\gamma)\right).\\
&(iii) && A_{\gamma+1,\eta}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta} = \left(\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma+1,\eta} + (\alpha-2\gamma)\right) A_{\gamma+1,\eta}.\\
&(iv) && \mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma+1,\eta} A_{\gamma,\eta} = A_{\gamma,\eta}\left(\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma,\eta} - (\alpha-2\gamma)\right).\\
&(v) && A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma+1,\eta} = \left(\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma,\eta} - (\alpha-2\gamma)\right) A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma,\eta}.
\end{aligned}
$$

引理 2.4 有助于分析和研究（2.1）中的函数族 $\psi^{\gamma,\ m}{}^{\eta,\ n}$。事实上，我们证明了它们可以通过对基态函数连续作用 $A^{*}_{\gamma+j,\ \eta}$; $j = 1,2,\cdots,m$ 得到。具体而言，我们考虑微分算子

$$A^{*,m}_{\gamma,\eta}(f) := A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+1,\eta} \circ A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+2,\eta} \circ \cdots \circ A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+m,\eta}(f).$$

接下来，我们断言如下结论。

引理 2.5. $A^{*,\ m}_{\gamma\ \eta}$ 的罗德里格斯型闭式表达为

$$A^{*,m}_{\gamma,\eta}(f) = (-1)^m h_{\gamma-\alpha+m,\eta-\beta}\frac{\partial^m}{\partial z^m}(h_{\alpha-\gamma,\beta-\eta}f). \tag{2.11}$$

证明。从 $A^{*,\ m}_{\gamma\ \eta}$ 的定义出发，可得

$$A^{*,m}_{\gamma,\eta}(f) = (-1)^m h_{\gamma-\alpha-1,\eta-\beta}\left(h^2\frac{\partial}{\partial z}\right)^m (h_{\alpha-\gamma-m+1,\beta-\eta}f).$$

Then (2.11) 可直接由以下事实推出 $(h^2\partial)^m(f) = h^{m+1}\partial^m(h^{m-1}f)$ 在 [9]。 □

本节的主要结果如下。

定理 2.6。固定 γ 使得 $\alpha > 2\gamma+1$。那么，对于满足 $n > 2\eta-\beta-1$ 和$0 \le m < (\alpha-1-2\gamma)/2$的整数 m,n，以下断言成立。

(i) 函数 $\psi^{\gamma,m}{}^{\eta,n}$ 是 $\mathcal{L}^{\alpha,\ \beta+}$, 的 $L^2{}_{,\beta}{}^{\alpha}$ -特征函数，其对应的特征值为 $E^{\gamma,m}{}^{\alpha} = (m+1)(\alpha-2\gamma-m)$。(ii) 函数 $\psi^{\gamma,m}{}^{\eta,n}$ 在希尔伯特空间 $L^2{}_{,\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$中构成一个正交系，其平方范数（由 (2.5) 诱导）为

$$\left\|\psi^{\gamma,\eta}_{m,n}\right\|^2_{\alpha,\beta} = \frac{\pi m!}{(\alpha-2(\gamma+m)-1)}\frac{\Gamma(\alpha-2\gamma-m)\Gamma(n+\beta-2\eta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta-2(\gamma+\eta+m))}. \tag{2.12}$$

这里 Γ 是欧拉伽马函数。

证明。根据引理iii中的代数恒等式（2.4 ）以及恒等式（2.8），我们可以继续

通过数学归纳法得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta}A^{*,m}_{\gamma,\eta} &= A^{*,m}_{\gamma,\eta}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma+m,\eta}+\sum_{j=0}^{m-1}(\alpha-2(\gamma+j))A^{*,m}_{\gamma,\eta}\\ &= A^{*,m}_{\gamma,\eta}\left(\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma+m+1,\eta}+(\alpha-2(\gamma+m))\right)+\sum_{j=0}^{m-1}(\alpha-2(\gamma+j))A^{*,m}_{\gamma,\eta}\\ &= A^{*,m}_{\gamma,\eta}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma+m+1,\eta}+\sum_{j=0}^{m}(\alpha-2(\gamma+j))A^{*,m}_{\gamma,\eta}\\ &= A^{*,m}_{\gamma,\eta}\mathcal{L}^{\alpha,\beta,-}_{\gamma+m+1,\eta}+(m+1)(\alpha-2\gamma-m)A^{*,m}_{\gamma,\eta}.\end{aligned}$$

因此，很明显，函数 $A^{*,m}_{\gamma,\eta}$、$(\varphi^{\gamma,\eta}_m)$ 是 $\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta}$的特征函数，只要 $\varphi^{\gamma,\eta}_m$属于$A_{\gamma+m+1,\eta}$的零空间，

$$\ker(A_{\gamma+m+1,\eta})=\{f:\mathbb{D}^*\longrightarrow\mathbb{C};\ A_{\gamma+m+1,\eta}f=0\}\subseteq\ker\left(\mathcal{L}^{-}_{\gamma+m+1,\eta}\right).$$

在考虑.....时

$$\varphi^{\gamma,\eta}_m(z)=\varphi^{\gamma,\eta}_{m,n}(z):=z^n(1-|z|^2)^{-(\gamma+m+1)}|z|^{-2\eta};\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{2.13}$$

更准确地说，函数 $A^{*,m}_{\gamma,\eta}(\varphi^{\gamma,\eta}_m)=A^{*,m}_{\gamma,\eta}(z^nh_{-(\gamma+m+1),-\eta})$ 的表达式为

$$\begin{aligned}A^{*,m}_{\gamma,\eta}(z^nh_{-(\gamma+m+1),-\eta}) &= (-1)^m h_{\gamma-\alpha+m,\eta-\beta}\frac{\partial^m}{\partial z^m}(z^nh_{\alpha-2\gamma-m-1,\beta-2\eta})\\ &= (-1)^m(1-|z|^2)^{\gamma-\alpha+m}|z|^{2(\eta-\beta)}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^n|z|^{2(\beta-2\eta)}(1-|z|^2)^{\alpha-2(\gamma+m)+m-1}\right)\end{aligned} \tag{2.14}$$

得益于引理 2.5。后一个公式还可进一步化简为式（ β）中的受限泽尼克函数的表达式2.1。此外，它们满足

$$\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma,\eta}\left(\psi^{\gamma,\eta}_{m,n}\right)=(m+1)(\alpha-2\gamma-m)\psi^{\gamma,\eta}_{m,n}=E^{\gamma,\alpha}_m\psi^{\gamma,\eta}_{m,n}. \tag{2.15}$$

现在，对于它们在 $L^2_{\beta}(\mathbb{D})$ 中的正交性，可以利用它们用某些特殊函数表示的显式表达式（例如，见下文注释 3.7 ）。不过，我们在下文将给出另一种使用因式分解法的证明。为此，首先注意到 $A^{*,m}_{\gamma,\eta}=A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+1,\eta}\circ A^{*,m-1}_{\gamma+1,\eta}$，以及 $\varphi^{\gamma,\eta}_{m,n}=\varphi^{\gamma+1,\eta}_{m-1,n}$。由此可得

$$\psi^{\gamma,\eta}_{m,n}=A^{*,m}_{\gamma,\eta}(\varphi^{\gamma,\eta}_{m,n})=A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+1,\eta}\circ A^{*,m-1}_{\gamma+1,\eta}(\varphi^{\gamma,\eta}_{m,n})=A^{*_{\alpha,\beta}}_{\gamma+1,\eta}(\psi^{\gamma+1,\eta}_{m-1,n}).$$

因此，利用（2.15），我们得到

$$\left\langle\psi^{\gamma,\eta}_{m,n},\psi^{\gamma,\eta}_{j,k}\right\rangle=\left\langle\mathcal{L}^{\alpha,\beta,+}_{\gamma+1,\eta}(\psi^{\gamma+1,\eta}_{m-1,n}),\psi^{\gamma+1,\eta}_{j-1,k}\right\rangle=E^{\gamma+1,\alpha}_{m-1}\left\langle\psi^{\gamma+1,\eta}_{m-1,n},\psi^{\gamma+1,\eta}_{j-1,k}\right\rangle.$$

更一般地，通过归纳法可得

$$\left\langle \psi_{m,n}^{\gamma,\eta}, \psi_{j,k}^{\gamma,\eta} \right\rangle = \prod_{\ell=1}^{s} E_{m-\ell}^{\gamma+\ell,\alpha} \left\langle \psi_{m-s,n}^{\gamma+s,\eta}, \psi_{j-s,k}^{\gamma+s,\eta} \right\rangle; \, 1 \le s \le m.$$

因此，不失一般性，我们可以假设 $m \le j$，并取 $s = m$ 得到

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_{m,n}^{\gamma,\eta}, \psi_{j,k}^{\gamma,\eta} \right\rangle &= \prod_{\ell=1}^{m} E_{m-\ell}^{\gamma+\ell,\alpha} \left\langle \psi_{0,n}^{\gamma+m,\eta}, \psi_{j-m,k}^{\gamma+m,\eta} \right\rangle \\
&= \prod_{\ell=1}^{m} E_{m-\ell}^{\gamma+\ell,\alpha} \left\langle \psi_{0,n}^{\gamma+m,\eta}, A_{\gamma+m+1,\eta}^{*} \circ A_{\gamma+m+2,\eta}^{*} \circ \cdots \circ A_{\gamma+j,\eta}^{*} (\varphi_{j-m,k}^{\gamma+m,\eta}) \right\rangle \\
&= \prod_{\ell=1}^{m} E_{m-\ell}^{\gamma+\ell,\alpha} \left\langle A_{\gamma+j,\eta} \circ \cdots \circ A_{\gamma+m+1,\eta} (\varphi_{0,n}^{\gamma+m,\eta}), \varphi_{j-m,k}^{\gamma+m,\eta} \right\rangle.
\end{aligned}$$

最后一个恒等式可通过观察 $\psi^{\gamma+s,\,\eta}_{0,\,n} = \varphi^{\gamma+s,\,\eta}_{n,\,0}$，这可直接由（2.11）或（2.14）得到。接下来，由于 $\varphi^{\gamma+m,\,\eta}_{0\,n,\,}$ 属于 $\ker(A_{\gamma+m+1,\,\eta})$，且 $A_{\gamma+j,\,\eta} \circ \cdots \circ A_{\gamma+m+2,\,\eta} \circ A_{\gamma+m+1,\,\eta}(\varphi^{\gamma+m,\,\eta}_{0\,n,\,})$ 在 $m < j$ 时恒为零，我们得到

$$\left\langle \psi_{m,n}^{\gamma,\eta}, \psi_{j,k}^{\gamma,\eta} \right\rangle = \left(\prod_{\ell=1}^{m} E_{m-\ell}^{\gamma+\ell,\alpha} \right) \left\langle \varphi_{0,n}^{\gamma+m,\eta}, \varphi_{0,k}^{\gamma+m,\eta} \right\rangle \delta_{m,j}.$$

为了计算量 $\left\langle \varphi^{\gamma+m,\,\eta}_{n,\,0}, \varphi^{\gamma+m,\,\eta}_{0,\,k} \right\rangle$，我们利用（2.13）给出的 $\varphi^{\gamma,\,\eta}_{m,\,n}$ 的显式表达式。这得到

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi_{0,n}^{\gamma+m,\eta}, \varphi_{0,k}^{\gamma+m,\eta} \right\rangle &= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\alpha-2(\gamma+m+1)} |z|^{2(\beta-2\eta)} z^n \overline{z}^k d\lambda(z) \\
&= \pi \left(\int_0^1 (1-t)^{\alpha-2(\gamma+m+1)} t^{n+\beta-2\eta} dt \right) \delta_{n,k} \\
&= \pi B(n+\beta-2\eta+1, \alpha-2(\gamma+m)-1) \delta_{n,k},
\end{aligned}$$

其中 $B(a,b)$ 表示经典贝塔函数。前一个公式成立的条件是 $n > 2\eta - \beta - 1$ 且 $\alpha - 2\gamma - 1 > 2m$，其中 $\alpha - 2\gamma - 1 > 0$。最后，由于

$$\prod_{\ell=1}^{m} E_{m-\ell}^{\gamma+\ell,\alpha} = m!(\alpha - 2(\gamma+m))_m = m! \frac{\Gamma(\alpha-2\gamma-m)}{\Gamma(\alpha-2(\gamma+m))},$$

我们得到

$$\left\langle \psi_{m,n}^{\gamma,\eta}, \psi_{j,k}^{\gamma,\eta} \right\rangle = \frac{\pi m!}{(\alpha-2(\gamma+m)-1)} \frac{\Gamma(\alpha-2\gamma-m)\Gamma(n+\beta-2\eta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta-2(\gamma+\eta+m))} \delta_{m,j}\delta_{n,k}.$$

证明到此结束。 □

注 2.7。 (2.1) 中与 $\gamma=-1$、 $\eta=0$ 和 $m=0$ 对应的函数可进一步化简为 $\psi^{-1,0}_{0,n}$, $(z,\overline{z})=z^n$, 其中整数 $n>-(\beta+1)$ 变化，其在 $L^2_{,\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$ 中的平方范数为

$$\left\|\psi^{-1,0}_{0,n}\right\|^2_{\alpha,\beta}=\pi\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}.$$

它们构成 β修正的 Bergman 空间 $\mathcal{A}^2$的正交基, $_{\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D}$该空间定义为 L^2中的闭子空间, $_{\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D}$由穿孔圆盘 $\mathbb{D}^*$ 上的全纯函数构成（详情见 [11, 12] ）。换句话说， β修正的 Bergman 空间是磁拉普拉斯算子 $\mathcal{L}^{\alpha}$ 的 L^2特征空间，， $\beta+$,,对应于其最低朗道能级。对于 $\beta=0$ 这一特殊情形，我们得到单位圆盘上的经典 Bergman 空间, $^{\alpha+1}{}_{\eta}$ 其权函数为广义 Gegenbauer 形式 $(1-|z|^2)^{\alpha}$。

注2.8. 函数 ψ^{γ}、$_m{}^{\eta}$、$_n$ 在 $L^2_{,\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$ 中不构成完备系。然而，对于固定的m （满足 $0\le m<(\alpha-1-2\gamma)/2$ ），并令整数 $n\ge 2\eta-\beta$ 变化，它们张成 $L^2_{,\beta}{}^{\alpha}(\mathbb{D})$ 中的一个特定闭子空间 $\mathcal{A}^2_{\beta}{}^{\alpha}{}_m(\mathbb{D})$。由此可得到所谓的 m 阶广义（亦称多亚纯） β修正 Bergman 空间，定义在 $\mathbb{D}^*$ 上；它可视为β修正 Bergman 空间的多解析类比。其再生核见下文注 3.20。

3. 分数阶泽尼克函数

本节将对（1.2）中的分数阶泽尼克函数进行全面的理论研究。我们讨论它们与某些特殊函数的联系、零点、在 $L^2_{,\rho}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 中的正交性、正则性、微分方程、递推公式与运算公式。我们还得到了关于生成函数、积分表示和完备性的一些结果。

3.1. 与特殊函数及显式表达式的联系。

我们首先建立分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{,m}{}^{\rho}_{,n}$ 关于经典 Zernike 多项式的显式表达式。因此，对于给定的实数 b 和非负整数 m ，我们将感染最小值 $m\wedge^* b$ 定义为

$$m\wedge^* b=\begin{cases}\min(m,b), & b=0,1,2,\cdots\\ m, & b\in\mathbb{R},\ b\neq 0,1,2,\cdots.\end{cases}$$

命题 3.1. 对每个 $\rho>-1$ ，都有

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z})=\frac{m!\Gamma(\rho+1)}{(\kappa+m+1)_n}\sum_{j=0}^{m\wedge^*\rho}\frac{(-1)^j}{j!(m-j)!\Gamma(\rho-j+1)}\frac{\left(1-|z|^2\right)^j}{z^j}\mathcal{Z}^{\kappa+j}_{m-j,n}(z,\overline{z}).\tag{3.1}$$

证明。 利用事实（3.4）和

$$z^n(1-|z|^2)^{\kappa+m}=\frac{(-1)^n}{(\kappa+m+1)_n}\frac{\partial^n}{\partial\overline{z}^n}\left((1-|z|^2)^{\kappa+m+n}\right)$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}) &= \frac{(-1)^{m+n}}{(\kappa+m+1)_n} z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^\rho \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}\left((1-|z|^2)^{\kappa+m+n}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^{m+n} m!}{(\kappa+m+1)_n} z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-\rho)_j}{j!(m-j)!} z^{\rho-j}\frac{\partial^{m-j+n}}{\partial z^{m-j}\partial\overline{z}^n}\left((1-|z|^2)^{\kappa+j+m-j+n}\right),\end{aligned}$$

可改写为（3.1）。 □

注 3.2. 对于 $\rho = 0$，我们恢复得到泽尼克多项式 $\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa}(z,\overline{z})$，相差一个乘法常数 $1/(\kappa+m+1)_n$；而当 $\rho = 1$ 时，我们得到

$$\mathcal{Z}_{m,n+1}^{\kappa}(z,\overline{z}) = (\kappa+m+n+1)\left(z\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa}(z,\overline{z}) + m\left(1-|z|^2\right)\mathcal{Z}_{m-1,n}^{\kappa+1}(z,\overline{z})\right),$$

这恰好是泽尼克多项式的三项递推公式 [1, 第 403 页，式 (5.1)]。这是因为 $(-\rho)_j = 0$ 对于 $j \geq \rho+1$ 只要 $\rho = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$。更一般地，由（1.3）可得，当 ρ 为非负整数时，我们得到经典复泽尼克多项式的新递推公式

$$\mathcal{Z}_{m,n+\rho}^{\kappa}(z,\overline{z}) = m!\Gamma(\rho+1)(\kappa+m+n+1)_\rho \sum_{j=0}^{m\wedge\rho}\frac{(-1)^j z^{\rho-j}\left(1-|z|^2\right)^j}{j!(m-j)!\Gamma(\rho-j+1)}\mathcal{Z}_{m-j,n}^{\kappa+j}(z,\overline{z}). \tag{3.2}$$

利用罗德里格斯公式（1.2）或（3.1），可以轻松计算出 $\mathcal{Z}_{m}^{\kappa,\rho,n}(z,\overline{z})$ 的前几项的显式表达式。因此，对应于 $m = 0$ 的项可化为单项式，$\mathcal{Z}_{0n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}) = z^n$。对于 $m = 1$ 和 $m = 2$，我们分别得到

$$\mathcal{Z}_{1,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}) = (\kappa+n_\rho+1)\overline{z}z^n - n_\rho z^{n-1}$$

and

$$\mathcal{Z}_{2,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}) = (\kappa+n_\rho+1)(\kappa+n_\rho+2)\overline{z}^2 z^n - 2n_\rho(\kappa+n_\rho+1)\overline{z}z^{n-1} + n_\rho(n_\rho-1)z^{n-2},$$

其中我们令 $n_\rho = n+\rho$。$\mathcal{Z}_{m}^{\kappa,\rho,n}(z,\overline{z})$ 的显式表达式的一般公式由下面的命题给出。

命题 3.3。我们有

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}) = \sum_{j=0}^{m\wedge^*(n+\rho)}\frac{(-1)^j m!\Gamma(n+\rho+1)\Gamma(\kappa+m+1)}{j!(m-j)!\Gamma(n+\rho-j+1)\Gamma(\kappa+j+1)}\left(1-|z|^2\right)^j z^{n-j}\overline{z}^{m-j}. \tag{3.3}$$

证明。利用下降阶乘 $(x)_{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 的性质 $(x)_{\underline{n}} = \Gamma(x+1)/\Gamma(x-n+1)$，可得

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}(1-xz)^a = (-1)^m\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-m)}x^m(1-xz)^{a-m}$$

and

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^a\right)=(-a)_m z^{a-m}=\varepsilon_{a,m}^*\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1-m)}z^{a-m},\tag{3.4}$$

其中，对于非负整数 m，我们定义

$$\varepsilon_{a,m}^*=\begin{cases}1, & a\geq m;\ a=0,1,\cdots\\ 0, & a<m;\ a=0,1,\cdots\\ 1, & a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,1,\cdots.\end{cases}$$

因此，应用乘积高阶求导的莱布尼茨公式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})&=(-1)^m z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^{n+\rho}(1-|z|^2)^{\kappa+m}\right)\\&=\sum_{j=0}^{m}\varepsilon_{n+\rho,j}^*\frac{(-1)^j m!\Gamma(n+\rho+1)\Gamma(\kappa+m+1)}{j!(m-j)!\Gamma(n+\rho-j+1)\Gamma(\kappa+j+1)}\overline{z}^{m-j}z^{n-j}\left(1-|z|^2\right)^j.\end{aligned}$$

由此得到（3.3）。 □

下面，我们给出 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ \rho,\ }_{m,\ n}$ 的不同超几何表示，这些表示通过定义在开单位圆盘上的高斯超几何函数的幂级数给出

$${}_2F_1\left(\begin{array}{c}a,b\\c\end{array}\middle|z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

条件是 $c\neq 0,-1,-2,\cdots$。

命题 3.4. 函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ \rho,\ }_{m,\ n}(z,\overline{z})$可用 ${}_2F_1$ 函数表示为

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=(\kappa+1)_m z^n\overline{z}^m{}_2F_1\left(\begin{array}{c}-m,-n-\rho\\\kappa+1\end{array}\middle|1-\frac{1}{|z|^2}\right).\tag{3.5}$$

证明。 利用 $(a)_{\underline{n}}=(-1)^n(-a)_n=\Gamma(a+1)/\Gamma(a-n+1)$ 结合 $(-1)^j(-m)_j(m-j)!=m!$，我们可以将（3.3）改写为

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})&=(\kappa+1)_m z^n\overline{z}^m\sum_{j=0}^{m\wedge^*(n+\rho)}\frac{(-m)_j(-n-\rho)_j}{(\kappa+1)_j j!}\left(1-\frac{1}{|z|^2}\right)^j\\&=(\kappa+1)_m z^n\overline{z}^m{}_2F_1\left(\begin{array}{c}-m,-n-\rho\\\kappa+1\end{array}\middle|1-\frac{1}{|z|^2}\right).\end{aligned}$$

□

关于 $\mathcal{Z}^{\kappa}$、$_m{}^{\rho}$、$_n$，可以用高斯超几何函数表示出若干等价形式，这些形式由 ${}_2F_1$ 的著名线性变换得出。因此，由 [22, § 2.4., 第 47], 页中的第二个和第三个公式可得

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=(\kappa+1)_m z^{n-m}{}_2F_1\left(\begin{array}{c}-m,n+\kappa+\rho+1\\\kappa+1\end{array}\middle|1-|z|^2\right)\tag{3.6}$$

and

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=(\kappa+1)_m z^{-\rho}\overline{z}^{m-n-\rho}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n-\rho,\kappa+m+1\\ \kappa+1\end{matrix}\middle|1-|z|^2\right). \tag{3.7}$$

然而，从（3.5）出发，并对极限情形应用线性变换 [25, 式（15.8.7）]，可得

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=(\kappa+\rho+n+1)_m z^n\overline{z}^m{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,-n-\rho\\ -\kappa-\rho-n-m\end{matrix}\middle|\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{3.8}$$

将同一变换应用于（3.6）可得

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=(-n-\rho)_m z^{n-m}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,\kappa+n+\rho+1\\ n+\rho-m+1\end{matrix}\middle||z|^2\right). \tag{3.9}$$

后者在 ρ 为整数且 $m\le n+\rho$ 时仍然成立。

下一个结果将 $\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z})$ 表示为实雅可比多项式的形式。

命题 3.5. 对于 $\rho=0,1,\cdots$，有

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=\frac{(\kappa+1)_{m\vee(n+\rho)}(m\wedge(n+\rho))!}{(\kappa+1)_{n+\rho}}\frac{z^n\overline{z}^m}{|z|^{2(m\wedge(n+\rho))}}P_{m\wedge(n+\rho)}^{(\kappa,|m-n-\rho|)}(2|z|^2-1), \tag{3.10}$$

而当 $\rho>-1$ 为非整数或 $m=m\wedge(n+\rho)$ 时，有

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=m!z^{n-m}P_m^{(\kappa,n-m+\rho)}(2|z|^2-1). \tag{3.11}$$

证明。首先考虑 $\rho=0,1,\cdots$。从（3.6）和假设 $m\le n+\rho$ 出发，可以利用以下事实：$(-n-\rho)_m=(-1)^m(n+\rho-m+1)_m$，$P_m^{(a,b)}(x)=(-1)^m P_m^{(b,a)}(-x)$ 以及

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,m+a+b+1\\ a+1\end{matrix}\middle|x\right)=\frac{m!}{(a+1)_m}P_m^{(a,b)}(1-2x) \tag{3.12}$$

得到

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=m!z^{n-m}P_m^{(\kappa,n+\rho-m)}(2|z|^2-1). \tag{3.13}$$

对应于情形 $m\ge n+\rho$ 的结果可由前一个结果利用类对称关系（1.4）（也可直接由（3.7））立即得到。事实上，我们有

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=\frac{(\kappa+1)_m(n+\rho)!}{(\kappa+1)_{n+\rho}}z^{-\rho}\overline{z}^{m-n-\rho}P_{n+\rho}^{(\kappa,m-n-\rho)}(2|z|^2-1). \tag{3.14}$$

最后可以发现，这两个表达式都能改写为统一的形式

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=\frac{(\kappa+1)_{m\vee(n+\rho)}(m\wedge(n+\rho))!}{(\kappa+1)_{n+\rho}}|z|^{|m-n-\rho|-\rho}e^{i(n-m)\arg z}P_{m\wedge(n+\rho)}^{(\kappa,|m-n-\rho|)}(2|z|^2-1),$$

这显然导出（3.10）。也可以根据函数 $z^{\rho}\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n}$，它们是（1.1）中的经典泽尼克函数（相差一个乘法常数），再利用 [9]。

最后，当 ρ 为非整数时，公式（3.10）（其中 ρ 为整数且 $m \le n+\rho$）恰好就是公式（3.11）。只要 $m = m \wedge^{*} (n+\rho)$，就可以利用（3.6）和（3.12）得到该公式；这对应于 $\rho > -1$ 为非整数，或者 $m = m \wedge (n+\rho)$。从导出公式 [4, 第 1 页，1.1.2 式 2] 出发，也可以给出直接证明，我们可将其改写为

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(z^a(1-xz)^n\right) = m! z^{a-m}(1-xz)^{b-m} P_m^{(a-m,b-m)}(1-2xz). \tag{3.15}$$

因此，指定 $a = n+\rho$、$b = \kappa + m$ 和 $x = \overline{z}$后，（1.2）中 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n}$ 的表达式变为（3.11）。 □

关于 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n}$ 的零点，下一个结果可由命题3.5直接得出。

推论 3.6. 点 0 是 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n}$的零点，当 $\rho = 0, 1, 2, \cdots$时，当且仅当 $n > m$或 $m > n$且$\rho = 0$。然而，当 ρ 为非整数时，只有当 $n > m$ 时，点 0 才是 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n}$ 的零点。其他零点是以原点为圆心、半径为 $\left(1 + r^{\kappa}_{m,n}\right)/2$的圆，其中 $r^{\kappa}_{m,n}$ 是实雅可比多项式 $P_m^{(\kappa, n-m+\rho)}(x)$ 的零点；当 ρ 为非整数时，这些零点位于线段 (0, 1) 上；而当 ρ为非负整数时，它们是多项式 $P_{m\wedge}^{(\kappa,|n-m+\rho|)}{}_{(n+\rho)}(x)$ 的零点。

注 3.7. 根据命题 3.5，β-限制泽尼克函数 $\psi^{\gamma}_{m,n}$用雅可比多项式表示为

$$\psi^{\gamma,\eta}_{m,n}(z,\overline{z}) = (-1)^m m! \frac{z^{n-m}}{|z|^{2\eta}} (1-|z|^2)^{\frac{\kappa-\alpha-1}{2}} P_m^{(n-m+\rho,\kappa)}(1-2|z|^2), \tag{3.16}$$

其中 $\rho = \beta - 2\eta > -1$ 是非整数，且 $\kappa = \alpha - 2(\gamma+m) - 1$。

我们通过讨论所考虑函数的正交性来结束本小节。

推论 3.8. 函数 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n}$ 在 $L^2_{\rho^{\kappa}}(\mathbb{D})$ 中构成一个正交系，其平方范数为

$$\left\|\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}\right\|^2_{L^{2,\kappa}_{\rho}(\mathbb{D})} = \frac{\pi m!(n+\rho)!\Gamma(m+\kappa+1)}{(m+n+\rho+\kappa+1)\Gamma(n+\rho+\kappa+1)} =: \frac{1}{\gamma^{\kappa,\rho}_{m,n}} \tag{3.17}$$

证明. 仅当 ρ 为整数时，我们给出显式计算。对于 ρ 为非整数的情形，可以按照 $m = m \wedge (n+\rho)$ 且 ρ 为整数时的做法进行。因此，令 ρ 为一个固定整数，并设

$$d^{\rho,\kappa}_{m,n} := \frac{(\kappa+1)_{m\vee(n+\rho)}(m\wedge(n+\rho))!}{(\kappa+1)_{n+\rho}}.$$

然后，由命题 3.5 以及极坐标的使用 $z = \sqrt{t}e^{i\theta}$；$0 \le t < 1$，$0 \le \theta < 2\pi$，我们得到

$$\begin{aligned}
I^{\rho,\kappa}_{m,n,j,k} &:= \int_D \mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z})\overline{\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{j,k}(z,\overline{z})}|z|^{2\rho}(1-|z|^2)^{\kappa}d\Lambda(z) \\
&= \pi d^{\rho,\kappa}_{m,n} d^{\rho,\kappa}_{j,k}\left(\int_0^1 t^{|m-n-\rho|}(1-t)^{\kappa} P^{(\kappa,|m-n-\rho|)}_{m\wedge(n+\rho)}(2t-1)P^{(\kappa,|m-n-\rho|)}_{j\wedge(k+\rho)}(2t-1)dt\right)\delta_{n-m,k-j} \\
&= \frac{\pi d^{\rho,\kappa}_{m,n} d^{\rho,\kappa}_{j,k}}{2^{|m-n-\rho|+\kappa+1}}\left(\int_{-1}^1 (1+x)^{|m-n-\rho|}(1-x)^{\kappa} P^{(\kappa,|m-n-\rho|)}_{m\wedge(n+\rho)}(x)P^{(\kappa,|m-n-\rho|)}_{j\wedge(k+\rho)}(x)dx\right)\delta_{n-m,k-j}.
\end{aligned}$$

现在，根据 t 经典雅可比多项式的正交性质 [22, p.212], 由此可得 s

$$
\begin{aligned}
I^{\rho,\kappa}_{m,n,j,k} &= \frac{\pi d^{\rho,\kappa}_{m,n} d^{\rho,\kappa}_{j,k}}{2^{|m-n-\rho|+\kappa+1}} \left\| P^{(\kappa,|m-n-\rho|)}_{m\wedge(n+\rho)} \right\|^2 \delta_{n-m,k-j}\delta_{m\wedge(n+\rho),j\wedge(k+\rho)} \\
&= \frac{\pi m!(n+\rho)!\Gamma(m+\kappa+1)}{(m+n+\rho+\kappa+1)\Gamma(n+\rho+\kappa+1)}\delta_{m,j}\delta_{n,k}.
\end{aligned}
$$

这证明了 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{,\ m}{}^{\rho}_{,\ n}$ 在希尔伯特空间 $L^2_{,\ \rho}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 中的正交性。 □

3.2. 多亚纯性

类比于多解析函数的定义（即满足柯西–黎曼方程 $\partial^n/\partial\overline{z}^n = 0$ 的函数），我们需要给出如下多重亚纯性的定义 [2, p 199]。

定义 3.9. 若复平面中开集 U 上的复值函数 f 满足：存在某些亚纯函数 ψ_k; k =0, 1, $\cdots, n-1$，定义在 U 上，使得该函数称为阶数为 n （第一类）的多重亚纯函数

$$
f(z) = \psi_0(z) + \overline{z}\psi_1(z) + \cdots + \overline{z}^{n-1}\psi_{n-1}(z).
$$

本小节的主要结果讨论所考察的分数阶泽尼克函数的正则性。

定理 3.10. 分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{,m}{}^{\rho}_{,n}$ 是关于 z 和 $\overline{z}$ 的多项式，当且仅当 $\rho = 0$或 $m \le n$。或者，它们是阶为 m 、以 0 为唯一极点的多亚纯函数。其重数为 $Ord^{\kappa}_{,m}{}^{\rho}_{,n} = \rho$，当 ρ = 1,2, $\cdots$ 时适用于 $m > n+\rho$；而当 $\rho > -1$ 是非整数，或 $n < m \le n+\rho$ 且满足 ρ = 1,2, $\cdots$ 时，重数为 $Ord^{\kappa}_{,m}{}^{\rho}_{,n} = m-n$，适用于 $m > n$。

证明。设

$$
c^{\kappa,\rho}_{m,n,j} := \frac{(-1)^j m!\Gamma(n+\rho+1)\Gamma(\kappa+m+1)}{j!(m-j)!\Gamma(n+\rho-j+1)\Gamma(\kappa+j+1)}
$$

并对于 $p < q \le m \wedge^* (n+\rho)$，考虑以下量

$$
S^{\kappa,\rho,m,n}_{q,p} := R^{\kappa,\rho,m,n}_{q} - X^{p-q}R^{\kappa,\rho,m,n}_{p},
$$

其中 $R^{\kappa}_{,p}{}^{\rho\ m\ n}_{,,}$是次数小于或等于 p 的多项式，由下式给出

$$
R^{\kappa,\rho,m,n}_{p}(X) = \sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{j=0}^{p-k}(-1)^j\frac{(j+k)!}{j!k!}c^{\kappa,\rho}_{m,n,j+k}\right)X^{p-k}. \tag{3.18}
$$

例如请注意，其常数系数由以下给出 $S^{\kappa}_{,\ q}{}^{\rho\ m\ n}_{p\ ,\ ,\ ,}(0) = R^{\kappa}_{,\ q}{}^{\rho\ m\ n}_{\ ,\ ,\ ,}(0) = c^{\kappa}_{,\ m}{}^{\rho}_{,\ n,\ q}$. 因此，从 (3.3) 出发，我们可以将 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{,\ m}{}^{\rho}_{,\ n}(z,\overline{z})$ 改写为

$$
\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) = z^{n-[m\wedge^*(n+\rho)]}\overline{z}^{m-[m\wedge^*(n+\rho)]}R^{\kappa,\rho,m,n}_{m\wedge^*(n+\rho)}(|z|^2). \tag{3.19}
$$

但是，由于 $c^{\kappa,\ m^{\rho},\ n,\ p} \neq 0$，从 (3.19) 可清楚看出，函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}$ 是多项式，当且仅当 $\rho = 0$ 或 $m \leq n$，无论 $\rho > -1$ 是否为整数。命题 3.5 也可直接得出这一结论。接下来，利用 $R^{\kappa,\ q^{\rho\ m\ n}} = X^{q-p}R^{\kappa,\ ,\ ,\ p^{\rho\ m\ n}} + S^{\kappa,\ ,\ ,\ q\ p^{\rho\ m\ n}}_{\ ,\ ,\ ,}$ 这一事实，我们得到

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) = \overline{z}^{m-n}R^{\kappa,\rho,m,n}_{n}(|z|^2) + z^{n-[m\wedge^*(n+\rho)]}\overline{z}^{m-[m\wedge^*(n+\rho)]}S^{\kappa,\rho,m,n}_{m\wedge^*(n+\rho),n}(|z|^2). \tag{3.20}$$

针对给定的 $\rho > -1$，对 m 与 n 和 $n+\rho$ 的各种可能情况进行细致研究，可得

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) = \begin{cases} z^{n-m}R^{\kappa,\rho,m,n}_{m}(|z|^2) & \text{if } m \leq n;\ \rho > -1 \\ \overline{z}^{m-n}R^{\kappa,\rho,m,n}_{n}(|z|^2) & \text{if } m > n;\ \rho = 0 \\ \overline{z}^{m-n}R^{\kappa,\rho,m}_{n}(|z|^2) + \dfrac{1}{z^{m-n}}S^{\kappa,\rho,m,n}_{m}(|z|^2) & \text{if } m > n;\ \rho \text{ non-integer} \\ & \text{or } n < m \leq n+\rho;\ \rho = 1,2,\cdots \\ \overline{z}^{m-n}R^{\kappa,\rho,m,n}_{n}(|z|^2) + \dfrac{\overline{z}^{m-(n+\rho)}}{z^{\rho}}S^{\kappa,\rho,m,n}_{n+\rho}(|z|^2) & \text{if } m > n+\rho;\ \rho = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

此外，这表明 $\mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}$ 的正则部分始终是阶数为 m 的多解析函数，也是阶数为 n 的反多解析函数。其表达式为

$$R^{\kappa,\rho}_{m,n}(|z|^2) = \begin{cases} z^{n-m}R^{\kappa,\rho,m,n}_{m}(|z|^2), & m \leq n \\ \overline{z}^{m-n}R^{\kappa,\rho,m,n}_{n}(|z|^2), & m \geq n \end{cases} = z^{n-m\wedge n}\overline{z}^{m-m\wedge n}R^{\kappa,\rho,m,n}_{m\wedge n}(|z|^2). \tag{3.21}$$

然而，一般而言，$\mathcal{Z}^{\kappa,\ m^{\rho},\ n}$ 是多亚纯的，且 0 是关于 $\rho \neq 0$ 和 $m > n$ 的唯一极点。因此，对于满足 $\rho = 1$ 的 $m > n+\rho$，2，$\cdots$，奇异部分显然为 $z^{-\rho}\overline{z}^{m-(n+\rho)}S^{\kappa,\ ^{\rho\ m\ n}_{n+\rho}\ ,\ ,}(|z|^2)$。当 $n < m$ 且 $\rho > -1$ 为非整数时，或当 $\rho = 1$，2，$\cdots$ 时，其表达式为 $z^{n-m}S^{\kappa,\ m^{\rho\ m\ n}\ ,\ ,}(|z|^2)$。因此，显然奇点的重数为

$$Ord^{\kappa,\rho}_{m,n} = \begin{cases} \rho & \text{if } m > n+\rho;\ \rho = 1,2,\cdots \\ m-n & \text{if } n < m;\ \rho \text{ non-integer} \\ & \text{or } n < m \leq n+\rho;\ \rho = 1,2,\cdots. \end{cases}$$

证明至此完成。 □

注 3.11. 所得结果在某种程度上可以说明将 $\mathcal{Z}^{\kappa_m,m\ n^{\rho}}$,称为分数阶泽尼克函数的合理性。

3.3. 微分方程。

本小节讨论分数阶泽尼克函数所满足的一些二阶微分方程。

定理 3.12. 设 $m_\rho = m+\rho$。则，函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,m^{\rho},n}$ 是下列方程的解

$$z^2(1-|z|^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left((m_\rho - n + 1) - (\kappa + m_\rho - n + 2)|z|^2\right)z\frac{\partial}{\partial z} + n(\kappa + m_\rho + 1)|z|^2 = \rho(n-m).$$

证明。考虑一阶微分算子

$$\nabla^{\kappa,\rho}(f)(z) = -\left((1-|z|^2)\frac{\partial}{\partial z} - \mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{1,0}(z,\overline{z})\right)(f)(z). \tag{3.22}$$

此外，对于变化的 $j=1,2,\cdots,m$，我们设

$$\nabla_j^{\kappa,\rho}(f):=-z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa-j+1}\frac{\partial}{\partial z}\big(z^{\rho}(1-|z|^2)^{\kappa+j}f\big), \tag{3.23}$$

因此 $\nabla^{\kappa,\rho}(f)(z)=\nabla^{\kappa,\rho}_1(f)(z)$。对 $\nabla^{\kappa,\rho}_j$ 连续作用，得到算子 $\nabla^{\kappa,\rho}_m:=\nabla^{\kappa,\rho}_1\circ\nabla^{\kappa,\rho}_2\circ\cdots\circ\nabla^{\kappa,\rho}_m$ 满足 $\widetilde{\nabla}^{\kappa,\rho}_{m+1}=\nabla^{\kappa,\rho}_1\circ\widetilde{\nabla}^{\kappa+1,\rho}_m$，因为 $\nabla^{\kappa,\rho}_{j+1}=\nabla^{\kappa+1,\rho}_j\circ$。其显式表达式为

$$\widetilde{\nabla}^{\kappa,\rho}_m(f)(z)=(-1)^m z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\frac{\partial^m}{\partial z^m}\big(z^{\rho}(1-|z|^2)^{\kappa+m}f\big). \tag{3.24}$$

因此，鉴于 (1.2)，显然 $\nabla^{\kappa,\rho}_m(e_n)(z)=\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z})$ 对于 $e_n(z):=z^n$ 成立，因此

$$\nabla^{\kappa,\rho}(\mathcal{Z}^{\kappa+1,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}))=\nabla^{\kappa,\rho}_1\left(\nabla^{\kappa+1,\rho}_1\circ\nabla^{\kappa+1,\rho}_2\circ\cdots\circ\nabla^{\kappa+1,\rho}_m\right)(e_n)=\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m+1,n}(z,\overline{z}). \tag{3.25}$$

现在，将欧拉微分算子 $E_z=z\partial/\partial z$ 和常数 $c^{\kappa,\rho}_{m,n}=m(n+\rho+\kappa+1)$ 联系起来，我们定义一阶微分算子

$$D^{\kappa,\rho}_{m,n}=\frac{1}{c^{\kappa,\rho}_{m,n}\overline{z}}\left(E_z-(n-m).\right)=\frac{1}{c^{\kappa,\rho}_{m,n}}\left(\frac{z}{\overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}-\frac{(n-m)}{\overline{z}}\right).$$

因此，利用 (3.11) 并结合 [22,第213] 页中的雅可比多项式求导公式，我们得到恒等式

$$D^{\kappa,\rho}_{m,n}(\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n})=\mathcal{Z}^{\kappa+1,\rho}_{m-1,n}. \tag{3.26}$$

因此，由 (3.25) 和 (3.26) 可直接得出 $\nabla^{\kappa,\rho}\circ D^{\kappa,\rho}_{m,n}(\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}))=\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z})$。直接计算可得 $-c^{\kappa,\rho}_{m,n}\overline{z}\nabla^{\kappa,\rho}\circ D^{\kappa,\rho}_{m,n}$ 为

$$z(1-|z|^2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\left([m_\rho-n+1]-[\kappa+m_\rho-n+2]|z|^2\right)\frac{\partial}{\partial z}+(m-n)\left(\frac{\rho}{z}-[\kappa+\rho+1]\overline{z}\right)$$

这表明分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}$ 满足所需的微分方程。 □

注 3.13. 鉴于 (3.25) 和 (3.26)，所考虑的算子 $\nabla^{\kappa,\rho}$ 和 $D^{\kappa,\rho}_{m,n}$ 可视为分数阶泽尼克函数的产生与湮灭算子。

注 3.14. 令 $(P_jf)(z)=z^jf(z)$. 则，对易关系 $P_j\circ\nabla^{\kappa,\rho}_m\circ P_j^{-1}=\nabla^{\kappa,\rho}_{m}$ 对所有 $z\in\mathbb{D}^*$ 均成立。这可通过观察 (1.2) 得出：

$$z^j\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z})=\mathcal{Z}^{\kappa,\rho-j}_{m,n+j}(z,\overline{z}). \tag{3.27}$$

以下结论可利用 $\mathcal{Z}^{\kappa_m}_{m\,n}{}^{\rho}$ 与第 2 节研究的 β-限制泽尼克函数之间的密切联系来证明。

定理 3.15。对于给定的固定非负整数 m、实数 $\alpha>-1$ 和 γ，使得 $\kappa_m=\alpha-2(\gamma+m)-1$，随 n 变化的分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa_m}_{m\,n}{}^{\rho}$ 是.....的特征函数

$$-(1-|z|^2)^2\partial\overline{\partial}-(1-|z|^2)\left(mE-H^{\rho}_{\kappa_m+m+1}(z)\overline{E}\right)+mH^{\rho}_{\kappa_m+m+1}(z)|z|^2 \tag{3.28}$$

其中 $m(\kappa_m + m + 1)$ 是相应的特征值。

证明。证明时注意，对于每个固定的非负整数 m，分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa_m}{}_{,m\,n}{}^{\rho}$，通过 (2.1) 与 $z,\overline{z}$ 的 β- 限制泽尼克函数 $\psi^{\gamma}{}_{,m}{}^{\eta}{}_{,n}$ 紧密相关。后者是 (2.7) 中哈密顿量 $\mathcal{L}^{\alpha}{}_{,\ \gamma\ \eta}{}^{\beta\ +}$, 的特征函数，其对应的特征值为 $E^{\gamma}{}_{,m}{}^{\alpha} = (m+1)(\alpha - 2\gamma - m)$（参见定理 2.6 中的 (i)）。由此得出结论的关键观察是，对于任意实数 a 和 b，算子 $\mathcal{L}^{\alpha}{}_{,\ \gamma\ \eta}{}^{\beta\ +}$, 与 $\mathcal{L}^{\alpha+2a}{}_{,\ \gamma+a\ \eta+b}{}^{\beta+2b\ +}$, 酉等价。更确切地说，由于 $A^{*\alpha}{}_{,\gamma\ \eta}{}^{\beta}(h_{a,b}f) = h_{a,b}A^{*\alpha+2a}{}_{,\gamma+a\ \eta+b}{}^{\beta+2b}(f)$ 且 $A^{\gamma\ \eta}_{\gamma,\eta}(h_{a,b}f) = h_{a,b}A^{\gamma+a\ \eta+b}_{\gamma+a,\eta+b}(f)$，我们得到

$$\mathcal{L}^{\alpha}{}_{,\gamma\ \eta}{}^{\beta}{}_{,+}(h_{a,b}f) = A_{\gamma,\eta}A^{*\alpha,\beta}_{\gamma,\eta}(h_{a,b}f) = h_{a,b}A_{\gamma+a,\eta+b}A^{*\alpha+2a,\beta+2b}_{\gamma+a,\eta+b}(f) = h_{a,b}\mathcal{L}^{\alpha+2a,\beta+2b,+}_{\gamma+a,\eta+b}(f).$$

随后，对于 $\kappa_m = \alpha - 2(\gamma+m) - 1$, $\rho = \beta - 2\eta$, $b = -\eta$ 和 $a = (\kappa_m - \alpha - 1)/2 = -(\gamma + m + 1)$，分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa_m}{}_{,\ m\,n}{}^{\rho}{}_{,}$ 满足

$$\mathcal{L}^{\kappa_m-1,\rho,+}_{-m-1,0}\mathcal{Z}^{\kappa_m,\rho}_{m,n} = E^{\gamma,\alpha}_{m}\mathcal{Z}^{\kappa_m,\rho}_{m,n}.$$

但由引理2.1可知，(3.28) 中的二阶偏微分方程恰好就是 $\mathcal{L}^{\kappa_m-1,}{}_{\ -m-1}{}^{\rho+}{}_{,\ \ ,0\ \ -}(\kappa_m + m + 1)$。

□

推论 3.16. 泽尼克多项式 $\mathcal{Z}^{(-1)}_{m\,n}{}_{,}$，对应于 $\kappa_m = -1$ 的极限情形且 m 固定，是拉普拉斯算子的调和函数

$$\left\{(1-|z|^2)\partial\overline{\partial} + m\left(E - \overline{E}\right) - m^2\right\}\mathcal{Z}^{-1}_{m,n}.$$

证明。这可通过在定理 3.15 中指定 $\rho = 0$ 并选择 α 和 γ 使得$m = (\alpha/2) - \gamma$即可直接得到。事实上，在这种情况下，我们有 $\kappa_m + m + 1 = m$，且 (3.28) 的左端进一步化简为朗道哈密顿算子 $(1-|z|^2)\left\{(1-|z|^2)\partial\overline{\partial} + m\left(E - \overline{E}\right)\right\} + m^2|z|^2$，其量子化恒定磁场的强度为 m。

□

3.4. 递推公式与运算公式。

根据三项　　递推公式（适用于[22, p: 213] ）可知，对于雅可比多项式，可以推导出

$$A_{m,b}z^2\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) + B_{m,b}z\mathcal{Z}^{\kappa,\rho-1}_{m-1,n}(z,\overline{z}) + C_{m,b}\mathcal{Z}^{\kappa,\rho-2}_{m-2,n}(z,\overline{z}) = 0$$

对所有 $m = 2$、3、4、$\cdots$ 均成立，其中我们定义 $A_{m,\ b}: = (b-m)(b+2)$, $B_{m,\ b}: = b(b-1)(b-\kappa-1)$ 以及$C_{m,\ b}: = b(m-1)(\kappa+m-1)(b-\kappa-m)$，其中 $b = \kappa + n + m + \rho$。然而，从分数阶泽尼克函数的罗德里格斯公式出发，将其改写为以下形式

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n} = (-1)^m z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\partial_z^{m-1}\left(\partial_z(z^{n+\rho}(1-|z|^2)^{\kappa+m})\right),$$

可以推导出递推公式

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) = (\kappa+m)\overline{z}\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m-1,n}(z,\overline{z}) - (n+\rho)(1-|z|^2)\mathcal{Z}^{\kappa+1,\rho}_{m-1,n-1}(z,\overline{z}). \tag{3.29}$$

但是，借助（3.27），我们可以将递推公式（3.29）改写为

$$z\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) = (\kappa+m)\overline{z}\mathcal{Z}^{\kappa,\rho-1}_{m-1,n+1}(z,\overline{z}) - (n+\rho)(1-|z|^2)\mathcal{Z}^{\kappa+1,\rho-1}_{m-1,n}(z,\overline{z}). \tag{3.30}$$

此外，我们可以证明以下结论

$$\mathcal{Z}_{m+1,n+1}^{\kappa-1,\rho-1}=[\kappa|z|^2+(m-n-\rho)(1-|z|^2)]\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}-m(n+\rho+\kappa+1)\overline{z}(1-|z|^2)\mathcal{Z}_{m-1,n}^{\kappa+1,\rho}. \tag{3.31}$$

事实上，由于使用了（3.26），可得

$$z\frac{\partial}{\partial_z}(\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho})-(n-m)\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}=\overline{z}m(n+\rho+\kappa+1)\mathcal{Z}_{m-1,n}^{\kappa+1,\rho},$$

结合求导公式

$$(1-|z|^2)\frac{\partial}{\partial_z}(\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho})=-\rho(1-|z|^2)\mathcal{Z}_{m,n-1}^{\kappa,\rho+1}+\kappa\overline{z}\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}-\mathcal{Z}_{m+1,n}^{\kappa-1,\rho}.$$

后者可由罗德里格斯公式（1.2）得出。接下来，我们将得到分数阶泽尼克函数的非平凡尼尔森型递推公式。这些公式是所谓分数阶泽尼克函数的伯恩查尔表示型公式的特例。为准确陈述，我们令$\mathbf{a}_{q\,j\,\ell\,k}^{\kappa\,\rho\,m\,n}$,,,,,,和$\mathbf{b}_{m\,n}^{\kappa\,\rho}$,,,$_{j,k}$ 分别为以下常数:

$$\mathbf{a}_{q,j,\ell,k}^{\kappa,\rho,m,n}:=\varepsilon_{\rho,m-j}^{*}\frac{(-1)^{m+j+\ell}m!q!\Gamma(\rho+1)\Gamma(\kappa+m+1)}{\ell!(m-j)!(j-\ell)!(q-\ell)!\Gamma(\rho-m+j+1)\Gamma(\kappa+m+n+1)} \tag{3.32}$$

and

$$\mathbf{b}_{j,k}^{\kappa,\rho,m,n}:=\frac{(-1)^{j+k}m!n!\Gamma(\kappa+m+n+1)}{j!k!(m-j)!(n-k)!\Gamma(\kappa+m+k+1)}. \tag{3.33}$$

命题 3.17。设 κ、 ρ、 m和 n如上所述。设 p为非负整数， u为满足 $u\geq\max(-\kappa,-1)$的实数。则有

$$\mathcal{Z}_{m,n+q}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=z^q\sum_{j=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{j\wedge q}\mathbf{a}_{q,j,\ell,k}^{\kappa,\rho,m,n}\left(\frac{1-|z|^2}{z}\right)^{m+\ell-j}\mathcal{Z}_{j-\ell,n}^{\kappa+m+\ell-j}(z,\overline{z}), \tag{3.34}$$

$$\mathcal{Z}_{m,n+q}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=\frac{m!q!\Gamma(\kappa+m+1)}{\Gamma(\kappa+m+n+1)}z^q\sum_{j=0}^{m\wedge q}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!(m-j)!(q-j)!}\left(\frac{1-|z|^2}{z}\right)^j\mathcal{Z}_{m-j,n}^{\kappa+j,\rho}(z,\overline{z}) \tag{3.35}$$

and

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa+u,\rho}(z,\overline{z})=\frac{\Gamma(\kappa+u+m+1)}{\Gamma(\kappa+u+m+n+1)}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{j+k}\mathbf{b}_{j,k}^{\kappa,\rho,m,n}\mathcal{Z}_{j,k}^{u-j-k}(z,\overline{z}). \tag{3.36}$$

证明。考虑算子

$$B_{m,n}^{\kappa,\rho}(f)=\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^\rho\frac{\partial^n}{\partial\overline{z}^n}\left((1-|z|^2)^{\kappa+m+n}f\right)\right), \tag{3.37}$$

对于每个具有足够可微性的函数 f。由外向内应用莱布尼茨公式，可得 Burchnall 型公式

$$B^{\kappa,\rho}_{m,n}(f) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^{m-j}}{\partial z^{m-j}}(z^\rho) \frac{\partial^j}{\partial z^j} \left(\frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}[(1-|z|^2)^{\kappa+m+n} f] \right) \tag{3.38}$$

$$= z^\rho (1-|z|^2)^{\kappa+m} \sum_{j=0}^{m} \sum_{\ell=0}^{j} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}^{\kappa,\rho}_{m,n,j,\ell,k} z^{j-m} (1-|z|^2)^{k+\ell-j} \mathcal{Z}^{\kappa+m+k+\ell-j}_{j-\ell,n-k}(z,\overline{z}) \frac{\partial^{\ell+k}}{\partial z^\ell \partial \overline{z}^k}(f),$$

其中涉及的常数由下式给出

$$\mathbf{a}^{\kappa,\rho}_{m,n,j,\ell,k} := (-1)^{m+n+k} \frac{n!(q-\ell)!\Gamma(\kappa+m+n+1)}{q!k!(n-k)!\Gamma(\kappa+m+1)} \mathbf{a}^{\kappa,\rho,m,n}_{q,j,\ell}.$$

类似地，我们得到（由内向外应用莱布尼茨公式）

$$B^{\kappa,\rho}_{m,n}(f) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(z^\rho \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial \overline{z}^{n-k}} \left((1-|z|^2)^{\kappa+m+n} \right) \frac{\partial^k}{\partial \overline{z}^k}(f) \right] \right)$$

$$= (-1)^{m+n} z^\rho \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{b}^{\kappa,\rho}_{m,n,j,k} (1-|z|^2)^{\kappa+j+k} \mathcal{Z}^{\kappa+j+k,\rho}_{m-j,n-k}(z,\overline{z}) \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \overline{z}^k}(f). \tag{3.39}$$

T因此，由于 $B^{\kappa,m^\rho,n}$ 在 $f = e_q = z^q$ 的特例中的作用可简化为

$$B^{\kappa,\rho}_{m,n}(z^q) = (-1)^{m+n} (\kappa+m+1)_n z^\rho (1-|z|^2)^\kappa \mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n+q}(z,\overline{z}),$$

我们由（3.34）（分别由（3.35））从（3.38）（分别从（3.39））得到。恒等式（3.36）可由（3.39）考虑 $f(z) = (1-|z|^2)^u$ 的特例，并注意到 $B^{\kappa,m^\rho,n}((1-|z|^2)^u g) = B^{\kappa+u,m\,n\,^\rho,}(g)$ 而得出。 □

注 3.18。 对于（3.39）中的 Burchnall 表示，当 f 为全纯函数时，可简写为

$$B^{\kappa,\rho}_{m,n}(f) = (-1)^{m+n} z^\rho h^\kappa \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}^{\kappa,\rho}_{m,n,j,0} (1-|z|^2)^j \mathcal{Z}^{\kappa+j,\rho}_{m-j,n}(z,\overline{z}) \frac{\partial^j(f)}{\partial z^j}. \tag{3.40}$$

任意 f （不一定是全纯函数）的类似表示可借助微分算子构造

$$A^{\rho,\kappa}_{m,n}(f) = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(z^{n+\rho} (1-|z|^2)^{\kappa+m} f \right). \tag{3.41}$$

更确切地说，可得

$$A^{\rho,\kappa}_{m,n}(f) = (-1)^m m! z^\rho h^\kappa \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j (1-|z|^2)^j}{j!(m-j)!} \mathcal{Z}^{\kappa+j,\rho}_{m-j,n}(z,\overline{z}) \frac{\partial^j f}{\partial z^j}. \tag{3.42}$$

3.5. 生成函数与双线性生成函数。

本文旨在为分数阶泽尼克函数求得一些生成函数与双线性生成函数。首先值得注意的是，由命题 3.5 并利用 [22, p: 213] 中的雅可比多项式生成函数，我们可得生成函数

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{u^m}{m!}\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})=2^n z^{2n+1-m+\rho+\kappa}\frac{(z-u+R(u,z))^{m-n-\rho}(z+u+R(u,z))^{-\kappa}}{R(u,z)}.$$

这里 $R(u,z)=1$ 对于 $u=0$ 和 $R(u,z)=(z^2+2uz(1-2|z|^2)+z^2(1-2|z|^2)^2)^{1/2}$ 当 $u\neq 0$.

下一个结果借助偏微分算子，给出了特殊双线性生成函数表示为合流超几何函数和高斯超几何函数导数的表达式

$$R_m^{\kappa,\rho}f(z)=\frac{1}{(z\overline{w})^\rho(1-|z|^2)^\kappa(1-|w|^2)^\kappa}\frac{\partial^{2m}}{\partial z^m\partial\overline{w}^m}\left((z\overline{w})^\rho(1-|z|^2)^{\kappa+m}(1-|w|^2)^{\kappa+m}f\right)(z)$$

对于充分可微的函数 f。

命题 3.19。我们有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a)_n}{n!(c)_n}\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})\overline{\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(w,\overline{w})}=R_m^{\kappa,\rho}\left({}_1F_1\left(\begin{array}{c}a\\c\end{array}\middle|z\overline{w}\right)\right)\tag{3.43}$$

and

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})\overline{\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(w,\overline{w})}=R_m^{\kappa,\rho}\left({}_2F_1\left(\begin{array}{c}a,b\\c\end{array}\middle|z\overline{w}\right)\right).\tag{3.44}$$

证明。这可直接利用以下对象的罗德里格公式得到： $\mathcal{Z}^\kappa,\ {}_m{}^\rho,\ {}_n(z,\ \overline{z})$。事实上，我们可以将式（3.43）的左侧改写为

$$\frac{1}{(z\overline{w})^\rho(1-|z|^2)^\kappa(1-|w|^2)^\kappa}\frac{\partial^{2m}}{\partial z^m\partial\overline{w}^m}\left((z\overline{w})^\rho[(1-|z|^2)(1-|w|^2)]^{\kappa+m}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}\right),$$

这进一步化简为式（3.43）。式（3.44）可用类似方法推出。 □

注 3.20。对于 $a=1$、 $b=\kappa+\rho+1$ 和 $c=\rho+1$ 的特殊取值，在 $\rho=\beta-2\eta$ 和 $\kappa=\kappa_m=\alpha-2(\gamma+m)-1$ 的条件下，量 $n!(c)_n/(a)_n(b)_n$ 等于式（2.12）中 ψ^γ、 ${}_m{}^\eta$、 ${}_n$ 的平方范数，差一个与 n 无关的乘法常数 d^κ、 ${}_m{}^\rho$。因此，式（3.44）给出了再生核

$$K_{\gamma,\eta,m}^{\alpha,\beta}(z,w)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\psi_{m,n}^{\gamma,\eta}(z,\overline{z})\overline{\psi_{m,n}^{\gamma,\eta}(w,\overline{w})}}{\|\psi_{m,n}^{\gamma,\eta}\|_{\alpha,\beta}^2}$$

m 次 ge 的 广义 β-修正的 Bergman 空间，如备注2.8中所引入。事实上，我们有

$$K_{\gamma,\eta,m}^{\alpha,\beta}(z,w)=d_m^{\kappa,\rho}\frac{[(1-|z|^2)(1-|w|^2)]^{\gamma+m}}{|zw|^{2\eta}}R_m^{\kappa,\rho}\left({}_2F_1\left(\begin{array}{c}a,b\\c\end{array}\middle|z\overline{w}\right)\right).$$

K^{α}的闭式$\gamma\,{}^{\beta}_{\eta}$，$,_m(z,w)$ 仍需进一步研究。

下面，我们证明分数阶泽尼克函数的一个双线性生成函数，它看起来类似于广义拉盖尔多项式的Hardy–Hille公式。因此，我们处理

$$G_n^{\kappa,\rho}(z,w|t) := \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m \mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z})\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(\overline{w},w)}{m!(\kappa+1)_m}. \tag{3.45}$$

命题 3.21. 对于每个充分小的 t，$G^{\kappa}{}_{,n}{}^{\rho}(z,w|t)$ 的闭式表达为

$$G_n^{\kappa,\rho}(z,w|t) = \frac{(z+tw)^{n+\rho}(\overline{w}+t\overline{z})^{n+\rho}}{(z\overline{w})^{\rho}(1+t\overline{z}w)^{2(n+\rho)+\kappa+1)}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n-\rho, -n-\rho \\ \kappa+1 \end{matrix} \middle| -\frac{t(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{(z+tw)(\overline{w}+t\overline{z})} \right).$$

证明。利用　　超几何表示（命题 3.5）我们可以将 $G^{\kappa}{}_{,n}{}^{\rho}(z,w|t)$ a　　s

$$G_n^{\kappa,\rho}(z,w|t) = (z\overline{w})^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\kappa+1)_m}{m!}(t\overline{z}w)^m \\ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -n-\rho \\ \kappa+1 \end{matrix} \middle| 1-\frac{1}{|z|^2} \right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, -n-\rho \\ \kappa+1 \end{matrix} \middle| 1-\frac{1}{|w|^2} \right).$$

因此，利用 式[21, Eq. (12), p. 85]. 中的迈克斯纳双线性关系，即可得出命题 3.21 中的结果。

□

3.6. 积分表示

通过对（3.6）和（3.9）右侧的高斯超几何函数，或（3.11）中的雅可比多项式，应用经典积分表示，我们可以推导出 $\mathcal{Z}^{\rho}$、$_m{}^{\kappa}$、$_n(z$、$\overline{z})$ 的不同积分表示。不过，下面给出一些非平凡的表示。第一个基于全纯函数的柯西积分公式，其思路沿袭了 Kazantsev 和 Bukhgeim 的构想[17]。

定理3.22。　　T分数阶泽尼克函数 $\mathcal{Z}^{\kappa}$、$_m{}^{\rho}$、$_n$ 具有如下积分表示

$$\mathcal{Z}_{m,n}^{\kappa,\rho}(z,\overline{z}) = \frac{(-1)^m m!}{2\pi i} z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa} \oint_{|t|=1} t^{n+m+\rho+\kappa} \frac{(\overline{t}-\overline{z})^{\kappa+m}}{(t-z)^{m+1}} dt. \tag{3.46}$$

证明。利用普通二项式展开和阶乘函数 [27, p。 56],

$$(1-\xi)^{-a} = \sum_{j=0}^{+\infty} (a)_j \frac{\xi^j}{j!},$$

展开显式表达式 $1-|z|^2$的因子（^{j}），其中 $\mathcal{Z}^{\kappa_m}$、$_m\,n^{\rho}$由（3.3）给出。此外，我们还需要注意到以下事实：

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}(z^{j+n+\rho}) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{t^{j+n+\rho}}{(t-z)^{m+1}} dt,$$

这可由柯西积分公式应用于函数 $\varphi_z(t) = t^{m+j+\rho}/(t-z)$ 得出。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,\overline{z}) &= (-1)^m z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-\kappa-m)_j}{j!}\overline{z}^j\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(z^{n+\rho+j}\right)\\
&= \frac{(-1)^m m!}{2\pi i}z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\oint_{|t|=1}\frac{t^{n+\rho}}{(t-z)^{m+1}}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}(-\kappa-m)_j\frac{(t\overline{z})^j}{j!}\right)dt\\
&= \frac{(-1)^m m!}{2\pi i}z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\oint_{|t|=1}\frac{t^{n+\rho}(1-t\overline{z})^{\kappa+m}}{(t-z)^{m+1}}dt\\
&= \frac{(-1)^m m!}{2\pi i}z^{-\rho}(1-|z|^2)^{-\kappa}\oint_{|t|=1}t^{n+m+\rho+\kappa}\frac{(\overline{t}-\overline{z})^{\kappa+m}}{(t-z)^{m+1}}dt.
\end{aligned}$$

这就证明了（3.46）。 □

分数阶泽尼克函数的下一个积分表示是命题 3.21中的双线性生成函数的一个推论。

命题 3.23。 设 $\gamma^{\kappa}_{m,n}$ 如 （3.17）所示。分数阶泽尼克函数具有如下积分表示

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(w,\overline{w}) = \frac{m!(\kappa+1)_m\gamma^{\kappa,\rho}_{m,n}}{w^\rho t^m}\int_D \Xi^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,w|t)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-m,n+\kappa+\rho+1\\ \kappa+1\end{matrix}\,\middle|\,1-|z|^2\right)\\
\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}-n-\rho,-n-\rho\\ \kappa+1\end{matrix}\,\middle|\,-\frac{t(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{(w+tz)(\overline{z}+t\overline{w})}\right)d\lambda(z);
\end{aligned}\tag{3.47}$$

其中

$$\Xi^{\kappa,\rho}_{m,n}(z,w|t) := \frac{\overline{z}^{m-n-\rho}(w+tz)^{n+\rho}(\overline{z}+t\overline{w})^{n+\rho}}{(1+tz\overline{w})^{2(n+\rho)+\kappa+1}}(1-|z|^2)^\kappa.$$

证明。 从展开式（3.45）出发可得

$$\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}(w,\overline{w}) = \frac{m!(\kappa+1)_m\gamma^{\kappa,\rho}_{m,n}}{t^m}\overline{\langle G^{\kappa,\rho}_n(\cdot,w|t),\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,n}\rangle_{L^{2,\kappa}_\rho(\mathbb{D})}}.$$

接下来，利用命题 $G^{\kappa}_{n}{}^{\rho}(z,\ w|t)$ 中给出的核函数显式表达式，并结合（3.6）中的超几何表示，我们得到积分表示（3.47）。 □

注 3.24. (3.47) 右侧的积分是复域上的刚性积分 $\mathbb{D}$，也就是说，它并非平凡积分，且无法化为实域上的经典积分。

3.7. 完备性。

这里我们讨论分数阶泽尼克函数在 $L^2_{,\rho}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 中的完备性。例如，注意，对于 $\rho = 0, 1, 2, \cdots$，当 m, $n+\rho = 0, 1, 2, \cdots$ 取不同值时，函数 $z^\rho\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,}{}^{\rho}{}_{n}$ 构成 $L^2_{,\rho}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 的正交基，因为根据 (1.3)，它们与复 Zernike 多项式 $\mathcal{Z}^{\kappa}_{m,n+\rho}$ 密切相关。已知后者构成希尔伯特空间 $L^2_{,0}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 的正交基（例如参见 [6, 16]）。

直接证明从以下观察出发：每个 $(\mathcal{Z}^{\kappa,\ell}_{m,n})_{m,n}$ 都是关于 $\overline{z}$ 的次数恰为 m 、关于 z 的次数恰为 n 的多项式，因此任何 $z^n\overline{z}^m$ 都可以改写为

$$\overline{z}^m z^n = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a^{m,n}_{j,k}\,\mathcal{Z}^{\kappa,\ell}_{j,k}(z,\overline{z}).$$

系数 $a^{m,n}_{j,k}$ ，是显式的，可以通过公式计算

$$a^{m,n}_{j,k} = \gamma^{\kappa,\rho}_{m,n}\int_{\mathbb{D}} \overline{z}^m z^n \overline{\mathcal{Z}^{\kappa,\ell}_{j,k}}(z,\overline{z})|z|^{2\rho}(1-|z|^2)^\kappa d\lambda(z),$$

其中 $\gamma^{\kappa,\rho}_{m,n}$ 如（3.17）中的 s。下文中，我们仅考虑 ρ 非整数 $\rho>-1$的情形 .

定理 3.25. 对于变化的非负整数 m 和变化的整数 s，函数 $\Upsilon^{\kappa,\rho}_{m,s} := \overline{z}^{-s/2}\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,\rho-s/2}$ ，$_{m+s/2}$构成 $L^2_{\kappa,\rho}(\mathbb{D})$中的正交完备系。

证明。关键观察是，对于 $z=\sqrt{(1+x)/2}\,e^{i\theta}$，当 $x\in[-1,1[$ 且 $\theta\in[0,2\pi[$ 时，我们有

$$\Upsilon^{\kappa,\rho}_{m,s}(z,\overline{z}) = \frac{z^s}{|z|^s}\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,m}(z,\overline{z}) = m!e^{is\theta}P^{(\kappa,\rho)}_m(x).$$

随后，利用雅可比多项式 $P^{(\kappa,\rho)}_m$在关于测度 $(1-x)^\kappa(1+x)^\rho dx$且定义于 $[-1,1[$ 上的平方可积函数的希尔伯特 $L^2_{\kappa,\rho}$ 中的正交性，可以直接得到它们在 $L^2_{\kappa,\rho}(\mathbb{D})$中的正交性。更确切地说，我们有

$$\int_D \Upsilon^{\kappa,\rho}_{m,s}(z,\overline{z})\overline{\Upsilon^{\kappa,\rho}_{n,r}(z,\overline{z})}|z|^{2\rho}(1-|z|^2)^\kappa d\lambda(z) = \frac{m!n!\pi}{2^{\kappa+\rho+1}}\left\|P^{(\kappa,\rho)}_m\right\|^2_{L^2_{\kappa,\rho}}\delta_{m,n}\delta_{s,r}.$$

关于其完备性，令 $f\in F^\perp$为 $F=Span\{\Upsilon^{\kappa,\rho}_{m,s}$的正交补；$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s\in\mathbb{Z}\}$属于$L^{2,\kappa}_{\rho}$（$\mathbb{D}$）。因此，根据命题 3.5，假设 $f\in F^\perp$ 等价于

$$\left\langle f,\Upsilon^{\kappa,\rho}_{m,s}\right\rangle_{L^{2,\kappa}_\rho} = \frac{m!}{2^{\kappa+\rho+2}}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\kappa/2}(1+x)^{\rho/2}P^{(\kappa,\rho)}_m(x)\hat{f}^{\kappa,\rho}_s(x)dx = 0$$

对于每个整数 s 和 $m=0$，1、2、$\cdots$。所涉及的函数定义为

$$\hat{f}^{\kappa,\rho}_s(x) := (1-x)^{\kappa/2}(1+x)^{\rho/2}\hat{f}_s(x),$$

其中，$\hat{}\ f_s(x)$ 表示函数 $f_x := \theta\longmapsto f(\sqrt{(1+x)/2}\,e^{i\theta})$ 对每个固定的 $x\in[-1,1[$ 的第 s 个傅里叶系数。显然，$\hat{}\ f^{\kappa,\rho}_s$属于 $L^2([-1,1[;\,dt)$，因为利用柯西-施瓦茨不等式和富比尼定理可得

$$\int_{-1}^{1}|\hat{f}^{\kappa,\rho}_s(x)|^2dx \le 2\pi\int_{-1}^{1}(1-x)^\kappa(1+x)^\rho\left(\int_0^{2\pi}\left|f\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta\right)dx = 2^{\kappa+\rho+3}\pi\|f\|^2_{L^{2,\kappa}_\rho}.$$

因此，对于每个 $s\in\mathbb{Z}$，函数 $(1-x)^{\kappa/2}(1+x)^{\rho/2}P_{(\kappa,\rho)m}$，$m=$0,1,2,$\cdots$ 在 $[-1,1[$ 上几乎处处成立，且它们构成 $L^2([-1,1[,dt)$ 的正交基。这尤其意味着傅里叶

$f_x \in L^2([0,2\pi[, d\theta)$ 的变换满足 $\mathcal{F}(f_x)(\ell) = \hat{} f_{-s}(x) = 0$，对每个 $s \in \mathbb{Z}$ 以及每个固定的 $\hat{}$ $x \in [-1,1[\backslash N$, 都成立，其中我们设 $N := \cup_s \{x \in [-1,1[;\ f_s(x) \neq 0\}$。这证明函数$f_x = 0$在 $[0,2\pi[$ 上几乎处处成立，对几乎每个 $x \in [-1,1[$ 都如此。因此， f 几乎处处是一个消失函数。证明至此完成。 □

推论 3.26。希尔伯特空间 $A^{\kappa}{}_{,s}{}^{\rho}(\mathbb{D}) := Span\{\overline{z}^{-s/2}\mathcal{Z}^{\kappa,\rho}_{m,m+s/2}; m = 0,1,2,\cdots\}^{L^2}{}_{,\rho}{}^{\kappa}$; $s \in \mathbb{Z}$构成 $L^2{}_{,\rho}{}^{\kappa}(\mathbb{D})$ 的希尔伯特正交分解。也就是说，我们有

$$L^{2,\kappa}_{\rho}(\mathbb{D}) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} A^{\kappa,\rho}_{s}(\mathbb{D}).$$

定义 3.27。闭子空间 $A^{\kappa}{}_{,s}{}^{\rho}(\mathbb{D})$ 称为第二类广义（多重亚纯）伯格曼空间。

致谢：谨向参与“Ahmed Intissar”和“Analysis, P.D.E. & SpectralGeometry”研讨会的成员表示感谢。

数据可用性声明：本研究中生成或分析的所有数据均包含在本文中。

利益冲突：作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Aharmim B., El Hamyani A., El Wassouli F., Ghanmi A., 广义泽尼克多项式：运算公式与生成函数。Integral Transforms Spec. Funct. 26, no. 6 (2015) 395–410.[2] Balk M.B., 多解析函数及其推广，载于《复分析 I：整函数与亚纯函数、多解析函数》，A.A. Gonchar、V.P. Havin、N.K. Nikolski（编），施普林格出版社 柏林-海德堡 1997[3] Boussejra A., Intissar A., L^2单位复球上不变拉普拉斯算子的具体谱分析 $\Delta_{\alpha\beta}\ B^n$。J Func. Anal. 160 (1998) 115-140.[4] Brychkov Y.A., 特殊函数手册：导数、积分、级数及其他公式。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2008.[5] Comtet A., 双曲平面上的朗道能级，Ann. Phys. 173 (1987) 185-209.[6] Dunkl C.F., 圆盘上海森堡多项式的泊松核。Math. Z. 187 (4) (1984) 527–547.[7] El Harti R., Elkachkouri A., Ghanmi A., 加权多重 Bergman 空间上的实 Cauchy 变换。即将在 FILOMAT 发表。[8] El Hamyani A., Ghanmi A., Intissar A., 广义泽尼克多项式：积分表示与柯西变换。预印本 2016, arXiv:1605.00281.[9] Ghanmi A., 曲面上扭曲拉普拉斯算子的特征函数及建议的正交多项式。Oper. Matrices 4, no. 4, (2010) 533–540.[10] Ghanmi A., Intissar A., 复双曲几何的渐近性质与类朗道哈密顿量的谱分析。J. Math. Phys. 46, no. 3 (2005) 032107, 26 pp.[11] Ghanmi A., Snoun S., 穿孔单位圆盘上修正 Bergman 空间的 Bargmann 型积分表示。Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 45, no. 3, (2022) 1367–1381.[12] Ghiloufi N., Safa S., 新 Bergman 核的零点。J. Korean Math. Soc., 59, no. 3, (2022) 449–468.[13] Graham C.R., Bergman 拉普拉斯算子的狄利克雷问题 I，Comm. Partial Differ. Equations 8 (1983) 433-476.[14] Gray R.W., Dunn C., Thompson K.P., Rolland J.P., 旋转对称光学系统中泽尼克多项式场依赖性的解析表达式。Opt. Express 20 (15) (2012) 16436–16449.

[15] Iskander D.R., Collins M.J., Davis B., 用泽尼克多项式对角膜表面进行最优建模。IEEE Trans. Bio med. Eng. 48 (1) (2001) 87–95.[16] Kanjin Y., 具有非负系数的拉盖尔多项式和圆盘多项式展开。J. Fourier Anal. Appl. 3 (2013) 495–513.[17] Kazantsev S.G., Bukhgeim A.A., 张量场二维扇束 Radon 变换的奇异值分解。J. Inverse Ill-Posed Probl. 12, no. 3, (2004) 245–278.[18] Khotanzad A., Hong Y. H., 基于泽尼克矩的不变图像识别。IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 12 (5), (1990) 489–497.[19] Koornwinder T.H., 经典正交多项式的二元类比。载于《特殊函数理论与应用》，R.A. Askey（编），Academic Press，纽约，(1975) 435–495.[20] Lakshminarayanan V., Fleck A., 泽尼克多项式指南。J. Modern Optics, 58 (7) (2011) 545–561[21] Erd´elyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G., 高等超越函数。第 I 卷。McGraw-Hill Book Co., Inc.，纽约-多伦多-伦敦，1953.[22] Magnus W., Oberhettinger F., Soni R.P., 数学物理特殊函数公式与定理。数学科学基础丛书，单行本，第 52 卷。Springer 1966.[23] Milanetti E., M. Miotto M., Di Rienzo L., Monti M., Gosti G., Ruocco G., 二维泽尼克多项式展开：寻找蛋白质-蛋白质结合区域。Computational and Structural Biotechnology Journal, 19, (2021) 29-36[24] Nijboer B. R. A., 光学像差的衍射理论。第二部分：存在小像差时的衍射图样，Physica 13 (10) (1947) 605–620.[25] 数学函数 NIST 数字图书馆。[26] Noll R. J., 泽尼克多项式与大气湍流。J. Opt. Soc. Am. 66 (3) (1976) 207–211.[27] Rainville E.D, 特殊函数。Chelsea Publishing Co.，纽约布朗克斯，1971.[28] Wang L., Healey G., 使用泽尼克矩对多光谱纹理进行光照与几何不变分类。IEEE Trans. on Image Process. 7 (2) (1998) 196–203.[29] Winker D. M., 有限外尺度对大气光学湍流泽尼克分解的影响。J. Opt. Soc. Am. A 8 (10) (1991) 1568–1574.¨W¨unsche A., 广义泽尼克多项式或圆盘多项式。J. Comput. Appl. Math. 174 (1) (2005) 135–163.[31] Zernike F., 切割法及其改进形式——相衬法的衍射理论。Physica, 1, 7-12, (1934) 689–704.[32] Zernike F., Brinkman H.C., 超球函数及球形区域内的正交多项式。Proc. Kon. Akad. v. Wet., Amsterdam 38 (1935) 161–170.