arXiv:2301.08620v1 [cs.SD] 20 Jan 2023

基于伴随方法的声音增强与声源定位声源识别

Mathias Lemke 和 Lewin Stein

柏林工业大学流体力学与技术声学研究所，德国
mathias.lemke@tnt.tu-berlin.de

摘要。 声源识别是声学中的常见问题。人们需要确定不同参数，其中包括声源的信号和位置。我们提出一种基于伴随方法的声源识别方法，该方法采用计算气动声学技术。本文展示了两种不同的应用作为概念验证：声音增强配置的优化，以及（移动）声源的定位。

关键词： 计算气动声学、伴随方程、声源识别、声音增强、声源定位

1 引言

声学领域的一个常见问题是识别固定或移动声源。通常需要确定若干参数，其中包括声源信号和声源的位置。这一普遍问题存在于许多应用领域，从环境声学到工业声学。

本文探讨一种基于伴随方法的声源识别方法。该时域方法基于（伴随）欧拉方程，并通过计算气动声学技术（CAA）求解。

该方法能够处理复杂基流，例如非均匀基流、热分层以及复杂几何。

数十年来，基于伴随的方法一直应用于流体力学领域。事实证明，这种方法能够有效分析流动构型，并确定各种应用中的最优模型参数[7]。基于伴随的技术可通过几何修改 [9] 优化流动构型，也可用于主动流动控制应用 [1]。这些技术还用于分析和优化反应流构型 [13,12]以及数据同化应用 [23,14,8]。此外，它们也应用于气动声学 [4,20] 和声音增强应用 [15,21]领域。

这里，我们将研究范围限定在声音增强和通用配置下声源定位领域的两个应用，以此作为概念验证。

在声音增强领域，线阵用于合成声场。要识别扬声器箱体的几何排列和电子

驱动方式，以最优地（重新）生成声场，这是一个不适定的逆问题。通常采用频域方法[3,22]。

定位移动和静止声源时，通常会使用麦克风阵列方法，例如波束形成。根据具体任务，会采用在时域或频域中运行的不同算法。近期综述请参见 [16]。

本文组织如下：第 2 节介绍伴随方法，并推导伴随 Euler 方程。第 3 节简要介绍数值实现后，第 4 节将所推导的框架应用于声音增强。第 5 节讨论该方法在声源定位中的适用性。

2 伴随方法

2.1 一般伴随方程

伴随方程可以通过不同方式推导，例如连续方法或离散方法。尽管离散化方式不同，这些方法彼此一致且均适用，相关讨论请参见 [7]。此外，还会使用自动微分技术，从现有仿真程序生成伴随代码。近期提出了一种基于模态的方法来推导伴随算子 [19]，以改进直接算子构造方法 [12]。

这里以离散形式引入伴随方程。采用矩阵—向量表示法，其中向量空间是涵盖时空的完整解。本节基于 [7,11]。

一般而言，伴随方程由标量目标函数J引出，该函数由用户定义，用于表征分析的目标，例如优化。它由权重向量 g 与系统状态向量 q的标量积给出

$$J = g^{\mathrm{T}} q. \tag{1}$$

系统状态 q 是控制方程组的解

$$Aq = s \tag{2}$$

其中， A 为控制算子， s 为右端强迫项。若要通过蛮力法，基于 s 对 J 进行优-化，就必须针对所有可能的 s求解控制方程。

相反，为了降低计算开销，可以使用伴随方程

$$A^{\mathrm{T}} q^{*} = g, \tag{3}$$

与伴随变量 q^{*}。

With

$$J = g^{\mathrm{T}} q = \left(A^{\mathrm{T}} q^{*}\right)^{\mathrm{T}} q = {q^{*}}^{\mathrm{T}} A q = {q^{*}}^{\mathrm{T}} s \tag{4}$$

找到了一种公式，使得无需针对每个可能的 s 求解控制方程组，就能计算目标 J。通过求解伴随方程，可以利用标量积计算目标。因此，伴随方法能够高效计算 J 相对于 s 的梯度。

2.2 声学应用中的伴随欧拉方程

本节基于 [11,21]。目标函数 J 在整个计算域中以空间和时间为变量定义，其中 $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}x_i \mathrm{d}t$：

$$J = \frac{1}{2} \iint \left(q - q^{\mathrm{target}}\right)^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{5}$$

变量 q 包含由Euler 方程所支配系统的完整状态 $q = [\varrho, u_j, p]$。其中，ϱ 表示密度，u_j 表示沿x_j方向的速度，p 表示压力。

对于以下气动声学分析，目标函数的评估范围仅限于压力，因此

$$J = \frac{1}{2} \iint \left(p - p^{\mathrm{target}}\right)^2 \sigma \ \mathrm{d}\Omega. \tag{6}$$

附加权重 $\sigma(x_i, t)$定义了目标函数的评估位置和时间。通常，目标函数还需补充一个正则化项；为清晰起见，此处省略该项。目标 p^{target} 因具体应用而异。对于第 4 节所述的优化任务，目标根据期望的声场来定义，例如为露天音乐会的观众营造最优的聆听体验。对于第 5 节所述的声源定位应用，目标压力由麦克风测量确定。麦克风位置通过权重函数 σ纳入其中。在这两种情况下，都希望 J 达到最小。

该最小值需在满足 Euler 方程

$$\partial_t \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u_j \\ \frac{p}{\gamma - 1} \end{pmatrix} + \partial_{x_i} \begin{pmatrix} \varrho u_i \\ \varrho u_i u_j + p\delta_{ij} \\ \frac{u_i p \gamma}{\gamma - 1} \end{pmatrix} - u_i \partial_{x_i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s_p \end{pmatrix},$$

的约束下取得，其中 γ 为比热比。这里采用求和约定。有关公式的详细说明，尤其是将能量方程改写为以压力表示的形式，参见 [13]。

为便于推导，上述偏微分方程组简记为

$$E(q) = s. \tag{7}$$

$s = [0, 0, s_p]$ 方程右侧的项刻画了单极子声源，分别可用于控制系统状态以及方程的解。一般而言，也可以考虑质量源和动量源

项。总体目标是通过调整 s，求得一个能够降低目标函数（6）的 Euler方程的解。对 s进行优化，相当于优化扬声器的输出信号。

为了采用伴随方法优化 s，必须对目标函数 (6) 和控制方程组 (7) 进行线性化。由此得到

$$\delta J = \iint \underbrace{\left(q - q^{\mathrm{target}}\right)\sigma}_{=g} \delta p \mathrm{d}\Omega, \tag{8}$$

and

$$E_{\mathrm{lin}}\delta q = \delta s. \tag{9}$$

权重 $g = (q - q^{\mathrm{target}})\sigma$ 表示当前数值解与目标场之间的差异。如上所述，此处仅根据压力对其进行评估。将线性化系统与目标函数以 La-grangian 方式结合，可得

$$\begin{aligned}\delta J &= g^{\mathrm{T}}\delta q - {q^*}^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(E_{\mathrm{lin}}\delta q - \delta s\right)}_{=0} \\ &= {q^*}^{\mathrm{T}}\delta s + \delta q^{\mathrm{T}}\left(g - E_{\mathrm{lin}}^{\mathrm{T}} q^*\right).\end{aligned} \tag{10}$$

为简洁起见，此处未显示空间积分和时间积分。

通过要求.....可得到所需的伴随方程 $E^* = E_{\mathrm{lin}}^{\mathrm{T}}$

$$g - E_{\mathrm{lin}}^{\mathrm{T}} q^* = 0, \tag{11}$$

其中 $q^* = [\varrho^*, u_j^*, p^*]$ 为伴随状态变量。

关于伴随 Euler 方程的详细推导，请参见 [11]。这些方程如下:

$$\partial_t q^* = \tilde{A}\left[-(B^i)^{\mathrm{T}}\partial_{x_i} q^* - \partial_{x_i}(C^i)^{\mathrm{T}} q^* + \tilde{C}^i \partial_{x_i} c - g\right] \tag{12}$$

其中， $\tilde{A} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ 和 $\tilde{C}^i$ 用作

$$q_\alpha^* \delta C_{\alpha\beta}^i \partial_{x_i} c_\beta = q_\alpha^* \delta q_\kappa \frac{\partial C_{\alpha\beta}^i}{\partial q_\kappa} \partial_{x_i} c_\beta \tag{13}$$

缩写为$\delta q_\kappa \tilde{C}_{\kappa\beta}^i \partial_{x_i} c_\beta$。矩阵 A、 B^i 和 C^i 见附录。

最后，目标函数的变化量为

$$\delta J = {q^*}^{\mathrm{T}}\delta s. \tag{14}$$

因此，伴随方程的解可以解释为 J相对于源项 s的梯度

$$\nabla_s J = q^*. \tag{15}$$

文献 [11] 讨论了伴随欧拉方程的初始条件和边界条件，以及伴随可压缩纳维-斯托克斯方程的推导。

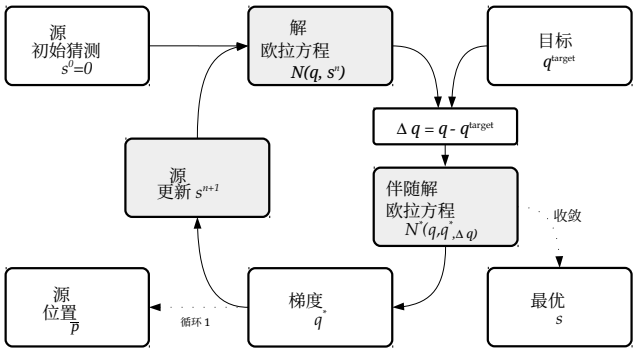

图 1. 确定最优 s 的迭代过程。计算密集型步骤以灰色标出。第一个梯度提供了关于（最优）声源位置的信息，详细讨论见第 5 节。

2.3 迭代过程

伴随梯度以迭代方式使用。首先，通常采用 $s^0 = 0$ 对欧拉方程 (7) 进行时间正向求解。随后，利用直接解和 g 对伴随方程 (12) 进行时间反向求解。根据伴随解确定梯度 $\nabla_s J$，并通过最速梯度法更新声源分布 s^n：

$$s^{n+1} = s^n + \alpha \nabla_s J, \tag{16}$$

其中，α 表示适当的步长，n 表示迭代次数。梯度针对整个计算区域和整个仿真时间计算。对于位置已知的声源，仅在其所在位置计算梯度。使用当前的 s^n 重复该过程，直至达到合适的收敛准则。通常，对于声学问题，经过不超过 20 次循环即可收敛。

该方法并不能确保识别出全局最优解，因为它仅优化至局部极值。该方法的计算成本与源的数量及其排列方式无关，但取决于时空计算域的大小和分辨率，而这些由所考虑的频率范围决定。该计算问题完全可以并行化。

2.4 声源定位

具体而言，当 $s^0 = 0$ 成立时，第一个伴随解包含有关源位置的信息。通过在空间域内对所有已计算时间步的绝对伴随灵敏度 p^* 进行逐点求和

$$\bar{p} = \sum_{t_{n=0}}^{t_{n=\mathrm{end}}} |p^*|, \tag{17}$$

借助 p的极大值，可以确定对目标函数影响最大的那些位置。这些位置对应于最可能的（单极子）源位置。因此，伴随解可以用于定位声源，见第 5 节。随后对源进行迭代调整，可解释为基于伴随的单极子合成。

3 伴随计算气动声学框架

方程组 (7) 通过一个新的、采用消息传递接口并行化的 Fortran 程序实现。离散化采用有限差分时域法 (FDTD)。空间导数采用六阶紧致格式 [10]。相应的线性方程组通过 BLAS例程，使用 LU分解求解。时间积分采用标准的四阶显式 Runge-Kutta 格式。为确保稳定性，使用了紧致滤波器 [5]。边界采用特征边界条件 [18] 处理。消息传递接口实现通过 all2all v 进行集合通信。对于方程组 (7)，该并行化策略被证明是高效的（见图 2），且与其他采用集合通信的实现相当，例如 [17]。

因此，该代码已准备好处理大规模问题，例如声音增强应用中的露天节庆场地，或风洞中车辆气动声学的声源定位。不过，以下展示的示例均使用单台工作站或少数几个集群节点计算。

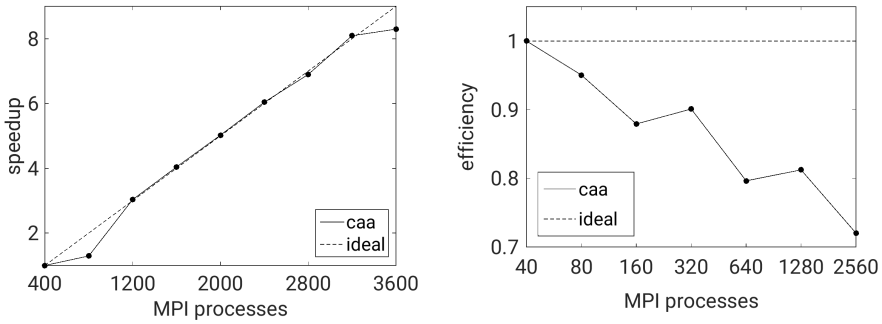

图 2. （左）强扩展特性。增加 MPI进程数量时，网格点总数保持不变。扩展性近乎线性。（右）弱扩展特性。增加 MPI进程数量时，每个进程上的网格点数量保持不变。并行化效率有所下降，但降幅尚可接受。

伴随方程采用相同的离散化方法求解。关于伴随初始条件和特征边界条件的详细讨论，见 [11]。

4 应用 I：声音增强

本节介绍一个关于优化扩声配置的测试案例。总体目标是为给定的扬声器确定最优驱动信号（幅度和相位），以合成所需的声场。扬声器以单极子声源近似，这种方法适用于低频。

所考虑的空间域为 $1.6 \times 1.6 \times 1.6$ m^3。该域由 $197 \times 197 \times 99$ 个等距分布的点进行离散。时间步长由此决定采样率为 48 kHz，对应的 CFL 条件小于 1。所考虑的计算时间跨度为 31.25 ms。密度和压力的参考值对应于 343 m/s 的声速。所有边界均按非反射边界处理。此外，所有边界处均设置了海绵层。

在该测试案例中，预先设定了五个源的参考信号，这些源位于中心 x_1-x_2 平面内，呈弯曲排列。这些信号具有不同的幅度和相位延迟，从而形成定向声场，见图 3（左）。为研究 1-3 kHz 的频带，将相应的对数正弦扫频指定为参考信号。使用此配置，通过复指向性点声源（CDPS）算法 [2] 计算参考声场。所得参考声场作为基于伴随的框架的目标，该框架旨在仅根据参考目标声场识别参考信号（幅度和相位）。

经过伴随框架的 15 次迭代循环后，相对于初始解，目标函数降低至近 3%（ $s = 0$），见图 3（右）。目标参考声场的总体特征得以捕捉，见图 4。图 4 展示了对两个选定麦克风位置处偏差的详细频谱分析，结果表明，在 1.3 至 2.7 kHz 的置信区间内，幅度偏差小于 1 dB。相对于 2π，归一化相位偏差在 -0.07 至 0.07 的范围内。

关于如何根据基于伴随方法的信号 s 推导最优电子驱动信号的讨论见 [21]。其中展示了该方法通过考虑风和温度分层来处理复杂基流的能力。

5 应用 II：声源定位

本节展示固定声源和移动声源的定位。两个通用配置用作概念验证。对于第一种包含四个静止声源的配置，以及第二种包含一个运动声源的配置，结果表明，基于伴随方法的方法能够识别声源，并在声源移动时追踪其路径。

在这两种情况下，测量数据均由预先定义声源的参考计算提供。合成麦克风信号从该参考解中提取。采用由 64 个麦克风组成的空间离散平面阵列。总体配置基于所提供的阵列基准测试案例 B7

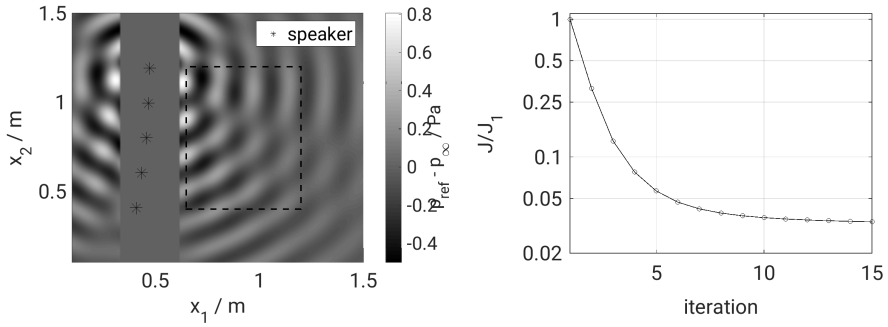

图 3.（左）声音增强配置，其中展示了计算域中心 x_1-x_2 平面上 CDPS 参考声场的一个选定时间步长。弯曲排列的五个单极子扬声器以 **(*)** 标记。扬声器采用不同的驱动函数（幅度和相位），从而产生定向声场。虚线标出的区域/体积对应于目标函数中的空间权重 σ。请注意，用于计算参考声场的 CDPS 技术无法在声源位置附近提供可靠的解；因此，对于 $x_1 = [0.32, 0.62]$ m，p'_{ref} 是不连续的。（右）目标函数的变化趋势，纵轴采用对数刻度。计算已收敛。相较于初始猜测 $s = 0$，目标函数降低了近两个数量级。

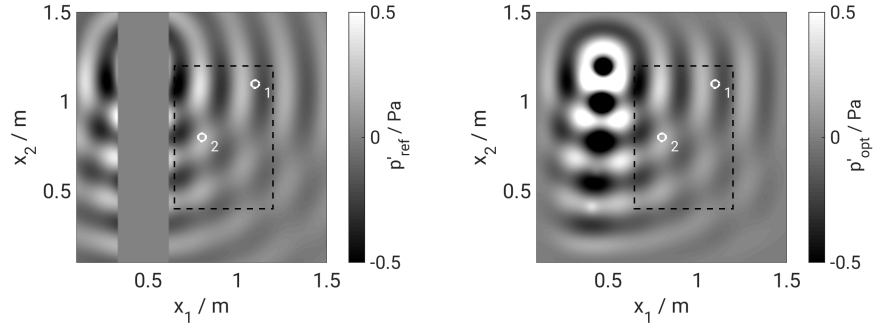

图 4. $t = 15.63$ ms 时中心 x_1-x_2 平面上的参考目标（左）和优化后的声场（右）。参考声场的整体特征得到了（重新）重现。基于伴随方法的声场中可以看到所用海绵层的影响。虚线表示目标函数中的空间权重 σ。标记的位置对应于合成麦克风位置 $x_{1,2} = [1.1, 1.1]$ 和 $x_{1,2} = [0.8, 0.8]$，这些位置用于频谱分析，详情请参阅正文。

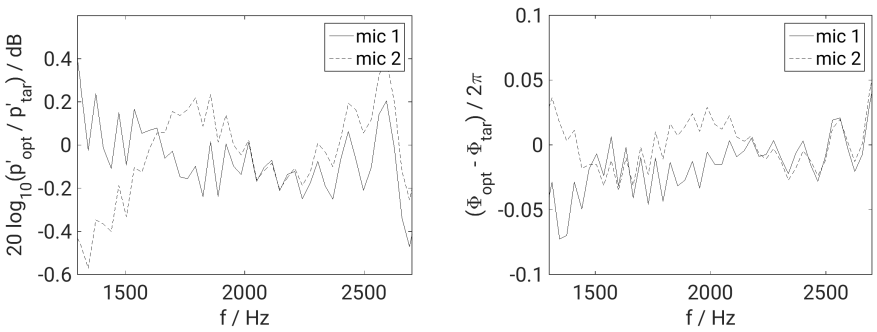

图 5. （左）选定麦克风位置处，优化后声场与参考目标声场之间的归一化幅度差，见图 4。（右）选定麦克风位置处，优化后声场与参考目标声场之间的归一化相位差。

由勃兰登堡工业大学提供，见 [6]。下文将讨论相关修改。 [11]展示了一个使用实验数据的示例。

所考虑的空间域为 $1.7 \times 1.7 \times 1.25\,\mathrm{m}^3$。该区域由 $240 \times 240 \times 176$ 个等距分布的点进行离散。时间步长以及由此确定的麦克风测量采样率为 53.33 kHz，对应的 CFL 条件小于 1。两种情况下均未考虑基流。密度和压力的参考值对应的声速为 343 m/s。螺旋状麦克风阵列位于 $x_3 = 0$ m 处，并以相应平面为中心。麦克风的空间分布详见 [6]。所有边界均按非反射边界处理。此外，所有边界处均应用了海绵层。

5.1 四个声源

与阵列基准测试案例 B7 一样，四个单极子声源位于 x_1-x_2 平面上的 $x_3 = 0.75$ m 处，见图 6（左）。在参考计算中，原基准测试的声源信号被互不相干的随机信号取代，频率带限于 750 至 2500 Hz，见图 6（右）。计算时间跨度为 14.06 ms。

使用相应的参考激励 $s = \sum_i s_i$，对 Euler 方程（7）进行仿真。根据仿真结果提取离散的麦克风信号，见图 7（左）；这些信号是所有声源及其相关信号叠加的结果。

64 个信号通过空间权重 σ 编码在目标函数 J (6) 中。为避免伴随方程出现不稳定的离散强迫项，对每个麦克风位置， σ 选用半宽为 $2\Delta x$ 的 Gauss 分布。在采用 $s = 0$ 的初始猜测（此处为所有时间步长内恒定的环境条件）确定正向方程的解后，

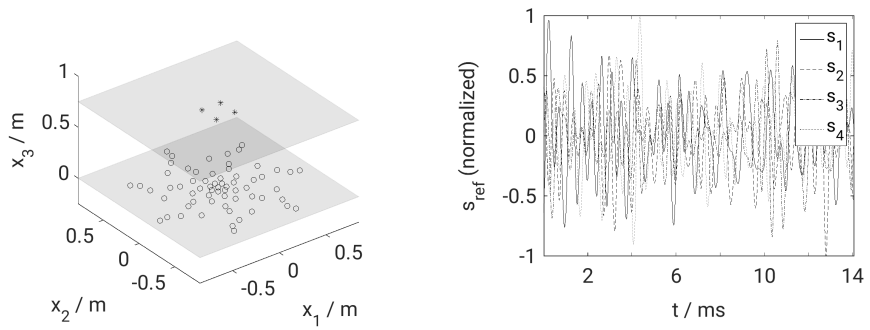

图 6.（左）用于对四个声源 **(*)** 进行声源定位的声学设置：64 个麦克风 **(o)** 分别位于 $x_3 = 0.75$ m 和 $x_3 = 0$ m 的平面上。（右）四个参考声源在整个计算时间内的归一化信号 s_i。

伴随方程将按时间逆序求解。根据得到的梯度，可以像前面讨论的那样推导出声源位置。由此确定了参考声源位置，见图 7（右）。

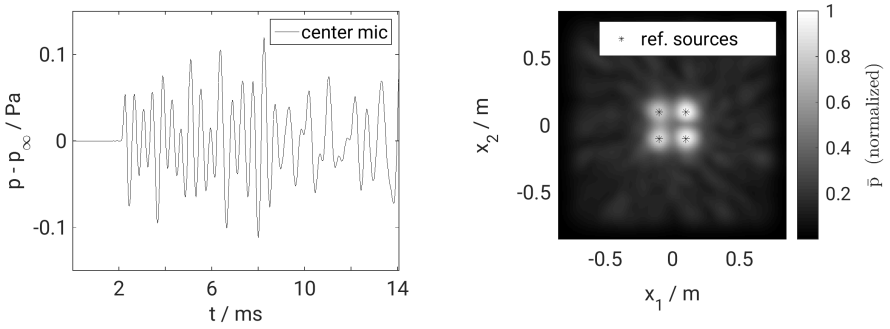

图 7.（左）阵列中心麦克风采集到的压力信号。初始的静音是由声源与阵列之间的距离造成的。（右）伴随灵敏度绝对值 p^* 的逐点求和结果 **(17)**。参考声源位置（$*$）已恢复。

请注意，此分析仅基于第一个伴随梯度。在 16 核工作站上完成分析所需的计算时间不到 15 分钟。对 s 进行迭代优化可能会改善结果。

5.2 单个移动声源

再次使用 [6] 中前述的测试案例 B7 作为以下测试配置的基础。平面麦克风阵列位于相同的平面（$x_3 = 0$）中，但

按 0.8 的比例缩小，因此麦克风之间的距离更短。非相干声源被一个单一声源取代，该声源使用 2 kHz 谐波参考信号。声源在 x_1-x_2 平面内移动，见图 8（左）。其运动沿 x_1 轴进行，包含加速和减速阶段。运动从计算时间开始时启动，并在 8.44 ms 后随仿真结束。运动速度在中途达到最高。

再次，参考解提供合成麦克风信号，并将其编码在目标函数中。将环境条件设为正向方程的解 ($s^0 = 0$) 后，求解伴随方程。评估参考声源位置处随时间变化的伴随灵敏度 p^*，即可获得参考信号的信息，见图 8（右）。参考信号的相位吻合得非常好。仿真开始和结束时的幅度则存在偏差。据推测，这与所用麦克风阵列的指向特性有关。

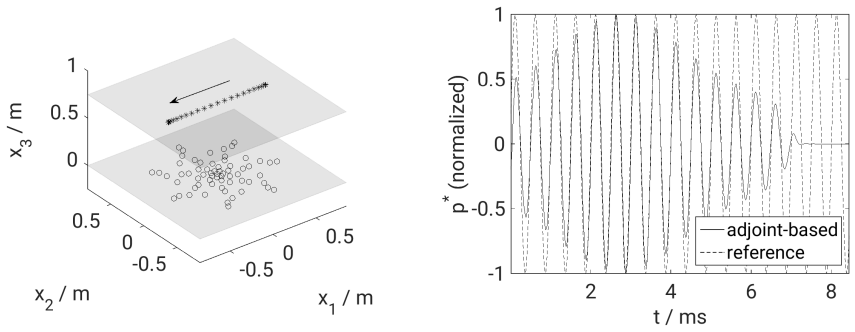

图 8. （左）采用 64 个麦克风（o）对单个运动声源（*）进行声源定位的声学设置；麦克风分别位于 $x_3 = 0.75$ m 和 $x_3 = 0$ m 的平面上。通过声源的航点显示其运动轨迹，航点按固定时间间隔选取。（右）参考声源位置处随时间变化的归一化伴随灵敏度 p^*，与参考激励进行比较。详细讨论见正文。

此外，除了识别声源信号，还可以追踪其位置。图 9 显示了不同时间步下平面 $x_3 = 0.75$ m 上的伴随灵敏度 p^*。出现的极大值对应实际声源位置及其信号。

同样，该分析仅基于第一个伴随梯度。分析所需的计算时间不到 10 分钟，使用 8 个集群节点，每个节点有 8 个核心。

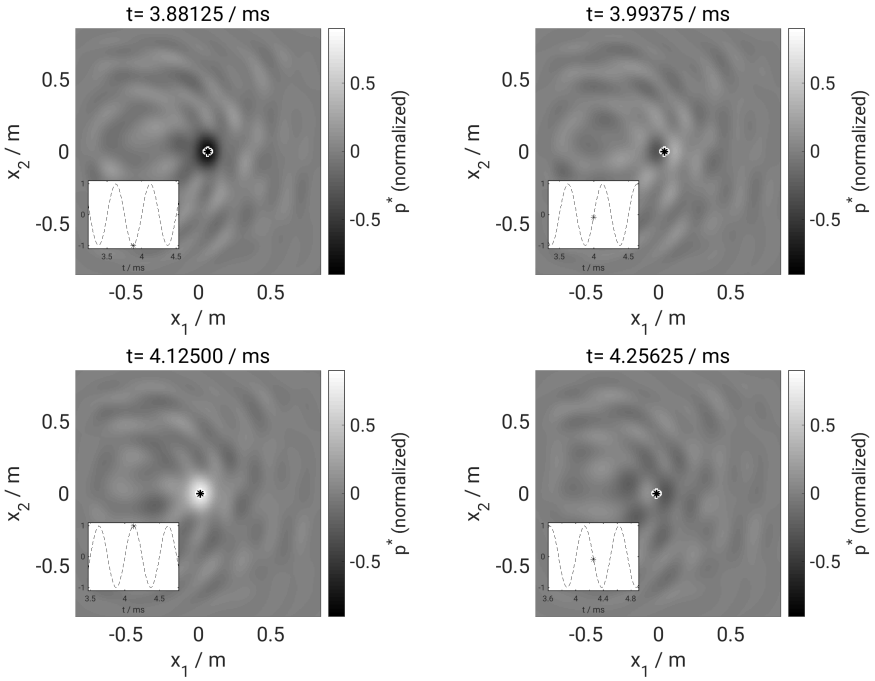

图 9。 不同时间步下平面 $x_3 = 0.75$ 处的归一化伴随灵敏度 p^* 。参考源位置以白色圆圈中的 **(*)** 标出。插图中显示了归一化参考信号。

6 总结

本文提出了一种基于伴随的声源识别框架。研究表明，该方法能够确定（最优）声源信号，并跟踪移动声源。

该时域方法的设计使其能够考虑基流（例如速度剖面和温度分层）以及复杂几何形状，这将是后续工作的重点。[21]展示了在声音增强领域考虑复杂基流的初步结果。

致谢

作者衷心感谢德国研究联合会（DFG）通过项目 LE 3888/2-1 提供的资金支持。

我们感谢 Florian Straube（柏林工业大学音频通信组）为声音增强测试案例定义目标声场。

参考文献

1. A. Carnarius, F. Thiele, E. ¨Ozkaya, A. Nemili 和 N. Gauger。采用离散和连续伴随方法对非定常流进行最优控制。载于 D. H¨omberg 和 F. Tr¨ *System Modeling and Optimization* 391 *IFIP* oltzsch 编，，《》 *Advances in Information and Communication Technology* 318 327 卷，页码 – 施普林格·柏林·海德堡，2013。 2. S. Feistel。《 *Modeling the radiation of modern sound reinforcement systems in high resolution* 19 2014 》，第 卷。Logos Verlag Berlin GmbH，。 3. S. Feistel、M. Sempf、K. K¨ohler 和 H. Schmalle。通过对 FIR 滤波器进行数值优化，使扬声器阵列辐射适应场馆环境。载于 *Proc. of the 135th Audio Eng. Soc. Conv. New York* 8937, 2013 ，，第 # 期。 4. J. B. Freund。基于伴随方法的优化：理解并抑制喷流噪声。《 *Journal of Sound and Vibration*》，330(17):4114 – 4122，2011。 5. D. V. Gaitonde 和 M. R. Visbal。用于 Navier–Stokes 方程的帕德型高阶边界滤波器。《 *AIAA Journal*》，38:2103–2112，2000年11月。 6. T. Geyer。https://www.b-tu.de/fg-akustik/lehre/aktuelles/arraybenchmark。最后访问于2019年12月12日。 7. M. Giles 和 N. Pierce。设计中伴随方法简介。《 *Flow, Turbulence and Combustion* 65 393 415, 2000 》，：–。 8. J. Gray、M. Lemke、J. Reiss、C. Paschereit、J. Sesterhenn 和 J. Moeck。用于爆轰起始的紧凑型激波聚焦几何结构：实验与基于伴随方法的变分数据同化。《 *Combustion and Flame*》，183:144 – 156，2017。 9. A. Jameson。利用计算流体力学和控制理论进行最优空气动力学设计。《 *AIAA paper* 1729 124 131, 1995 》，：–。 10. S. K. Lele。具有类谱分辨率的紧致有限差分格式。《 *Journal of Computational Physics* 103 1 16 42, 1992 》，( ): –。 11. M. Lemke。《 *Adjoint based data assimilation in compressible flows with application to pressure determination from PIV data* ¨ 》。博士论文，柏林工业大学，2015。

12. M. Lemke、L. Cai、J. Reiss、H. Pitsch 和 J. Sesterhenn。基于伴随方法的复杂燃烧模型关注量灵敏度分析。《 *Combustion Theory and Modelling* 23 1 180 196, 2019 》，( ): –。

13. M. Lemke、J. Reiss 和 J. Sesterhenn。反应性可压缩流的伴随优化。《 *Combustion and Flame*》，161(10):2552 – 2564，2014。 14. M. Lemke 和 J. Sesterhenn。利用粒子图像测速数据确定可压缩流中的压力——基于合成数据的验证与评估。《 *European Journal of Mechanics - B/Fluids*》，58:29 – 38，2016。 15. M. Lemke、F. Straube、F. Schultz、J. Sesterhenn 和 S. Weinzierl。基于伴随方法的时域声音增强。载于 *Audio Engineering Society Conference: 2017 AES International Conference on Sound Reinforcement – Open Air Venues* ，2017年8月。

另见 Ramsey, F. (2017): 《户外声音增强》。载于: 《音频工程学会杂志》，第65卷，第12期，第1051–1055页（12月）。 16. R. Merino-Mart´ınez、P. Sijtsma、M. Snellen、T. Ahlefeldt、J. Antoni、C. J. Bahr、D. Blacodon、D. Ernst、A. Finez、S. Funke、T. F. Geyer、S. Haxter、G. Herold、X. Huang、W. M. Humphreys、Q. Lecl`ere、A. Malgoezar、U. Michel、T. Padois、A. Pereira、C. Picard、E. Sarradj、H. Siller、D. G. Simons 和 C. Spehr。采用相控麦克风阵列的声学成像方法综述。《 *CEAS Aeronautical Journal* 10 1 197 230, 2019 》，( ): –，3月。 17. D. Pekurovsky。P3dfft: 用于三维傅里叶变换并行计算的框架。《 *SIAM Journal on Scientific Computing* 34 4 192 209, 》，( ):C –C。2012

18. T. Poinsot 和 S. Lele。用于可压缩黏性流直接数值模拟的边界条件。《 *Journal Computational Physics*》，101:104–129，1992。 19. J. Reiss、M. Lemke 和 J. Sesterhenn。基于模态的伴随方程推导——懒人方法。发表于 arXiv，2018。 20. J. Schulze、P. Schmid 和 J. Sesterhenn。基于频率空间目标泛函的迭代优化及其在喷流噪声消除中的应用。《*Journal of Computational Physics*》，230(15):6075 – 6098，2011。 21. L. Stein、F. Straube、J. Sesterhenn、S. Weinzierl 和 M. Lemke。包含非均匀流的声音增强伴随优化。《 *The Journal of the Acoustical Society of America* 146 3 1774 1785, 2019 》，( ): –。

22. A. Thompson 和 J. Luzarraga。直线与曲线扬声器阵列的驱动粒度。《 *Proc. of the Inst. of Acoustics*》，35(2):210–218，2013。 23. Y. Yang、C. Robinson、D. Heitz 和 E. M´emin。用于数据同化的增强型集合 4D-Var 方案。《 *Computers & Fluids*》，115:201 – 210，2015。

A 附录

A.1 伴随方程

如上所述，对所有状态变量应用 $q = q_0 + \delta q$ 对控制 Euler 方程进行线性化，得到

$$\partial_t A\delta q + \partial_{x_i} B^i \delta q + C^i \partial_{x_i} \delta q + \delta C^i \partial_{x_i} c = \delta s. \tag{18}$$

再次，适用求和约定。相应的线性化矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix}, \qquad B^1 = \begin{bmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u_1^2 & 2\rho u_1 & 0 & 0 & 1 \\ u_1 u_2 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ u_1 u_3 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma p}{\gamma-1} & 0 & 0 & \frac{\gamma u_1}{\gamma-1} \end{bmatrix},$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} u_2 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ u_1 u_2 & \rho u_2 & \rho u_1 & 0 & 0 \\ u_2^2 & 0 & 2\rho u_2 & 0 & 1 \\ u_2 u_3 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma p}{\gamma-1} & 0 & \frac{\gamma u_2}{\gamma-1} \end{bmatrix}, \qquad B^3 = \begin{bmatrix} u_3 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ u_1 u_3 & \rho u_3 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ u_2 u_3 & 0 & \rho u_3 & \rho u_2 & 0 \\ u_3^2 & 0 & 0 & 2\rho u_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma p}{\gamma-1} & \frac{\gamma u_3}{\gamma-1} \end{bmatrix},$$

$$C^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u_i \end{bmatrix}, \quad \delta C^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta u_i \end{bmatrix}.$$

完整的伴随 Navier-Stokes 方程，尤其是摩擦项，已在 [11]中推导并讨论。二维伴随 Euler 方程可见于 [15]。

状态：审阅草稿，最后修改时间：2023年1月23日，修改者：（ML）