arXiv:2301.08639v1 [math.AC] 20 Jan 2023

Krasner 超域赋值理论札记

Alessandro Linzi

摘要。本文旨在研究并发展 Krasner 超域的赋值理论。类比于域的经典赋值理论，我们将赋值环的形式体系推广，用以描述超域上赋值的等价性。在证明基本结果并讨论若干例子之后，我们聚焦于 Krasner 于 1957 年最初定义的赋值超域。我们发现，这些超域必须具有特定的加法结构，而这又意味着存在一种 Krasner 式赋值。我们指出，对于给定的赋值超域 (F, v)，由其加法结构诱导的赋值未必与 v 等价。我们将讨论其等价的情形。

1. 引言

1957 年，M. Krasner 在 [24]（该文收录于 Krasner 文集 [4, 第 413–490] 页）首次提出了一套公理，用于刻画通过允许加法运算取多值而推广域的结构（更多详情见 [4, 第 407–490] 页）。他将这些结构称为超域（法语为超域）。

一方面，他从 Marty [35, 36, 37] 的研究中获得灵感；该研究被视为超群理论的起点。事实上，超域的加法部分是一个超群（另见 [48, 38]，其中有更详细的历史概述）。

另一方面，Krasner 对赋值理论（与p-进数有关）很感兴趣，这促使他认识到某些超域的重要性；这些超域与任意赋值域都有典范的关联（参见例4.11）。下面简要回顾经典赋值理论的一些基本概念。

设 K 为一个域，Γ 为一个线性有序阿贝尔群（以加法记）。一个满射

$$v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$$

若对所有 x、$y \in K$都满足以下条件，则称其为上的（*Krull*）赋值：

- $v(x) = \infty$ if and only if $x = 0$,
- $v(xy) = v(x) + v(y)$,
- $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

这里，∞ 是一个符号，使得对所有 $\gamma \in \Gamma$都有 $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty > \gamma$。若域$K$ 上给定了一个赋值 v，则称(K, v)为一个赋值域。通常将 Γ 记作 vK，并称其为(K, v)的值群。如果不会引起混淆，$x \in K$ 的赋值 $v(x)$常记作 vx。

2020《数学》学科分类。主要分类：12J20，20N20；次要分类：13A18。关键词和短语。超域、多域、超环、赋值、有序阿贝尔群、热带超域。作者谨向 H. Stojałowska、P. Touchard、Franz-Viktor 和 Katarzyna Kuhlmann、I. Cristea 以及 Ch. Massouros 致以谢意。他们都以某种方式为本文最终版本的完成作出了贡献。

若(K,v)是一个赋值域，则

$$\mathcal{O}_v := \{x \in K \mid vx \geq 0\}$$

是 K 的一个子环，称为 (K,v) 的赋值环 。它确定了赋值映射 v （在等价意义下），也就是说，差别至多在于与值群的一个保序同构复合。任意赋值环都有唯一的极大理想

$$\mathcal{M}_v := \{x \in K \mid vx > 0\}$$

以及域 d $Kv := \mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$ 称为 (K,v) 的剩余域 。关于更多细节，请参见 [10, 44] 作为广泛的经典赋值理论参考文献。

将赋值的概念推广到超域是很自然的（见定义 3.1），但 Krasner 注意到，吸引他关注的那些结构都配备了一个类似赋值的映射，并满足另外两个性质（见定义 4.7）。若将这些性质作为公理用于赋值域，它们便毫无意义。因此，Krasner 将这些性质纳入了赋值超域（赋值超域）的公理化体系。

Krasner 的动机并非出于模型论。然而，事实证明，他研究的结构在赋值域模型论中发挥着重要作用；具体而言，它们与特征 0 的亨泽尔赋值域的量词消去问题密切相关。在这一背景下，这些对象称为 RV- 结构或首项结构。独立于 Krasner，Flenner 也研究了这些结构，见 [11] （更多详情另见 [3, 27, 33, 34] ）。此外，近期 [32] 中还出现了超域在赋值域模型论中的一项有趣应用。

人们对赋值超域的兴趣也可以由以下观察来解释。传统上，研究实域（即与运算相容的线性有序域）的实代数，与赋值理论密切相关；E. Artin 在解决希尔伯特第十七问题时发展了实代数。在 Marshall 和 Gładki [15, 16] 关于实超域的研究之后，可以预期，发展超域的赋值理论将有助于这一研究方向。将经典结果（如 Baer–Krull定理）推广到多值情形，已取得重要进展（见 [26, 31]）。对这些方面感兴趣的读者也可参阅 [12, 13, 14]。此外，Viro 未发表的工作 [47], 以及 Jun 和 Jell 等人的后续研究 [20, 18], 表明，超域在热带化映射和解析化领域具有应用；传统上，这些主题同样与赋值理论密切相关。

我们相信，发展超域的赋值理论最终将促成其进一步应用于域的经典赋值理论。

从单值运算转向多值运算，或许并不难描述和理解。然而，这种转变带来的后果必须非常谨慎地处理。例如，赋值理论研究者习惯于认为， $v(x-y)$总能在赋值域（K,v）上定义一个度量（实际上是一个超度量，参见第4.1节），但如果加法运算（因而减法运算也）是多值的，这显然（通常）就不再成立了。事实上，在后一种情形下，距离映射可能取决于从集合 $x-y$ 中选取的某个元素，而这种选取通常并非典范的。Krasner的一条公设通过强制要求 $x-y$中的所有元素（ $x \neq y$）具有相同的赋值，克服了这一障碍。不过，人们可能会认为这一要求相当强。事实上，Krasner针对赋值超域提出的公理限制如此严格，以至于例如，超域 F 上的平凡赋值（例3.2）只有在 F 实际上是一个域时才满足这些公理（注4.10）。出于这一点及其他原因（我们将在本文后面讨论），考虑不满足Krasner所施加的这两项附加性质的超域上的赋值（参见例 4.17）也是有意义的，而且事实证明，

这种选择带来的益处大于弊端。因此，本文中“赋值超域”一词将采用比原始含义更广的定义；此外满足Krasner 公理的赋值超域将称为“Krasner赋值超域”，其赋值则称为“Krasner 赋值”。

本文的结构安排如下。第 2 节介绍超复合代数中的必要概念和术语，并借此讨论若干例子。第 3 节表明，用赋值环描述赋值至等价这一形式体系，无需重大修改便可推广到多值框架。第 4 节中，我们运用这一形式体系陈述并证明主要结果之一——关于 Krasner 赋值超域的定理 4.22。

我们的主要定理指出，超域 F 上存在 Krasner赋值 F，意味着其加法结构满足某些额外公理（参见命题 4.20）。反过来，如果超域 F 的加法结构满足这些公理，那么 F 就存在 Krasner赋值（参见命题 4.21）。设 v 是超域 F 上的 Krasner赋值。那么， F 的加法结构会在 F 上诱导出一个 Krasner 赋值 w。我们注意到，一般而言， w 与 v 并不等价（例 4.25 ）。第 5 节将赋值的粗化这一概念纳入我们的讨论框架，这一概念对于我们的讨论是必要的；随后，我们在第 6 节描述了 v 与w 等价的情形。本文最后的第 7 节提出了若干可能的后续研究方向。

除了介绍一些新结果外，本文也旨在为超环与超域理论的基础知识及相关术语提供一份统一的参考资料。一方面，这些超复合结构近年来日益受到数学界的关注（包括 A. Connes 等顶尖数学家 [7, 8]）。另一方面，我们发现关于超环和超域的相关文献相当零散。博士研究期间投入了大量时间和精力，加之与一些参与超复合代数早期发展的数学家建立了富有成果的联系，我们认为也可以从这一角度作出贡献。

2. 预备知识

设 H 为非空集合， $\mathcal{P}(H)$ 为其幂集。多值运算 $+$ 是 H 上的一个函数，它将每一对 $(x,y) \in H \times H$ 对应到 $\mathcal{P}(H)$ 中的一个元素，记作 $x+y$。若 $+$ 是 $H \neq \emptyset$ 上的多值运算，则对于 $x \in H$ 和 $A, B \subseteq H$，我们定义

$$A + B := \bigcup_{a \in A, b \in B} a + b,$$

$A + x := A + \{x\}$ 和 $x + A := \{x\} + A$。如果 A 或 B 为空，那么 $A + B$也为空。

超群是一个非空集合 H，配备多值运算 $+$，该运算满足结合律（见下文定义2.3 (CH1)），且在 H上可再生（即，对于所有$x \in H$， $x + H = H + x = H$）。这一概念最早由 F. Marty 在 [35, 36, 37] 中提出。 [38], 介绍了超群理论及其详尽的历史概述，并提供了丰富的参考文献。

定义2.1. 超运算 $+$ 是 H 上的多值运算，满足对于所有x， $y \in H$，均有 $x + y \neq \emptyset$。

引理 *2.2* （ [38] 中的定理*12*）。如果 *(H, +)* 是一个超群，那么 $+$ 是 H 上的超运算。

*P*顶。 为导出矛盾，假设对于某个 $x, y \in H$，有 $x + y = \emptyset$。那么

$$H = x + H = x + (y + H) = (x + y) + H = \emptyset + H = \emptyset,$$

这不可能。 □

Th以下特殊的一类超群（参见下文注释2.4）将引起我们的兴趣 s.

定义2.3。 一个典范超群是一个三元组（$H,+,0$），其中 $H\neq\emptyset$, $+$是 H 上的多值运算，且0是 H 中的一个元素，并满足以下公理:

（CH1） $+$是结合的，即对于所有 $x,y,z\in H$，有（$x+y$）$+z=x+$（$y+z$）；（CH2）对于所有 $x,y\in H$， $x+y=y+x$；（CH3）对于每个 $x\in H$，存在唯一的 $x'\in H$ 使得 $0\in x+x'$（元素 x' 记作 $-x$）；（CH4） $z\in x+y$蕴含 $y\in z-x:=z+$（$-x$），对于所有 $x,y,z\in H$。

引理 2.4. 设$(H,+,0)$ 是一个典范超群。那么，多值运算 $+$在 H上是可重的。特别地，$(H,+)$ 是一个超群，且 $+$ 是一个超运算。

证明。 固定 $a\in H$。对于所有 $x\in H+a$，存在 $y\in H$ 使得 $x\in y+a\subseteq H$。因此，$H+a\subseteq H$。对于另一个包含关系，注意到对于所有 $x\in H$，我们有

$$x\in x+0\subseteq x+(a-a)=(x-a)+a,$$

因此，存在 $y\in x-a\subseteq H$ 使得 $x\in y+a\subseteq H+a$。我们已证明，对于任意的 $a\in H$，都有 $H=H+a$。现在，利用 (CH2)、超群的定义和引理 2.2，即可得到该引理的结论。□

设 $(H,+,0)$ 是一个典范超群。由于以下观察，称 0 为在中的 中性元。

引理 2.5 （第三节，(b) 见 [39]）。设$(H,\ +,\ 0)$ 是一个典范超群。则对所有 $x\in H,\ x+0=\{x\}$。

证明。取 $x\in H$。若 $y\in x+0$，则由 (CH4) 可得 $0\in y-x$。现在由 (CH3) 中要求的唯一性可得 $y=x$。□

注2.6。注意，阿贝尔群 $(G,*,0)$ 不一定是典范超群，因为 G 上的运算不是多值运算：它的取值属于 G，而非 $\mathcal{P}(G)$。不过，通过对所有 $x,y\in G$ 令 $x+y:=\{x*y\}$，可以将其转化为典范超群 $(G,+,0)$。反过来，若典范超群 $(H,+,0)$ 满足对所有 $x,y\in H,\ x+y$ 都是单元素集，则可在 H 上定义一个标准运算，使其成为恒等元为 0 的阿贝尔群。在这些情况下，我们有时会不严谨地称 $(G,*,0)$ 为典范超群，或称 $(H,+,0)$ 为群。

2.1. **超 环与超域**。 现在我们来定义本文主要关注的结构 .

定义 2.7。 一个（交换）超环是一个元组 $(R,+,\cdot,0)$，满足以下公理:

(HR1) $(R,+,0)$ 是一个典范超群；(HR2) $(R,\cdot)$ 是一个（交换）半群，且 0 是吸收元，即 $0\cdot x=x\cdot 0=0$，对所有 $x\in R$，(HR3) 运算 $\cdot$ 关于 $+$是分配的。也就是说，对所有 $x,y,z\in R$,

$$x(y+z)=xy+xz,$$

其中，对于 $x \in R$ 和 $A \subseteq R$，我们设

$$xA := \{xa \mid a \in A\}.$$

若运算 $\cdot$ 有中性元 $1 \neq 0$，则称 $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 为含幺超环。若 $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 是含幺超环，且 $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ 是阿贝尔群，则称 $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 为超域。若 R 是含幺超环，则用 $R^\times$ 表示 R的可逆元 构成的乘法群，即

$$R^\times := \{x \in R \mid \exists y \in R \ : \ xy = 1\}.$$

特别地，若 R 是超域，则 $R^\times = R \setminus \{0\}$。

由于我们只考虑交换情形，因此在下文各节中，我们将交换超环简称为超环。

注 2.8。 在文献中，“超环”这一名称可用于这样的结构 $(R, +, \cdot)$：其中 $+$是一个运算，而 $\cdot$ 是一个多值运算；或者 $+$ 和 $\cdot$ 都是多值运算。有些作者将只有加法为多值运算的结构 $(R, +, \cdot, 0)$ 称为 Krasner 超环（关于此问题的更多历史评论见 [17, 第 4]节）。

结构 $(R, +, \cdot, 0)$，其中 $+$ 是一个运算，$\cdot$ 是一个多值运算（满足类似的公理），由 [45] 引入，并被称为乘法超环（意大利语为 *iperanelli moltiplica-tivi*）。

结构 $(R, +, \cdot, 0)$，其中 $+$ 和 $\cdot$ 都是多值运算（满足类似的公理），则称为一般超环（例如参见 [9, 第 2] 节）。

本文中，“超环”一词专指 Krasner 超环，如上面的定义所示。

在文献中，还可以见到“多环”一词，用来指代结构 $(R, +, \cdot, 0)$，其中$+$ 是多值运算，$\cdot$ 是运算，并满足 (HR1)、(HR2) 以及 (HR3) 的以下较弱形式：

(MR) $x \cdot (y + z) \subseteq x \cdot y + x \cdot z$，对所有 $x, y, z \in M$ 均成立。

因此，在这种情况下，名称不同反映的是公理上的差异，而非结构上的差异。

类似地，多域被定义为满足 (MR) 而非 (HR3) 的超域。 [12], 中讨论了多环和多域，其中还指出，所有多域都是超域，而有几个有意义的多环例子并非超环。

本文中，我们倾向于只使用“超域”这一名称。

如果超环（分别地，超域） R 的加法典范超群是群，我们就称它为环（分别地，域）（参见注 2.6）。下一个观察给出了含幺超环成为环的一个必要条件。这一事实是 [42, 第 369]页中已有结果的直接推论（另见下文例 2.45）。我们希望陈述这一结果以供后文参考，并借此机会给出一个简短的证明。

引理 2.9 ([42])。 含幺超环 R 是环，当且仅当 $1 - 1 = \{0\}$。

证明。 若 R 是域，则 $1 - 1 = \{0\}$ 显然成立。反之，由公理（HR3） $1 - 1 = \{0\}$可推出，对于所有 $x \in R$， $x - x = \{0\}$ 成立。取 a、 $b \in R$ 以及 x、 $y \in a + b$。我们有

$$x - y \subseteq (a + b) - (a + b) = (a - a) + (b - b) = \{0\}$$

特别地， $0 \in x - y$ 和 $x = y$ 由（CH3）推出。我们已证明，对于所有 $a, b \in R$， $a + b$ 都是单元素集。 □

例 2.10. $\mathbb{K}$-超域 $\mathbb{K}$ 是集合 $\{0,1\}$，其超运算为 $+$，其中 0 是中性元，并且满足 $1+1=\{0,1\}$。乘法是显然的。

注 2.11。一些作者习惯将上述超域称为 Krasner 超域。我们倾向于避免使用这一术语，因为鉴于上文的注 2.8，这可能会造成不必要的混淆。

例 2.12。符号超域 $\mathbb{S}$ 是集合 $\{-1,0,1\}$，其超运算为 $+$，其中 0 是中性元，并且满足 $x+x=\{x\}$，其中 $x\in\{-1,1\}$ 和 $1-1=\{-1,0,1\}$。乘法是显然的。

例 2.13。弱符号超域 $\mathbb{W}$ 是集合 $\{-1,0,1\}$，其超运算为 $+$，其中 0 是中性元，并且满足 $x+x=\{x,-x\}$，其中 $x\in\{-1,1\}$ 和 $1-1=\{-1,0,1\}$。乘法是显然的。

其他有限超域的例子可见 [1] 等文献。现在我们来考察一些无限例子。

例 2.14. 设 $(\Gamma,+,<,0)$ 是一个有序阿贝尔群，∞ 是一个符号，且对所有 $\gamma\in\Gamma$，$\gamma+\infty=\infty+\gamma=\infty>\gamma$。对于满足 $x\le y$（即 $x<y$ 或 $x=y$）的 $x,y\in\Gamma\cup\{\infty\}$，记由所有满足 $x\le z\le y$ 的 $z\in\Gamma\cup\{\infty\}$ 组成的集合为 $[x,y]$。考虑定义在 $\mathcal{T}(\Gamma):=\Gamma\cup\{\infty\}$ 上的超运算 $\boxplus$，其定义为对所有 $x\in\mathcal{T}(\Gamma)$，$x\boxplus\infty=\infty\boxplus x=\{x\}$，并且：

$$x\boxplus y:=\begin{cases}\{\min\{x,y\}\} & \text{if } x\neq y,\\ [x,\infty] & \text{if } x=y.\end{cases}\qquad (x,y\in\mathcal{T}(\Gamma))$$

不难验证，$(\mathcal{T}(\Gamma)\ \boxplus,+,\infty,0)$ 是一个超域。超域 $\mathcal{T}(\mathbb{R},+,0,>)$，其中 $>$ 表示实数的标准序，是热带超域（见[47, 第 5.3] 节）。因此，我们将形如 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 的超域称为广义热带超域。

例 2.15. 设 $(\Gamma,+,<,0)$ 是一个有序阿贝尔群，∞ 是一个符号，满足对所有 $\gamma\in\Gamma$，$\gamma+\infty=\infty+\gamma=\infty>\gamma$。对于满足 $x<y$ 的 $x,y\in\Gamma\cup\{\infty\}$，记 $(x,y]$ 为由所有满足 $x<z\le y$ 的 $z\in\Gamma\cup\{\infty\}$ 构成的集合。考虑定义在 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 上的超运算 $\boxplus'$，其定义为：对于所有 $x\in\mathcal{T}(\Gamma)$，

$$x\boxplus' y:=\begin{cases}\{\min\{x,y\}\} & \text{if } x\neq y,\\ (x,\infty] & \text{if } x=y.\end{cases}\qquad (x,y\in\mathcal{T}(\Gamma))$$

不难验证，$(\mathcal{T}(\Gamma)\ \boxplus',+,\infty,0)$ 是一个超域。我们将其记为 $\mathcal{T}'(\Gamma)$，并称之为严格广义热带超域。

上述例子（在同构意义下）都是一种一般构造的实例，该构造从一个环及其乘法半群的一个子群得到一个超环（见下文命题 2.17）。Krasner 首先在 [25] 中描述了这一构造。下面的例子将简要回顾这一构造。

例 2.16. 设 A 是一个交换环，T 是交换半群 $(A,\cdot)$ 的一个子群。令 A_T 表示 $x\in A$ 的所有乘法陪集 xT 的集合，特别是 $0T=\{0\}$。Krasner 证明，通过设定

$$xT+yT:=\{(x+yt)T\mid t\in T\}$$

and

$$xT\cdot yT:=xyT$$

我们有 $(A_T, +, \cdot, 0T)$ 是一个超环，其中对于所有 $x \in A$，$-(xT) = (-x)T$。此外，如果 A 是一个域，那么这一构造总会得到一个超域。这称为 A 模 T 的因子（或商）超环（分别为超域）。

在下一个命题中，我们采用超域同构的概念（见下文定义2.33）。

命题 2.17. 以下断言成立：

(i) 对于任意含有多于两个元素的域 K，有 $\mathbb{K}$ 与$K_{K^\times}$同构。*(ii)* 对于任意正锥为 P 的有序域 K，有 $\mathbb{S}$与 K_P同构。*(iii)* 若 $p > 3$ 是满足 $p \equiv 3 \bmod 4$ 的素数，则 $\mathbb{W}$ 与 $(\mathbb{F}_p)_{(\mathbb{F}_p^\times)^2}$同构。*(iv)* 设 Γ 为一个有序阿贝尔群。对于任意含有多于两个元素的域 k，令 $K := k((t^\Gamma))$ 表示 *Hahn* 级数域，并令 v 为其典范的 t-进赋值。则 $K_{\mathcal{O}_v^\times}$与 $\mathcal{T}(\Gamma)$同构。*(v)* 设 Γ 为一个有序阿贝尔群。令 $K := \mathbb{F}_2((t^\Gamma))$ 表示 *Hahn* 级数域，并令v 为其典范的 t-进赋值。则 $K_{\mathcal{O}_v^\times}$ 与 $\mathcal{T}'(\Gamma)$同构。

证明。设 K 是一个含有两个以上元素的域。那么 $K_{K^\times}$ 恰好包含两个元素，即陪集 $0K^\times$ 和陪集 $1K^\times$，后者包含 K的所有非零元素。若 $x \in K^\times$，则 $-x \in K^\times$ 也成立，因此 $0K^\times$ 属于 $1K^\times + 1K^\times$。根据假设，存在 x、$y \in K^\times$使得 $x \neq y$，所以 $(x-y)K^\times \neq 0K^\times$ 也是 $1K^\times + 1K^\times$中的元素。这就证明了 (i)。

设 K 是一个正锥为 P的有序域。这里，这意味着 P是 $K^\times$ 的一个子集，且 $P + P$、$P \cdot P \subseteq P$成立，并且 $K^\times$是 P与 $-P$的不交并。由此可知，K_P恰好包含三个[1] 元素：$0P$、$1P$（包含 P的所有元素）以及 $-1P$（包含 $-P$的所有元素）。由于 $P + P \subseteq P$，我们有 $1P + 1P$只包含 $1P$。根据定义，若$x \in P$，则 $-x \in -P$。因此，$1P - 1P$包含 $0P$。它也包含 $1P$和 $-1P$，因为例如$1 + 1 \in P$（因为 $1 \in P$），且 $(1+1) - 1 = 1 \in P$，而 $1 - (1+1) = -1 \in -P$。这就证明了 (ii)。

令 K 为 $\mathbb{F}_p$（含有 p 个元素的有限域），其中 $p > 3$ 为某个满足 $p \equiv 3 \bmod 4$ 的素数。素数 p 显然为奇数，因此（$K^\times$）^{2} 的基数为 $\frac{p-1}{2}$。如果 -1 是 K中的平方，那么 $K^\times$ 含有一个4阶元素，但这与假设$p \equiv 3 \bmod 4$ 矛盾。我们有，$x \in K^\times$ 是平方当且仅当 $-x$ 不是平方。因此，$K_{(K^\times)^2}$ 恰好含有三个元素：0（$K^\times$）^{2}, 1（$K^\times$）^{2}（包含所有非零平方）以及 -1（$K^\times$）^{2}（包含所有非平方）。此外，1（$K^\times$）$^2 - 1$（$K^\times$）^{2} 含有0（$K^\times$）^{2}。这表明，-1（$K^\times$）^{2} 是$K_{(K^\times)^2}$中1（$K^\times$）^{2} 的超逆元。由于 $1 + 1 \neq 0$ 属于 K，且1 = （$1 + 1$）$- 1$，我们有：1（$K^\times$）^{2} 或 -1（$K^\times$）^{2}（取决于 $1 + 1$ 与$-$（$1 + 1$）中哪一个是平方）属于1（$K^\times$）$^2 - 1$（$K^\times$）^{2}。通过对 $-$ 的作用（即乘以 -1（$K^\times$）^{2}）下1（$K^\times$）$^2 - 1$（$K^\times$）^{2} 的对称性，我们得到1（$K^\times$）^{2} 和 -1（$K^\times$）^{2}都必须是1（$K^\times$）$^2 - 1$（$K^\times$）^{2}的元素。在有限域中，任意非平方都是两个（非零）平方之和。因此，-1（$K^\times$）^{2} 是1（$K^\times$）$^2 + 1$（$K^\times$）^{2}的一个元素。为了证明1（$K^\times$）^{2} 也是1（$K^\times$）$^2 + 1$（$K^\times$）^{2} 的元素，我们区分两种情况。如果 $1+1$ 是 K中的平方，那么1（$K^\times$）^{2}显然属于1（$K^\times$）$^2 + 1$（$K^\times$）^{2}。否则，$1 + 1$ 不是平方。在这种情况下，或者 $1 + 1 + 1$ 是平方，此时 $1 =$（$1+1+1$）$-$（$1+1$）表明1（$K^\times$）^{2}是1（$K^\times$）$^2 + 1$（$K^\times$）^{2},的元素；或者 $-(1 + 1 + 1) = -(1 + 1) + 1$）是平方，此时 $-(1 + 1) = -(1 + 1 + 1) + 1$ 意味着1（$K^\times$）^{2} 是1（$K^\times$）$^2 + 1$（$K^\times$）^{2}的元素。这证明了（iii）。

[1]在文 献中，有时将正锥定义为“非负锥”，即包含 0。请注意，为了使 r 我们的陈述 成立，必须将 0 排除在正锥之外。

令 k 为一个含有多于2个元素的域，并考虑赋予 t-进赋值 v的 Hahn 级数域 $K = k((t^\Gamma))$。x 的一个非零元素 $K^\times$ 表示为形式级数

$$x = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma$$

具有良序支撑，即，$\{\gamma \in \Gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$ 是关于Γ的序的良序集。x在 v 下的 t-进赋值定义为 x 的支撑的最小值（参见 [10, 练习 3.5.6]）。

v 的值群因此是 Γ，由一般赋值理论可知，作为有序阿贝尔群，$K^\times/\mathcal{O}_v^\times$ 与 Γ 同构（参见 [10, 第 2.1] 节或下文引理 3.20）。对于$x \in K^\times$，我们有，$x\mathcal{O}_v^\times$ 包含 K 中在 v下具有相同 x 值的所有元素。如果x、$y \in K$ 满足 $vx \neq vy$（即 $x\mathcal{O}_v^\times \neq y\mathcal{O}_v^\times$），那么

$$v(x + yt) = v(x + y) = \min\{vx, vy\}$$

对于任意 $t \in \mathcal{O}_v^\times$（即任意满足 $vt = 0$的 t）。这由 [10, 第 1.3 节（1.3.4）] 推出（或参见下文推论 3.5（iv））。现在注意，若 $x \in K$在 v下具有任何正值，则 $v(x-1) = 0$，因而$vx = v(1 + (x-1))$是 K 中某个元素的值，该元素生成$K_{\mathcal{O}_v^\times}$中的一个陪集，而此陪集属于$1\mathcal{O}_v^\times + 1\mathcal{O}_v^\times$。此外，根据关于 k的基数的假设，存在 $a \in k\setminus\{1\}$，因此根据 t-进赋值的定义，我们有 $va = 0$ 且 $v(1-a) = 0$。由于 $v(1) = v(-1) = 0$，我们得出 $1\mathcal{O}_v^\times - a\mathcal{O}_v^\times = 1\mathcal{O}_v^\times + 1\mathcal{O}_v^\times$在 v 下的像为 $[0,\infty]$。由分配律，这足以证明 $\mathcal{T}(\Gamma) \simeq K_{\mathcal{O}_v^\times}$（另见下文引理 3.3）。至此，$(iv)$的证明也完成了。

证明（iv）的方法可以很容易地调整，用来证明（v）。 □

注记2.18。此处提请注意，并非所有超域都是因子超域。这一事实由 Massouros 在 [39] 中证明，随后他又在 [40] 中进一步改进了结果。根据 [21, 定理 6]，满足 $1 \notin 1+1$ 且 0 不属于任何由有限个 1 相加所得的和的有限超域，也不是商超域。

2.2. **超环子环**。如何选择一个恰当的子超环概念，并不像看起来那么直接。下一个定义将介绍两种选择。

定义2.19。设$(R, +, \cdot, 0)$是一个超环。若子集 S 属于 R，并且在乘法下封闭，且采用诱导的多值运算：则称其为 R 的关系子超环。

$$x +_S y := (x + y) \cap S \quad (x, y \in S)$$

我们有$(S, +_S, \cdot, 0)$也是一个超环。

S 是 R 的一个（传统）子超环，如果 $0 \in S$，并且对所有的 x、$y \in S$，都有$x - y \subseteq S$和 $xy \in S$。

如果 R 是一个幺元为 1 的超环，那么当 $1 \in S$且（S、$+_S$、$\cdot$、0、1）是一个超域时，我们称 S 是 R 的一个关系子超域。此外，如果 $1 \in S$且（$S\setminus\{0\}$、$\cdot$、1）是一个阿贝尔群，则称 S是 R的一个（传统）子超域。

注记 2.20。选择“关系”这一形容词，原因如下。多值运算可以通过三元关系 $z \in x + y$ 编码到一阶语言中（例如，[32] 中就提到了这一点）。如果我们考虑一种一阶语言 $\mathcal{L}$，其中包含一个表示 0 的常元符号、一个表示 $\cdot$ 的二元函数符号，以及一个表示 $+$的三元关系符号，那么超环自然就成为 $\mathcal{L}$ 上的一个结构，它是定义 2.7 和 2.3 中所有公理（以 $\mathcal{L}$ 中的句子形式写出）的模型。在这种解释下，超环 R 的关系子超环恰好是 R 的子模型，

也就是说，是满足这些公理的 R 的子结构（见 [43, 第 2.3] 节）。关于模型论观点的更多细节，请参阅 [33]。

我们对术语的选择也受到历史原因的影响。事实上，超群子群（因而也包括子超域）早在很久以前就已被定义（例如参见 [22][2] 中的定义 2 及其后续评注）。

评注 2.21。 显然，超环 $(R,+,\cdot,0)$ 的子超环 S 是 R 的关系子超环，并且在这种情况下 $+_S = +$。另一方面，并非所有关系子超环都是子超环，以下例子说明了这一点。

例 2.22。 设 $(\Gamma,+,0,<)$ 是一个有序阿贝尔群。令 $R := \mathcal{T}(\Gamma)$ 为按例 2.14 构造的超域，并考虑 R 的子集 $S := \{\infty, 0\}$。不难验证， S 是 R 的关系子超域。然而， S 不是 R 的子超域，因为 $0 \boxplus 0 = [0,\infty]$ 不是 S 的子集。

注记 2.23。 设 Γ 是一个有序阿贝尔群。不难看出， $\mathcal{T}(\Gamma)$ 的唯一子超域就是 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 本身。另一方面，若 Δ 是 Γ 的子群，则 $\mathcal{T}(\Delta)$ 是 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 的关系子超域（上面的例 2.22 对应于 $\Delta = \{0\}$ 的情形）。

2.3. **同态**。 接下来，我们来考察超环和超域的同态概念。

定义 2.24。 设 $(R,+^R,\cdot^R,0_R)$ 和 $(S,+^S,\cdot^S,0_S)$ 是超环。若映射 $\sigma : R \to S$ 满足以下条件，我们称其为超环同态：
(HH1) $\sigma(0_R) = 0_S$, (HH2) $\sigma(x \cdot^R y) = \sigma(x) \cdot^S \sigma(y)$，对所有 $x, y \in R$ 均成立；(HH3) $\sigma(x +^R y) \subseteq \sigma(x) +^S \sigma(y)$，对所有 $x, y \in R$ 均成立。
若 $(R,+^R,\cdot^R,0_R,1_R)$ 和 $(S,+^S,\cdot^S,0_S,1_S)$ 是超域，则称超环同态 $\sigma : R \to S$ 为超域同态，当它满足以下性质
(HH4) $\sigma(1_R) = 1_S$, (HH5) $\sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}$，对所有 $x \in R \setminus \{0\}$，也成立。

例 2.25. 设 R 是一个超环。由 $\sigma(0) := 0$ 和 $\sigma(x) := 1$（其中 $x \in R \setminus \{0\}$）定义的映射是超环同态 $R \to \mathbb{K}$。

例 2.26. 设 $(\Gamma,<,+,0_\Gamma)$ 是一个有序阿贝尔群。映射

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{K} &\to \mathcal{T}(\Gamma) \\ 0_{\mathbb{K}} &\mapsto \infty \\ 1_{\mathbb{K}} &\mapsto 0_\Gamma \end{aligned}$$

是一个超域同态。

例 2.27。 设 K 是一个域， T 是 $K^\times$的一个子群。将 $x \in K$映射到 $[x]_T \in K_T$ 的函数 $K \to K_T$ 是一个超域同态。

注 2.28。 设 $\sigma : R \to S$ 是一个超环同态。那么， σ的核

$$\ker \sigma := \{x \in R \mid \sigma(x) = 0_S\}$$

[2]本文收录于Krasner的文集 [4, 第280–406]页

是 R的子超环。事实上，对于 $x, y \in \ker\sigma$，我们有

$$\sigma(x-y) \subseteq \sigma(x) - \sigma(y) = 0_S - 0_S = \{0_S\}.$$

因此，对于所有 $z \in x-y$，$\sigma(z) = 0_S$，即 $x-y \subseteq \ker\sigma$。

注记 2.29. 设 $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个超环，且 $S \subseteq R$。考虑包含映射 $\iota\colon S \hookrightarrow R$。容易验证，若 S 是 R 的关系子超环，则 ι 是超环同态。

另一方面，如果 $(R, +^R, \cdot^R, 0_R)$ 和 $(S, +^S, \cdot^S, 0_S)$ 是具有 $S \subseteq R$ 的超环，且包含关系 $\iota\colon S \hookrightarrow R$ 是超环同态，那么不能据此得出 S 是 R 的关系子超环，以下例子说明了这一点。

例 2.30. 恒等映射 $\mathbb{S} \to \mathbb{W}$ 是超环同态。然而，$\mathbb{S}$ 不是 $\mathbb{W}$ 的子超环，因为在 $\mathbb{S}$ 中，1 与自身的超和是 $\{1\}$，而在 $\mathbb{W}$ 中，1 与自身的超和与 $\mathbb{S}$ 的交集是 $\{-1, 1\}$。

上述例子引出了以下定义。

定义2.31。设 $(R, +^R, \cdot^R, 0_R)$ 和 $(S, +^S, \cdot^S, 0_S)$ 是超环（分别是单位元为 1_R 和 1_S 的超域）。超环（分别是超域）的单射同态 $\sigma\colon R \to S$ 称为超环嵌入（分别是超域嵌入），如果

(EM1) $\sigma(x +^R y) = (\sigma(x) +^S \sigma(y)) \cap \operatorname{Im}\sigma$, for all $x, y \in R$.

以下引理的直接证明留给读者。

引理2.32。若 S 是超环 R 的关系子超环，则包含映射 $S \hookrightarrow R$ 是超环嵌入。反之，若 R 和 S 是超环，且 $S \subseteq R$，并且包含映射 $S \hookrightarrow R$ 是超环嵌入，则 S 是 R 的关系子超环。

定义2.33。超环（分别是超域）的同态 $\sigma\colon R \to S$ 称为超环同构（分别是超域同构），如果它是双射，且 $\sigma^{-1}\colon S \to R$ 也是超环（分别是超域）的同态。若两个超环（分别是超域）R 和 S 同构，则称它们同构，并记作 $R \simeq S$；这意味着存在一个同构 $\sigma\colon R \to S$。

引理 2.34。设 R 和 S 是超环（分别为超域），分别用 $+^R$ 和 $+^S$ 表示它们的超运算。映射 $\sigma\colon R \to S$ 是超环（分别为超域）同构，当且仅当 σ 是超环（分别为超域）的满射嵌入。

证明。若 σ 是同构，则根据定义它是双射的，特别是 $\operatorname{Im}\sigma = S$。由于 σ 是同态，我们有 $\sigma(x +^R y) \subseteq \sigma(x) +^S \sigma(y)$ 成立。另一方面，由于 σ^{-1}也满足 (HH3)，我们得到

$$\sigma^{-1}(\sigma(x) +^S \sigma(y)) \subseteq x +^R y.$$

将 σ 应用于两边，得到 $\sigma(x +^R y) \supseteq \sigma(x) +^S \sigma(y)$。

现在假设 σ 是满射嵌入，并证明 σ^{-1} 是同态。显然，(HH1) 和 (HH2) 对 σ^{-1}成立。由于根据 (EM1) 和满射性，我们有$\sigma(x +^R y) = \sigma(x) +^S \sigma(y)$，将 σ^{-1} 应用于两边，并再次利用 σ 的满射性，即可推出性质 (HH3)。□

注记 2.35。注意，双射同态不一定是同构，这一点可由例 2.30 推知。

例 2.36。 设 $(\Gamma, <, +, 0_\Gamma)$ 是一个有序阿贝尔群。考虑例 2.22 中的 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 的关系子超-域 $S := \{\infty, 0\}$。则 $(S, +_S, \cdot, \infty, 0_\Gamma)$ 与 $\mathbb{K}$ 同构。

通常，我们将同构的结构视为相同：例 2.22 和例 2.36 可以表述为，对于任意有序阿贝尔群 Γ，$\mathbb{K}$ 是 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 的子超域。

2.4. **超理想**。 现在我们简要讨论经典环论中的理想概念如何推广到多值情形。

定义 2.37 （ [5] 中的定义2.1和 [31]中的定义2.9）。 设 R 是一个超环。若 I 满足以下条件，则称其为 R 的超理想 R：
（HID1） $xy \in I$，对所有 $x \in R$ 和 $y \in I$ 均成立。

引理 2.38。 设 R 是一个没有零因子的超环，即 $xy = 0_R$ 蕴含 $x = 0_R$ 或 $y = 0_R$。满足（*HID1*）的 R 的关系子超环 I 是 R 的超理想。

证明。 取 $x, y \in I$ 并令 $z \in x - y$。只需证明 $z \in I$。若 $x = 0_R$ 或 $y = 0_R$，则无需证明。否则，由 R 中的分配律可得 $zy \in xy - y^2$，再由 (HID1) 得到 $zy \in I$，因为 $y \in I$。因此， $zy \in (xy - y^2) \cap I$。现在， I中的分配律（关于诱导的多值运算 $+_I$）给出 $zy \in \big((x - y) \cap I\big)y$，因此存在$z' \in (x - y) \cap I$使得 $zy = z'y$。于是， $0_R \in zy - z'y = (z - z')y$。由于 R没有零因子，这意味着 $0_R \in z - z'$，从而 $z = z' \in I$。□

注 2.39。 我们希望说明为何要求超理想必须是传统子超环。在 [19, 第 3.1], 节中，Jun 将经典的环模理想商构造推广到了多值情形。一个显然值得保留的性质是：从超环 R 到模超理想I 的商超环 R/I 的典范满同态，应当是一个超环同态 $R \to R/I$，且其核为 I。我们没有找到满足 (HID1) 的关系子超环的例子，但与此同时，我们也未能在不对零因子作出假设的情况下证明引理 2.38。如果存在这样的例子，那么根据注 2.28，该关系子超环就不可能是超环同态的核，因此我们不应称其为超理想。

注 2.40。 设 $\sigma\colon R \to S$ 是一个超环同态。那么容易证明 $\ker\sigma$是 R的超理想。反过来，对于超环 R 的任意超理想 I，映射 $\sigma\colon R \to \mathbb{K}$ 定义如下

$$\sigma(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in I, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

是一个超环同态，使得 $\ker\sigma = I$。

如下结论可以像经典环论中那样证明成立。

引理 2.41 (引理 2.12，见 [31])。 若超环 R 的超理想 I 包含一个单位元，则 $I = R$。

推论 **推论 2.42** (推论 2.13，见 [31])。 超域 F 的唯一超理想是 $\{0\}$ 和 F .

定义2.43 (定义2.14*(ii)* 见 [31])。 设 I 是超环 R的一个超理想。若 $I \subsetneq R$ 且对于 R 的所有超理想 J，$I \subsetneq J$ 意味着 $J = R$，则称 I 为极大。

我们回顾以下结果，但不加以证明。

命题 2.44 (命题 2.16(ii) 于 [31])。 假设 R 是一个含幺超环。设 I是一个超理想 R。那么， I 是极大的，当且仅当 R/I 是一个超域。

例 2.45 ([42])。设 R 是一个含幺超环。R 中的元素 s 称为标量，如果对于所有 $x \in R$，$x+s$ 都是单元素集。与引理 2.9 的证明一样，不难证明，$s \in R$ 是标量，当且仅当 $s-s=\{0\}$。有趣的是，R 的所有标量元素构成了 R的一个超理想。

现在假设 R 是一个含幺超环。如果 1 是一个标量，那么根据引理 2.41，标量构成的超理想为 R，因此 R 是一个环（因为其中所有元素都是标量）。此外，由推论 2.42 可知，如果 F 是一个超域但不是域，那么 F的唯一标量是 0，即对于所有 $x \in F^\times$，$x-x$ 都不是单元素集。

3. 赋值超域

本节所呈现的一些结果可见于 [31]。部分证明得到了改进，另一些证明则为方便读者而再次给出。

3.1. 赋值。

下一个定义是对域的赋值定义的直接推广。

定义 3.1 （[31]中的定义 4.1）。取一个超域 F和一个有序阿贝尔群 Γ（采用加法记号）。称满射 $v\colon F \to \Gamma \cup \{\infty\}$ 为 F 上的一个赋值，如果它满足以下性质：

(V1) $vx=\infty \iff x=0$，对所有 $x \in F$，(V2) $v(xy)=vx+vy$，对所有 $x,y \in F$，(V3) $z \in x+y \implies vz \geq \min\{vx, vy\}$，对所有 $x,y,z \in F$。

若 v 是超域 F 上的赋值，我们称 (F,v) 为一个 赋值超域，并将有序阿贝尔群 $v(F^\times)$ 记作 vF，即 (F,v) 的值群 。

例 3.2. 设 F 是一个超域。对所有 $x \in F^\times$，平凡 赋值 $vx=0$ 始终是 F 上的赋值，其值群为 $\{0\}$。

下面的结果给出赋值超域的更多例子。

引理 3.3 ([31]中的推论 4.2)。设 (K,v) 是一个赋值域，并取 $K^\times$ 的一个子群 T 。将 K 的赋值环的单位群记作 $\mathcal{O}_v^\times$，即 $\mathcal{O}_v^\times := \{x \in K \mid vx=0\}$。若 $T \subseteq \mathcal{O}_v^\times$，则

$$\begin{aligned} v_T : K_T &\to vK \cup \{\infty\} \\ xT &\mapsto vx \end{aligned}$$

是 K_T 上的赋值。

证明。 假设 $T \subseteq \mathcal{O}_v^\times$ 保证映射 v_T 定义良好。此外，满射性、(V1) 和 (V2) 可直接由 v 的相应性质以及因子超域 K_T 的定义推出。剩下需要验证 (V3)。取 x、$y \in K$ 和 $t \in T$。我们得到

$$v(x+yt) \geq \min\{vx, v(yt)\} = \min\{vx, vy+vt\} = \min\{vx, vy\}.$$

由此容易推出，对于 (K_T, v_T)，(V3) 成立。 □

下一个引理给出了 (超)域上赋值的一种替代定义（参见 [2, 例 1.8]）。

引理 3.4。设 F 是一个超域，Γ 是一个有序阿贝尔群。那么，$(F,\ v)$ 是一个赋值超域，且满足 $vF=\Gamma$，当且仅当映射 $v\colon F \to \mathcal{T}(\Gamma)$ 是超域之间的满同态。

证明。 假设 (F, v) 是一个赋值超域。那么 $v\colon F \to \mathcal{T}(vF)$ 是一个满射，由 (V1) 可得 (HH1)，由 (V2) 可得 (HH2)，由 (V3) 可得 (HH3)。性质 (HH4) 成立，因为对于所有 $x \in F$，都有 $vx = vx + v(1)$；而 (HH5) 成立是因为对于 $x \in F^\times$，我们有

$$0 = v(1) = v(xx^{-1}) = vx + v(x^{-1}).$$

因此， v 是一个超域同态。

反过来，设 F 是一个超域，且 $v\colon F \to \mathcal{T}(\Gamma)$是一个满射超域同态。(HH2)推出 v 满足性质 (V2)；(HH3)结合 $\mathcal{T}(\Gamma)$的超运算定义，推出性质(V3)。由于 $v(1) = 0 \neq \infty$，故 $\ker v = \{x \in F \mid vx = \infty\}$是 F的真超理想；由推论 2.42可知性质(V1)成立。我们证明了 v是 F上的赋值，且 $vF = \Gamma$。□

根据前述引理，几乎可以直接验证以下结果。因此，我们略去其证明。

推论 3.5 (引理 4.5，见 [31])。 设 $v\colon F \to \Gamma \cup \{\infty\}$ 是超域 F上的一个赋值。则 : $(i)\ v(1) = v(-1) = 0, (ii)\ v(-x) = vx$ 对所有 $x \in F, (iii)$ $vx^{-1} = -vx$ 对所有 $x \in F^\times, (iv)$ 若 $vx \neq vy$，则 $vz = \min\{vx, vy\}$，对每个 $x, y \in F$ 以及 $z \in x + y$。

引理3.6。 设 (K_T, w) 是一个因子超域形式的赋值超域。则存在一个赋值 v，定义在 K 上，使得 $T \subseteq \mathcal{O}_v^\times$ 且 $w = v_T$。

证明。 设 Γ 为 (K_T, w) 的值群。由于 $K \to K_T,\ x \mapsto [x]_T$ 和 $w\colon K_T \to \mathcal{T}(\Gamma)$ 是超域的满同态，它们的复合 $v\colon K \to \mathcal{T}(\Gamma)$ 是定义在 K 上的一个赋值，并满足陈述中的条件。□

例 3.7. 由命题 2.17（iv）可知， $\mathcal{T}(\Gamma)$ 同构于所有形如 $k((t^\Gamma))^{\mathcal{O}_{v_t}^\times}$ 的因子超域，其中 k 是某个域。根据上述引理，同构 $\sigma\colon k((t^\Gamma))_{\mathcal{O}_{v_t}^\times} \to \mathcal{T}(\Gamma)$ 是 $k((t^\Gamma))^{\mathcal{O}_{v_t}^\times}$ 上的赋值，而恒等映射 $\mathrm{id} = \sigma \circ \sigma^{-1}\colon \mathcal{T}(\Gamma) \to \mathcal{T}(\Gamma)$ 是 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 上的赋值。

3.2. **赋值超环**。 下一个定义的灵感来自经典赋值理论。

定义 3.8 （ [31] 中的定义 4.6）. 设 F 是一个超域。若关系子超环 $\mathcal{O}$ 属于 F，则称其为 F 中的赋值超环，如果对所有 $x \in F^\times$，都有 $x \in \mathcal{O}$ 或 $x^{-1} \in \mathcal{O}$。

注意，根据定义可知，对于 F 中的任意赋值超环 $\mathcal{O}$，都有 $1 \in \mathcal{O}$。现在我们来证明赋值超环的一些其他基本性质。

引理 3.9 (命题 *4.7* [31])。 超域 F 中的赋值超环 $\mathcal{O}$ 是 F的子超环。

证明。 只需证明，对于所有 $a, b \in \mathcal{O}$， $a - b \subseteq \mathcal{O}$。取 $a, b \in \mathcal{O}$ 和 $x \in a - b$。若 $x \in \mathcal{O}$，则无需证明任何内容（注意此情形也包括 $x = 0$）。否则，我们有$x^{-1} \in \mathcal{O}$，因此 $ax^{-1}, bx^{-1} \in \mathcal{O}$。由于 $x \in a - b$，由 (CH4) 可得 $a \in x + b$；于是利用公理（HR3），

$$ax^{-1} \in (x + b)x^{-1} = 1 + bx^{-1}.$$

我们得到 $ax^{-1} \in (1+bx^{-1}) \cap \mathcal{O} = 1 +_{\mathcal{O}} bx^{-1}$。将 (CH4) 和 (HR3) 应用于超环 $(\mathcal{O}, +_{\mathcal{O}}, \cdot, 0)$，可得

$$xx^{-1} = 1 \in ax^{-1} +_{\mathcal{O}} (-bx^{-1}) = (a +_{\mathcal{O}} (-b))x^{-1}.$$

因此，$x \in a +_{\mathcal{O}} (-b) \subseteq \mathcal{O}$。这表明 $a - b \subseteq \mathcal{O}$。 □

引理 3.10 (引理 4.8，见 [31])。设 $\mathcal{O}$ 是超域 F中的一个赋值超环。那么$\mathcal{M} := \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^{\times}$ 是 $\mathcal{O}$的唯一极大超理想。

证明。取 $a \in \mathcal{M}$ 和 $c \in \mathcal{O}$。若 ca 在 $\mathcal{O}$中可逆，则存在 $x \in \mathcal{O}$ 使得 $x(ca) = 1$。因此$(xc)a = 1$，且 $a^{-1} = xc \in \mathcal{O}$，这与 $a \in \mathcal{M}$矛盾。这证明了 $ca \in \mathcal{M}$，并表明$\mathcal{M}$ 满足(HID1)。

取 a、$b \in \mathcal{M}$。不妨设 $ab^{-1} \in \mathcal{O}$（否则 $ba^{-1} \in \mathcal{O}$，且我们可以互换 a 和 b的角色）。由于 $\mathcal{O}$ 是 F的子超环（参见引理 3.9），我们得到 $1 - ab^{-1} \subseteq \mathcal{O}$，因此，利用刚刚证明的结论，我们得出

$$b - a = b(1 - ab^{-1}) \subseteq \mathcal{M}.$$

我们已经证明，$\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{O}$的超理想。

根据 $\mathcal{M}$的定义，我们有 $\mathcal{O} \setminus \mathcal{M} = \mathcal{O}^{\times}$；由引理 2.41，$\mathcal{O}$ 的每个真超理想都必须包含于 $\mathcal{M}$中，这表明 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{O}$的唯一极大超理想。□

3.3. **剩余超域**。 F 上的任意赋值都会在 F中诱导出一个赋值超环。

命题 3.11 (中的命题 4.11 [31])。设 $v\colon F \to \Gamma \cup \{\infty\}$ 是超域F上的一个赋值。那么

$$\mathcal{O}_v := \{x \in F \mid vx \geq 0\}$$

是 F 中的一个赋值超环，并且

$$\mathcal{M}_v := \{x \in F \mid vx > 0\}$$

是其唯一的极大超理想。

证明。我们先证明 $\mathcal{O}_v$ 是 F 的子超环。取 $a, b \in \mathcal{O}_v$。根据 (V3)，对于所有 $c \in a - b$，我们有 $vc \geq \min\{va, v(-b)\} = \min\{va, vb\} \geq 0$，因此 $a - b \subseteq \mathcal{O}_v$。此外，根据 (V2)，我们有 $ab \in \mathcal{O}_v$。由推论 3.5（iii）可得，若 $x \notin \mathcal{O}_v$，则 $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$，因此 $\mathcal{O}_v$ 是 F 中的赋值超环。

接下来，我们证明 $\mathcal{M}_v$ 是 $\mathcal{O}_v$的唯一极大超理想。注意，根据推论 3.5（iii），

$$\mathcal{O}_v^{\times} = \{x \in \mathcal{O}_v \mid vx = 0\}.$$

因此，$\mathcal{M}_v = \mathcal{O}_v \setminus \mathcal{O}_v^{\times}$，进而根据引理 3.10，$\mathcal{M}_v$ 是 $\mathcal{O}_v$ 的唯一极大超理想。 □

注 3.12。设 (F, v) 是一个赋值超域。注意，$\mathcal{O}_v$ 可用 $\mathcal{T}(vF)$ 的超运算 $\boxplus$ 来描述，即它是 v 下 F 中 $v(1) \boxplus v(1)$ 的原像：

$$\mathcal{O}_v = v^{-1}(v(1) \boxplus v(1)).$$

由命题 2.44 可知，对于极大超理想为 $\mathcal{M}$ 的赋值超环 $\mathcal{O}$，其商超环

$$\mathcal{O}/\mathcal{M} = \{x + \mathcal{M} \mid x \in \mathcal{O}\},$$

其多值运算 $\oplus$ 定义为

$$(x + \mathcal{M}) \oplus (y + \mathcal{M}) := \{z + \mathcal{M} \mid z \in x + y\},$$

是一个超域（参见上文 [19, 第 3] 节和注 2.39）。

定义 3.13. 若 (F,v) 是一个赋值超域，则称超域 $\mathcal{O}_v/\mathcal{M}_v$ 为 (F,v) 的剩余超域，记作 Fv。对于元素 $x\in\mathcal{O}_v$，记其在 Fv 中的自然像为 xv。

命题3.14. 设(K,v) 是一个赋值域，且 $T\subseteq\mathcal{O}_v^\times$ 是 $K^\times$ 的一个子群。则 $K_Tv_T\simeq(Kv)^{(Tv)}$，其中 $Tv:=\{tv\mid t\in T\}$。

证明. 根据定义，对于所有 $x\in K$，都有 $v_T[x]_T=vx$，因此 $\mathcal{O}_{v_T}=(\mathcal{O}_v)_T$ 且 $\mathcal{M}_{v_T}=(\mathcal{M}_v)_T$。由此可得

$$K_Tv_T=\mathcal{O}_{v_T}/\mathcal{M}_{v_T}=(\mathcal{O}_v)_T/(\mathcal{M}_v)_T.$$

定义

$$\begin{aligned}\sigma:(\mathcal{O}_v)_T/(\mathcal{M}_v)_T&\to(Kv)_{(Tv)}\\ [x]_T+(\mathcal{M}_v)_T&\mapsto[xv]_{Tv}\end{aligned}$$

并证明 σ 是一个超体同构。根据 [19, 引理 3.3]，我们有 $[x]_T+(\mathcal{M}_v)_T=[y]_T+(\mathcal{M}_v)_T$ 当且仅当对某个 $t\in T$，$v(x-yt)>0$。这意味着

$$0=(x-yt)v=xv-yv\cdot tv\in[xv]_{Tv}-[yv]_{Tv},$$

这里我们用到了假设 $T\subseteq\mathcal{O}_v^\times$。这表明 σ 定义良好且为单射。显然，σ 是满射。此外，很容易看出 σ 是相应乘法群之间的同态。最后，我们注意到

$$\begin{aligned}\sigma\big([x]_T+(\mathcal{M}_v)_T\oplus([y]_T+(\mathcal{M}_v)_T)\big)&=\{\sigma\big([z]_T+(\mathcal{M}_v)_T\big)\mid[z]_T\in[x]_T+[y]_T\}\\&=\{[zv]_{Tv}\mid z=x+yt\text{ for some }t\in T\}\\&=\{[xv+yv\cdot tv]_{Tv}\mid t\in T\}\\&=[xv]_{Tv}+[yv]_{Tv}\end{aligned}$$

因此，根据引理 2.34，σ 是超域同构。 □

例 3.15. 根据命题 2.17，$\mathcal{T}(\Gamma)\simeq K_{\mathcal{O}_v^\times}$，其中 $K=k((t^\Gamma))$，这里 k 是一个含有两个以上元素的域，且 v 是其典范的 t-进赋值。由于 $Kv=k$ 和 $\mathcal{O}_v^\times v=k^\times$，根据上述命题和命题 2.17（$i$），我们得到：$\mathcal{T}(\Gamma)$ 关于其赋值（由恒等映射给出）的剩余域同构于 $k_{k^\times}\simeq\mathbb{K}$；此外，$k_{k^\times}\simeq\mathbb{K}$ 是 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 的关系子超域（参见例 2.22 和 2.36）。

对于赋值域 (K,v)，我们用 $1+\mathcal{M}_v$ 表示 1-单位元的集合。也就是说，满足$v(x-1)>0$ 或等价地满足 $xv=1v$的那些 $x\in K$。

命题 3.16. 设 (K,v) 是一个赋值域，且 $T\subseteq\mathcal{O}_v^\times$是 $K^\times$的子群。那么映射

$$\begin{aligned}\iota:K_Tv_T&\to K_T\\ [xv]_{Tv}&\mapsto[x]_T\end{aligned}$$

是超域嵌入，当且仅当 $1+\mathcal{M}_v\subseteq T$。

证明。若 $1+\mathcal{M}_v\subseteq T$且 $x,y\in\mathcal{O}_v^\times$，则 $[xv]_{Tv}=[yv]_{Tv}$当且仅当 $xv=yv\cdot tv=(yt)v$对某个 $t\in T$成立，当且仅当 $v(1-ytx^{-1})=v(x-yt)>0$当且仅当 $ytx^{-1}\in1+\mathcal{M}_v\subseteq T$。由此可知，$[y]_T[x]_T^{-1}=[ytx^{-1}]_T=[1]_T$且 ι 是良定义的。另一方面，若 $[x]_T=[y]_T$对于

某个 $x, y \in \mathcal{O}_v^\times$成立，则对某个 $t \in T$，有 $x = yt$，因此 $xv = (yt)v = yv \cdot tv$。由此可知， ι 是单射。此外，我们有

$$\iota\left([xv]_{Tv} \cdot [yv]_{Tv}^{-1}\right) = \iota\left([xv \cdot y^{-1}v]_{Tv}\right) = [xy^{-1}]_T = [x]_T[y]_T^{-1}$$

因此 ι 满足 (HH2) 和 (HH5)。显然，它满足 (HH1) 和 (HH4)。接下来只需证明 (EM1) 成立。首先注意，$\operatorname{Im}\iota$ 由满足 $x = 0$ 或 $x \in R \subseteq \mathcal{O}_v^\times$的等价类 $[x]_T$ 组成，其中 R 是 Kv的一组选定代表元。再次取 x, $y \in \mathcal{O}_v^\times$。我们有

$$\iota\left([xv]_{Tv} + [yv]_{Tv}\right) = \{[x + yt]_T \mid x, y \in R, t \in T \cap R\} = ([x]_T + [y]_T) \cap \operatorname{Im}\iota.$$

这就完成了一个方向的证明。

如果 $a \in 1$不属于 T，那么 $av = 1v$，因此 $[av]_{Tv} = [1v]_{Tv}$成立。另一方面，我们有

$$\iota[av] = [a]_T \neq [1]_T = \iota[1v]_T$$

因此， ι 并未良好定义，尤其不是超域嵌入。 □

3.4. 赋值的等价性。 类比经典赋值理论，我们现在的目标是证明，赋值超环可用于描述赋值，且仅相差与值群的保序同构的复合。

命题 3.17 （ [31]中的命题 4.12）。设 F 为一个超域， $\mathcal{O}$ 为 F中的一个赋值超环。考虑乘法群 $\Gamma := F^\times/\mathcal{O}^\times$，并按如下方式在 Γ 上定义关系 $\leq$:

$$a\mathcal{O}^\times \leq b\mathcal{O}^\times \iff ba^{-1} \in \mathcal{O}.$$

那么 （Γ， $\cdot$， $\leq$）是一个有序阿贝尔群，而典范投影

$$\pi : F \to \Gamma \cup \{\infty\},$$

将其扩展，使得 $\pi(0_F) = \infty$，则它是 F上的一个赋值。此外， $\mathcal{O}_\pi = \mathcal{O}$。

证明。 首先证明 $\leq$ 是 $(\Gamma, \cdot)$ 上的一个序。由于 $aa^{-1} = 1_F \in \mathcal{O}$，自反性显然成立。若$ab^{-1}$, $ba^{-1} \in \mathcal{O}$，则 $ab^{-1} \in \mathcal{O}^\times$，故 $a\mathcal{O}^\times = b\mathcal{O}^\times$。因此 $\leq$具有反对称性。若 $ab^{-1}, bc^{-1} \in \mathcal{O}$，则 $ac^{-1} = ab^{-1}bc^{-1} \in \mathcal{O}$，这表明 $\leq$具有传递性。现在取满足 $a\mathcal{O}^\times \leq b\mathcal{O}^\times$且 $c \in F^\times$的 $a, b \in F^\times$。我们有 $bc(ac)^{-1} = bcc^{-1}a^{-1} = ba^{-1} \in \mathcal{O}$，从而 $ac\mathcal{O}^\times \leq bc\mathcal{O}^\times$。这表明 $\leq$ 与 Γ的运算相容。最后， $\leq$ 是全序，因为 $\mathcal{O}$ 是赋值超环，所以对所有 $a, b \in F^\times$，都有 $ab^{-1} \in \mathcal{O}$或 $ba^{-1} \in \mathcal{O}$。

现在证明 π 是 F 上的一个赋值。显然， π 是到有序阿贝尔群 Γ 的满射，满足 ∞，且 (V1) 成立。由于 π 是群同态，故得到 (V2)。接下来只需证明 (V3) 对 π成立。取 x、 $y \in F$。若其中一个是 0_F，则 (V3) 显然成立。因此可假设 x、 $y \in F^\times$，且 $x\mathcal{O}^\times \leq y\mathcal{O}^\times$。取 $z \in x + y$。我们要证明 $zx^{-1} \in \mathcal{O}$。根据假设，有 $yx^{-1} \in \mathcal{O}$，因此

$$zx^{-1} \in (x + y)x^{-1} = 1 + yx^{-1} \subseteq \mathcal{O},$$

这里用到了引理 3.9。

最后，我们注意到，根据定义

$$\mathcal{O}_\pi = \{x \in F \mid \pi x \geq 1\} = \{x \in F \mid x\mathcal{O}^\times \geq 1\mathcal{O}^\times\} = \{x \in F \mid x \in \mathcal{O}\} = \mathcal{O}.$$

□

定义 3.18. 设 $(\Gamma_i, <_i)$ 是 $i = 1$ 的（偏）序集，2。若映射 $\sigma\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ 满足： $\gamma_1 \leq_1 \gamma_2$ 蕴含对所有 γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma_1$， $\sigma(\gamma_1) \leq_2 \sigma(\gamma_2)$，则称其为保序映射。

定义 3.19. 对于 $i=1,2$，设 $v_i\colon F\to\Gamma_i\cup\{\infty\}$ 是超域 F 上的赋值。若存在一个保序的群同构 $\sigma\colon\Gamma_1\to\Gamma_2$，且满足 $v_2=\sigma\circ v_1$，则称 v_1 与 v_2 等价。

引理 3.20. 设 $v\colon F\to\Gamma\cup\{\infty\}$ 是超域 F 上的一个赋值。则 $\Gamma\simeq F^\times/\mathcal{O}_v^\times$，且存在一个保序的群同构。

证明. 我们将 $F^\times/\mathcal{O}_v^\times$ 视为一个有序阿贝尔群，其序由命题 3.17 定义。利用 v 的满射性，我们定义一个映射

$$\sigma:\Gamma\to F^\times/\mathcal{O}_v^\times$$

对所有 $a\in F^\times$，令 $\sigma(va)=a\mathcal{O}_v^\times$。这是良定义的，因为若 $va=vb$，则 $va-vb=v(ab^{-1})=0$，因此 $ab^{-1}\in\mathcal{O}_v^\times$，进而 $a\mathcal{O}_v^\times=b\mathcal{O}_v^\times$。利用赋值的性质 (V2)，可得 σ 是群同态。此外，若 $va\le vb$，则 $ba^{-1}\in\mathcal{O}_v$，这意味着 $\sigma(va)\le\sigma(vb)$。因此，σ 是保序的。显然，σ 是满射的。因此，剩下只需证明 σ 是单射的。为此，设对某些 $a,b\in F^\times$，有 $a\mathcal{O}_v^\times=b\mathcal{O}_v^\times$。则存在 $c\in\mathcal{O}_v^\times$ 使得 $a=bc$。由于 $vc=0$，由 (V2) 可得 $va=vb$。证明完毕。□

备注 3.21. 注意，根据上述证明中 σ 的构造，我们有 $\sigma\circ v=\pi$，其中π是典范满同态 $F^\times\to F^\times/\mathcal{O}_v^\times$。

推论 3.22. 对于 $i=1,2$，设 $v_i\colon F\to\Gamma_i\cup\{\infty\}$ 是超域 F 上的赋值。那么，当且仅当 $\mathcal{O}_{v_1}=\mathcal{O}_{v_2}$ 时，v_1 与 v_2 等价。

证明. 由前一个引理，对于 $i=1$、2，我们得到 $\Gamma_i\simeq F^\times/\mathcal{O}_{v_i}^\times$，它们是有序阿贝尔群，并存在同构 σ_i，使得 $\sigma_i\circ v_i=\pi_i$，其中 $\pi_i\colon F^\times\to F^\times/\mathcal{O}_{v_i}^\times$ 是 $i=1$、2 的典范投影。因此，若 $\mathcal{O}_{v_1}=\mathcal{O}_{v_2}$，则 $\pi_1=\pi_2$，且 $\sigma:=\sigma_2^{-1}\circ\sigma_1$ 是有序阿贝尔群 $\Gamma_1\to\Gamma_2$ 的同构。此外，我们有

$$\sigma\circ v_1=\sigma_2^{-1}\circ(\sigma_1\circ v_1)=\sigma_2^{-1}\circ\pi_2=v_2.$$

因此，v_1 和 v_2 等价。

另一方面，如果 v_1和 v_2等价，那么我们得到 $F^\times/\mathcal{O}_{v_1}^\times\simeq F^\times/\mathcal{O}_{v_2}^\times$作为有序阿贝尔群。特别地，对于 $a\in F^\times$，我们有 $1\mathcal{O}_{v_1}^\times\le a\mathcal{O}_{v_1}^\times$当且仅当 $1\mathcal{O}_{v_2}^\times\le a\mathcal{O}_{v_2}^\times$。根据 $F^\times/\mathcal{O}_{v_i}^\times$ 中序的定义，我们可以看出，这意味着 $a\in\mathcal{O}_{v_1}$ 当且仅当$a\in\mathcal{O}_{v_2}$。由于对于 $i=1$，2，$0\in\mathcal{O}_{v_i}$，我们得出 $\mathcal{O}_{v_1}=\mathcal{O}_{v_2}$，如所声称的那样。□

在　　接下来的各节中，我们将始终把超域上的赋值视为在等价意义下的对象　　.

4. Krasner 赋值超域

本节中，我们将重点关注那些满足 Krasner 最初提出的、更为严格的公理的赋值超域，他称之为赋值超域。这些赋值超域至今仍受到数学家的关注。例如，Tolliver 和 Lee 最近研究了它们（见 [46, 32]），并将它们简称为“赋值超域”。

4.1. 超度量空间。 我们先介绍超度量空间的一些基础理论。这一概念已由 Krasner 进行了深入研究（参见 [23]）。超度量距离的公理只需利用非负实数的线性序（其中 0 是最小元素）即可表述。由于实数结构中除序之外的性质均未用到，我们将以更广义的含义使用“超度量空间”一词，允许超度量距离取值于任意线性有序集。此外，由于赋值的值群有最大元素，下面给出的超度量空间定义

是一种修改后的定义，更适合我们的语境（例如 [28] 中也采用了同样的方法）。对于实值距离，这种修改相当于将线性有序集 $(\mathbb{R}_{\geq 0}, <)$ 替换为 $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, >)$。

定义 4.1. 集合 X 上的超度量距离（或简称超度量）是一个函数$d\colon X \times X \to \Gamma \cup \{\infty\}$，其中 $(\Gamma, <)$ 是一个线性有序集，并且 ∞ 满足 $\gamma < \infty$ 对所有 $\gamma \in \Gamma$均成立，使得对所有 $x, y, z \in X$

(U1) $d(x, y) = \infty$ 当且仅当 $x = y$，(U2) $d(x, y) = d(y, x)$，(U3) $d(x, z) \geq \min\{d(x, y), d(y, z)\}$。

当 d 是 X上的超度量时，我们称 (X, d) 为一个超度量空间。我们称集合 $dX := \{d(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y\} \subseteq \Gamma$ 为 d的值集。

例 4.2. 设 (K, v) 是一个赋值域。那么函数

$$\begin{aligned} K \times K &\to \Gamma \cup \{\infty\} \\ (x, y) &\mapsto v(x - y) \end{aligned}$$

是 K 上的超度量。

定义 4.3. 设 (X, d) 是一个超度量空间。若子集 $B \subseteq X$ 满足对所有 y、$z \in B$ 以及所有 $x \in X$，下述蕴含关系成立，

$$d(x, y) \geq d(y, z) \quad \Longrightarrow \quad x \in B$$

则称其成立于所有 x、y、$z \in X$。

定义 4.4. 线性有序集 $(\Gamma, <)$ 的子集 ρ 称为 初始段 （分别称为 终段），如果对所有 $\delta \in \rho$ 和所有 $\gamma \in \Gamma$，若 $\gamma < \delta$（分别为 $\gamma > \delta$），则 $\gamma \in \rho$。

引理 4.5. 对于超度量空间 (X, d) 中的每个元素 x 以及 $dX \cup \{\infty\}$ 的每个终段 ρ，我们有

$$B_\rho(x) := \{y \in X \mid d(x, y) \in \rho\}.$$

是 X 中的一个球。反过来，若 B 是 X 中的一个球，且 ρ 是包含 $d(y, z)$（对所有 $y, z \in B$）的 $dX \cup \{\infty\}$ 的最小（相对于包含关系）终段，则对于每个 $x \in B$,

$$B = B_\rho(x).$$

特别地，对每个 $y \in B_\rho(x)$, $B_\rho(x) = B_\rho(y)$。

证明。假设 $y, z \in B_\rho(x)$，即 $d(x, y) \in \rho$ 且 $d(x, z) \in \rho$。若 $t \in X$满足$d(y, t) \geq d(y, z)$，则不等式

$$d(x, t) \geq \min\{d(x, y), d(y, t)\} \geq \min\{d(x, y), d(y, z)\} \geq \min\{d(x, y), d(y, x), d(x, z)\} \in \rho$$

由 (U2) 和 (U3) 得出。由于 ρ 是 $dX \cup \{\infty\}$的一个终段，我们得出 $d(x, t) \in \rho$。因此，$t \in B_\rho(x)$和 $B_\rho(x)$ 是一个球。

反过来，假设 B 是一个球，并令 ρ 如断言中所述。此外，令 x 为 B中的任意元素。若 $y \in B$，则 $d(x, y) \in \rho$，从而 $y \in B_\rho(x)$。另一方面，若 $y \in B_\rho(x)$，则 $d(x, y) \in \rho$。因此，根据 ρ的定义，存在某个 $z \in B$ 使得 $d(x, z) \leq d(x, y)$。由于 B 是一个球，故可得 $y \in B$。我们已经证明了 $B = B_\rho(x)$。□

推论 4.6。设 (X, d) 是一个超度量空间。任意两个具有非空交集的球都满足包含关系。

证明。 取两个球 B 和 B'，并假设 $z \in B \cap B'$。根据引理 4.5，存在 $dX \cup \{\infty\}$ 的终段 ρ、ς，使得 $B = B_\rho(z)$ 且 $B' = B_\varsigma(z)$。由于 ρ和 ς是终段，我们必有 $\rho \subseteq \varsigma$或 $\varsigma \subseteq \rho$。因此， $B \subseteq B'$ 或 $B' \subseteq B$。□

4.2. **Krasner 赋值**。 设 $(\Gamma, <, +, 0)$ 是一个有序阿贝尔群， ρ 是Γ 的一个初始段， γ 是 Γ 的一个元素。我们有时会写作 $\gamma > \rho$，以表示 $\gamma \notin \rho$。

以下这类赋值超域尤其值得关注。

定义 4.7 （ [24], 的第 3 节、 [46] 中的定义 1.4 以及 [32] 中的定义 2.4）。 若赋值超域 (F, v) 满足以下条件，我们称之为 ***Krasner*赋值超域**

(KVH1) 对所有 $x, y \in F, v$, $(x + y)$ 都是单元素集，除非 $0 \in x + y$。(KVH2) 存在 vF 的一个初始段 ρ_v，使得 $0 \in \rho_v$，并且对所有 $x, y, z, t \in F$，若 $z \in x + y$，则 $t \in x + y$ 当且仅当对所有 $s \in z - t$， $vs > \rho_v + \min\{vx, vy\}$。

初始段 ρ_v 称为 v 的范数。当 (F, v) 是一个 Krasner赋值超域时，我们也称 v 是 F 上的***Krasner*赋值**。

例 4.8. 设 (K, v) 是一个赋值域，并将 K 视为一个超域。那么 v 是 K 上的 Krasner赋值，其范数为 vK。

命题 4.9. 设(F, v) 是一个 ***Krasner*赋值超域**。对于所有满足 $x \neq y$ 的 $x, y \in F$，由公理 ***(KVH1)***，$v(x-y)$ 包含唯一的元素 $\gamma_{x,y} \in vF$。定义映射 $d_v \colon F \times F \to \Gamma \cup \{\infty\}$ 如下

$$d_v(x, y) := \begin{cases} \gamma_{x,y} & \text{if } x \neq y, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

那么 d_v 是 F 上的超度量。此外，对于所有 $x, y \in F$ 以及任意的 $z \in x + y$，在超度量空间 (F, d_v) 中有

$$x + y = B_{\rho_v + \min\{vx, vy\}}(z).$$

证明。 公理 (U1) 由公理 (V1) 得出，公理 (U2) 由推论 3.5 (ii) 得出，而公理 (U3) 是公理 (V3) 的直接推论。最后一个陈述只是公理 (KVH2) 的改述。□

我们称 Krasner 赋值超域 (F, v) 上由 v 在 F 上诱导的超度量 d_v。

注记 4.10. 设 F 是一个超域， v 是 F 上的平凡赋值。若 v 是范数为 ρ_v 的 Krasner 赋值，则由 (KVH2)，对所有 $x, y \in F^\times$，有 $x \in 1 - 1$ 当且仅当 $0 = vx > \rho_v$。由于 $0 \in \rho_v$，可推出对所有 $x \in F$， $x - x = \{0\}$，进而由引理 2.9 可知 F 是一个域。

反过来，若 K 是一个域，则映射 $v(0) := \infty$ 且对所有 $x \in K^\times$ 有 $vx := 0$，是 K 上的一个 Krasner 赋值，其值群为 $vK = \{0\}$，范数为 vK。

Krasner 的主要动机可能来自下面这个例子。

例4.11. 对于赋值域（K, v）和包含 0 的初始段 $\rho \subseteq vK$，我们来考察层级为 ρ 的 1-单位元群：

$$1 + \mathcal{M}_v^\rho = \{x \in K \mid v(x - 1) > \rho\} \subseteq \mathcal{O}_v^\times.$$

那么， $v_\rho := v_{1+\mathcal{M}_v^\rho}$ 是 $K_\rho := K_{1+\mathcal{M}_v^\rho}$ 上的 Krasner赋值，且 v_ρ 的范数为 ρ .

事实上，任何作为因子超域的 Krasner赋值超域都具有这种形式，正如下文所示。

命题 4.12. 设 F 是一个因子超域，且存在 *Krasner*赋值 w。那么，对于某个赋值域 $(K,\ v)$ 以及其中包含 0 的某个初始段 ρ，$F = K_\rho$和 w 是 v_ρ。

证明。 由引理3.6可知，存在一个赋值域 (K, v) 和 $K^\times$ 的一个子群 $T \subseteq \mathcal{O}_w^\times$，使得$v_T = w$。假设 $t \in T$ 不是 K 中的 1-单位。那么 $vt = 0$ 和 $v(t-1) = 0$ 必然成立。现在，一方面，由于 $w = v_T$ 是 Krasner赋值，对于所有 $[x]_T \in [1]_T - [1]_T$，我们有$vx = v_T[x]_T > 0$，由 (KVH2) 得。另一方面，由于 $t \in T$，我们有 $[t-1]_T \in [1]_T - [1]_T$。这一矛盾证明 $T \subseteq 1 + \mathcal{M}_v$ 必然成立，结论随之得出。□

备注4.13。我们尚不清楚所有 Krasner 赋值超域是否都是因子超域。 [34]中给出了与这一问题相关的一些结果。

例4.14。考虑 Hahn 级数域 $K := \mathbb{F}_2((t^\Gamma))$，其中 Γ 是某个非平凡的有序阿贝尔群，并令 v 表示其典范的 t-进赋值。在这种情况下，由于 $Kv \simeq \mathbb{F}_2$，我们有$\mathcal{O}_v^\times = 1 + \mathcal{M}_v$。由此可得

$$\mathcal{T}'(\Gamma) \simeq K_\rho,$$

其中 $\rho = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \leq 0\}$。恒等映射 v_ρ 是 $\mathcal{T}(\Gamma) = \mathcal{T}'(\Gamma)$ 上的恒等映射，并且是 $\mathcal{T}'(\Gamma)$ 上范数为 ρ的 Krasner赋值。注意，同一个映射并非 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 上的 Krasner赋值，因为 $0 \in [0, \infty] = 0 \boxplus 0$ 违反了 (KVH2)。

现在我们研究 Krasner赋值超域的剩余超域。

Prop命题 4.15. *Krasner*赋值超域(F, v) 的剩余超域 Fv 是一个域 .

证明。 取 $xv \in 1v - 1v$。这意味着 $x \in 1 - 1$，并且由公理 (KVH2)，我们可以推得$vx > \rho_v$。由于 $0 \in \rho_v$，可知 $xv = 0v$，因此根据引理 2.9，Fv 是一个域。□

例4.16. 设 (K, v) 是一个赋值域。由命题3.14可知，对于任意一个包含 0 的初始段 vK 的初始段 ρ，K_ρ 的剩余超域是一个与 Kv同构的域。

现在我们来考虑一个不是Krasner赋值超域的赋值超域。

例 4.17. 考虑有理数域上的有理函数域 $K := \mathbb{Q}(X)$，以及它的乘法子群 $T := \mathbb{Q}^\times$。在规范的 X-进赋值 v下，我们有 $T \subseteq \mathcal{O}_v^\times$。因此，引理 3.3 给出了一个赋值超域 (K_T, v_T)。由命题3.14和命题 2.17（i），我们有

$$K_T v_T \simeq \mathbb{Q}_{\mathbb{Q}^\times} \simeq \mathbb{K}.$$

由于 $\mathbb{K}$ 并非 域，命题4.15表明(K_T, v_T)不是Krasner赋值超域 .

4.3. **Mittas与上典范超群**。J. Mittas是Krasner的学生。他引入了上典范超群（定义如下），并发表了一些将它们与Krasner赋值联系起来的结果（有时未附证明）（例如参见 [41]）。本小节的部分内容受到他研究工作的启发。

定义4.18 ([41] 和 [38]第81页)。 典范超群 H 称为上典范的，如果

（SCH1）对于所有 x、$y \in H$，若 $x \in x + y$，则 $x + y = \{x\}$。（SCH2）对于所有 x、y、z、$t \in H$，若 $(x + y) \cap (z + t) \neq \emptyset$，则 $x + y \subseteq z + t$ 或 $z + t \subseteq x + y$。（SCH3）对于所有满足 $x \neq y$ 的 x、$y \in H$，我们有：z、$t \in x - y$ 蕴含 $z - z = t - t$。

（SCH4）对于所有 x、y、$z \in H$，若 $x \in z - z$ 且 $y \notin z - z$，则 $x - x \subseteq y - y$。

例 4.19. 任何阿贝尔群都是上典范超群。

以下结果给出了上典范超群的其他例子。

命题 4.20. 设 (F, v) 是一个 *Krasner*赋值超域。那么， F 的加法典范超群是上典范的。

证明。 我们逐一验证这些公理。假设对于某个 $x, y \in F$，有 $x \in x + y$。由可逆性，$y \in x - x$，因此不等式 $vy > \rho_v + vx \geq vx$ 由公理 (KVH2) 和 $0 \in \rho_v$推出。因此，若 $z \in x + y$，则由推论 3.5 (iv) 可得 $vx = vz$；又由于可逆性， $y \in z - x$ 且 $d_v(y, 0) = vy > \rho_v + \min\{vx, vz\}$，公理 (KVH2) 蕴含 $0 \in z - x$，因此必有 $x = z$。这证明了 (SCH1)。

公理（SCH2）由命题 4.9 和推论 4.6 得出。

对于 (SCH3)，取 $x, y \in F$并假设 $x \neq y$，即 $0 \notin x - y$。取 $z, t \in x - y$。我们断言 $vz = vt$。假设 $vz < vt$，则由推论 3.5 (iv) 可知，对于所有 $a \in z - t$，都有 $va = vz$，因此

$$d_v(z, 0) = vz = d_v(z, t) > \rho_v + \min\{vx, vy\}.$$

公理 (KVH2) 现在意味着 $0 \in x - y$，这就产生了矛盾。因此， $vz \geq vt$。同理，$vt \geq vz$，所以 $vz = vt$，正如所断言的那样。现在，由 (KVH2) 可知， $a \in z - z$ 当且仅当 $va > \rho_v + vz$，并且 $a \in t - t$ 当且仅当 $va > \rho_v + vt$。由于 $vz = vt$，我们得出 $z - z = t - t$。这表明 (SCH3) 成立。

对于 (SCH4)，取 $x \in z - z$和 $y \notin z - z$。由公理 (KVH2) 可得 $vx > \rho_v + vz$和$vy \in \rho_v + vz$。特别地，$vx > vy$。现在，再由公理 (KVH2)，若 $a \in x - x$，则 $va > \rho_v + vx$，这意味着 $va > \rho_v + vy$，从而 $a \in y - y$。因此， $x - x \subseteq y - y$。证明完毕。□

上典范超群理论与 Krasner 赋值超域理论之间的联系更加密切。

命题 4.21. 设 F 是一个加法超群上典范的超域。那么

$$\mathcal{O} := \{x \in F \mid x - x \subseteq 1 - 1\}$$

是 F上的赋值超环。此外，若 v是满足 $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}$的赋值，则 (F, v) 是一个 *Krasner* 赋值超域。

证明。 如果 F是一个域，那么 $\mathcal{O} = F$，因此 v是 F上的平凡赋值。由于 F是一个域，(*F*, *v*) 是一个Krasner赋值超域。于是我们可以假设 F 不是一个域。

如果 $x - x \subseteq 1 - 1$ 且 $y - y \subseteq 1 - 1$，那么

$$xy - xy = (x - x)y \subseteq (1 - 1)y = y - y \subseteq 1 - 1.$$

因此， $\mathcal{O}$ 在乘法下封闭。

如果 $x - x \nsubseteq 1 - 1$，则根据公理（SCH2）， $1 - 1 \subsetneq x - x$，因为 $0 \in (x - x) \cap (1 - 1)$。两边乘以 x^{-1}，可得 $x^{-1} - x^{-1} \subsetneq 1 - 1$。因此， $x^{-1} \in \mathcal{O}$。

假设 $x - x \subseteq 1 - 1$ 且 $y - y \subseteq 1 - 1$。我们断言，如果 $z \in x + y$，那么 $z - z \subseteq 1 - 1$。取 $a \in z - z$。由于 $z \in x + y$，我们有

$$a \in z - z \subseteq (x - x) + (y - y) \subseteq (1 - 1) + (1 - 1),$$

因此存在 $x' \in 1 - 1$和 $y' \in 1 - 1$，使得 $a \in x' + y'$。由可逆性可得 $1 \in x' + 1$，并且

$$a \in x' + y' \subseteq (x' + 1) - 1 = 1 - 1,$$

这里我们用到了公理（SCH1）。我们证明了 $\mathcal{O}$ 是 F中的一个赋值超环 .

显然， $\mathcal{O}^\times = \{x \in F \mid x - x = 1 - 1\}$。令 $vF := F^\times/\mathcal{O}^\times$，并令 $v\colon F^\times \to vF$ 为典范满同态。我们需要证明（F, v）是一个 Krasner赋值超域。根据命题 3.17，它是一个赋值超域。现在验证公理（KVH1）和（KVH2）是否成立。

取 $x, y \in F^\times$，并假设 $0 \notin x + y$。选取 $z, t \in x + y$，并设 $vz < vt$。这意味着 $tz^{-1} \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{O}^\times$，因此

$$tz^{-1} - tz^{-1} \subsetneq 1 - 1.$$

但这时 $t - \ t \subsetneq z - z$，这与公理（SCH3）矛盾。我们已经证明（KVH1）对于（F, v）成立。

现在我们需要验证 (KVH2)。首先，我们要证明 $v(1-1)$ 是 vF 的一个不包含 0 的终段。取 $a \in 1 - 1$ 和 $\gamma > va$。设 $b \in F^\times$ 满足 $vb = \gamma$。由于 $vb > va$，我们有 $b - b \subsetneq a - a$。现在，如果 $b \notin 1 - 1$，那么由公理（SCH4）可得 $a - a \subseteq b - b$。因此，必须有 $b \in 1 - 1$，从而 $\gamma = vb \in v(1-1)$ 和 $v(1-1)$ 是一个终段。

对于 $x \in F^\times$，若 $x \in x - x$，则由公理（SCH1）可得 $x - x = \{x\}$。然而，由于 $0 \in x - x$，这是不可能的。元素 $x \in F^\times$ 的值为 0，当且仅当 $x - x = 1 - 1$。因此，由于对所有 $x \in F^\times$ 都有 $x \notin x - x$，它不能属于 $1 - 1$。这表明 $v(1-1)$ 不包含 0。

我们令 ρ_v 为 vF 中 $v(1-1)$ 的补集。于是 ρ_v 是 vF 的一个初始段，其中包含 0。

注意，对所有 $x \in F$，我们有 $a \in x - x = (1-1)x$ 当且仅当存在 $y \in 1 - 1$ 使得 $a = yx$。这意味着 $va = vy + vx > \rho_v + vx$。反过来，若 $va > \rho_v + vx$，则 $v(ax^{-1}) \in v(1-1)$，因此存在 $b \in 1 - 1$ 使得 $vb = v(ax^{-1})$。因此，

$$b \in 1 - 1 = bxa^{-1} - bxa^{-1} = b(xa^{-1} - xa^{-1}),$$

所以 $1 \in xa^{-1} - xa^{-1}$，这意味着 $a \in x - x$。

现在取 $x, y \in F$，使得 $x \neq y$ 且 $vx \leq vy$。固定 $z \in x - y$。我们要证明 $t \in x - y$ 当且仅当 $d_v(z, t) > \rho_v + vx$。

首先假设 $t \in x - y$。如果 $t = z$，则无须证明。否则，根据我们上面已经证明的内容，只需证明 $z - t \subseteq x - x$。取 $a \in z - t$。由于 $z \in x - y$，我们有

$$a \in z - t \subseteq x - (y + t).$$

因此，存在 $b \in y + t$使得 $a \in x - b$。我们得到 $b \in (x - a) \cap (y + t)$，所以根据公理（SCH2），$y + t \subseteq x - a$ 或 $x - a \subseteq y + t$。在第一种情况下，由于 $x \in y + t$，我们有 $x \in x - a$，于是$a \in x - x$ 成立。接下来只需处理 $x - a \subsetneq y + t$的情况。在这种情况下，由于 $t \in x - y$ 且$y - y \subseteq x - x$，我们得到

$$x - a \subsetneq y + t \subseteq y + x - y \subseteq x + (x - x).$$

取 $c \in x - a$。存在 $x' \in x - x$ 使得 $c \in x + x'$。这意味着

$$a \in x - c \subseteq x - (x + x') = x - x$$

其中我们使用了公理（CH4）和公理（SCH1）来得出 $x + x' = \{x\}$.

Now, ass ume that $d_v(z, t) > \rho_v + vx$。我们必须证明 $t \in x - y$。如果 $z = t$，那么存在 nothing to s how。因此，我们可以假设 $z \neq t$，从而 $z - t \subsetneq x - x$ 必然成立。我们有

$$t \in t + 0 \subseteq t + z - z \subsetneq x - x + z.$$

因此，存在 $b \in z - x$ 使得 $t \in x + b$。我们得出 $b \in (z - x) \cap (t - x)$。根据公理（SCH2），我们随后得到 $z - x \subseteq t - x$ 或 $t - x \subseteq z - x$。在第一种情况下，$-y \in z - x \subseteq t - x$

并且 $t \in x - y$ 得出。接下来需要处理 $t - x \subsetneq z - x$ 的情况。在这种情况下，由于 $z \in x - y$，我们有

$$t - x \subsetneq z - x \subseteq x - y - x = x - x - y.$$

取 $a \in t - x$。存在 $x' \in x - x$ 使得 $a \in x' - y$。现在，根据可逆性，并且由于$a \in t - x$，我们有

$$-y \in a - x' \subseteq t - (x + x') = t - x,$$

其中，最后一个等式用到了公理（SCH1）。现在， $t \in x - y$ 由公理（CH4）得出。 □

直接由上述命题 4.20 和命题 4.21，我们可以推出如下关于具有 Krasner赋值的超域的刻画定理。

定理 4.22. 设 F 是一个超域。当且仅当 F 的加法超群是上典范的， F 才具有 *Krasner*赋值。

例 4.23. 上述例 4.17 中所考虑的超域的加法超群不是上典范的。事实上，

$$1T + 1T = \{0T, 1T\}$$

因此（SCH1）不成立。由定理 4.22 可知，这个超域根本不容许 Krasner 赋值。

例 4.24. 考虑一个广义热带超域 $\mathcal{T}(\Gamma)$，其中 Γ 是某个非平凡的有序阿贝尔群（见例 2.14）。由命题 2.17（iv）和引理 3.3，我们得出 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 是一个赋值超域（另见命题 5.9 之后的讨论）。然而，由定理 4.22 可知，由于其加法超群不满足（SCH1），$\mathcal{T}(\Gamma)$ 不容许 Krasner 赋值。

现在我们来分析另一个例子。

例 4.25. 取带有赋值 $v := v_p \circ v_X$ 的 $K = \mathbb{Q}(X)$，其中 v_X 表示 $\mathbb{Q}(X)$ 上的 X-进赋值， v_p 表示 $\mathbb{Q}$ 上的 p- 进赋值， p 为某个素数。更明确地说，对于多项式 $f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$，其中 $\mathbb{Q}[X]$，我们有

$$vf(X) = \big(v_X f(X), v_p(a_{v_X f(X)})\big) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

vK 中的序关系是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$上的字典序，也就是说，$(n_1, n_2) < (m_1, m_2)$ 当且仅当 $n_1 < m_1 \vee (n_1 = m_1 \wedge n_2 < m_2)$。

考虑 Krasner 赋值超域 $F := K_\rho$，其中 ρ 是包含 $\{0\} \times \mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$的最小初始段（参见例4.11）。将其Krasner赋值 v_ρ 记为 w。

注意，若 $(m_1, m_2) \in \rho$ 且 $m_1 > 0$，那么由于 ρ 是初始段，我们有 tha t

$$\{0\} \times \mathbb{Z} \subseteq \{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (k_1, k_2) \leq (m_1 - 1, m_2)\} \subsetneq \rho,$$

这与 ρ的极小性矛盾。因此，对于所有 $(m_1, m_2) \in \rho$，都有 $m_1 \leq 0$ 。反过来，若$m_1 \leq 0$，则对于所有 $m_2 \in \mathbb{Z}$，$(m_1, m_2) \leq (0, m_2)$，因此，由于 ρ是包含 $\{0\} \times \mathbb{Z}$的初始段，$(m_1, m_2) \in \rho$。由此可得

$$\rho = \{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m_1 \leq 0\} = \{(m_1, m_2 + n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m_1 \leq 0\} = \rho + (0, n) \tag{1}$$

对于任意的 $(0, n) \in \{0\} \times \mathbb{Z}$。

根据命题 4.20， F 的加法超群是上典范的。因此，根据命题 4.21，我们得到赋值超环

$$\mathcal{O}_u = \{x \in F \mid x - x \subseteq 1 - 1\}$$

对于某个 Krasner赋值 u，其定义在 F上。现在我们来证明， w 和 u 不是 F上的等价赋值。

事实上，我们将证明 $\mathcal{O}_w \subsetneq \mathcal{O}_u$。取 $x \in \mathcal{O}_w$，即 $wx \geq (0,0)$。根据公理 (KVH2)，我们有 $y \in x - x$ 当且仅当 $wy > \rho + wx \geq \rho$。再次应用公理 (KVH2) 可得$x - x \subseteq 1 - 1$，因此 $x \in \mathcal{O}_u$。现在，例如考虑 F中对应于 K内有理数 p^{-1} 的元素 x。由于 $v_p(p^{-1}) = -1$，我们有 $wx = (0,-1) < (0,0)$，因此 $x \notin \mathcal{O}_w$。另一方面，由于 $wx = (0,-1) \in \{0\} \times \mathbb{Z}$，根据 (1) 可得 $\rho + wx = \rho$，于是利用 (KVH2)，我们得到 $y \in x - x$ 当且仅当 $wy > \rho$ 当且仅当 $y \in 1 - 1$。这意味着$x - x \subseteq 1 - 1$，因此 $x \in \mathcal{O}_u$。

上面的例子构成了我们将在第6节展开讨论的出发点。

5. 关于有序阿贝尔群的进一步讨论

本节中，我们刻画广义热带超域，并讨论多值情形下赋值粗化的概念。我们还将得出一些关于有序阿贝尔群与广义热带超域之间关系的结论。

5.1. 广义热带超域的刻画。 为了刻画广义热带超域，我们将运用另一个重要的刻画结果。若只要 $0 \notin x + y$， $x + y$ 就是单元素集，则称超域为严格超域。Bowler 和 Su 在 [6] 中刻画了严格超域，下面我们简要回顾他们的结果。

在 [6, 第 4] 节中，介绍了一种由短正合列构造超域的自然方法

$$\{1\} \longrightarrow F^\times \xrightarrow{\varphi} H^\times \xrightarrow{\psi} \Gamma \longrightarrow \{0\} \tag{2}$$

其中 Γ 是一个有序阿贝尔群， F 是任意超域。由此得到的超域以 $H^\times$ 为乘法群，称为沿短正合列 (2) 的 F 分层。随后证明了以下定理。

定理 5.1 (定理4.10，见 [6])。超域 H 是严格的，当且仅当它是 Γ-分层，且 F 沿着短正合列 (2)，其中 F 同构于 $\mathbb{K}$、 $\mathbb{S}$ 或某个域。

根据构造的细节（为简洁起见，此处略去），不难验证，将 0_F 映射到 0_H 的映射 φ 扩张后，在任何情况下都是超域的嵌入。

如果 $0 \in 1 + 1$，我们就说一个超域具有特征 2；如果$1 \in 1 + 1$，则称其具有 C-特征 1。例如， $\mathbb{S}$ 满足后者但不满足前者，而 $\mathbb{K}$ 则两者皆满足。关于超域的特征和 C-特征，读者可参见 [21]以了解更多信息。

现在我们可以陈述并证明刻画定理了。

定理 5.2 (广义热带超域的刻画)。广义热带超域恰好是特征 2 且 *C*-特征 1的严格超域。

证明。 </style}读者可以根据相关定义轻易验证，广义热带超域$\mathcal{T}(\Gamma)$是一个特征 2 且 C-特征 1 的严格超域。

反过来，设 H 是一个特征 2 且 C-特征 1 的严格超域。根据定理 5.1 以及我们对上述映射 φ 的扩张所作的观察，可知 $\mathbb{K}$、 $\mathbb{S}$ 或某个域嵌入 H。由于 H 的特征为 2，可得 $1 = -1$，因此 $\mathbb{S}$ 无法嵌入 H。另一方面，任何域也无法嵌入 H。事实上，由我们的假设 $0, 1 \in 1 + 1$

可知 $\{0,1\}=(1+1)\cap\{0,1\}\subseteq(1+1)\cap F=1+_F 1$ 并非单元素集。因此， H 是沿着短正合列对 $\mathbb{K}$ 进行的 Γ-分层

$$\{1\}\longrightarrow\mathbb{K}^\times\xrightarrow{\varphi}H^\times\xrightarrow{\psi}\Gamma\longrightarrow\{0\}$$

对于某个有序阿贝尔群 Γ。现在，由于 $\mathbb{K}^\times=\{1\}$，我们得到 H 的乘法群与 Γ 同构，而 [6, 第 4] 节给出的构造细节表明， H 的超运算就是 $\mathcal{T}$（Γ）的超运算。由此得出， H 是一个广义热带超域。□

类似的推理可得出以下关于严格广义热带超域的刻画（不过可能没那么有趣）。

定理 5.3. 广义热带超域恰好是沿着短正合列(2)的 Γ-分层 F ，其中 $F=\mathbb{F}_2$。

5.2. **粗化**。

定义 5.4. 设 $(\Gamma,<,+,0)$ 是一个有序阿贝尔群。若子群 Δ of Γ 满足：对于所有 $\gamma\in\Gamma$ ，如果存在 δ_1、$\delta_2\in\Delta$ 使得 $\delta_1<\gamma<\delta_2$，那么 $\gamma\in\Delta$，则称其为凸的。

不难看出，有序阿贝尔群的一族凸子群的交仍是一个凸子群，而且有序阿贝尔群的所有凸子群按包含关系构成线性序。我们回顾另一个使凸子群具有重要意义的基本事实。

事实 5.5. 设$(\Gamma,<,+,0)$ 是一个有序阿贝尔群，且 Δ 是 Γ的凸子群。那么$(\Gamma/\Delta,\prec,+,0)$ 是一个有序阿贝尔群，其中

$$x+\Delta\prec y+\Delta\iff x<y\ and\ y-x\notin\Delta.$$

特别地，典范满同态 $\Gamma\to\Gamma/\Delta$ 是保序的。

以下概念将在后文中起到基础性作用。

定义 5.6. 设 $(\Gamma,<,+,0)$ 是一个有序阿贝尔群，且 ρ是 Γ的一个初始段。我们称集合

$$\mathrm{ig}(\rho):=\{\gamma\in\Gamma\mid\rho+\gamma=\rho\}$$

ρ的不变群 。若$\mathrm{ig}(\rho)=\{0\}$，则称 ρ 具有平凡不变群。

注记 5.7。 在 [29, 30] 中，F.-V. Kuhlmann 证明了关于有序阿贝尔群中初始段所关联的不变群的若干结果。特别地，由 [30, 引理 2.3] 可知，有序阿贝尔群 Γ 的初始段 ρ 的不变群满足： $0\in\rho$ 是包含于 ρ中的 Γ 的凸子群。

定义 5.8. 设 v、w是超域 F上的两个赋值。若 $\mathcal{O}_v\subseteq\mathcal{O}_w$，则称 w是 v的粗化 。

在域的经典赋值理论中，众所周知，对值群的任意凸子群，都可以关联一个粗化。值得注意的是，这一结果可以推广到赋值超域，而且其证明实际上更具概念性。

命题 5.9. 设 (F,v) 是一个赋值超域，且 Δ 是 vF的凸子群。 n

$$v_\Delta:F\to(vF/\Delta)\cup\{\infty\}$$
$$x\mapsto vx+\Delta$$

是 F 上的一个赋值，它是 v 的粗化。

证明。根据引理 3.4，$v\colon F \to \mathcal{T}(vF)$ 是一个超域满同态。此外，典范满同态 $vF \to vF/\Delta$ 可扩展为一个满射 $\mathcal{T}(vF) \to \mathcal{T}(vF/\Delta)$。由后者保序这一事实，很容易得出它是一个超域同态。由此可得，$v_\Delta\colon F \to \mathcal{T}(vF/\Delta)$ 是 v 与后一个映射的复合，它是一个超域满同态。这就证明了该陈述的第一部分。现在，由于

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{v_\Delta} &= \{x \in F \mid v_\Delta x \succeq 0_{vF/\Delta}\}\\ &= \{x \in F \mid vx + \Delta \succeq \Delta\}\\ &= \{x \in F \mid vx \geq 0 \text{ or } vx \in \Delta\}\\ &\supseteq \{x \in F \mid vx \geq 0\} = \mathcal{O}_v,\end{aligned}$$

我们得出，v_Δ 是 v的粗化。 □

在上述证明中，我们看到，如果 Δ 是有序阿贝尔群 Γ的凸子群，那么自然映射

$$\pi_\Delta : \mathcal{T}(\Gamma) \to \mathcal{T}(\Gamma/\Delta)$$

是超域的满同态。根据引理 3.4，它是 $\mathcal{T}(\Gamma)$上的一个赋值，其值群为 Γ/Δ。该赋值的赋值超环为

$$\mathcal{O}_\Delta = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma + \Delta \succeq 0 + \Delta\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \in \Delta \text{ or } \gamma > \Delta\}$$

其唯一的极大超理想为

$$\mathcal{M}_\Delta = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma > \Delta\}$$

由此可知，关于赋值 π_Δ，$\mathcal{T}(\Gamma)$的剩余超域 $\mathcal{T}(\Gamma)\pi_\Delta = \mathcal{O}_\Delta/\mathcal{M}_\Delta$ 与 $\mathcal{T}(\Delta)$同构。一个同构由映射给出

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\Delta) &\to \mathcal{T}(\Gamma)\pi_\Delta\\ \infty &\mapsto \infty\\ \delta &\mapsto \delta\pi_\Delta\end{aligned}$$

在接　　下来的结果中，我们证明 $\mathcal{T}(\Gamma)$ 的赋值（在等价意义下）都具有这种形式。

命题 5.10. 设 Γ 是一个有序阿贝尔群，并假设 $v\colon \mathcal{T}(\Gamma) \to \mathcal{T}(\Gamma')$ 是一个赋值。那么存在 Γ 的一个凸子群 Δ，使得 $\Gamma/\Delta \simeq \Gamma'$ 通过一个保序同构。

证明。令 $0' \in \Gamma'$ 表示群 Γ'的中性元，$\boxplus$ 表示 $\mathcal{T}(\Gamma)$的超运算，$\boxplus'$表示 $\mathcal{T}(\Gamma')$的超运算。设 $\Delta := v^{-1}(0')$。由于 v 是群 $\Gamma \to \Gamma'$的群同态，我们有 Δ 是 Γ的子群。此外，由于 v 是满射，根据群的第一同态定理，我们有 $\Gamma/\Delta \simeq \Gamma'$ 作为群同构。假设 δ_1、$\delta_2 \in \Delta$，且 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $\delta_1 \leq \gamma \leq \delta_2$。因此，$\delta_2 \in \gamma \boxplus \gamma$，于是 $0' = v(\delta_2) \in v(\gamma) \boxplus' v(\gamma)$，因为 v 是超域同态。另一方面，$\gamma \in \delta_1 \boxplus \delta_1$，因此 $v(\gamma) \in 0' \boxplus' 0' = [0', \infty]$。若 $v(\gamma) > 0'$，则$0' \notin [v(\gamma)\ \infty] = v(\gamma) \boxplus' v(\gamma)$，矛盾。由此可知，必有 $v(\gamma) = 0'$，从而$\gamma \in \Delta$。我们已证明 Δ 是 Γ的凸子群。还需证明群同构 $\sigma\colon \gamma + \Delta \mapsto v(\gamma)$是保序的。假设 $\gamma_1 + \Delta \prec \gamma_2 + \Delta$。这意味着$\gamma_1 < \gamma_2$和 $\gamma_2 - \gamma_1 \notin \Delta$在 Γ中成立。因此，$\{\gamma_1\} = \gamma_1 \boxplus \gamma_2$，进而 $v(\gamma_1) \in v(\gamma_1) \boxplus' v(\gamma_2)$。由于 σ是双射的，且 $\gamma_1 \neq \gamma_2$，我们有 $v(\gamma_1) \neq v(\gamma_2)$，所以 $v(\gamma_1) \in v(\gamma_1) \boxplus' v(\gamma_2) = \{\min\{v(\gamma_1)\ v(\gamma_2)\}\}$。这表明 $v(\gamma_1) < v(\gamma_2)$必在 Γ' 中成立，因此 σ 是保序的，证明完毕。□

接下来的结果由推论 3.22 得出。

推论 5.11. 设 Γ为有序阿贝尔群。 Γ 的凸子群与 $\mathcal{T}(\Gamma)$的赋值超环之间存在双射对应。

6. 由加法结构诱导的 Krasner 赋值

本节将上一节得到的一些结果应用于 Krasner 赋值超域。首先注意到，Krasner 赋值的粗化未必是 Krasner 赋值。

例 6.1. 设 Γ 是一个非平凡有序阿贝尔群，且有一个非平凡凸子群 Δ，并将恒等映射视为 Krasner 赋值 $v\colon \mathcal{T}'(\Gamma) \to \mathcal{T}(\Gamma)$。作为映射，其粗化

$$v_\Delta : \mathcal{T}'(\Gamma) \to \mathcal{T}(\Gamma/\Delta)$$

只是典范满同态 $\Gamma \to \Gamma/\Delta$，并将 ∞ 映射为 ∞。设 v_Δ 是一个范数为 ρ 的 Krasner 赋值，其中 ρ 是 Γ/Δ 的一个包含 $0_{\Gamma/\Delta}$的初始段。那么根据 (KVH2)，对所有 $\gamma \in \Gamma$，都有

$$\gamma > 0 \iff \gamma \in 0 \boxplus' 0 \iff \gamma + \Delta > \rho + (0 + \Delta).$$

另一方面，由于 $0_{\Gamma/\Delta} \in \rho$，任何正的 $\gamma \in \Delta$ 都会违背这一等价关系。

不过，我们有如下结果。

定理 6.2. 设 (F, v) 是一个 *Krasner*赋值超域，且 w 是 F上的 *Krasner*赋值 确定的 by

$$\mathcal{O}_w = \{x \in F \mid x - x \subseteq 1 - 1\}.$$

则 w 等价于与$\mathrm{ig}(\rho_v)$对应的 v 的粗化。特别地，与$\mathrm{ig}(\rho_v)$ 对应的 *Krasner*赋值 v 的粗化是一个 *Krasner*赋值。

证明。 我们证明这两个赋值具有相同的赋值超环。事实上，对于所有 $x \in F$，我们有 $vx + \mathrm{ig}(\rho_v) \succeq 0_{vF/\,\mathrm{ig}(\rho_v)}$ 当且仅当 $vx \in \mathrm{ig}(\rho_v)$ 或 $vx > \mathrm{ig}(\rho_v)$。在这两种情况下，将 (KVH2) 应用于 v，我们都有

$$y \in x - x \iff vy > \rho_v + vx \supseteq \rho_v \Longrightarrow y \in 1 - 1,$$

也就是说， $y \in \mathcal{O}_w$。 反过来， $vx + \mathrm{ig}(\rho_v) \prec 0_{vF/\,\mathrm{ig}(\rho_v)}$ 当且仅当 $vx \notin \mathrm{ig}(\rho_v)$ 且 $vx < 0$。因此，$\rho_v + vx \subsetneq \rho_v$，并且存在 $y \in F$ 使得 $vy \in \rho_v$ 且 $vy \notin \rho_v + vx$。将 (KVH2) 应用于 v，前者推出 $y \notin 1 - 1$，而后者等价于 $y \in x - x$。由此可得 $x \notin \mathcal{O}_w$。我们已经证明，$v_{\mathrm{ig}(\rho_v)}$ 和 w 在 F 中具有相同的赋值超环。该定理由推论 3.22 得证。□

推论6.3. 设 F 是一个具有两个 *Krasner* 赋值 v_1 和 v_2 的超域，它们的范数分别为 ρ_1 和ρ_2。那么，与$\mathrm{ig}(\rho_1)$ 对应的 v_1 的粗化，等价于与$\mathrm{ig}(\rho_2)$对应的 v_2 的粗化。

推论 6.4. 设(F, v) 是一个 *Krasner* 赋值超域。若 ρ_v 的不变群是平凡的，那么

$$\mathcal{O}_v = \{x \in F \mid x - x \subseteq 1 - 1\}.$$

推论6.5. 设 F 是一个具有上典范加法超群的超域。那么，由赋值超环在 F 上确定的 *Krasner* 赋值 v 的范数

$$\mathcal{O}_v = \{x \in F \mid x - x \subseteq 1 - 1\}$$

具有平凡的不变群。

推论 6.6。 设 F 是一个加法超群上典范的超域。存在唯一的（在等价意义下）*Krasner*赋值 v 定义在 F 上，使得 $\mathrm{ig}(\rho_v) = \{0\}$。

注记 6.7. 在赋值域模型论中，赋值域 (K, v) 的层级为 γ 的 RV-结构（引言中提及）本质上就是 Krasner 赋值超域[3] $K_\gamma := K_{\rho_\gamma}$，其中 $\rho_\gamma := \{\delta \in vK \mid \delta \leq \gamma\}$。由于 $\mathrm{ig}(\rho_\gamma) = \{0\}$，根据推论 6.4 可知，由 v 在 K_γ 上诱导的 Krasner赋值的赋值超环总是可以用超域语言定义，例如可用三元关系 $z \in x + y$ 来编码多值运算 $+$。

7. 进一步研究

本文提及了至少三个有趣的问题，但未作进一步探讨。下面简要介绍这些问题。

(1) 在多值情形下，(F, v)、vF和 Fv都可以描述为（赋值）超域，而且它们并非不同的结构。当 F 是一个域时，这一点尤其适用。(2) 文献中，无限超域且不是因子超域的例子并不多。本质上，只有 Massouros [39, 40] 的工作提供了这样的例子。在所有这些例子中，M 根据定义，对所有 $x \in M^\times$都有 $x + x = M \setminus \{x\}$。如果 v 是 M 上的赋值，且 $x \neq 1$，那么 x，$x^{-1} \in 1 + 1$，因此根据 (V3) 和推论 3.5（iii），对所有 $x \in M^\times$，必有 $vx = 0$。由此可知，M 只允许平凡赋值。任何具有非平凡赋值的超域是否都是因子超域？(3) 鉴于定理 5.2，超域 F 上的非平凡赋值是一个满同态，其像为满足以下三个条件的超域 H：

- H 特征为 2；
- H 具有 C-特征 1；
- H 具有严格性。从这个角度来看，赋值的像是一个相当特殊的超域。例如，人们可能会认为，有限（超）域只能容许平凡赋值的原因在于 H 的第三个性质，因为有许多有限超域的例子满足 $0, 1 \in 1+1$。我们推测，研究 H 严格性的弱化形式，可能会产生一种*广义赋值*的概念，该概念也有望应用于经典的单值情形，例如在有限域上使用（广义）赋值论方法。

参考文献

[1] R. Ameri、M. Eyvazi 和 S. Hoskova-Mayerova. 超域枚举的进阶结果。*AIMS* 数学，5(6):6552–6579，2020. [2] M. Baker 和 O. Lorscheid. 笛卡尔符号法则、牛顿多边形与超域上的多项式。《代数杂志》，569:416–441，2021.[3] S. A. Basarab. 亨泽尔赋值域的相对量词消去。《纯粹与应用逻辑年刊》，53 74，1991 1 51( ): – .[4] L. Bélair 和 B. Poizat. 马克·克拉斯纳文选。L'Harmattan 出版社，2019. [5] H. Bordbar 和 I. Cristea. Krasner 超环中素超理想的高度。*Filomat*，31(19):6153–6163，2017. [6] N. Bowler 和 T. Su. 双重分配斜超域与严格超群的分类。《代数杂志》，574:669–698，2021.[7] A. Connes 和 C. Consani. 从幺半群到超结构：探寻绝对算术。载于卡西米尔力、卡西米尔算子与黎曼猜想，第147–198页。Walter de Gruyter 出版社，柏林，2010.

[3]这个超域称为赋值 γ-超域，见 [32]

[8] A. Connes 和 C. Consani. 阿代尔类超环。《数论杂志》，131(2):159–194，2011. [9] I. Cristea 和 S. Jančić-Rašović. 复合超环。《奥维迪乌斯大学数学系列年刊》，21(2):81–94，2013. [10] A. J. Engler 和 A. Prestel. 赋值域。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2005. [11] J. Flenner. 亨泽尔赋值域中的相对可判定性与可定义性。《符号逻辑杂志》，76 1260，2011 4 1240( ): – .[12] P. Gładki. 多域与多环中的高阶序。《数学年刊》（西里西亚），(24):15–25，2010. [13] P. Gładki. 域的 Witt 等价：综述，特别关注超域的应用。载于《有序代数结构及相关主题》，《当代数学》第697卷，第169–185页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017.[14] P. Gładki. 多环、超环与超域综述。可查阅笔记：http://www.math.us.edu.pl/ pgladki/inedita/hypsurvey.pdf，未知。[15] P. Gładki 和 M. Marshall. 多环与超域上的高阶序与符号。《K-理论杂志》，10(3):489–518，2012. [16] P. Gładki 和 M. Marshall. 全局域上的函数域的 Witt 等价。《美国数学会汇刊》，369(11):7861–7881，2017. [17] A. C. Golzio. 代数与逻辑中超结构的简要历史综述。《南美逻辑杂志》，4 119，2018 1 91( ): – .[18] P. Jell、C. Scheiderer 和 J. Yu. 半代数集的实热带化与解析化。《国际数学研究通知》，(2):928–958，2022. [最初发表于2021年，第24期，19178–19208]. [19] J. Jun. 超环上的代数几何。《数学进展》，323:142–192，2018. [20] J. Jun. 超域几何。《代数杂志》，569:220–257，2021. [21] D. E. Kędzierski、A. Linzi 和 H. Stojałowska. 超域中的特征、C-特征与正锥。已投稿，2022.[22] M. Krasner. 关于 $\mathfrak{Y}$-进域的本原性。《数学》（克卢日），13(4):72–191，1937. [23] M. Krasner. 半实数与超度量空间。《巴黎科学院报告》，219:433–435，1944. [24] M. Krasner. 由特征为0的域逼近特征为 $p \neq 0$ 的完备赋值域。载于《1956年12月19日至22日在布鲁塞尔举行的高等代数讨论会》，比利时数学研究中心，第129–206页。Ceuterick 出版社，鲁汶；Gauthier-Villars 书店，巴黎，1957. [25] M. Krasner. 一类超环与超域。《国际数学与数学科学杂志》，6(2):307–311，1983. [26] W. Krull. 一般赋值理论。《纯粹与应用数学杂志》，167:160–196，1932. [27] F.-V. Kuhlmann. 关于加法同余与乘法同余的亨泽尔域量词消去。《以色列数学杂志》，85(1-3):277–306，1994. [28] F.-V. Kuhlmann. 超度量空间上的映射、亨泽尔引理以及赋值域上的微分方程。《代数通讯》，39(5):1730–1776，2011. [29] F.-V. Kuhlmann. 割分类的若干选取方法及其应用。载于《代数、逻辑与数论》，《巴拿赫中心出版物》第121卷，第85–106页。波兰科学院数学研究所，华沙，2020. [30] F.-V. Kuhlmann. 割的不变群与不变赋值环。编写中，初步版本可见：https://math.usask.ca/˜fvk/CUTS.pdf，未知。[31] K. Kuhlmann、A. Linzi 和 H. Stojałowska. 超域中的序与赋值。《代数杂志》，611 421，2022 399: – .[32] J. Lee. 超域、截断离散赋值环与赋值域。《数论杂志》，212:40–71，2020. [33] A. Linzi. 赋值域模型论中的代数超结构。博士论文，什切青大学（什切青大学），https://bip.usz.edu.pl/doktorat-habilitacja/16282/alessandro-linzi，2022. [34] A. Linzi 和 P. Touchard. 关于与赋值域相关的超域。已投稿。预印本见 arXiv:2211.05082，2022.[35] F. Marty. 关于群概念的一种推广。载于《第八届斯堪的纳维亚数学家大会》，斯德哥尔摩，第45–49页，1934. [36] F. Marty. 超群概念在非阿贝尔群研究中的作用。《巴黎科学院报告》，201:636–638，1935.[37] F. Marty. 关于与有理分式相关的群与超群。《高等师范学校科学年刊》（第3辑），53:83–123，1936.[38] C. Massouros 和 G. Massouros. 超群理论基础概述。《数学》，9(9): ，2021. [39] C. G. Massouros. 构造超域的方法。《国际数学与数学科学杂志》，8(4):725–728，1985.

[40] C. G. Massouros. 关于超环与超域的理论。*Algebra i Logika*，24(6)：728–742，749，1985年。[41] J. Mittas. 赋值典范超群与超赋值超群。*Math. Balkanica*，1：181–185，1971年。[42] J. Mittas. 关于超环与超域。*Math. Balkanica*，3：368–382，1973年。[43] A. Prestel 和 C. N. Delzell. 数理逻辑与模型论。Universitext。Springer，伦敦，2011年。简明引言，1986年德语原版的扩充译本。[44] A. Prestel 和 P. Roquette. 形式 *p-adic* 域，数学讲义第1050卷。Springer-Verlag，柏林，1984年。[45] R. Rota. 乘法超环（关于乘法超环）。*Rend. Mat. (7)*，2(4)：711–724（1983），1982年。[46] J. Tolliver. 局部域极限的两种方法之间的等价性。《数论杂志》，166 492，2016 473：–。[47] O. Viro. 热带几何中的超域 I：超域与去量子化。arXiv:1006.3034，2010年。[48] M. Vuković. 缅怀 Marc Krasner 教授。萨拉热窝数学杂志，12(25)(2, suppl.)：283–298，2016年。

斯洛文尼亚新戈里察大学信息技术与应用数学中心。电子邮箱：alessandro.linzi@ung.si