arXiv:2301.08655v1 [math.OA] 20 Jan 2023

量子环带上的导子实现

SLAWOMIR KLIMEK、MATT MCBRIDE 和 KAORU SAKAI

Abstract. 我们构造了量子环带上协变导子的紧参数子实现。

1. Introduction

本文旨在为非交换紧流形上的狄拉克型算子提供一些简单的例子。我们仅利用量子环带固有的几何结构——旋转、不变态、协变导子及其实现——来研究 D-bar 算子的类似物。在我们先前的论文 [3], 中，我们利用 APS 型边界条件在量子环带上构造了类似的 D-bar 型算子。这类算子的设计旨在模拟经典的阿蒂亚-帕托迪-辛格理论，与本文研究的这类算子不同，且几何性较弱。与上一篇论文一样，主要结果是证明我们的量子 D-bar 型算子具有紧参数子，这与紧流形上的椭圆微分算子类似。

我们关于量子环带的另一篇论文 [5] ，承接 [4], ，描述了相对于自然旋转协变的无界导子，以及通过不变态的 GNS 构造在希尔伯特空间中得到的这些导子的实现。结果表明，对于一大类边界条件，在任何由忠实正规不变态所对应的 GNS 希尔伯特空间中，都不存在具有紧参数子的此类实现。然而，正如 [6], 所展示的，如果我们放宽实现的概念，允许算子在不同的希尔伯特空间之间作用，那么对于量子圆盘，可以通过这种方式构造出一类有趣的量子 d-bar 算子实例，它们具有紧参数子。本文旨在将这些思路拓展到量子环带。

谱三元组是非交换几何中的一项关键工具 [1], ，因为它们使得人们能够运用分析方法研究量子空间。由于紧参数子性质是谱三元组条件的一部分，我们的论文 [4] 和 [5] 运用分析技术证明，一般而言，无法在量子圆盘和量子环带上通过 GNS 希尔伯特空间中的协变导子的实现构造谱三元组。关于量子圆盘的情形， [7], 指出了另一个拓扑原因 $\mathcal{T}$。具体而言，K-同调中的拉回映射 $K^0(C(S^1)) \to K^0(\mathcal{T})$是同构，因此限制映射 $K^0(\mathcal{T}) \to K^0(\mathcal{K})$ 是零映射。因此，任何定义在托普利兹代数上的谱三元组，限制到紧算子理想 $\mathcal{K}$ 时，在 K-同调中都应当是平凡的。然而，容易计算得出，协变导子的实现

日期：2023年9月22日。

与 $\mathcal{K}$中的一个极小投影非平凡配对，因此它们无法导出定义在 $\mathcal{T}$ 上的谱三元组。类似的论证似乎也适用于量子环带。

此外，正如 [2], 所指出的，存在一些根本原因，使得即使在经典几何中，对于边界上非常值的函数代数，APS边界条件也与谱三元组不相容，因为相应狄拉克型算子的定义域在该代数的表示作用下并不保持不变。

在 [6], 中，作者声称在量子圆盘上构造了一个偶谱三元组。然而，由于导子实现定义中的技术细节，这一说法并不成立。我们将在下一节阐明无界导子实现这一广义概念，以及它们在何种情况下会导出谱三元组。第 3 节中，我们建立记号并回顾文献 [5] 中的结果。主要结果定理 4.3 将在第 4 节证明。该定理指出，对于一类指数系数，在量子环带代数 A 中，由式 (3.6) 定义的算子 D 作为协变导子 δ （见式 (3.2)）在希尔伯特空间上的一种适当实现，具有紧参数子；事实上， D 的逆算子是紧的。

2. Implementations of Unbounded Derivations

设 A 是一个 C^*-代数， $\mathcal{A} \subseteq A$ 是一个稠密的 $*$-子代数，且 $\delta\colon \mathcal{A} \mapsto A$ 是一个导子。假设 H_1 和 H_2 是希尔伯特空间，分别携带 A 的表示，记作 π_1 和 π_2。下面给出一个自然的概念：在两个希尔伯特空间之间实现 A 中的导子，它推广了无界导子的通常实现概念。

δ 在 H_1 和 H_2 之间实现 δ 的内容包括以下各项：

- 一个稠密子空间 $\mathrm{dom}(D) \subseteq H_1$
- 一个实现算子 $D : \mathrm{dom}(D) \to H_2$
- 一个交织算子 $i : \mathrm{dom}(D) \to H_2$

使得

(1) $\forall a \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathrm{dom}(D)$ (2) $\forall a \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathrm{dom}(D)$ (3) $\forall a \in \mathcal{A}, \forall x \in \mathrm{dom}(D)$

$$\pi_1(a)x \in \mathrm{dom}(D)$$

$$i(\pi_1(a)x) = \pi_2(a)i(x)$$

$$D\pi_1(a)x - \pi_2(a)Dx = \pi_2(\delta(a))i(x)$$

上述定义的一个特殊情形是， $H_1 = H_2 = H$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi$ 和 i是恒等映射。此时，上述第二个条件显然成立，而第三个条件可写为

$$(D\pi(a) - \pi(a)D)x = \pi(\delta(a))x.$$

这与将导子实现为交换子的无界实现这一通常概念一致。

回忆一下，若存在有界算子 Q_1 和 Q_2，使得 $Q_1D - I$ 和 $DQ_2 - I$ 是紧的，则称闭算子 D 为 Fredholm 算子。算子 Q_1 和 Q_2 分别称为左参数子和右参数子。若 Fredholm 算子 D 的至少一个参数子（因而两个参数子皆）

和 Q_2 是紧的，则称其具有紧参数子。关于具有紧参数子的算子的一般性质，更多内容可见 [4] 的附录。若实现 $(\mathrm{dom}(D)\ D, i)$ 的算子 D 的闭包具有紧参数子，我们也称该实现具有紧参数子。

在附加条件下，导子的实现可以导出 A 上的偶谱三元组。具体而言，定义 $H = H_1 \bigoplus H_2$，令分次为 $\Gamma\big|_{H_1} = 1$，并令 $\Gamma\big|_{H_2} = -1$，以及表示 $\pi\colon A \to B(H)$，其将 A 表示到 H 中，定义如下:

$$\pi(a) = (\pi_1(a), \pi_2(a)),$$

并另外定义一个通常无界的算子 $\mathcal{D}$，作用于 H，如下:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & D \\ D^* & 0 \end{bmatrix},$$

我们看到，$\pi(a)$ 关于分次 Γ 是偶的，而 $\mathcal{D}$ 是奇的。若 $\mathcal{D}$ 是具有紧参数子的自伴算子，且交织算子 i 有界，那么导子实现定义中的条件意味着，对于所有 $a \in \mathcal{A}$，$\pi(a)$ 都保持 $\mathcal{D}$ 的定义域不变，并且交换子 $[\mathcal{D}, \pi(a)]$ 有界，这可通过简单计算得出。因此，在这些附加条件下，我们得到 A 上的偶谱三元组。

一种非常自然的导子实现可以通过以下方式从 GNS 表示得到。设 τ_1, τ_2 是 A 上的忠实态。令 H_1, H_2 为相应的 GNS 希尔伯特空间，它们是相对于内积完成 A 后得到的

$$(a, b)_i = \tau_i(a^* b), \quad i = 0, 1.$$

由于我们假设这些态是忠实态，A 在 H_1, H_2 中稠密。更确切地说，存在取值稠密的单射连续线性映射 $\phi_1\colon A \to H_1, \phi_1\colon A \to H_1$，将 A 嵌入 H_1, H_2。

希尔伯特空间 H_1, H_2 携带 A 的自然表示，该表示由左乘给出；对于 $a, b \in A$，我们有

$$\pi_i(a)\phi_i(b) = \phi_i(ab).$$

如前所述，设有一个稠密的 $*$-子代数 $\mathcal{A} \subseteq A$ 和一个导子 $\delta\colon \mathcal{A} \mapsto A$。那么，我们得到 δ 在 H_1 与 H_2 之间的如下实现:

- $\mathrm{dom}(D) := \phi_1(\mathcal{A}) \subseteq H_1$. 若 $x \in \mathrm{dom}(D)$，则我们将 $x = \phi_1(b)$ 记作某个 $b \in \mathcal{A}$，下文公式中将使用这一记法。
- $D(x) := \phi_2(\delta(b))$,
- $i(x) := \phi_2(b)$

通过直接计算即可验证，定义中的三个条件确实都满足，因此上述内容定义了 H_1 与 H_2之间的 δ 实现。

3. Quantum Annulus Preliminaries

我们回顾 [5] 下文中的记号和基本概念，并在多处使用该论文中的结果。

3.1. 量子环带。设 $\{E_l\}_{l\in\mathbb{Z}}$ 为 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的典范基， V 为定义如下的双边移位：

$$VE_l = E_{l+1}\,.$$

注意， V 是一个酉算子。令 $\mathbb{L}$ 为如下定义的对角标签算子 b y

$$\mathbb{L}E_l = lE_l\,.$$

根据函数演算，对于给定的函数 $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$，有

$$a(\mathbb{L})E_l = a(l)E_l\,.$$

这些恰好是相对于 $\{E_l\}$为对角的算子。算子（$\mathbb{L}$， V）充当非交换极坐标，并满足以下交换关系：

$$\mathbb{L}V = V(\mathbb{L}+I)\,.$$

令 $c(\mathbb{Z})$为上述 $a(l)$的集合，其中这些函数作为 $l\to\pm\infty$ 收敛；令 $c_{00}^{++}(\mathbb{Z})$为所有最终为常数的函数构成的集合，即满足以下条件的函数 $a(l)$：存在一个 l_0 ，使得$a(l)$在 $l\geq l_0$ 时为常数，在 $l\leq -l_0$时也为一个可能不同的常数。

令 A 为由 V 和 $a(\mathbb{L})$生成的 C^*-代数，即：

$$A = C^*(V, a(\mathbb{L}) : a(l)\in c(\mathbb{Z})) \tag{3.1}$$

这个代数称为量子环带。在 A 中，导子的最小合理定义域是 A 的以下稠密 $*$-子代数：

$$\mathcal{A} = \left\{ a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V^n a_n(\mathbb{L}) :\ a_n(l)\in c_{00}^{++}(\mathbb{Z}),\ \text{finite sums} \right\}\,.$$

3.2. 量子环带中的导子。设 $\rho_\theta:\ A\to A$, $0\leq\theta<2\pi$ 是 A 上由下式定义的一个自同构单参数群：

$$\rho_\theta(a) = e^{i\theta\mathbb{L}}ae^{-i\theta\mathbb{L}}.$$

由于 $\rho_\theta(a(\mathbb{L})) = a(\mathbb{L})$， $\rho_\theta(V) = e^{i\theta}V$，因此 $\rho_\theta(V^{-1}) = e^{-i\theta}V^{-1}$，自同构 ρ_θ 在 A 上定义良好，并且保持 $\mathcal{A}$。根据 [5]，中的命题 3.2，任意稠密定义且相对于 ρ_θ 协变的导子 $\delta:\ \mathcal{A}\to A$，即

$$\rho_\theta(\delta(a)) = e^{i\theta}\delta(\rho_\theta(a))\,,$$

具有以下形式：

$$\delta(a) = [U\beta(\mathbb{L}), a] \tag{3.2}$$

其中 $\{\beta(l+1)-\beta(l)\}\in c(\mathbb{Z})$。我们采用以下记号：

$$\lim_{l\to\pm\infty}(\beta(l+1)-\beta(l)) := \beta_{\pm\infty},$$

以下我们仅考虑具有 $\beta_{\pm\infty}\neq 0$ 的协变导子。因此存在常数 c_1 and c_2 ， 使得

$$c_1(|l|+1)\leq|\beta(l)|\leq c_2(|l|+1)\,. \tag{3.3}$$

3.3. 量子环带上的协变实现。这里我们考察导子 (3.2) 的协变实现。首先引入以下态族 τ_w : $A \to \mathbb{C}$ on A，定义如下:

$$\tau_w(a) = \mathrm{tr}(w(\mathbb{L})a)\,,$$

其中 $w(l) > 0$ 对所有 $l \in \mathbb{Z}$ 均成立，并且

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} w(l) = 1\,.$$

根据 [5]中的命题 4.3， τ_w 恰好是 A 上的 ρ_θ-不变正规忠实态。令 H_w 为利用态 τ_w在 A 上通过 Gelfand-Naimark-Segal （ GNS ）构造得到的希尔伯特空间。由于该态是忠实的， H_w 是关于由下式给出的内积的 A 的完备化:

$$\langle a, b\rangle_w = \tau_w(a^*b)\,.$$

简单计算可得如下精确描述:

$$H_w = \left\{ f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V^n f_n(\mathbb{L}) : \|f\|_w^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} w(l)|f_n(l)|^2 < \infty \right\}. \tag{3.4}$$

通过这一识别，我们自然有 $A \subseteq H_w$ ，因此包含映射 ϕ_w : $A \to H_w$就是恒等映射。另请注意， $\mathcal{A}$在 H_w中稠密。GNS 表示映射$\pi_w : A \to B(H_w)$由左乘给出:

$$\pi_w(a)f = af\,.$$

通过以下公式定义酉算子单参数群 V_θ^w: $H_w \to H_w$:

$$V_\theta^w f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V^n e^{in\theta} f_n(\mathbb{L})\,.$$

直接计算可得:

$$\pi_w(\rho_\theta(a)) = V_\theta^w \pi_w(a)(V_\theta^w)^{-1}\,,$$

因此，算子 V_θ^w 实现了自同构的单参数群 ρ_θ。

考虑另一个权 $w'(l)$，它可能与 $w(l)$ 不同，但满足相同的条件。仿照上一节，我们设

$$\mathrm{dom}(D) := \mathcal{A} \subset H_w\,,$$

并选取实现算子

$$i : \mathrm{dom}(D) = \mathcal{A} \to \mathcal{A} \subset H_{w'}$$

为恒等算子 $a \mapsto a$。显然，实现的前两个性质均得到满足。若算子 D : $H_w \supseteq \mathcal{A} \to H_{w'}$ 满足以下条件，则称其定义了协变导子 (3.2) 的协变实现：对任意 $a \in \mathcal{A}$，以及任意同时视为 H_w 和 $H_{w'}$ 中元素的 $f \in \mathcal{A}$ ，都有:

$$D\pi_w(a)f - \pi_{w'}(a)Df = \pi_{w'}(\delta(a))f\,,$$

并且，此外， D 满足:

$$V_\theta^{w'} D (V_\theta^w)^{-1} f = e^{i\theta} Df\,.$$

按照 [5]中的命题 5.2进行推导，可得以下结果。

命题 3.1. 存在一个序列 $\{\alpha(l)\}$ 满足

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\beta(l)-\alpha(l)|^2 w'(l) < \infty \tag{3.5}$$

使得任意协变实现 $D : H_w \supseteq \mathcal{A} \to H_{w'}$ 均具有如下形式:

$$Df = V\beta(\mathbb{L})f - fV\alpha(\mathbb{L})\,. \tag{3.6}$$

反之，对于任意满足 (3.5) 的 $\{\alpha(l)\}$，公式 (3.6) 定义了导子 (3.2) 的一个协变实现 $D : H_w \supseteq \mathcal{A} \to H_{w'}$。

以下我们假设，对每个 l，都有:

$$\alpha(l), \beta(l) \neq 0\,.$$

与 [4] 和 [5], 中的做法类似，写作

$$\alpha(l) = \beta(l)\frac{\mu(l+1)}{\mu(l)}$$

对于某个序列 $\{\mu(l)\}$，使得 $\mu(0) = 1$。

3.4. 傅里叶分解。为了进一步分析公式 (3.6) 中的算子 D，我们可以将其分解为傅里叶级数，并研究其傅里叶分量；这些分量是作用于带权 ℓ^2-空间之间的算子，定义如下:

$$\ell^2_w = \left\{ \{f(l)\}_{l\in\mathbb{Z}} : \sum_{l\in\mathbb{Z}} |f(l)|^2 w(l) < \infty \right\}.$$

我们有如下分解命题:

命题 3.2. 设 $f \in \mathrm{dom}(D)$。则

$$Df = \sum_{n\in\mathbb{Z}} V^{n+1}(D_n f_n)(\mathbb{L})\,,$$

其中 $D_n : \ell^2_w \supseteq c_{00}^{++}(\mathbb{Z}) \to \ell^2_{w'}$，其由下列公式给出:

$$(D_n h)(l) = \beta(l+n)h(l) - \beta(l)\frac{\mu(l+1)}{\mu(l)}h(l+1)$$

对于某个 $h \in c_{00}^{++}(\mathbb{Z})$。

证明。将 $f \in \mathrm{dom}(D)$ 写成其傅里叶级数，对其应用 D，并利用交换关系 $\mathbb{L}V = V(\mathbb{L}+I)$，即可得证。□

接下来，我们的目的是选择参数，使得 D 具有紧参数子。

3.5. 参数子。接下来，我们研究 D的一个形式上的参数子候选。按照上述定义，D在 c_{00}^{++}(ℤ)上的闭包记为 $\bar{D}$；而它在最终为零的函数空间c_{00}(ℤ)上的闭包记为 D_{00}。另请注意，D 保持c_{00}(ℤ)不变。我们有如下简单观察。

命题 3.3。若 $\{\alpha(l)\}$ 满足 (3.5)，则 $D = D_{00}$。

证明。注意，c_{00}(ℤ) $\subset$ dom(D) 是一个余维 2 子空间。因此，只需验证 1 和 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的特征函数属于 D 的定义域。用集合 $-N \leq l \leq N$、$\chi_N \in c_{00}$(ℤ) 的特征函数 χ_N 逼近 1，可知 $D(\chi_N)$ 在 ℓ^2_w 中收敛到 D(1)。根据 (3.5)，D(1) 属于 ℓ^2_w，这意味着 1 属于 D 的闭包。根据相同的论证，$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的特征函数属于 D 的定义域。□

令 Q_n 由下式给出：

$$(Q_n g)(l) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=l}^{\infty} \frac{\prod_{k=l}^{l+n-1} \beta(k)}{\prod_{k=j}^{j+n} \beta(k)} \cdot \frac{\mu(j)}{\mu(l)} g(j) & n \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{j=l}^{\infty} \frac{\prod_{k=j+n+1}^{j-1} \beta(k)}{\prod_{k=l+n}^{l-1} \beta(k)} \cdot \frac{\mu(j)}{\mu(l)} g(j) & n < 0. \end{cases}$$

这个表达式是通过对 D_n 求逆得到的，所用方法与 [3] 中命题 4.12 的计算类似。注意，我们有：

$$Q_n : c_{00}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{dom}(D),$$

由于 Q_n 的定义中的求和对于 $g \in c_{00}$（ℤ）是有限的，且结果最终为常数。D_n 与 Q_n 之间的关系将在下列陈述中说明。

命题 3.4. 对于每个 $f \in c_{00}$（ℤ），我们有：

$$D_n Q_n f = f \quad and \quad Q_n D_n f = f\,.$$

证明。公式可由直接计算得出。□

根据此命题，我们可以形式化地将 D 的逆算子定义为 $Q = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Q_n$。为使其定义良好，级数必须收敛。事实上，一旦我们验证了 Q 有界，，前两个命题便意味着 Q 是 D 的逆算子。

4. 结果

在本节余下部分，我们假设 β（k）$= k + \frac{1}{2}$。此外，我们只考虑权 $\{w$（l）$\}$、$\{w'$（l）$\}$ 的特殊取值，以及 $\{\mu$（l）$\}$ 的取值，即：

$$w(l) = e^{-a|l|}, \quad w'(l) = e^{-b|l|}, \quad \text{and } \mu(l) = e^{-(\gamma l)/2}, \text{ for } a, b, \gamma > 0\,.$$

需要注意的是，采用这些特定的选择 $\alpha(l) = e^{-\gamma/2}\beta(l)$ 后，命题 3.1 中的条件显然成立。通过简单的扰动论证，以下结果对范围大得多的一类系数同样有效，详见下一小节末尾的备注。

4.1. 参数子紧性。我们证明，对于每个 n， Q_n 都是希尔伯特-施密特算子，并验证其相应的希尔伯特-施密特范数在 n 趋于无穷时趋于零，这意味着 Q 是紧算子。为证明这一点，我们需要几个辅助引理。这些引理的证明将留到下一小节。

引理 **4.1**。对于 $0 \le l \le n$，定义如下乘积：

$$q_n(l) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(n - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 \left(l - \frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(l - n + \frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

于是我们得到恒等式：

$$q_n(l) = \frac{((2n-2l+1)\cdots(2n-3)(2n-1))^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l-1))^2} \text{ for every natural number } n\,.$$

此外， $q_n(l)$ 满足以下三个估计：

$$(1)\ q_n(l) \ge 1, \quad (2)\ q_n(l) \le 2l \begin{pmatrix} 2n \\ 2l \end{pmatrix}, \quad (3)\ \frac{q_n(j)}{q_n(l)} \le \begin{pmatrix} 2n \\ 2l \end{pmatrix} \text{ for } 0 \le j \le l\,.$$

引理 **4.2**。对于非负整数 j，定义如下求和：

$$J_n(j) = \sum_{k \ge 0} \frac{\left(k + j + \frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(k + j + n - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-\gamma k}}{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(j + n - \frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

于是对于 $n \ge 0$

$$J_n(j) \le \frac{2n+1}{\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{2n+1}}\,.$$

以下是本文的主要技术结果。

定理 **4.3**。假设 $\gamma > a > b$ 且

$$exp\left(-\frac{(a-b)}{2}\right) + exp\left(-\frac{\gamma + a}{2}\right) < 1\,.$$

那么 $Q_n : \ell^2_{w'} \to \ell^2_w$ 对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $\|Q_n\|_{HS} \to 0$ 都是希尔伯特-施密特算子，其中 $n \to \pm\infty$。因此，$Q = \sum_n Q_n$ 是 D 的逆算子，且是一个紧算子。

证明。注意， Q_n 的公式表明它是一个积分算子。因此，通过直接计算，我们可以求出希尔伯特-施密特范数：

$$\|Q_n\|^2_{\mathrm{HS}} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=l}^{\infty} \frac{\prod_{k=l}^{l+n-1} |\beta(k)|^2}{\prod_{k=j}^{j+n} |\beta(k)|^2} \cdot \frac{|\mu(j)|^2}{|\mu(l)|^2} \cdot \frac{w(l)}{w'(j)} & n \ge 0 \\ \displaystyle\sum_{j=l}^{\infty} \frac{\prod_{k=j+n+1}^{j-1} |\beta(k)|^2}{\prod_{k=l+n}^{l-1} |\beta(k)|^2} \cdot \frac{|\mu(j)|^2}{|\mu(l)|^2} \cdot \frac{w(l)}{w'(j)} & n < 0 \end{cases}$$

由于 β的选取是线性的，以下比值：

$$\left|\frac{\beta(l)\cdots\beta(l+n-1)}{\beta(l+n)\cdots\beta(l-1)}\right|^2 \text{ and } \left|\frac{\beta(j+n+1)\cdots\beta(j-1)}{\beta(l+n)\cdots\beta(l-1)}\right|^2$$

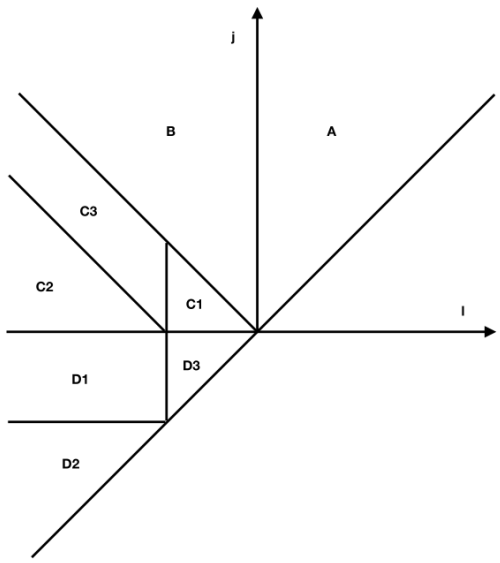
是多项式之比。因此，根据我们对指数型 μ、 w和 w'的选取，当且仅当以下条件成立时，$\|Q_n\|_{\mathrm{HS}}$ 存在：

$$\sum_{j\geq l}\left|\frac{\mu(j)}{\mu(l)}\right|^2\cdot\frac{w(l)}{w'(j)}<\infty\,.$$

然而，若 $\gamma>a>b$，这一点很容易得出。因此，对所有 $n\in\mathbb{Z}$， Q_n 的希尔伯特-施密特范数均存在。还需证明，当 $n\to\pm\infty$ 时，这些范数趋于零。我们只需研究 $n\geq 0$ 的情形，因为若 $n<0$，则对 $j\mapsto -l$、 $l\mapsto -j$ 和 $n\mapsto -n-1$ 进行变量替换后，便回到 $n\geq 0$ 的情形。因此，我们只需估计以下求和：

$$\|Q_n\|_{\mathrm{HS}}^2=\sum_{j\geq l}\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{e^{-\gamma(j-l)-a|l|+b|j|}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

该求和遍及所有 $j\geq l$。它可分解为四个主要区域上的求和，这些区域还将进一步细分，如下图所示：



我们有

$$\|Q_n\|_{\mathrm{HS}}^2\leq S_A+S_B+S_C+S_D,$$

为简化估计，我们允许这些区域重叠。这里的区域如下：区域 A：$j\geq l\geq 0$，区域 B：$j\geq -l\geq 0$、 $l\leq 0$，区域 C： $-l\geq j\geq 0$、 $l\leq 0$，以及区域 D： $l\geq j\geq 0$。我们将分别处理这些区域。为了便于进行不同的估计，在某些地方我们对边界进行了重复计数。

区域 A 和 B：注意以下观察：如果 $-j\leq l\leq j$ 对于 $j\geq 0$，那么对于任意 $r>0$，我们有 $(l+r)^2\leq(j+r)^2$。利用这一事实，我们可以估计：

$$\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2}\leq 1.$$

由此可得

$$S_A \leq \sum_{j\geq l\geq 0} \frac{e^{-\gamma(j-l)-al+bj}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2} \to 0 \text{ as } n\to\infty\,.$$

改变 $l\to -l$ 后，我们得到关于 S_B 的完全相同的估计，因此 $S_B\to 0$，正如 $n\to\infty$。

区域 C：$0\leq j\leq -l$。

首先，我们映射 $l\mapsto -l$，然后将此区域分为两个子区域：C1：$0\leq j\leq l\leq n$，以及 C1 的补集：$0\leq j\leq l$、$l\geq n$。在第二个区域中，我们对 $l'=l-n$ 进行变量替换，然后将 l' 替换为 l，进一步得到另外两个子区域：C2：$0\leq j\leq l$ 和 C3：$0\leq l\leq j\leq l+n$。

首先，在子-区域 C1：由于 $l\leq n$，利用引理 4.1 中的第一个不等式，我们有 e

$$\begin{aligned} S_{C1} &= \sum_{0\leq j\leq l\leq n} \frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l-n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{e^{-\gamma(j+l)-al+bj}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2} \\ &\leq \sum_{0\leq j\leq l\leq n} \frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l-n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{e^{-\gamma(j+l)-al+bj}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2} \\ &\leq \sum_{0\leq j\leq l\leq n} \frac{e^{-\gamma(j+l)-al+bj}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sum_{0\leq j\leq l<\infty} e^{(-\gamma+b)j-(\gamma+a)l} < \frac{\text{const}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

当 $n\to\infty$ 时，它显然趋于零。

在 C2 的情况下，我们得到

$$S_{C2} = \sum_{0\leq j\leq l} \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{e^{-(\gamma+a)n+(-\gamma+b)j-(\gamma+a)l}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

令 $l=k+j$，该和变为

$$S_{C2} = \sum_{j,k\geq 0} \frac{\left(k+j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(k+j+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{e^{-(\gamma+a)n+(-\gamma+b)j-(\gamma+a)(k+j)}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

应用引理 4.2，我们有

$$S_{C2} \leq \frac{(2n+1)e^{-(\gamma+a)n}}{\left(1-e^{-\frac{\gamma+a}{2}}\right)^{2n+1}} \to 0 \text{ as } n\to\infty\,.$$

在子区域 C3 中，我们有：

$$S_{C3} = \sum_{0\leq l\leq j\leq l+n} \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\frac{e^{-(\gamma-b)j-(\gamma+a)(l+n)}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

注意，在这一区域内，我们再次有

$$\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2} \leq 1.$$

因此，通过取较大的估计值，我们得到

$$S_{C3} \leq \sum_{0\leq l\leq j\leq\infty} \frac{e^{-(\gamma-b)j-(\gamma+a)(l+n)}}{\left(j+n+\frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sum_{0\leq l\leq j\leq\infty} e^{-(\gamma-b)j-(\gamma+a)(l+n)}$$

当 $n\to\infty$ 时趋于零。

区域 D： $l\leq j\leq 0$。

首先，我们映射 $j\mapsto -j$ 和 $l\mapsto -l$，于是总和变为

$$S_D = \sum_{0\leq j\leq l} \frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l-n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j-n+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^{\gamma j-\gamma l-a|l|+b|j|}}{\left(j-n-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

与区域 C 类似，我们将其分为三个子区域：D1： $0\leq j\leq n\leq l$，D2： $n\leq j\leq l$，以及 D3： $0\leq j\leq l\leq n$。

在子区域 D1 中，我们映射 $l\mapsto l+n$，得到

$$S_{D1} = \sum_{0\leq j\leq n,l\geq 0} \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j-n+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^{-(\gamma+a)n}e^{(\gamma+b)j-(\gamma+a)l}}{\left(j-n-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

将该和乘以并除以 $(\frac{1}{2})^2\cdots(n-\frac{1}{2})^2$，并利用引理 4.2，可得

$$S_{D1} \leq \frac{(2n+1)e^{-(\gamma+a)n}}{\left(1-e^{-\frac{\gamma+a}{2}}\right)^{2n+1}} \sum_{0\leq j\leq n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j-n+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^{(\gamma+b)j}}{\left(j-n-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

引理 4.1 中的第二个不等式意味着

$$\begin{aligned} S_{D1} &\leq \frac{(2n+1)e^{-(\gamma+a)n}}{\left(1-e^{-\frac{\gamma+a}{2}}\right)^{2n+1}} \sum_{0\leq j\leq n} \binom{2n}{2j} \frac{2je^{(\gamma+b)j}}{\left(j-n-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &\leq \frac{(2n+1)e^{-(\gamma+a)n}}{\left(1-e^{-\frac{\gamma+a}{2}}\right)^{2n+1}} \sum_{0\leq j\leq n} \binom{2n}{j} e^{\left(\frac{\gamma+b}{2}\right)j} \\ &\leq n(2n+1)\left(\frac{e^{-\frac{\gamma+a}{2}}+e^{-\frac{(a-b)}{2}}}{1-e^{-\frac{\gamma+a}{2}}}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

关于 a、b 和 γ 的条件意味着，当 $n\to\infty$ 时，上述不等式右侧趋于 0，因此，当 $n\to\infty$ 时，$S_{D1}\to 0$。

在子区域 D2 中，我们映射 $l\mapsto l+n$ 和 $j\mapsto j+n$，得到

$$S_{D2} = \sum_{0\leq j\leq l} \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^{-(\gamma+a)(l+n)+(\gamma+b)(j+n)}}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

写出 $l = k + j$，并利用引理 4.2，得到：

$$S_{D2} = e^{-(a-b)n} \sum_{0\le j,k} \frac{\left(j+k+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(j+k+n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(j+n-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{e^{-(a-b)j-(\gamma+a)k}}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$\le \frac{(2n+1)e^{-(a-b)n}}{\left(1-e^{-\frac{\gamma+a}{2}}\right)^{2n+1}} \sum_{0\le j} \frac{e^{-(a-b)j}}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2} < \infty .$$

与子区域 D1 中的情形一样，关于 a、b 和 γ 的条件意味着上述不等式中的最后一项在 $n \to \infty$ 时趋于零，因此 S_{D2} 在 $n \to \infty$ 时也趋于零。

最后，在子区域 D3 中，通过乘以并除以 $(\frac{1}{2})^2 \cdots (n-\frac{1}{2})^2$，，我们得到：

$$S_{D3} = \sum_{0\le j\le l\le n} \frac{q_n(j)}{q_n(l)} \cdot \frac{e^{-(\gamma+a)l+(\gamma+b)j}}{\left(j-n-\frac{1}{2}\right)^2} .$$

注意，在此区域中我们有 $n + \frac{1}{2} - j > n + \frac{1}{3} - j$。利用这一观察以及引理 4.1 中的第三个不等式，我们得到

$$S_{D3} \le \sum_{0\le j\le l} \binom{2l}{2j} \cdot \frac{e^{-(\frac{\gamma+a}{2})2l+(\frac{\gamma+b}{2})2j}}{\left(\frac{1}{2}\cdot 2j-n-\frac{1}{3}\right)^2} \le \sum_{0\le j\le l\le 2n} \binom{l}{j} \cdot \frac{e^{-(\frac{\gamma+a}{2})l+(\frac{\gamma+b}{2})j}}{\left(\frac{j}{2}-n-\frac{1}{3}\right)^2}$$
$$= \sum_{l\ge 0} \left(\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \frac{e^{(\frac{\gamma+b}{2})j}}{\left(\frac{j}{2}-n-\frac{1}{3}\right)^2} \right) e^{-(\frac{\gamma+a}{2})l} = \sum_{l\ge 0} \frac{1}{\left(\frac{l}{2}-n-\frac{1}{3}\right)^2} \left(e^{-(\frac{\gamma+a}{2})} + e^{-(\frac{a-b}{2})} \right)^l$$

其中最后一个求和是有限的。因此，根据勒贝格控制收敛定理，$S_{D2} \to 0$ 在 $n \to \infty$ 时成立。证明至此完成。□

注。由于具有紧参数子的算子的有界扰动也具有˜紧参数子，参见 [4], 的附录，因此例如，如果 $\beta(l) = \beta_\infty l + \beta(l)$ 且 $\alpha(l) = e^{-\gamma/2}\beta_\infty l + \tilde{\alpha}(l)$，其中 β_∞ 是非零常数，且 $\tilde{\alpha}(l)$ 和 $\tilde{\beta}(l)$ 有界，那么相应的算子 D 具有紧参数子。这一观察显著扩大了具有紧参数子的协变实现的类别。

4.2. 引理的证明。

证明。（引理 4.1）注意到

$$q_n(1) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(n-\frac{3}{2}\right)^2 \left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdots \left(n-\frac{5}{2}\right)^2 \left(n-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{(2n-1)^2}{1^2} .$$

类似地

$$q_n(2) = \frac{(2n-3)^2(2n-1)^2}{1^2 \cdot 3^2} .$$

由归纳法可得

$$q_n(l) = q_n(l-1)\frac{(2n-2l+1)^2}{(2l-1)^2} = \frac{((2n-2l+1)\cdots(2n-3)(2n-1))^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l-1))^2} . \tag{4.1}$$

对于第一个不等式，注意到由归纳公式 (4.1) 可知， $q_n(l)$ 关于 l、 $0 \leq l \leq n$ 先增后减，因此其最小值出现在端点处。这意味着 $q_n(l) \geq q_n(0) = q_n(n) = 1$，从而得到第一个不等式。

为证明第二个不等式，注意到

$$\begin{aligned} q_n(l) &= \frac{((2n-2l+1)\cdots(2n-3)(2n-1))^2}{(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2l-1))^2} \\ &\leq \frac{(2n-2l+1)(2n-2l+2)\cdots(2n-1)(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2l-2)(2l-1)} = \frac{(2n)!}{(2n-1)!(2n-2l)!} \\ &= \frac{2l(2n)!}{(2l)!(2n-2l)!} = 2l\begin{pmatrix} 2n \\ 2l \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

为证明最后一个不等式，我们作如下估计：

$$\begin{aligned} \frac{q_n(j)}{q_n(l)} &= \frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(l-n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(j-\frac{1}{2}\right)^2\cdots\left(j-n+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{(2j+1)^2\cdots(2l-1)^2}{(2n-2l+1)^2\cdots(2n-2j+1)^2} \\ &\leq \frac{(2j+1)(2j+2)\cdots(2l-1)(2l)}{(2n-2l)(2n-2l+1)\cdots(2n-2j+1)} = \frac{(2l)!}{(2j)!}\cdot\frac{(2n-2l-1)!}{(2n-2j-1)!} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 2l \\ 2j \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n-2j-1 \\ 2n-2l-1 \end{pmatrix}} \leq \begin{pmatrix} 2l \\ 2j \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

为了证明引理 4.2，我们还需要以下步骤。

引理 4.4。对于非负整数 j，定义以下求和：

$$I_m(j) = \sum_{k\geq 0} \frac{(k+2j+1)\cdots(k+2j+m)e^{-\frac{\gamma}{2}k}}{m!} \text{ for } m>0 \text{ and } I_0 = \left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{-1}.$$

那么，对于 $m \geq 0$，有：

$$I_m(j) \leq \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{m+1}}\cdot\frac{(2j+1)\cdots(2j+m)}{m!}.$$

证明。注意， $I_m(j)$ 满足以下约化公式：

$$\begin{aligned} I_m(j) &= \frac{(2j+1)\cdots(2j+m)}{m!} + e^{-\frac{\gamma}{2}}I_m(j) + \sum_{k\geq 1}\frac{(k+2j+1)\cdots(k+2j+m-1)e^{-\frac{\gamma}{2}k}}{(m-1)!} \\ &= \frac{(2j)(2j+1)\cdots(2j+m-1)}{m!} + e^{-\frac{\gamma}{2}}I_m(j) + I_{m-1}(j). \end{aligned}$$

这意味着 $I_m(j)$ 满足以下递推关系：

$$\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)I_m(j) - I_{m-1}(j) = \begin{pmatrix} 2j+m-1 \\ 2j-1 \end{pmatrix}.$$

递归求解可得

$$I_m(j) = \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{m+1}} \sum_{r=0}^{m} \left(\begin{array}{c} 2j+r-1 \\ r \end{array} \right) \left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^r .$$

由于 $1-e^{-\gamma/2} \leq 1$，我们得到

$$I_m(j) \leq \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{m+1}} \sum_{r=0}^{m} \left(\begin{array}{c} 2j+r-1 \\ r \end{array} \right) .$$

通过并联求和，我们有

$$\sum_{r=0}^{m} \left(\begin{array}{c} 2j+r-1 \\ r \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2j+m \\ m \end{array} \right) = \frac{(2j+1)\cdots(2j+m)}{m!}$$

因此结论成立。 □

证明。（引理 4.2）注意以下不等式

$$\begin{aligned} J_n(j) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(2k+2j+1)^2\cdots(2k+2j+2n-1)^2}{(2j+1)^2\cdots(2j+2n-1)^2} e^{-\frac{\gamma}{2}\cdot 2k} \\ &\leq \sum_{k\geq 0} \frac{(2k+2j+1)(2k+2j+2)\cdots(2k+2j+2n)}{(2j+1)^2\cdots(2j+2n-1)^2} e^{-\frac{\gamma}{2}\cdot 2k}. \end{aligned}$$

通过加入奇数 $2k+1$ 项进行过估计，我们得到：

$$\begin{aligned} J_n(j) &\leq \frac{(2n)!}{(2j+1)^2\cdots(2j+2n-1)^2} \sum_{k\geq 0} \frac{(k+2j+1)\cdots(k+2j+2n)}{(2n)!} e^{-\frac{\gamma}{2}k} \\ &= \frac{(2n)!}{(2j+1)^2\cdots(2j+2n-1)^2} I_{2n}(j), \end{aligned}$$

where $I_{2n}(j)$ 在引理 4.4 中定义。通过应用引理 4.4，我们得到 a t

$$\begin{aligned} J_n(j) &\leq \frac{(2n)!}{(2j+1)^2\cdots(2j+2n-1)^2} \cdot \frac{(2j+1)\cdots(2j+2n)}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{2n+1}} \\ &= \frac{(2j+2)(2j+4)\cdots(2j+2n)}{(2j+1)(2j+3)\cdots(2j+2n-1)} \cdot \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{2n+1}} \\ &\leq \frac{2j+2n}{2j+1} \cdot \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{\left(1-e^{-\frac{\gamma}{2}}\right)^{2n+1}} . \end{aligned}$$

□

References

[1] Connes, A.，《非交换微分几何》，Academic Press，1994。[2] Forsyth, I.、Mesland, B.、Rennie, A.，《稠密定义域、对称算子与谱三元组》，《纽约数学杂志》，20，1001 - 1020，2014。[3] Klimek, S. 和 McBride, M.，《量子域上的 D-bar 算子》。《数学物理分析与几何》，13，357 - 390，2010。

[4] Klimek, S.、McBride, M.、Rathnayake, S.、Sakai 和 Wang, H.，《量子域上的导子与谱三元组 I：量子圆盘》，SIGMA，013，1 - 26，2017年。[5] Klimek, S.、McBride, M. 和 Rathnayake, S.，《量子域上的导子与谱三元组 II：量子环带》，《中国科学：数学》，12，2463 - 2486，2019年。[6] Klimek, S.、McBride, M. 和 Peoples, J.W.，《关于量子圆盘上谱三元组的注记》，SIGMA，015，1 - 8，2019年。[7] Klimek, S.、McBride, M. 和 Peoples, J.W.，《量子圆盘的非交换几何》，《泛函分析年刊》，13，53，2022年Department of Mathematical Sciences,
Indiana University-Purdue University Indianapo-lis, 402 N. Blackford St., Indianapolis, IN 46202, U.S.A.电子邮箱：sklimek@math.iupui.edu
Department of Mathematics and Statistics, Mississippi State University, 175 President's Cir., Mississippi State, MS 39762, U.S.A.电子邮箱：mmcbride@math.msstate.edu
Department of Mathematical Sciences, Indiana University-Purdue University Indianapo-lis, 402 N. Blackford St., Indianapolis, IN 46202, U.S.A.电子邮箱：ksakai@iupui.edu