网络效率的流量加权优化如何产生复杂网络拓扑

Sebastiano Bontorin, [1,2] Giulia Cencetti, [1] Riccardo Gallotti, [1] Bruno Lepri, [1] 以及 Manlio De Domenico[3, 4, *]

[1] *Fondazione Bruno Kessler, Via Sommarive 18, 38123 Povo (TN), Italy*

[2] *Department of Physics, University of Trento, Via Sommarive 14, 38123 Povo (TN), Italy*

[3] *University of Padua, Via Francesco Marzolo 8, 35131, Padua, Italy*

[4] *Padua Center for Network Medicine, University of Padua*

(日期: 2023年1月23日)

交通与配送网络是一类近年来备受关注的空间网络。这些网络通常具有复杂结构，例如中心环路与外围分支并存；这种结构既可见于自然系统，也可见于地铁和铁路网络等人造系统。本研究探讨了城市人类交通中这些非平凡拓扑结构出现的条件。我们提出一种用于生成空间网络的最简模型，其中网络格充当空间基底，边速度和距离共同定义有效时间距离，用以量化探索城市空间的效率。通过优化联合网络路径，可以重现复杂网络拓扑；我们研究空间中两个节点之间的流量概率与相应出行成本如何相互作用并影响最终形成的最优网络。从城市交通的角度出发，我们利用人类移动模型模拟这些流量，从而获得起讫点矩阵。我们发现，使用简单格点时，所得最优拓扑会根据流量的空间范围，从树状结构转变为更规则的网络。值得注意的是，当网络针对小范围出行与通勤等典型长距离出行的异质移动模式之间的相互作用进行优化时，由分支与大型环路结构构成的网络会成为最优结构。最后，我们表明，该框架能够重现大伦敦地区地铁网络的统计空间属性。

arXiv:2301.08661v1 [physics.soc-ph] 20 Jan 2023

一、引言

城市是最引人入胜的人造复杂系统之一，展现出跨越不同尺度的复杂特征：从城市的结构和动力学行为，到社会经济因素随城市规模变化的标度关系 [1–5]。这些特征强烈暗示，看似迥异的城市背后可能存在普适的内在机制 [6–8]。在这些结构特性中，最重要的特性之一是交通网络[11–15]，它在城市环境中发挥着基础性的作用，调节人类动力学 [9, 10] 与出行之间复杂的相互作用。这类网络属于空间网络，其性质在过去二十年间已有大量文献研究 [14, 16]。具体而言，研究者从最优性条件和基于成本的泛函最小化[16], 的角度对其进行了探讨，以识别高效网络背后的特定特征。最优网络 [2] 和类能量最小化 [17]的概念，在物理学语言中有其自然的理解方式。使定义系统可观测量（例如自由能）之间权衡关系的泛函达到最小值的系统状态，是许多现实世界系统中最有可能被观测到的状态。尽管对于某些复杂系统（例如城市），这些物理变量无法从第一性原理推导出来，但这些类比和概念仍能提供一种有效的视角，并将这些系统嵌入一个空间，在其中，它们的结构与动力学之间的相互作用得以展现并得到更好的理解。人们研究了简单定律 [16, 18]，以更好地理解层级结构的出现以及交通流在网络状态中的作用。此外，全球和局部优化准则是人造系统演化的内在因素，政策制定者和规划者可以在其规划中采用其中一些准则 [14]。

交通网络通常以复杂结构为特征 [19–21] ，例如环路与分支并存 [22]，；这类结构既存在于自然系统 [23] 中，也存在于铁路和地铁网络等人造系统 [14]，中。这些结构是高效公共交通系统背后的关键拓扑元素 [20]。本研究探讨城市人类交通背景下这些非平凡结构 [18, 24] 涌现的条件。我们旨在通过对网络状态进行最优配置 [25] 来重建这些拓扑结构。在总成本固定且大容量连接数量有限的假设下（例如，可用于基础设施的支出受到限制），最优配置是分配连接速度或边权重，使所有节点对之间的联合出行时间总和达到最小。此外，由于这些网络构成了城市探索/导航中的交通动脉

* 通讯作者：manlio.dedomenico@unipd.it

运输，因此我们研究交通流 [18, 26] 在衡量特定连接边（路径）集合的重要性时所起的作用。我们对城市形态结构进行建模，这些结构会在空间中形成异质的人类移动分布，并使这些最优网络偏向于趋近特定的拓扑特征。我们旨在探究这些优化过程重现上述实证结构所需的最低要求和条件。

与近期关于网络效率的研究不同，我们采用了一些根本不同的建模选择。我们以探索网络所需的时间来评估效率，其中边权重代表旅行速度。我们还根据节点之间的交通概率对路径效率进行加权。底层网络格（在后续章节中以最简单的三角晶格形式表示）充当基底，使网络得以演化 [27] 并可能呈现真实世界系统典型的网络拓扑特征。在这一框架下，我们展示了如何通过引入简单概率来偏置空间中各点之间的最优效率，从而迫使系统在树状拓扑与类似简单格点的网络之间发生转变。我们还表明，对类交通流的建模会促使空间中出现优先共享路径。这些共享路径的最优配置会形成复杂拓扑，最终呈现真实系统中可见的特征。例如，多层交通运输所特有的边速度分布双峰性，以及地铁系统典型的带有环路和分支的中心核心， [20, 22]都能在模型中重现。最后，我们将该模型应用于大伦敦地区，发现最优模型与伦敦地铁网络存在相似之处。

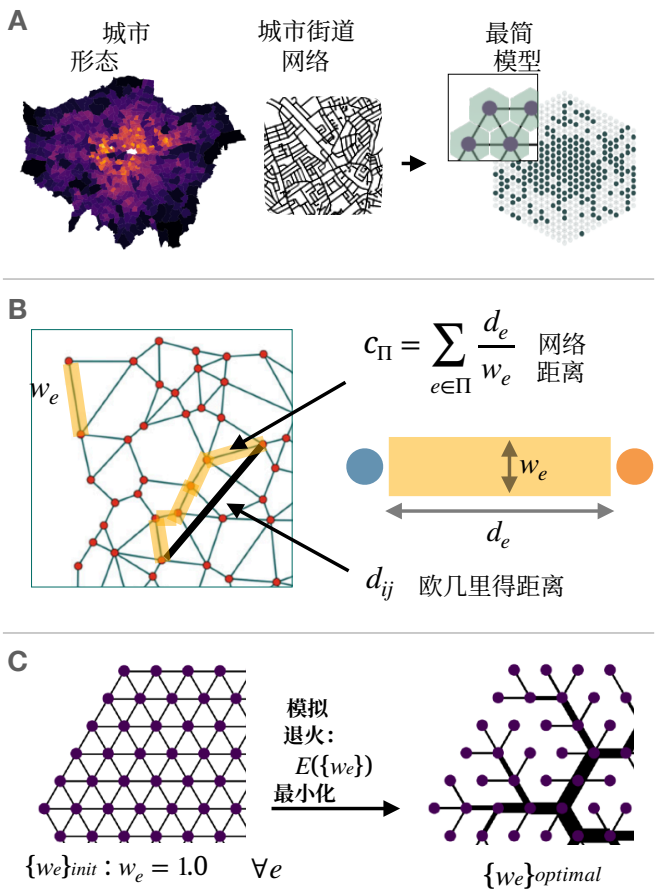


图 1. **城市形态的空间网络模型**：**A)** 将人口分布和城市交通网络映射为一个最简空间网络，其中节点表示城市特征。示例展示了六边形铺砌映射到三角晶格。**B)**基于网络的距离$c_{\Pi_{ij}}$ 与欧几里得距离 d_{ij}；边权重/速度 w_e 以线宽表示。**C)** 通过模拟退火优化格点基底的边权重，以揭示最优交通网络的空间特征。

II. 城市空间形态框架

我们在此提出一个空间网络通用框架，旨在还原城市形态的最简模型，同时编码交通运输特性和人口、兴趣点（POI）密度等城市特征。为此，我们从网络基底的定义入手，它可有效地将空间维度离散化。其最简单的形式是二维六边形镶嵌 [28]及其平面对偶——三角晶格。更形式化地说，在这一网络基底中，空间中的每个镶嵌单元

由一个节点表示，并与其一组相邻节点相连（见图 1）。节点/铺砌单元之间存在物理边 i 和 j 则编码在邻接矩阵 A 中，其中 $A_{ij} = 1$ 表示这些区域在格点中相邻。因此，距离和指标均基于这一网络基底计算，并受到节点特征的影响。

该网络的节点可以编码城市尺度上的空间特征，例如给定节点的人口或设施密度。因此，我们获得了城市形态结构的最简表示（见图 1），以及一个作为交通系统发挥作用的网络基底，并可对其进行优化以生成最优交通网络 [27]。交通网络上的基于路径的时间距离，是我们旨在最小化的基本度量。基于网络的距离这一概念，其依据在于这样的假设：在公共交通背景下，人们在城市系统中的出行并非考虑地理距离，而是评估出发与到达之间的旅行时间。具体而言，多层交通网络[11, 21] 由具有层级组织的各层构成，且各层的特征速度不同 [29]。

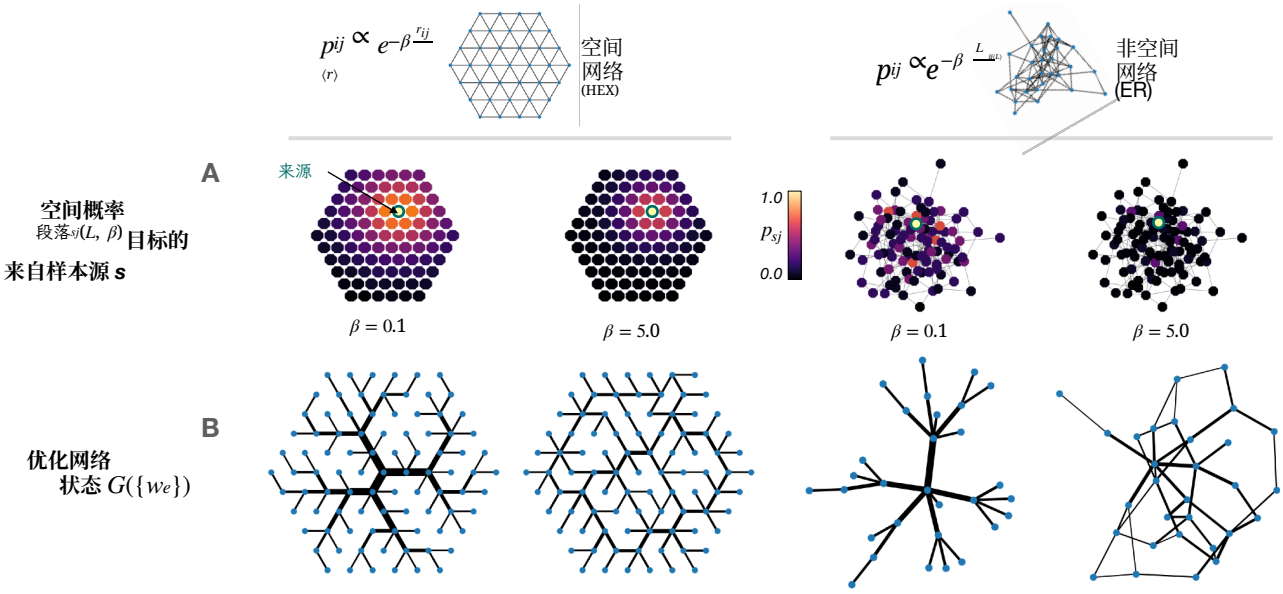


图 2. **合成网络的优化**：研究了 β 对两种网络模型的影响：三角晶格（HEX）和非空间网络（ER）。**A)** 在两种不同的 β 值下，目标节点从源节点（黄色）出发的概率热图 p_{ij}：随着惩罚参数增大，距离较远的节点受到更大的惩罚，流趋向于停留在源节点附近。**B)** 对应的优化网络状态样本：当流不受距离影响时（$\beta = 0.1$），源节点以大致相同的概率将网络中的所有其他节点作为目标，最优网络趋于形成树状结构。随着 β 增大（$\beta = 5.0$），行程概率更加局部化，最优结构中开始出现环路。

因此，有效的时间距离对于确定城市空间探索中的可达性和效率至关重要。

在此模型中，我们将 e 表示为网络中的一个 $edge$，并将 w_e 表示为相关边的边权重，可视为交通网络中该边的速度。d_e 是边 e 所连接节点之间的欧几里得距离；此处，边权重以连线的宽度直观呈现。在将此框架推广至边长各异的随机空间网络时，边的距离信息可能会发挥作用。对于一般的非空间网络，由于不存在空间距离的概念，可以通过固定 $d_e = 1$来调整模型。最后，我们将 $\Omega^{\Gamma_{ij}}$ 定义为连接这两个节点的路径集合。随后，我们最大化这一底层基质的效率。两节点之间的交通效率 $i-j$ 以时间成本 [30], 计算；我们不考虑拥堵，但可在此框架的后续扩展中纳入拥堵因素。我们寻找累积时间最短的路径（即一组从源节点 i 出发并到达目的节点 j的连接边），其中，选择边 e 所引入的时间延迟以其欧几里得距离与边权重之比衡量，边权重代表速度的近似值。图 1 展示了示意图。这里用 $G(\{w_e\})$ 表示网络构型及其对应的边权重集合 $\{w_e\}$。因此，我们旨在确定权重 $\{w_e\}$的分配，使其在网络

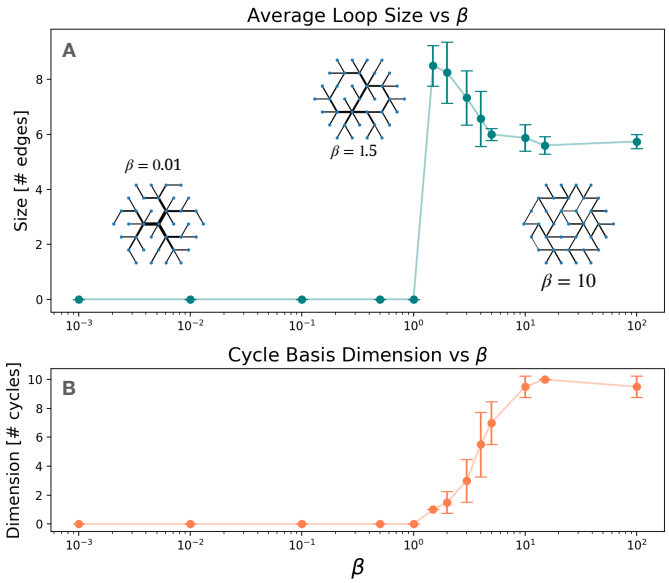


图 3. **环维数与** β：使用最小环基作为网络的可观测量，以研究环路的出现。每个点显示中位数及其绝对偏差。**A)**构成环基的环的平均大小（边数）。**B)** 环基维数，即环路数量。随着远距离移动的概率降低（β 较大），最优网络从树状结构转变为具有小环的类晶格结构。在所研究的三角晶格中，当 $\beta \sim 1.0$ 时，观察到环基性质发生转变，此时最优网络形成具有大环的中间状态。

交通效率之间实现权衡，方法是最小化节点对 $i-j$之间的旅行成本集合 $\{c_{ij}\}$，其中每个元素 c_{ij} 定义如下：

$$c_{ij}(\{w_e\}) = \min_{\Pi \in \Omega_{\Gamma_{ij}}} \left[\sum_{e \in \Pi_{ij}} \frac{d_e}{w_e} \right], \tag{1}$$

在缺乏更多信息的情况下，优化过程等同于最小化出行成本 $\sum_{ij} c_{ij}$。这里我们引入一个新要素，将网络时间距离的优化与节点对之间的交通流或概率结合起来。在实际处理起讫点（OD）矩阵时，这一概率可以映射为两点之间的交通流 T_{ij}。T_{ij}表示一个人从节点 i 前往节点 j的概率；加入出发节点和目标节点的人口信息后，即可推算出交通流。T_{ij} 实际上起到了排序作用，用于衡量网络中特定路径的重要性。由于连接不同节点对的路径可能共享网络基底中的边，共享路径共同优化网络效率，因而形成复杂拓扑。因此，流量加权的交通运输效率为：

$$E(G(\{w_e\})) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} T_{ij} \cdot c_{ij}(\{w_e\}) \tag{2}$$

我们还要求总网络基础设施成本保持不变，该成本定义为单位长度的边权重累积总和乘以边距离 $C_G = \sum_{e \in G} d_e w_e$。这是对标准优化过程的一种推广，因为当 $T_{ij} = 1, \ \forall (i, \ j)$ 时，所有可能的节点对 $(i, \ j)$ 的效率均以同等重要性进行优化，此时最小生成树通常代表最优解[14]。

在探讨类似交通流（OD）的流量问题之前，我们先研究 T_{ij} 的一个更简单的定义，以便在不考虑其他节点特征的情况下，理解距离在优化过程中的作用：

$$T_{ij} \propto e^{-\beta d_{ij}}. \tag{3}$$

系数 β 在方程3 中作为惩罚参数引入，用于确定计算概率时成对距离 d_{ij} 的相关程度。我们可以将其理解为网络 $\beta \sim \frac{1}{d_0}$ 中某个主体的特征出行距离的倒数。尽管可以采用多种将距离纳入空间依赖概率的方法（例如幂律 $T_{ij} \sim d_{ij}^{-\gamma}$），我们关注指数依赖形式，因为它是以下内容的基础性结果：

引力流的最大熵推导 [31]。引力流的引入将在第IV节讨论。

接下来，我们介绍该模型在简单基底上的应用，以探究在缺少城市空间特征的情况下 β 的作用。

III. 简单网络基底的优化

为了评估特征距离参数 β 对特定拓扑结构形成的作用，我们针对一组空间和非空间网络生成模型计算网络统计量。由于在分析中考虑连通性 [28], 时，六边形铺砌更为合适，因此我们研究的第一个模型是三角晶格。选择它的原因是，它是六边形格点的平面对偶 [14, 32] 。因此，当空间被离散为六边形网格时，连接各网格中心的空间网络就是三角晶格；该晶格具有各向同性，且其等价简并路径少于矩形晶格。为直接呼应六边形铺砌，我们将此网络称为 HEX（见图 2）。我们还将分析扩展到随机网络模型的情况，其中节点并未嵌入度量空间。具体而言，我们研究一种 Erd˝os-R´enyi (ER) 网络拓扑，其中节点间的距离 L_{ij} 可通过拓扑最短路径距离来定义 [33]。

作为第一个基准，我们将流量简化为空间概率 $T_{ij} = p_{ij}$，它随距离呈指数衰减，且不考虑节点特征；由此得到的 p_{ij} 方程为：

$$p_{ij} = \frac{e^{-\beta d_{ij}/\langle d \rangle}}{\sum_{k \neq i}^{N-1} e^{-\beta d_{ik}/\langle d \rangle}} \tag{4}$$

其中，$\langle d \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i \neq j} d_{ij}$ 是网络中各点之间的平均距离，并用作归一化因子（对于空间网络，为欧几里得距离 $\langle r \rangle$；对于 ER 网络，为拓扑距离 $\langle L \rangle$）。

因此 p_{ij} 刻画了单个源节点对附近空间的探索程度。图2展示了目标概率的空间依赖性，以及由此产生的最优拓扑示例。

对于一系列 β 取值，我们在这些模型的一个系综上执行优化过程。为评估复杂结构的涌现，我们观察最优状态下出现的环路数量。在空间网络中，这一指标尤为重要，因为环路会打破树等最优结构所带来的对称性。我们计算最小环基集，作为观察环路涌现的指标 [36]：也就是说，该集合包含最少数量的环路（单个环路由图中定义一条闭合路径的一组边编码），使得网络中的任何其他闭合路径都可以

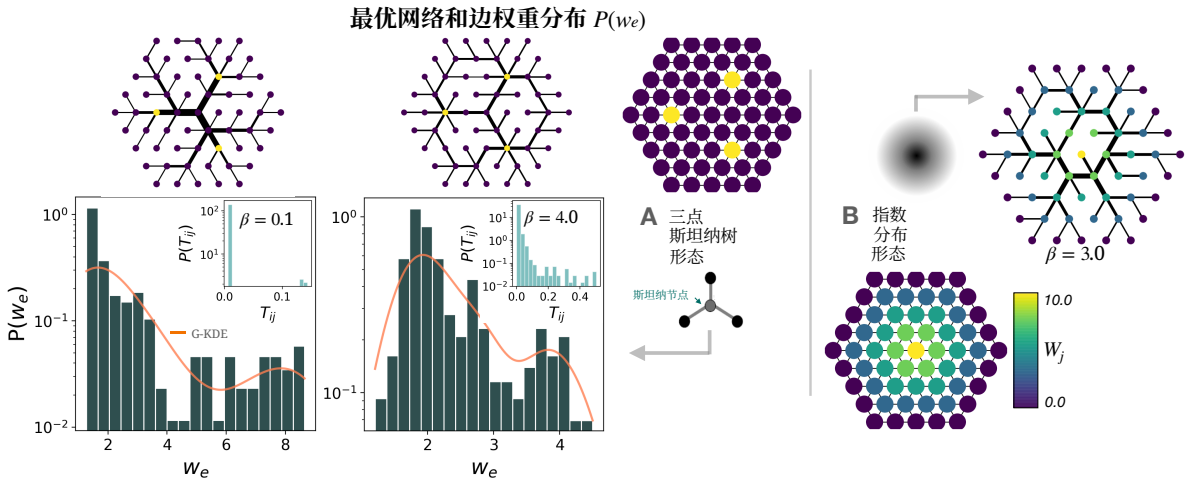


图 4. **所研究的城市形态与吸引力分布最简模型（三点和指数衰减）：** 兴趣点（POI）的形态，其中吸引力 W_j 以颜色深浅表示（黄色代表较高吸引力）。优化后的边权重分布 $P(\{w_e\})$呈现双峰特征，揭示了最优交通网络的多层结构：当短距离流量与通勤前往城市中心时典型的长距离交通流相结合时，即会形成这种结构（插图 $P(T_{ij})$，其中大流量处的峰值由兴趣点导致）。橙色曲线表示高斯核密度估计，仅作视觉辅助。**A**）兴趣点呈三点多中心分布，类似于三点的欧几里得斯坦纳树问题 [34, 35] 。网络通过 $\beta = 0.1$ 和 $\beta = 4.0$进行优化，结果显示，连接兴趣点的分支与外围的大环路同时出现。**B**）中心处 w_j 呈指数衰减时的最优状态和速度分布，以及一个示例结果 $\beta = 3.0$。最优拓扑的特征是一个中心环路与多个分支相结合。

通过组合该环基重构 [36]。具体而言，我们研究环基维数（构成该集合的环路数量）和平均环路大小随一系列 β 取值的变化。该指标能够量化空间拓扑特征的涌现，这些特征使最优状态有别于树状结构。这些合成系统的结果见图3。补充材料（SM）图 1–2 还展示了其他箱线图。当流量概率在空间中的所有节点间均匀分布时（此时 $\beta \to 0$ ，因此距离并非方程4中的惩罚变量），网络会恢复树状拓扑；而当较远目标被探索的可能性降低、网络整体针对短途行程进行优化时，环路便会涌现。值得注意的是，在图3中约 $\beta \approx 1.0$处，我们观察到所研究的 HEX 晶格中平均环路大小发生了显著转变：随着建立直接连接变得更加高效，远离树根的相邻节点之间开始出现连接。在这一 β 区间内，树状拓扑无法保证外围节点获得最高效的配置，因为这些节点的高概率目标位于其直接邻域内（见方程4）。因此，在优化过程中，彼此位于不同分支的叶节点之间会出现边：这最终打破树结构，并促使大尺度环路涌现。最终，随着网络针对节点只以格点中的直接相邻节点为目标进行优化，最优网络会收敛为具有小环路的更简单结构。最后，在补充材料第 2 节中，我们展示了一个应用案例：目标节点位于格点外围，模型在该案例中再现了叶脉结构模式 [14, 37]。

IV. 空间吸引力与类交通流

在城市系统中，需要设计最优的交通网络，以容纳流向特定关注区域的交通流 [26] ，例如流向商业和商务用地密度较高的区域。因此，当城市网络中存在吸引力较强的节点（兴趣点）时，交通流会偏向这些节点。为此，我们将效率优化框架扩展到更贴近现实的情形，即在城市网络上考虑更真实的交通流。在城市情境中，我们采用空间交互模型来模拟更接近交通流的流动。在这些模型中，流量通过类引力方程计算得出： $T_{ij} \propto p_i p_j \exp(-\beta d_{ij})$ [10] 该方程可通过熵最大化从第一性原理推导得出，因此代表了最可能观测到的一组流量。在城市探索的语境下，引力方程可映射为一个空间交互模型 [31, 38]其中，具有一定吸引力的节点W_j 相互竞争，成为交通流的潜在目标：

$$T_{ij} \propto \frac{1}{Z} P_i W_j \exp(-\beta d_{ij}) \tag{5}$$

归一化 Z 考虑了所有可能的出行替代方案 $\sum_k W_k \exp(-\beta d_{ik})$。$P_i$ 是节点 i 的人口密度， W_j 则表示对节点 j 作为潜在目标的收益/吸引力的适当定义[38]。因此，T_{ij} 是以下人口所占的比例：

节点 i 平均通勤/出行至节点 j。为了更好地理解节点吸引力的作用，我们先采用最简单的假设，即所有节点的人口分布均等： $P_i = 1.0\ \forall i$；下一节将通过伦敦案例研究介绍更贴近现实的人口分布。

我们将这些模型应用于三角晶格，以揭示当交通概率偏向某些具有较高吸引力的节点（模拟兴趣点）时涌现的最优拓扑结构，并研究节点 W_j的两种空间配置。在第一种配置 W_j 中，三个节点（兴趣点）被赋予较高 [34, 35]，并放置在一个等边三角形的顶点上。我们研究这种三点分布，因为它模拟了城市中心的典型多中心分布，并且可以与欧几里得斯坦纳树问题的解联系起来 [35] 。斯坦纳树是一类问题：给定平面上的 N 个点，目标是找出连接这些点且总长度最短的一组线段。在我们的情形中，解位于格点的中心节点，该节点即为费马点 W_j，也是连接高 W_j吸引力 W_j三角形三个顶点的斯坦纳节点，如图4 A 面板所示。第二种情形是 W_j 从中心向外呈指数衰减的分布，模拟更符合现实的城市单中心结构形态。两种形态如图4所示。

我们发现，由于网络中的节点会影响交通流，交通流因此分化为两种类型，这一点可从图 4 A 的插图中看出：受 POI 极化影响，一类是近距离交通流，另一类则是与之配对的远距离交通流。图 4展示了以下参数值下的最优解：$\beta = 0.1$，4。0。有趣的是，最优解的特点是三条中心线从中心向外分支（因此中心充当斯坦纳节点），并连接三个吸引力较强的节点，这与斯坦纳树问题的解颇为相似。此外，在交通流更局域化的情况下（$\beta = 4.0$），这些中心线还会与连接较远节点的大尺度环路配对。我们还发现，交通流的异质性会使速度分布中出现第二模态 w_e （见图 4）。最优 P（w_e）中的两个峰可解释为两种不同的速度水平，这表明整个过程可分解为两种截然不同的机制，并可映射为一个双层网络：一层具有较高容量，承载长距离／通勤轨迹；另一层速度较低，承载短程路径。这两层在概念上可以分离，这提示该模型有可能拓展至多层网络。

V. 大伦敦地区：地铁系统生成模型

本节将真实城市结构的数据纳入模型，以此拓展模型的应用。具体而言，我们在框架中对大伦敦地区（GLA）的形态进行建模，并应用效率优化过程，旨在了解：结合现实流量，对空间底[22]层进行时间效率优化，是否足以生成一个具有类似拓扑特征（例如由外围分支相连的中心核心）的交通网络，类似于伦敦地铁系统。为将模型拓展至真实城市场景，我们首先从 [39] OpenStreetMap [40] 获取便利设施的分布，并将空间中的点密度作为估算 W_j 网格吸引力的代理指标。我们使用 2014年 大伦敦地区的庭院人口普查数据来还原人口密度 P_i。随后，将这些密度映射到 Uber 的 H3 网格，以六边形网格实现空间离散化，从而将其直接映射到三角晶格上的节点，如前文各节所述示例。由此，我们具备了模拟式（ T_{ij} 5）中的空间交互流所需的要素。图 5 说明了如何将描述伦敦形态的城市数据纳入模型，并展示了空间交互模型生成的起讫点矩阵。为复现现实特征，我们对边权重设定上限，使权重分布在优化过程中受到限制： $w_e \in (0,\ w^*)$。这样可以更好地模拟现实多层系统的速度上限。有关模型中数据还原与整合的进一步说明，请参见补充材料（ SM）第 3 节。我们发现（见补充材料图 6），该 $\{w_e\}$ 分布呈双峰形状，因此可以在由高速边构成的子图中分析生成的网络。图 5C 面板展示了该子图的一个示例 $\beta = 0.35$ 。从视觉上可以观察到，网络被划分为由外围分支相连的中心核心这一最优状态。

将模型中的高速边子图与大伦敦地区的真实地铁网络进行比较[21] ，以评估最优结构与真实地铁系统之间的相似性。我们通过空间标度律来量化这种相似性 [22]，这些标度律有助于凸显中心核心结构的复现：该结构以环路为特征，并与从核心分出的近似一维线状分支相连。我们利用剖面函数研究节点（车站）的分布 $N(r)$，该函数用于量化距离网络重心 r 为 [22]处的车站总数；网络重心计算为所有车站节点位置的平均值 [22]。图6展示了真实网络和模拟网络的标度分析结果。两个标度区间表明核心与分支彼此分离：核心中心的 r^2 标度关系，以及当 $r > r_C$时由一维分支产生的第二种趋势，其中 r_C 是核心结构的半径。第二种趋势可通过 $N(r > r_C$的积分曲线进行解析计算，并可用幂律 $r^\gamma(\gamma = 1.25 \pm 0.02$近似（见补充材料第4节），如文献 [22]所示。曲线(r与真实网络相符，并证实了标度关系

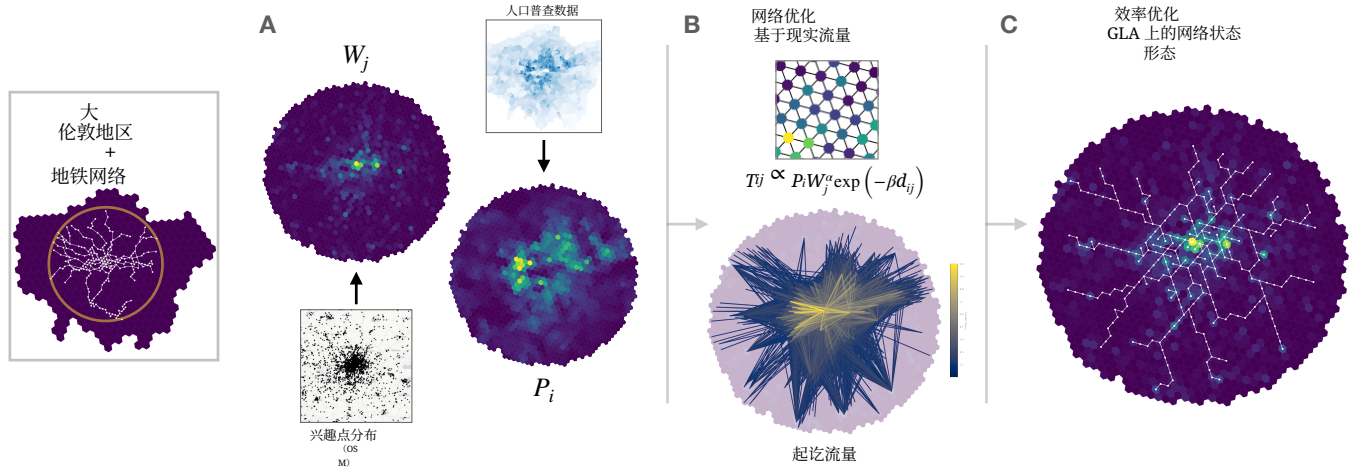


图 5. **大伦敦地区地铁系统的最优网络模型**：将具有现实交通流的效率优化应用于大伦敦地区的城市结构。**A)** 从人口普查和 OSM 获取城市形态数据，并将人口和兴趣点密度映射到 H3 网格。**B)** 将数据映射到三角晶格上，节点具有可用于计算类交通流的特征；图中展示了一个起讫点矩阵示例，其中 T_{ij} 由 $\beta = 0.35$计算得出。**C)** 伦敦模型的最优网络状态，其中仅显示对应于第二模态的边和节点（见补充材料第 3 节）。可以直观地看到由环路构成的中心核心结构，以及与之相连的外围分支。

定律预测来自 [22]。

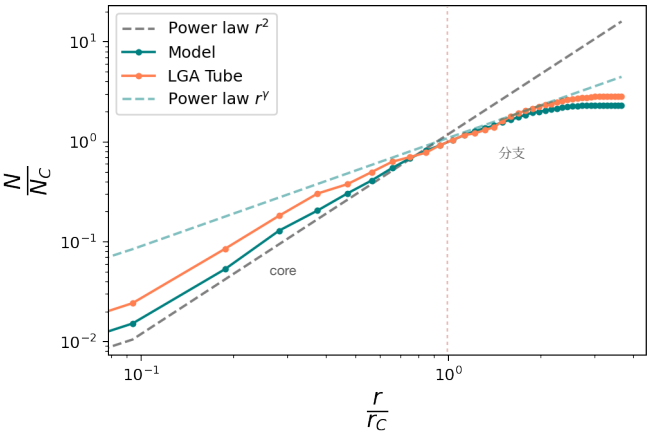


图 6. **大伦敦地区地铁站的标度性质**：车站数量（最优离散网络中的节点数量（见补充材料第 3 节），用于重现大伦敦地区地铁系统）随与重心距离变化的曲线。将模型中 $N(r)$ 曲线的标度与真实网络系统进行比较。验证了 [22] 中预测的标度性质，发现对于由核心和分支构成的系统，存在两个不同的标度区间，并在 $\frac{r}{r_C} \sim 1$ 处分隔；其中 r_C 为核心半径（以 r^2 标度为特征），N_C 为核心中的车站数量。标度指数 $\gamma = 1.25 \pm 0.02$ 是通过对 $r > r_C$ 的积分曲线 [22] 进行线性拟合得到的（更多详情见补充材料第 4 节）。

VI. 讨论

从空间网络基底上的时间效率这一简单条件出发，我们表明，网络优化与类交通流相结合，并以此为不同空间连接的重要性赋权，能够再现人造交通网络中的复杂网络特征。具体而言，我们为《网络》设计了一个框架，其中的节点可以编码城市系统的特征，并最终用于研究真实场景中的最优拓扑结构。这项工作的一个关键创新在于，优化过程发生在空间基底上，因此，所得最优网络的边经过优化，可提升网络中所有节点对共享空间的利用效率。我们展示了空间中从一点移动到另一点的概率如何促使最优网络在树状拓扑与格状拓扑之间转变。在空间中设定一些对流具有更高吸引力的目标点，便可再现斯坦纳树解或叶脉模式等理论结果。我们还展示了，利用城市空间信息和类交通流建模来扩展这些概率，会促使共享优先路径涌现并形成复杂拓扑；这些拓扑源于对网络时间效率的交通加权优化，最终呈现出真实系统的特征。我们再现了诸如网络边速度分布的双峰性等特征，这是多层交通系统的典型特征。另一个特征是出现带环路的中心核心并与分支相连，这种结构是地下系统的典型特征，例如伦敦地铁系统。我们发现，当网络针对一个目标进行优化时，带有大型环路结构的分支会作为最优结构出现

短距离出行与通勤中常见的长距离出行所产生的交通流之间的相互作用。这一针对城市环境中空间网络优化的新框架，或可进一步改进和扩展，以更好地纳入多层网络和共享空间的概念。该框架也可扩展至城际交通的情况，此时网络基底中的特定节点代表城市。总之，本文从理论角度探讨这一问题，旨在再现和理解现实空间网络中观察到的一些特征；未来的研究则可将该框架作为基础，探究如何在城市规划场景中生成最优交通网络。

竞争性财务利益

作者声明不存在竞争性财务利益。

数据可用性

本研究所用数据可从原始参考文献中公开获取

代码可用性

分析所用的代码可应要求提供。

[1] M. Batty，《科学》319，769（2008）。[2] M. Barthele my，Nature Reviews Physics 1，406（2019）。[3] L. Bettencourt 和 G. West，《自然》467，912（2010年）。[4] W. Pan、G. Ghoshal、C. Krumme、M. Cebrian 和 A. Pentland，《自然·通讯》4（2013年），10.1038/ncomms2961。[5] E. Arcaute、E. Hatna、P. Ferguson、H. Youn、A. Johans- son 和 M. Batty，Journal of The Royal Society Inter- face 12，20140745（2015年）。[6] L. M. A. Bettencourt，《科学》340，1438（2013年）。[7] A. Bassolas、H. Barbosa-Filho、B. Dickinson、X. Doti- walla、P. Eastham、R. Gallotti、G. Ghoshal、B. Gip- son、S. A. Hazarie、H. Kautz、O. Kucuktunc、A. Lieber、A. Sadilek 和 J. J. Ramasco，《自然·通讯》10（2019年），10.1038/s41467-019-12809-y。[8] L. M. A. Bettencourt，Science Advances 6（2020），10.1126/sciadv.aat8812。[9] M. Schl¨ apfer、L. Dong、K. O'Keeffe、P. Santi、M. Szell、H. Salat、S. Anklesaria、M. Vazifeh、C. Ratti 和 G. B. West，《自然》593，522（2021年）。[10] H. Barbosa、M. Barthelemy、G. Ghoshal、C. R. James、M. Lenormand、T. Louail、R. Menezes、J. J. Ramasco、F. Simini 和 M. Tomasini，Physics Reports 734，1（2018）。[11] L. Alessandretti、L. G. N. Orozco、M. Saberi、M. Szell 和 F. Battiston，Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science，239980832211081（2022年）。[12] M. Lee、H. Barbosa、H. Youn、P. Holme 和 G. Ghoshal，《自然·通讯》8（2017），10.1038/s41467-017- 02374-7。[13] R. Gallotti、P. Sacco 和 M. D. Domenico，Complexity 2021，1（2021）。[14] M. Barth´elemy，Physics Reports 499，1（2011）。[15] R. G. Morris 和 M. Barthelemy，Physical Review Let- ters 109（2012），10.1103/physrevlett.109.128703。[16] M. T. Gastner 和 M. E. J. Newman，Physical Review E 74（2006），10.1103/physreve.74.016117。[17] M. Barth´elemy 和 A. Flammini，Journal of Statisti- cal Mechanics: Theory and Experiment 2006，L07002（2006）。[18] R. Louf、P. Jensen 和 M. Barthelemy，Proceedings of the National Academy of Sciences 110，8824（2013）。[19] J. R. Banavar、A. Maritan 和 A. Rinaldo，《自然》399，130（1999年）。[20] A. Pei、F. Xiao、S. Yu 和 L. Li，《科学报告》12（2022年），10.1038/s41598-022-12053-3。[21] R. Gallotti 和 M. Barthelemy，《科学数据》2（2015年），10.1038/sdata.2014.56。[22] C. Roth、S. M. Kang、M. Batty 和 M. Barthelemy，Journal of The Royal Society Interface 9，2540（2012年）。[23] A. Tero、S. Takagi、T. Saigusa、K. Ito、D. P. Bebber、M. D. Fricker、K. Yumiki、R. Kobayashi 和 T. Naka- gaki，《科学》327，439（2010年）。[24] R. Louf 和 M. Barthelemy，《科学报告》4（2014年），10.1038/srep05561。[25] A. A. Ibrahim、A. Lonardi 和 C. D. Bacco，《算法》14，189（2021年）。[26] X. Zhang、A. Adamatzky、F. T. Chan、Y. Deng、H. Yang、X.-S. Yang、M.-A. I. Tsompanas、G. C. Sir- akoulis 和 S. Mahadevan，《科学报告》5（2015年），10.1038/srep10794。[27] M. Szell、S. Mimar、T. Perlman、G. Ghoshal 和 R. Sinatra，《科学报告》12（2022年），10.1038/s41598- 022-10783-y。[28] C. P. Birch、S. P. Oom 和 J. A. Beecham，《生态建模》206，347（2007年）。[29] R. Gallotti、A. Bazzani、S. Rambaldi 和 M. Barthelemy，《自然·通讯》7（2016年），10.1038/ncomms12600。[30] Y. Ren、M. Ercsey-Ravasz、P. Wang、M. C. Gonz´alez 和 Z. Toroczkai，《自然·通讯》5（2014年），10.1038/ncomms6347。[31] A. Wilson，《交通研究》9，167（1975年）。[32] M. P. Viana、E. Strano、P. Bordin 和 M. Barthelemy，《科学报告》3（2013年），10.1038/srep03495。[33] M. Newman，*Networks*（牛津大学出版社，2010年）。[34] S. E. Dreyfus 和 R. A. Wagner，《网络》1，195（1971年）。[35] M. Brazil、R. L. Graham、D. A. Thomas 和 M. Zachari- asen，《精密科学史档案》68，327（2013年）。[36] T. Kavitha、K. Mehlhorn、D. Michail 和 K. E. Paluch，《算法学》52，333（2007年）。[37] E. Katifori、G. J. Sz¨oll˝osi 和 M. O. Magnasco，《物理评论快报》104（2010年），10.1103/phys- revlett.104.048704。

[38] D. Piovani、C. Molinero 和 A. Wilson，PLOSONE **12**，e0185787（2017年）。[39] C. A. Hidalgo、E. Castaˆner 和 A. Sevtsuk，Habitat International **106**，102205（2020年）。[40] OpenStreetMap 贡献者，“从 https://planet.osm.org 获取的 Planet 数据转储，”https: //www.openstreetmap.org（2017年）。

《流量加权优化网络效率所产生的复杂网络拓扑结构》的补充材料

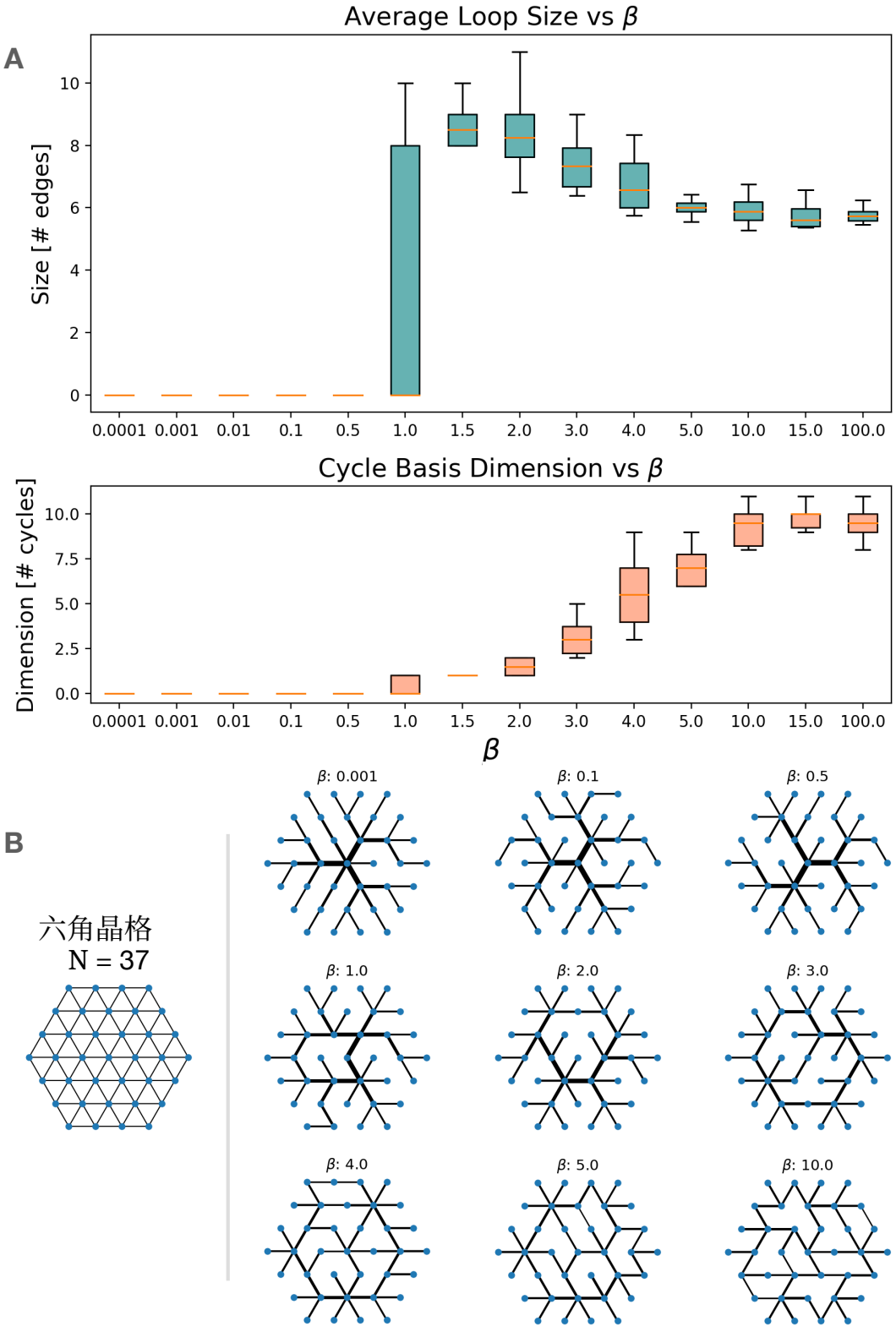
S1. 简单网络基底上的应用

本节报告正文中讨论的简单网络基底优化的更多详细结果，具体涉及三角（HEX）晶格（空间六边形铺砌的平面对偶）和 Erd˝os-R´enyi（ER）网络。我们的目标是探究在考虑简单概率后，空间网络和非空间网络中所产生的拓扑结构（见正文）。

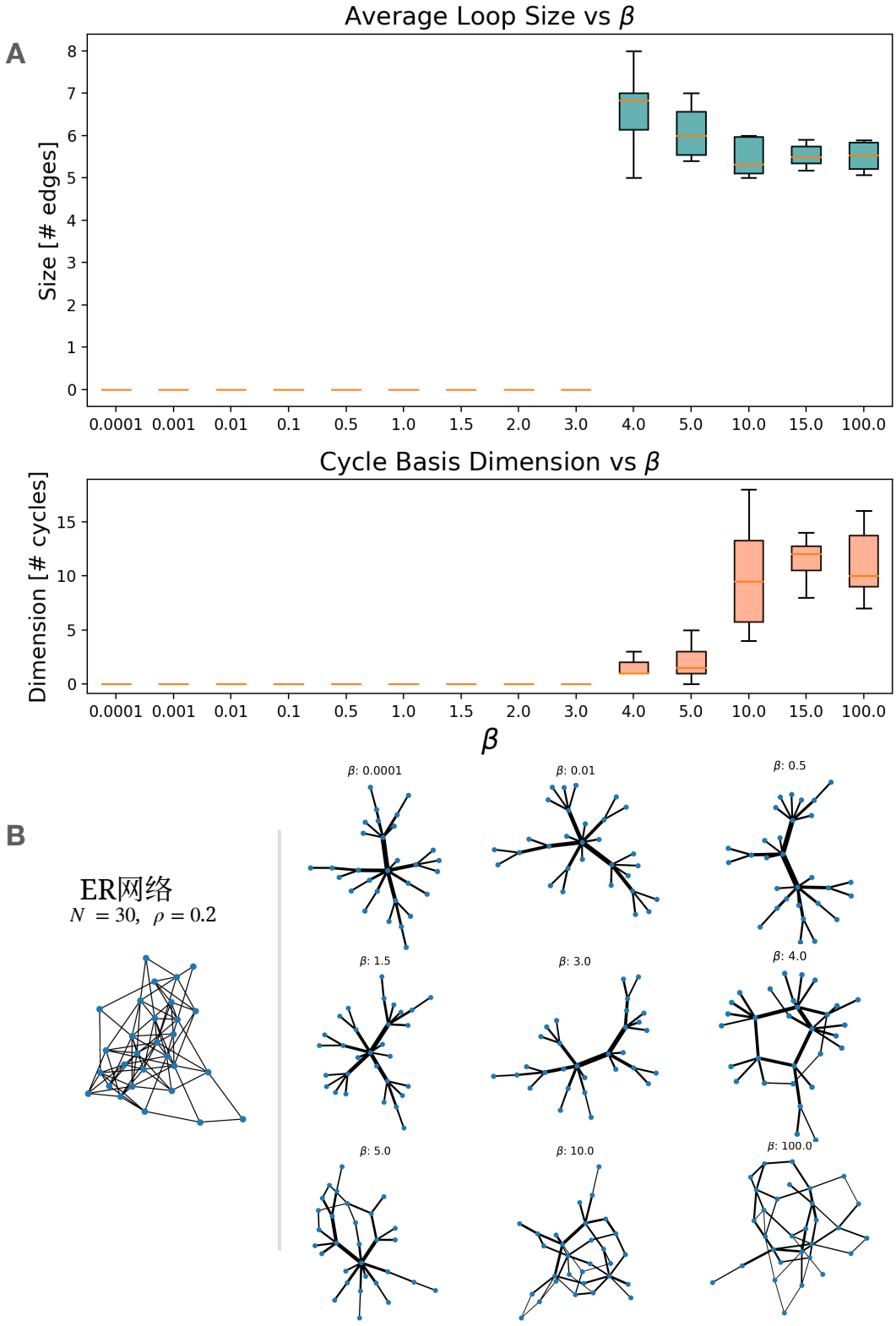
S1.1. HEX 晶格与 ER 网络

模型应用于三角（HEX）晶格的结果，以及模型应用于 Erd˝os-R´enyi（ER）非空间网络的结果。对于非空间生成模型，生成一个包含 N $= 30$ 个节点、边概率为 $\rho = 0.2$ 的 20 个网络组成的系综。对于空间情形，在三角晶格上针对每个 β 值，将优化过程重复 20 次，晶格包含 N $= 37$ 个节点。

补充材料图 1 和补充材料图 2 展示了两幅图中 A 面板基于环基计算的指标分布箱线图。在 B 面板中，展示了 β 不同取值下的优化后的网络状态样本。



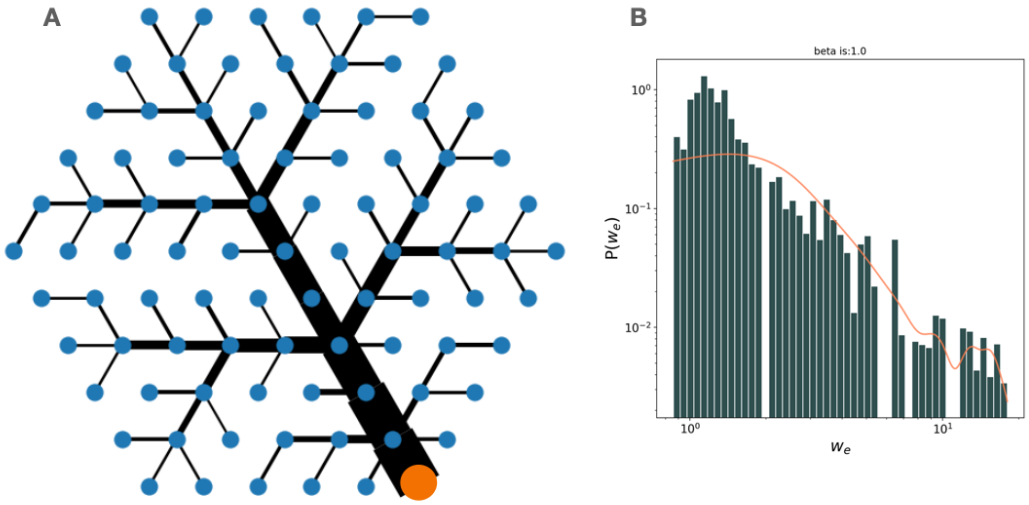
补充图 S1. C 的维度和最优网络样本，针对不同 β 值的三角晶格。 **环基性质和样本——HEX 格点**。环基的箱线图统计



补充图 S2. 环基属性和样本 - ER网络。 不同 β 值下，Erdős–Rényi（ER）网络的环基维数和最优网络样本的箱线图统计。

S2. 叶脉图案

这里我们展示了该模型在再现叶脉图案方面的应用 [37]。我们考虑格点周边节点中的一个作为吸引节点（单一目标或汇），并将其他所有节点作为源来优化基底。



补充图 S3. 类似叶脉图案的最优网络。 考虑单个空间边缘中的单个目标（橙色节点）时的最优状态。优化效率，使空间中的所有节点都能到达目标。由此得到的最优状态类似于叶片中发现的树状图案（A），边权重的分布如（B）所示。

S3. 伦敦地铁网络应用

本节将更详细地讨论该模型在大伦敦地区城市形态中的应用。我们将展示，借助最优网络状态，可以重现伦敦地铁网络的空间属性。具体而言，为了模拟真实的交通系统，我们对边的通行速度设定了上限。

S3.1. 数据整合：人口普查和 OpenStreetMap 数据

为将模型扩展至真实城市场景，我们从 OpenStreetMap (OSM) 收集有关城市形态结构的数据 [40] 和人口普查数据。

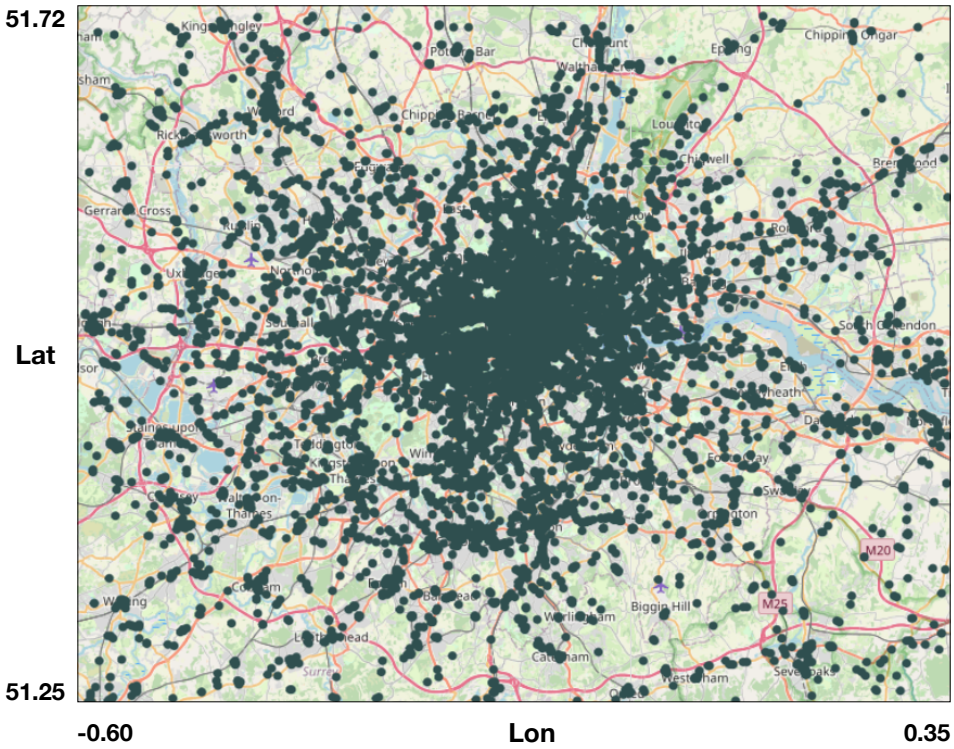
1. OSM Data

为对格点中节点的吸引力进行建模，我们使用城市空间中的兴趣点密度。我们将 OSM 中的便利设施 [39]点作为兴趣点（POI）的替代指标，因此节点 j 吸引力（W_j）表示空间中的便利设施密度。

大伦敦地区（GLA）的边界框通过 OSM 获取（https://wiki.openstreetmap.org/wiki/Bounding_Box），并在此边界框内提取兴趣点密度。具体而言，我们使用以下便利设施子类别:

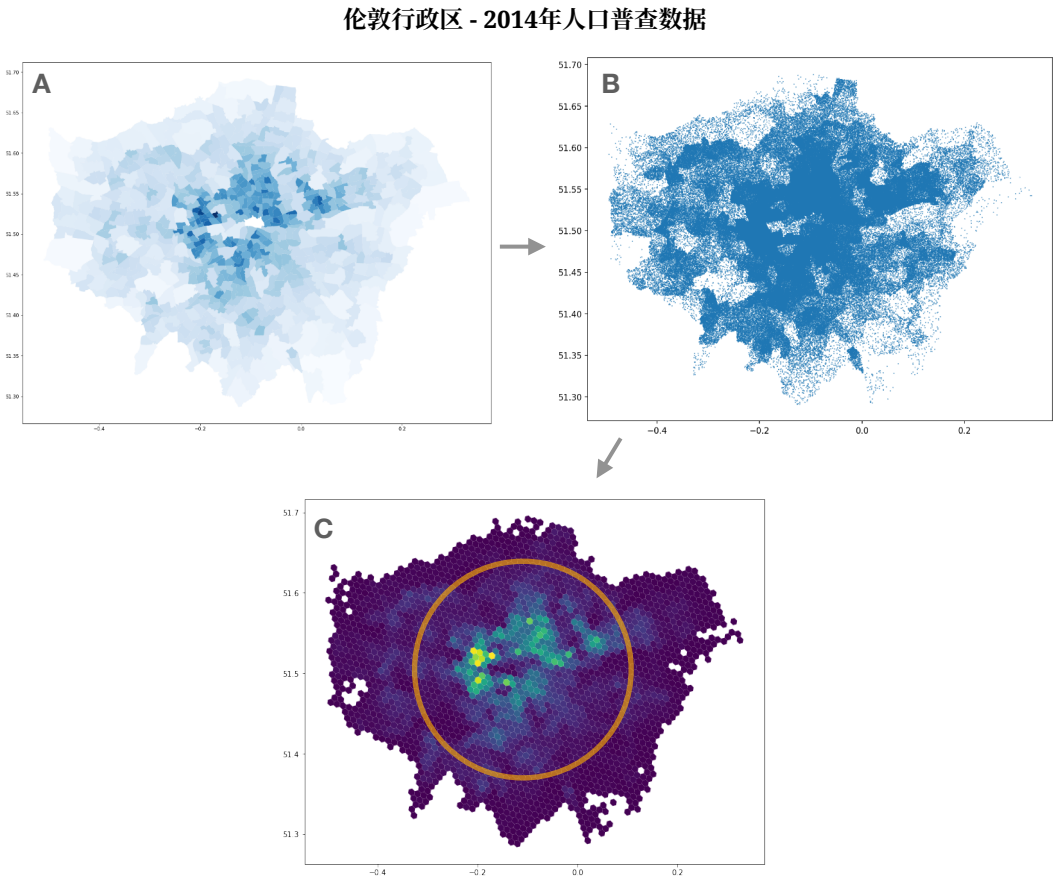
'咖啡馆','学院','图书馆','学校','大学','幼儿园','餐馆','酒吧', '快餐店','酒吧','银行','牙医诊所','药店','医院','诊所','医生','艺术中心','电影院','社区中心','警察局','邮局','市场'

在图 S4 中，绘出了从 OSM 检索到的边界框内的便利设施点 .



地图背景由 OSM 提供，遵循开放数据库许可证

补充图 S4. 针对 GLA 边界框的 OSM 便利设施查询。 从 OSM 检索到的便利设施（https://openstreetmap.org/copyright），对应由以下经度区间 $[-0.6, 0.35]$ 和纬度区间 $[51.25, 51.75]$所界定的边界框。



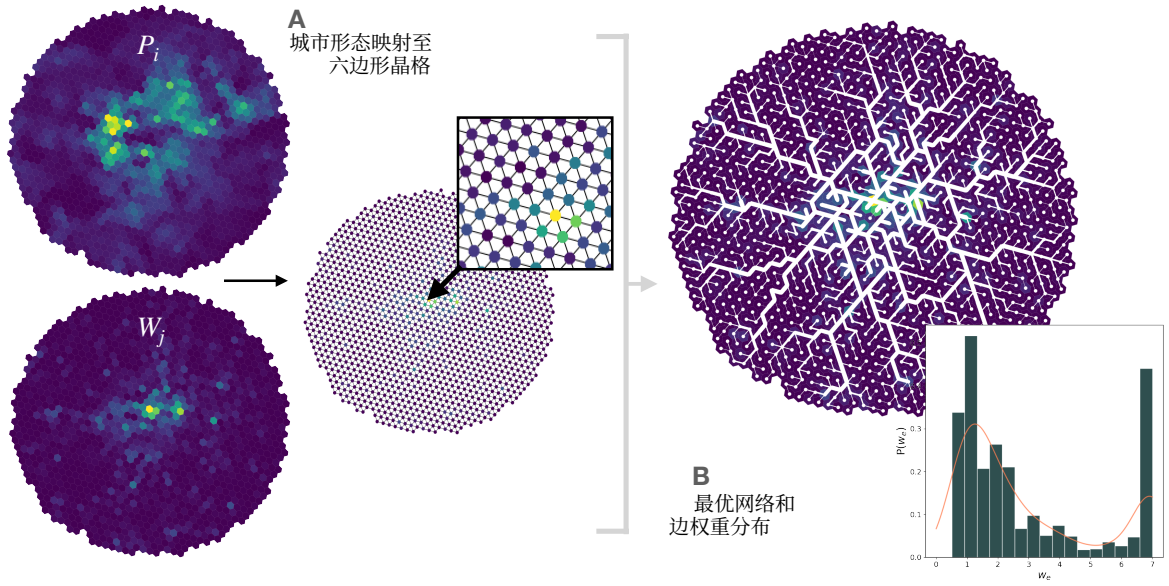
补充图 S5. 人口普查数据获取。A）2014年人口普查中的伦敦行政区数据（https://data.london.gov.uk/dataset/ward-profiles-and-atlas）。**B）**根据行政区多边形生成空间中的点，点密度与人口普查数据成正比。**C）**将点映射到带有相应点密度的 HEX3瓦片上。最后，限制在一个圆盘范围内，以确保节点分布的对称性并降低计算负载。

使用 HEX3网格划分（https://eng.uber.com/h3/），并采用空间分辨率$RES = 8$，将点映射为空间中的密度。通过网格划分进行空间离散化，对于将这些信息映射到正文中所述的 HEX三角晶格模型尤为重要。图 S5 和图 S4 展示了如何从数据中提取模型信息 P_i 和 W_j，再将其映射到网格中，如图 S5的 C 面板所示。随后，将覆盖城市区域的网格映射为空间网络模型中的节点，这些节点位于三角晶格上（见正文中的图 5）。

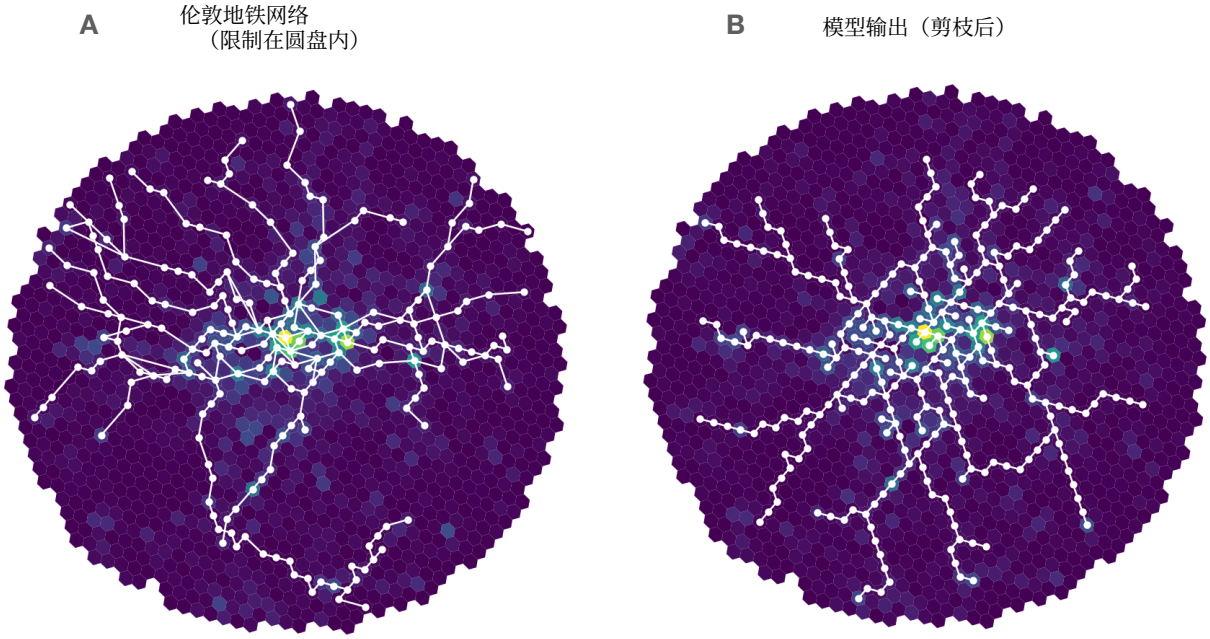
为简化计算并保留晶格基底从其中心点出发的各向同性，我们将分析范围限制在一个圆盘内，该圆盘以伦敦吸引力最高的区域为中心，该区域大致位于伦敦金融城行政区。将大伦敦地区其余部分纳入分析后，结果依然稳健。由于最优边权重受基底上的交通流影响，与人口密度较高的中心区域相比，大伦敦地区被排除的区域不会带来显著贡献。

S3.2. 交通流和有界权重分布的结果

为了模拟真实系统，我们将边权重的上限限制为固定值 $w^* = 7 * w_{init}$，其中 w_{init} 是优化过程开始前分配给网络状态（$w_{init} = 1.0$）的初始边权重，使得 $\sum_{e \in G} d_e w_{e,\ init} = C$。在本次模拟中，我们使用 $\beta = 0.35$。



补充图 S6. 将数据映射到六角格点 + GLA 优化网络。A）将城市形态数据映射到 HEX 镶嵌，再映射到三角（HEX）晶格。在此步骤中生成起讫点矩阵，随后对网络进行优化。**B）**所得网络状态及其边权重分布，呈现双峰形状。仅保留权重大于阈值（$w_e > 5$）的快速边，以分离由高速边集构成的子图，例如地铁系统。



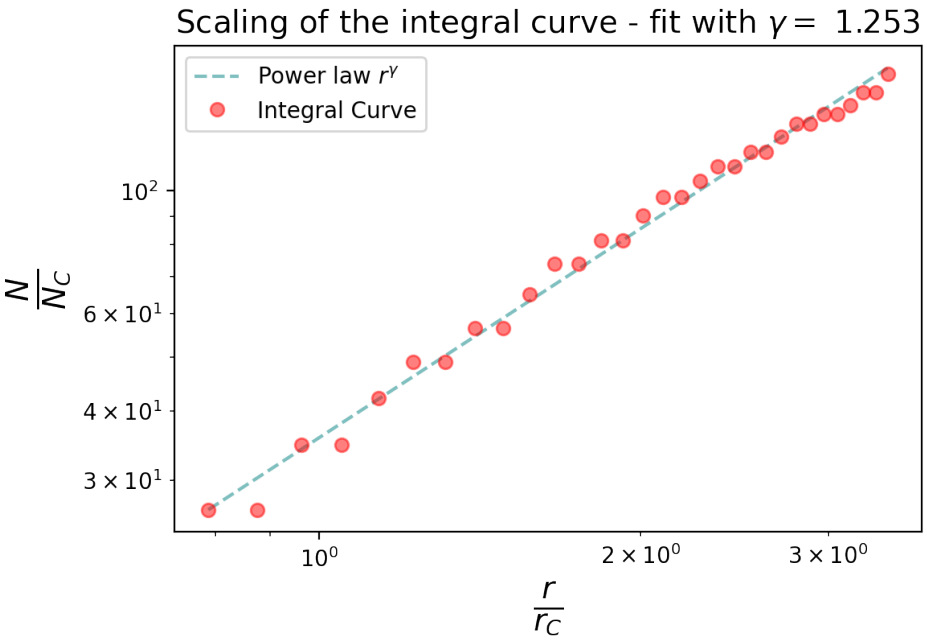
补充图 S7. 剪枝网络与实际地铁对比。A）伦敦地铁网络，范围限定为所研究的圆盘。**B）**GLA 模型输出，仅显示权重为 $w_e > 5.0$ 的节点和边；该值根据先前绘制的 $\{w_e\}$ 分布选取，作为阈值，用于分离包含快速边的第二个“峰”。这个“离散化”网络是用于计算统计测度的模型。

S4. 网络车站的标度

通过考察距车站重心一定距离 $N(r)$范围内的节点站点数量，可以分析交通网络的空间组织结构。在正文中，我们分析了模拟的和真实的伦敦地铁网络 [21] 的标度区间，采用的分析方法见 [22]。具体而言，他们得出了 $N(r)$在距重心不同距离处的标度性质函数形式。此处报告 [22]中得到的标度关系：

$$N(r) \sim \begin{cases} \rho_C \pi r^2 & \text{for } r < r_C \\ \rho_C \pi r_C^2 + \mathcal{N}_B \int_{r_C}^{r} \frac{dr}{\Delta(r)} & \text{for } \quad r_C < r < r_{\max} \\ N & \text{for } r > r_{\max} \end{cases} \tag{S1}$$

具体而言，他们表明，在大距离区间（$r > r_C$ 和 $r < r_{\max}$），车站数量可近似表示为积分曲线$\mathcal{N}_B \int_{r_C}^{r} \frac{dr}{\Delta r}()$与一个常数项之和。 [22] 还报告称，通常也可以用标度律近似描述大距离下的行为。因此，我们在此绘制积分曲线的计算结果与 r重标度值的关系，并表明在该区间内，这种关系可用幂律近似，其指数可通过线性拟合求得。正文中的 N（r）曲线，是基于限制在圆盘区域内的真实伦敦地铁网络计算得出的，如补充材料图7所示。相关指数 $\gamma = 1.25 \pm 0.02$ 在正文中用于突出显示 $r > r_C$的次级标度。正如参考文献 [22], 所讨论的，由于补充材料公式S1中的 Δ（r）往往存在噪声，这种标度性质在实证网络中通常难以得到很好的复现，而且往往只适用于 r 值的一个较小区间。在正文图6中，我们看到，指数为 γ的次级标度在 $r > r_C$的有限区间内近似于 N（r）。分支区域中的指数预期为 $\gamma < 2.0$ [22]，我们的结果与此一致。



补充图 S8. 积分曲线的标度。积分曲线的双对数图及其线性拟合。给出相应的 γ 指数近似值，以突出显示 [22] 中提到的次级标度区域。

[1] M. Batty, 《科学》319, 769 (2008)。[2] M. Barthelemy，Nature Reviews Physics 1, 406 (2019)。[3] L. Bettencourt 和 G. West, 《自然》467, 912 (2010)。[4] W. Pan、G. Ghoshal、C. Krumme、M. Cebrian 和 A. Pentland, 《自然·通讯》4 (2013)，10.1038/ncomms2961。[5] E. Arcaute、E. Hatna、P. Ferguson、H. Youn、A. Johansson 和 M. Batty，Journal of The Royal Society Interface 12, 20140745 2015( )。[6] L. M. A. Bettencourt, 《科学》340, 1438 (2013)。[7] A. Bassolas、H. Barbosa-Filho、B. Dickinson、X. Dotiwalla、P. Eastham、R. Gallotti、G. Ghoshal、B. Gipson、S. A. Hazarie、H. Kautz、O. Kucuktunc、A. Lieber、A. Sadilek 和 J. J. Ramasco, 《自然·通讯》10 (2019)，10.1038/s41467- 019-12809-y。[8] L. M. A. Bettencourt，Science Advances 6 (2020)，10.1126/sciadv.aat8812。[9] M. Schl¨apfer、L. Dong、K. O'Keeffe、P. Santi、M. Szell、H. Salat、S. Anklesaria、M. Vazifeh、C. Ratti 和 G. B. West, 《自然》593, 522 (2021)。[10] H. Barbosa、M. Barthelemy、G. Ghoshal、C. R. James、M. Lenormand、T. Louail、R. Menezes、J. J. Ramasco、F. Simini 和 M. Tomasini，Physics Reports 734, 1 (2018)。[11] L. Alessandretti、L. G. N. Orozco、M. Saberi、M. Szell 和 F. Battiston，Environment and Planning B: Urban Analytics and City Science，239980832211081 (2022)。[12] M. Lee、H. Barbosa、H. Youn、P. Holme 和 G. Ghoshal, 《自然·通讯》8 (2017)，10.1038/s41467-017-02374-7。[13] R. Gallotti、P. Sacco 和 M. D. Domenico，Complexity 2021, 1 (2021)。[14] M. Barth´elemy，Physics Reports 499, 1 (2011)。[15] R. G. Morris 和 M. Barthelemy, 《物理评论快报》109 (2012)，10.1103/physrevlett.109.128703。[16] M. T. Gastner 和 M. E. J. Newman，Physical Review E 74 (2006)，10.1103/physreve.74.016117。[17] M. Barth´elemy 和 A. Flammini，Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment 2006, L07002 (2006)。[18] R. Louf、P. Jensen 和 M. Barthelemy, Proceedings of the National Academy of Sciences 110, 8824 (2013)。[19] J. R. Banavar、A. Maritan 和 A. Rinaldo, 《自然》399, 130 (1999)。[20] A. Pei、F. Xiao、S. Yu 和 L. Li, 《科学报告》12 (2022)，10.1038/s41598-022-12053-3。[21] R. Gallotti 和 M. Barthelemy, 《科学数据》2 (2015)，10.1038/sdata.2014.56。[22] C. Roth、S. M. Kang、M. Batty 和 M. Barthelemy，Journal of The Royal Society Interface 9, 2540 (2012)。[23] A. Tero、S. Takagi、T. Saigusa、K. Ito、D. P. Bebber、M. D. Fricker、K. Yumiki、R. Kobayashi 和 T. Nakagaki, 《科学》327, 439 (2010)。[24] R. Louf 和 M. Barthelemy, 《科学报告》4 (2014)，10.1038/srep05561。[25] A. A. Ibrahim、A. Lonardi 和 C. D. Bacco, 《算法》14, 189 (2021)。[26] X. Zhang、A. Adamatzky、F. T. Chan、Y. Deng、H. Yang、X.-S. Yang、M.-A. I. Tsompanas、G. C. Sirakoulis 和 S. Mahadevan, 《科学报告》5 (2015)，10.1038/srep10794。[27] M. Szell、S. Mimar、T. Perlman、G. Ghoshal 和 R. Sinatra, 《科学报告》12 (2022)，10.1038/s41598-022-10783-y。[28] C. P. Birch、S. P. Oom 和 J. A. Beecham, 《生态建模》206, 347 (2007)。[29] R. Gallotti、A. Bazzani、S. Rambaldi 和 M. Barthelemy, 《自然·通讯》7 (2016)，10.1038/ncomms12600。[30] Y. Ren、M. Ercsey-Ravasz、P. Wang、M. C. Gonz´alez 和 Z. Toroczkai, 《自然·通讯》5 (2014)，10.1038/ncomms6347。[31] A. Wilson, 《交通研究》9, 167 (1975)。[32] M. P. Viana、E. Strano、P. Bordin 和 M. Barthelemy, 《科学报告》3 (2013)，10.1038/srep03495。[33] M. Newman, *Networks*（牛津大学出版社，2010）。[34] S. E. Dreyfus 和 R. A. Wagner, 《网络》1, 195 (1971)。[35] M. Brazil、R. L. Graham、D. A. Thomas 和 M. Zachariasen, 《精密科学史档案》68, 327 (2013)。[36] T. Kavitha、K. Mehlhorn、D. Michail 和 K. E. Paluch, 《算法学》52, 333 (2007)。[37] E. Katifori、G. J. Sz¨oll˝osi 和 M. O. Magnasco, 《物理评论快报》104 (2010)，10.1103/physrevlett.104.048704。[38] D. Piovani、C. Molinero 和 A. Wilson，PLOS ONE 12, e0185787 (2017)。[39] C. A. Hidalgo、E. Casta˜ner 和 A. Sevtsuk, Habitat International 106, 102205 (2020)。[40] OpenStreetMap 贡献者，"从 https://planet.osm.org 获取的 Planet 转储", https://www.openstreetmap.org (2017)。