arXiv:2301.08672v1 [math.CT] 20 Jan 2023

交叉模局部化的可容许性

´ ˆ OLIVIA MONJON、JEROME SCHERER 和 FLORENCE STERCK

Abstract. 条件平坦性与伽罗瓦意义下的可容许性之间的对应关系，出现在任何允许进行纤维逐点局部化的半阿贝尔范畴中的局部化函子背景下。于是，自然会想知道，在不总是允许进行纤维逐点局部化的交叉模范畴中，情况会如何。本文针对正则满态射局部化函子，确立了条件平坦性与伽罗瓦意义下的可容许性（相对于正则满态射类）之间的等价关系。我们利用这一等价关系证明，零化函子相对于正则满态射类是可容许的，即使其局部化态射的核并非无圈。

Introduction

自然会产生这样一个问题：良好扩张的拉回是否也具有这些良好性质？在研究局部化函子或反射时，扩张的一项特别好的性质是平坦性。对于局部化函子 L，若将 L 作用于扩张后得到的仍是一个扩张，我们就称该扩张为 L-平坦，见定义 2.1。因此，问题在于弄清 L-平坦扩张的拉回何时仍是 L-平坦的。

Berrick 和 Farjoun[1] 最早在同伦背景下研究了这类问题。对于拓扑空间范畴中的同伦局部化函子（依照 Bousfield 的定义， [5], 另见 Farjoun 的著作 [13]），已证明，拉回保持（纤维序列的）L-平坦性，当且仅当 L 是所谓的零化函子。群范畴中的情况则出人意料地更加微妙。例如，Farjoun 和第二作者证明，所有幂零商函子都具有这一良好性质，他们称之为条件平坦性，见 [14]。

证明局部化函子的条件平坦性，通常采用一套标准策略：经过若干步约化，最终化为一种更简单的形式。Gran 将这种形式认定为：对于正则满态射类 [17, 而言，伽罗瓦意义下的可容许性（命题 3.3]）。这使得同伦论中对条件平坦性的研究转向了对半阿贝尔范畴中可容许性的研究，见 [15]。可容许性由 Janelidze 和 Kelly 在 [17] 中引入，此后在范畴论对扩张的研究中发挥了核心作用；例如，Everaert、Gran 和 Van der Linden 在 [12] 中的工作就值得一提。

本文研究群的交叉模范畴中局部化函子的可容许性。由于 Whitehead 关于连通2-型的研究，这一范畴引起了拓扑学家的兴趣； [25], 而 Brown 和 Spencer [7] 证明了交叉模与群范畴中的内群胚等价（他们将这一结果归功于 Verdier），因此也受到代数学家的关注。这种等价关系将两个有趣的概念联系起来，使人们能够以另一种方式处理内群胚的概念，而这种方式有利于计算。此外，按照 Janelidze 的意义，交叉模构成一个半阿贝尔范畴，

2020年数学主题分类。18G45、55P60、18E50、55R70、18E13。关键词与短语。交叉模、局部化函子、可容许性、正则满态射、条件平坦性、零化。

M´arki 和 Tholen， [18]。本文采用代数观点，继续我们在 [22] 中开始的工作。事实上，在前面提到的若干化简步骤中，第一步需要用到纤维逐点局部化技术。对于群论局部化和同伦局部化函子，这种技术可以将研究范围缩减到具有局部核（纤维）的扩张。得益于 Casacuberta 和 Descheemaeker 的工作，群范畴中已有纤维逐点局部化技术， [10], 但我们在 [22] 中证明，这些技术通常并不适用于交叉模。因此，本文旨在调整这一策略，以便研究这一情形下的可容许性。

我们关注这样的局部化函子：对于所有交叉模 T，余增广态射 $\ell^{\mathsf{T}}\colon \mathsf{T} \to \mathsf{LT}$ 都是正则满态射。我们称之为正则满射局部化，并注意到，许多值得关注的例子都由零化函子给出，定义见定义 1.10。任意交叉模 A 都确定一个零化函子 P_{A} ，它会“消去”所有来自 A 的态射；此外，还有其他正则满态射局部化函子，例如阿贝尔化。一个使这种约化策略得以实施的首要重要观察是：尽管纤维逐点局部化通常并不存在（即便对于零化函子也是如此），我们仍可将这一工具用于某些扩张。

引理2.5。设 L 为一个正则满射局部化。设

$$1 \longrightarrow \mathsf{N} \xrightarrow{\kappa} \mathsf{T} \xrightarrow{\alpha} \mathsf{Q} \longrightarrow 1 \tag{1}$$

为交叉模的一个 L-平坦正合列，且 $g\colon \mathsf{Q}' \to \mathsf{Q}$ 为一个交叉模态射。则我们可以构造 (1) 沿 g: 的拉回的纤维逐点局部化：

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow{\kappa'} & \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}'}} & \mathsf{Q}' & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{T}}} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow[\kappa]{} & \mathsf{T} & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

这使我们能够将条件平坦性与可容许性联系起来，这与群范畴中的做法如出一辙， [14], 或者与纤维逐点局部化存在的更广泛的半阿贝尔范畴背景中的做法类似， [15]。如果局部化函子 L 保持形如以下形式的任意拉回，则称其关于正则满态射类是可容许的

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}}} & \mathsf{Q} \\
{\scriptstyle \pi_{\mathsf{LT}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell^{\mathsf{Q}}} \\
\mathsf{LT} & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathsf{LQ}
\end{array}$$

其中 α 是 L-局部对象之间的正则满态射。

定理 3.4。设 L 是正则满态射局部化函子。则下列命题等价

(1) L 是条件平坦的；(2) L 关于正则满态射类是可容许的。

群与交叉模之间的一个差异，或许也是复杂性的主要来源，可以从核的行为中看出。这正是我们此前无法

总是构造纤维逐点局部化的原因；我们也惊讶地发现，有些零化函子中，零化态射 $\ell^{\mathsf{T}}\colon \mathsf{T} \to \mathsf{P_A T}$ 的核并非总是 $\mathsf{P_A}$-无圈，参见 [22, 命题 4.6]。对于群和空间而言，这一性质实际上刻画了零化函子。

不过，我们在此证明，无环核蕴含可容许性；并在命题 4.3 中证明，若局部化态射的核是 $\mathsf{L}f$-无圈的，则 $\mathsf{L}f$ 是一个零化函子。因此，性质良好的零化函子是可容许的，但对于任意零化函子又该如何呢？对于这类函子，纤维逐点局部化未必存在，且零化的核也未必无圈。通过仔细考察 $\mathsf{P_A T}$ 的归纳构造，我们证明了主要结果：所有零化函子都是可容许的。

定理 5.5. 设 A 是任意一个交叉模。零化函子 $\mathsf{P_A}$ 对正则满态射类是可容许的。

我们以简要概述结束本引言。第一节介绍本文其余部分所需的预备知识。随后在第二节中，我们在交叉模的背景下引入 L-平坦正合列和条件平坦局部化函子，并展示如何构造 L- 平坦正合列的纤维逐点局部化。第三节对于发展一种更简明的条件平坦性刻画至关重要：它在正则满态射局部化函子的特定背景下，将条件平坦性与可容许性这一概念联系起来。第四节确立了 L-无环性与可容许性之间的联系，最后一节则证明每个零化函子都是可容许的。

致谢。我们感谢 Marino Gran 分享他关于可容许性的见解。

1. Preliminaries

1.1. 交叉模的半阿贝尔范畴。本小节遵循 Norrie[23] 和 Brown-Higgins [6], ，给出有关交叉模的基本定义和记号。

定义 1.1. [25] 群的一个交叉模由一对群 T_1 和 T_2、一个由 T_2 在 T_1上的群自同构作用（记作 $T_2 \times T_1 \to T_1\colon (b,t) \mapsto {}^b t$），以及一个群同态 $\partial^{\mathsf{T}}\colon T_1 \to T_2$ 组成，并满足对于任意 b 属于 T_2 以及任意 t, s 属于 T_1,

$$\partial^{\mathsf{T}}({}^b t) = b\partial^{\mathsf{T}}(t)b^{-1}, \tag{2}$$

$$ {}^{\partial^{\mathsf{T}}(t)}s = tst^{-1}. \tag{3}$$

因此，我们通常将交叉模写作三元组 $(T_1, T_2, \partial^{\mathsf{T}})$，或简记为 T；有时也将 ∂^{T} 称为连接态射。

定义 1.2. 设 $\mathsf{N} := (N_1, N_2, \partial^{\mathsf{N}})$ 和 $\mathsf{M} := (M_1, M_2, \partial^{\mathsf{M}})$ 为两个交叉模。交叉模态射 $\alpha\colon \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ 是一对群同态 $\alpha_1\colon N_1 \to M_1$和 $\alpha_2\colon N_2 \to M_2$，使得以下两个图表交换

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_1 \\ {\scriptstyle \partial^{\mathsf{N}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial^{\mathsf{M}}} \\ N_2 & \xrightarrow[\alpha_2]{} & M_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} N_2 \times N_1 & \longrightarrow & N_1 \\ {\scriptstyle (\alpha_2,\alpha_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} \\ M_2 \times M_1 & \longrightarrow & M_1. \end{array}$$

其中，右侧图表中的水平箭头分别表示这两个交叉模的群作用。

我们用 XMod 表示群交叉模范畴。

注 1.3。群范畴可以通过两个函子嵌入到此范畴中，这两个函子分别是截断函子 Tr: XMod $\to$Grp 的左伴随和右伴随。该截断函子将交叉模 $\mathsf{T} := (T_1, T_2, \partial^{\mathsf{T}})$ 映射到 T_2。函子 X: Grp $\to$ XMod 将群 G 映射到交叉模 $\mathsf{X}G = (1, G, 1)$，该交叉模在第 2 层约化为群 G，它是左伴随函子；函子 R : Grp $\to$ XMod : $G \mapsto (G, G, Id_G)$ 则是右伴随函子。这有助于我们将群论结果引入 XMod。

子交叉模的概念显而易见，见 [23]。只需要求子对象逐层由子群构成，且连接同态和作用由给定的连接同态和作用诱导。正规性的概念则不那么显而易见。

定义 1.4. 若子交叉模 $\mathsf{N} := (N_1, N_2, \partial^{\mathsf{N}})$ 是 $\mathsf{T} := (T_1, T_2, \partial^{\mathsf{T}})$ 的正规子交叉模，则以下三个条件成立

(1) N_2 是 T_2的正规子群；(2) 对任意 $t_2 \in T_2$ 和 $n_1 \in N_1$，都有 ${}^{t_2}n_1 \in N_1$；(3) $[N_2, T_1] := \langle {}^{n_2}t_1 t_1^{-1} \mid t_1 \in T_1, n_2 \in N_2 \rangle \subseteq N_1$。

与逐个分量构造的极限不同，余极限通常更难构造。特别是，余核的构造并非直接明了；但当 N 是 T 的正规子交叉模时，余核就是分别对正规子群 $N_1 \triangleleft T_1$ 和 $N_2 \triangleleft T_2$取商所得的逐层商。

交叉模范畴与群范畴有许多良好的性质。传统的同调引理、 [2], 分裂短五引理、 [3], 以及诺特同构定理 [2], 均成立。通过考察核或余核，可以判定拉回； [2, 引理 4.2.4 和 4.2.5], 事实上，正如 Janelidze、M´arki 和 Tholen 在 [18]中所引入的，交叉模范畴 Xmod 是一个半阿贝尔范畴。这一点在 [18]中得到了证明。本文将多次用到一个结果，即 [2, 引理 4.2.4]„ 下面回顾这一结果。

命题 1.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个半阿贝尔（或同调）范畴。考虑以下正合行图表：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\kappa'} & T' & \xrightarrow{\alpha'} & Q' & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v} & (2) & \downarrow{\scriptstyle w} & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\kappa} & T & \xrightarrow{\alpha} & Q & & \end{array}$$

那么以下陈述成立。

(1) 若 u 是一个同构，则 (2) 是一个拉回。(2) 若 u 和 w 是正则满态射，则 v 也是一个正则满态射。

1.2. 局部化函子。本小节回顾交叉模范畴中局部化函子的定义，并介绍此类函子的一些重要性质以及若干例子。

定义 1.6. 交叉模范畴中的局部化函子是一个余增广幂等函子 $\mathrm{L}:\mathrm{XMod}\to\mathrm{XMod}$。余增广 $\ell:\mathrm{Id}\to\mathrm{L}$ 是一个自然变换，使得 ℓ^{LX} 和 $\mathrm{L}\ell^{\mathrm{X}}$ 是同构。

特别地，我们有 $\ell^{\mathrm{LX}}=\mathrm{L}\ell^{\mathrm{X}}$，见 [9, 命题 1.1]。

定义 1.7。设 L 是一个局部化函子。交叉模 T 是 L-局部的，当且仅当 $\ell^{\mathrm{T}}:\mathrm{T}\to\mathrm{LT}$ 是一个同构。态射 $f:\mathrm{N}\to\mathrm{M}$ 是一个 L-等价，当且仅当 $\mathrm{L}f$ 是一个同构。

我们回顾 L-等价的一些基本且有用的闭包性质。

引理 1.8。 (1) L-等价的推出仍是 L-等价。

(2) L-等价的复合仍是 L-等价。(3) 对所有后继序数 $\beta+1<\kappa$，由 L-等价构成的图表 T_β 的 κ-滤过余极限 $\mathrm{T}_\beta\to\mathrm{T}_{\beta+1}$，会产生一个 L-等价 $\mathrm{T}_0\to\mathrm{T}_\kappa=\operatorname{colim}_{\beta<\kappa}\mathrm{T}_\beta$。(4) 设 F 是交叉模态射范畴中由 L-等价构成的一个 I-指标图表。那么余极限 $\operatorname{colim}_I\mathrm{F}$ 是一个 L-等价。

有时，局部化函子 L 与交叉模范畴 XMod 的一个满反射子范畴 $\mathcal{L}$ 相关联。伴随函子对 $\mathrm{U}:\mathcal{L}\leftrightarrows\mathrm{XMod}:\mathrm{F}$ 给出局部化函子 $\mathrm{L}=\mathrm{FU}$，正如 Cassidy、H´ebert 和 Kelly 在 [11] 中所做的那样。另一些时候，存在一个人们希望将其求逆的态射 f，以便构造一个通常记作 L_f 的局部化函子。

定义 1.9。设 f 是一个交叉模态射。若 (f,T) 是同构，则交叉模 T 称为 L_f-局部的。若对任意 L_f-局部交叉模 T，(g,T) 都是同构，则 XMod 中的态射 g 称为 L_f-等价。

这类局部化函子存在于交叉模范畴中，例如参见 Bousfield 的奠基性工作[4]。此时，局部对象和局部等价分别与定义 1.7 中引入的概念一致。命题 1.8 是 Hirschhorn 的 [16, 命题 1.2.20 和命题 1.2.21]的类比。

如果态射 f 的余域是平凡交叉模，那么函子 L_f 就尤为重要。

定义 1.10. 设 A 为交叉模，且 f 为态射 $\mathrm{A}\to 1$。局部化函子 L_f 记作 P_A，称为零化函子。A f-局部对象称为 A-零，或称为 A-局部；若交叉模 T 满足 $\mathrm{P}_\mathrm{A}\mathrm{T}=1$，则称其为 A-无圈。局部化态射 $\ell^T:\mathrm{T}\to\mathrm{P}_\mathrm{A}\mathrm{T}$ 记作 p^{T}。

命题 1.11. 设 A 和 T 为交叉模。则存在一个依赖于 A 的序数 λ，使得 $\mathrm{P}_\mathrm{A}\mathrm{T}$ 可构造为如下形式图表的超限滤过余极限：$\mathrm{T}=\mathrm{T}_0\to\mathrm{T}_1\to\cdots\to\mathrm{T}_\beta\to\ldots$，其中 $\beta<\lambda$ 的所有态射都是 P_A-等价和正则满射。

这一归纳构造已在 [22,命题 2.8] 中得到仔细描述。每一步都是 P_A-等价且为正则满态射，其原因在于 $\mathrm{T}_{\beta+1}$ 是通过取所有态射 $\mathrm{A}\to\mathrm{T}_\beta$ 的余核，从 T_β 构造而成的。我们将在第 5 节回顾这些细节并加以运用。在本文的后续部分，我们将研究一类更大的局部化函子。它们与 P_A 一样，具有局部化态射是正则满态射这一性质。

定义 1.12. 若对任意交叉模 T，余增广 $\ell^{\mathrm{T}}:\mathrm{T}\to\mathrm{LT}$ 都是正则满态射，则称局部化函子 L 为正则满射局部化。

注 1.13. 在交叉模范畴中，态射 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ 是正则满态射（即一对平行箭头的余等化子），当且仅当 α_1 和 α_2 都是满群同态 [20, 命题 2.2]. 交叉模的满同态是满态射，但也存在非满射的满态射。在带基点原模范畴（如交叉模范畴）中，正则满态射与正规满态射（某个态射的余核）相一致。

现在我们给出一些有趣的局部化函子例子，以说明本文后续部分的结果，另请参见 [22, 第 2] 节末尾。

例 1.14。关于交叉模 $\mathbf{X}_{\mathbb{Z}}$ 的零化函子 $\mathsf{P}_{\mathbf{X}_{\mathbb{Z}}}$ 定义如下：

$$\mathsf{P}_{\mathbf{X}_{\mathbb{Z}}}\left(\begin{array}{c} N_1 \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow \\ N_2 \end{array}\right) = \begin{array}{c} N_1/[N_2, N_1] \\ \downarrow \\ 1 \end{array}$$

例 1.15。阿贝尔化函子 $\mathsf{Ab} : \mathbf{XMod} \to \mathbf{XMod}$ 已在 [24] 中介绍。它定义如下：

$$\mathsf{Ab}\left(\begin{array}{c} N_1 \\ {\scriptstyle\partial}\downarrow \\ N_2 \end{array}\right) = \begin{array}{c} N_1/[N_2, N_1] \\ {\scriptstyle\tilde{\partial}}\downarrow \\ N_2/[N_2, N_2] \end{array}$$

例 1.16。我们关于交叉模的第三个也是最后一个局部化函子是 $\mathsf{I}: \mathbf{XMod} \to \mathbf{XMod}$，参见 [22, 例 2.15]：

$$\mathsf{I}\left(\begin{array}{c} N_1 \\ {\scriptstyle\partial^{\mathsf{N}}}\downarrow \\ N_2 \end{array}\right) = \begin{array}{c} N_2 \\ {\scriptstyle Id_{N_2}}\downarrow \\ N_2 \end{array}$$

此函子由截断函子 Tr: XMod $\to$ 群范畴 与其右伴随 R: 群范畴 $\to$ XMod 之间的伴随诱导，其中截断函子定义为 $Tr(T_1, T_2, \partial^{\mathsf{T}}) = T_2$，参见注 1.3；右伴随将群 T 映为 (T, T, Id_T)。

注 1.17。例 1.14 中考察的函子是正则满射局部化，因为所有零化函子都是如此。然而，正则满射局部化一般并非零化函子，例 1.15 中的函子 Ab 就说明了这一点。事实上，若 Ab 是一个零化 P_{A}，那么 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \partial^{\mathsf{A}})$ 将是一个完美交叉模，即满足 $\mathsf{Ab}(\mathbf{A}) = (1, 1, \mathrm{Id})$ 的交叉模。特别地，群 A_2 将是一个完美群。但这样一来，$\mathsf{P}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}S_3) = \mathbf{X}S_3$，因为从完美群到对称群 S_3不存在非平凡同态。然而我们知道，$\mathsf{Ab}(\mathbf{X}S_3) = \mathbf{X}C_2$，其中 C_2 是一个二阶循环群，所以阿贝尔化不是零化。

最后我们指出，如果 f 本身是正则满态射，那么局部化函子 $\mathsf{L}f$ 就是正则满射局部化函子；群的情形中也有类似的观察，见 [8] 。

作为预备知识的最后一部分，我们回顾一下纤维逐点局部化的概念。我们在 [22, 定义 3.1], 中为交叉模引入了这一概念，但它并非新概念；关于空间，一个很好的参考资料是 [13, 第 I.F 节]。

定义 1.18. 设 L: 交叉模范畴 $\to$ 交叉模范畴是一个局部化函子。一个正合列

$$1 \longrightarrow \mathsf{N} \xrightarrow{\kappa} \mathsf{T} \xrightarrow{\alpha} \mathsf{Q} \longrightarrow 1$$

当存在由水平正合序列构成的交换图时，称其容许纤维逐点局部化

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow{\kappa} & \mathsf{T} & \xrightarrow{\alpha} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \ell^{\mathsf{N}}} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow{j} & \mathsf{E} & \xrightarrow{p} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中 g 是一个 L-等价。

以下定理综合了 [22] 中的两个结果，即定理 3.4 和推论 3.7。从现在起，我们所考虑的每个局部化函子都是正则满态射局部化函子。

定理 1.19. 设 L : 交叉模范畴 $\to$ 交叉模范畴是一个正则满态射局部化函子。一个交叉模的正合序列

$$1 \longrightarrow \mathsf{N} \xrightarrow{\kappa} \mathsf{T} \xrightarrow{\alpha} \mathsf{Q} \longrightarrow 1 \tag{4}$$

当且仅当我们有如下包含关系时，才具有纤维逐点局部化

$$[\kappa_2(ker(\ell_2^{\mathsf{N}})), T_1] \subseteq \kappa_1(ker(\ell_1^{\mathsf{N}})) \tag{5}$$

2. Fiberwise localization and flatness

在本节中，我们将在交叉模的正则满态射局部化函子 L: XMod $\to$XMod 的背景下，研究 L-平坦正合列及其拉回的纤维逐点局部化（尽管正如命题 5.6 所示，这一概念并非仅针对正则满函子定义）。本节对于研究条件平坦性与可容许性之间的联系（见第 3 节）至关重要。首先，让我们回顾 L-平坦性和条件平坦性的定义。

定义 2.1. 设 L 为一个局部化函子，则一个短正合列 e

$$1 \longrightarrow \mathsf{N} \xrightarrow{\kappa} \mathsf{T} \xrightarrow{\alpha} \mathsf{Q} \longrightarrow 1$$

若序列 LT LQ LN $\mathsf{L}(\kappa)$ $\mathsf{L}(\alpha)$ 是一个短正合列，则称其为 L-平坦的。

备注 2.2. 我们回顾一下，在交叉模范畴中，极限按分量计算。在 XMod 中，拉回按如下方式构造 [19]。设 α: T $\to$ Q 和 g: Q′ $\to$ Q 是两个交叉模态射。那么，沿 g 的 α 的拉回由以下交换方块给出

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}'}} & \mathsf{Q}' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{T}}} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathsf{T} & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathsf{Q} \end{array}$$

拉回的对象部分 T′ 按照群的情形逐分量构造

$$(T_1 \times_{Q_1} Q_1', T_2 \times_{Q_2} Q_2', \partial'),$$

其中 ∂' 和作用由群范畴中拉回的泛性质诱导。投影是自然的，也按分量给出。

沿用 [14] 中针对群和空间引入的术语，我们定义交叉模中局部化函子的条件平坦性概念。

定义 2.3. 设 L 为一个局部化函子。若任意 L-平坦正合列的拉回仍为 L-平坦，则称该函子是条件平坦的。

在第 3 节中，我们将给出条件平坦性的刻画。为此，我们将采用与 [14] 中针对群和拓扑空间所用的类似策略。作者大量利用了群和空间范畴中纤维逐点局部化的存在性。然而，在我们的文章 [22], 中，我们注意到，对于给定的局部化函子以及交叉模范畴中的给定正合列，纤维逐点局部化并不总是存在。幸运的是，对于 L-平坦正合列，我们可以证明总能构造出纤维逐点局部化。

引理2.4。设 L 是一个正则满射局部化。那么，任意 L-平坦正合交叉模序列都存在纤维逐点局部化。

证明。设 $\mathsf{T}\ \mathsf{Q}\ \mathsf{N}1 \xrightarrow{\kappa} \xrightarrow{\alpha} \to 1$ 是一个 L-平坦正合交叉模序列。该序列的 L-平坦性特别意味着 $\mathsf{L}\kappa$ 是一个单态射。考虑以下正合序列图表：

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \ker(\ell^{\mathsf{N}}) & \rightarrowtail & \mathsf{N} & \xrightarrow{\ell^{\mathsf{N}}} & \mathsf{LN} \\ & & \downarrow & (1) & \downarrow{\scriptstyle \kappa} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{L}\kappa} \\ 1 & \longrightarrow & \ker(\ell^{\mathsf{T}}) & \rightarrowtail & \mathsf{T} & \xrightarrow[\ell^{\mathsf{T}}]{} & \mathsf{LT} \end{array}$$

由 [2, 引理4.2.4.(1)] 可知，由于 $\mathsf{L}\kappa$ 是一个单态射，(1) 是一个拉回。于是，$\kappa(\ker(\ell^{\mathsf{N}}))$ 是 T 的一个正规子交叉模，因为它可视为 T 的正规子交叉模 N 与 $\ker(\ell^{\mathsf{T}})$ 的交集。因此，我们可以应用定理 1.19 □

为了理解条件平坦性，我们必须研究 L-平坦正合序列的拉回。因此，在第 3 节中，知道任何此类拉回都存在纤维逐点局部化将会非常有用。

引理2.5. 设 L 是一个正则满射局部化。设

$$1 \longrightarrow \mathsf{N} \xrightarrow{\kappa} \mathsf{T} \xrightarrow{\alpha} \mathsf{Q} \longrightarrow 1 \tag{6}$$

是一个交叉模的 L-平坦正合列，且 $g\colon \mathsf{Q}' \to \mathsf{Q}$ 是一个交叉模态射。于是，我们可以构造沿 g 对 (6) 的拉回进行纤维逐点局部化

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow{\kappa'} & \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}'}} & \mathsf{Q}' & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{T}}} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow[\kappa]{} & \mathsf{T} & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

注2.6。在本文余下部分，尤其是在下面的证明中，我们将 N 与 T 的正规子交叉模 κ(N) 以及 T′ 的正规子交叉模 κ'(N) 视为相同。因此，我们将省略 κ 和 κ'。例如，对于群 N_1 中一个要在 T'_1 中考察的元素，我们将记作 $(n_1, 1)$，而不记作 $\kappa'_1(n_1) = (\kappa_1(n_1), 1)$。

引理2.5的证明。我们需要验证 ker(ℓ^{N}) 是 T′ 的正规交叉模。由于 N 是 T′ 的子交叉模，我们只需验证定理 1.19 的 (5)。设 (t_1, q_1) 是 T'_1 中的一个元素，$(x_2, 1)$ 是 ker(ℓ_2^{N}) 中的一个元素，则有以下等式

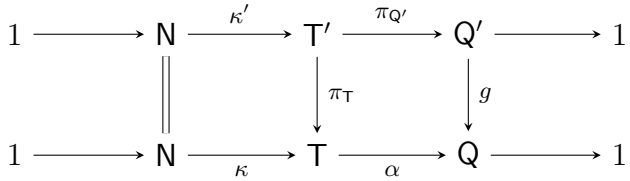
$$^{(x_2,1)}(t_1, q_1)(t_1, q_1)^{-1} = (\ ^{x_2}t_1t_1^{-1}, q_1q_1^{-1}) = (\ ^{x_2}t_1t_1^{-1}, 1).$$

事实上，由引理2.4可知，原序列 (6) 存在纤维逐点局部化，由此根据定理 1.19 可得 $[ker(\ell_2^{\mathsf{N}})\ T_1] \subset ker(\ell_1^{\mathsf{N}})$，即对于任意 $x_2 \in ker(\ell_2^{\mathsf{N}})$ 和$t_1 \in T_1$ ，都有 $^{x_2}t_1t_1^{-1} \in ker(\ell_1^{\mathsf{N}})$。但是，根据注2.6中引入的记号，这等价于说元素 ($^{x_2}t_1t_1^{-1}$, 1) 属于 $ker(\ell_1^{\mathsf{N}})$。□

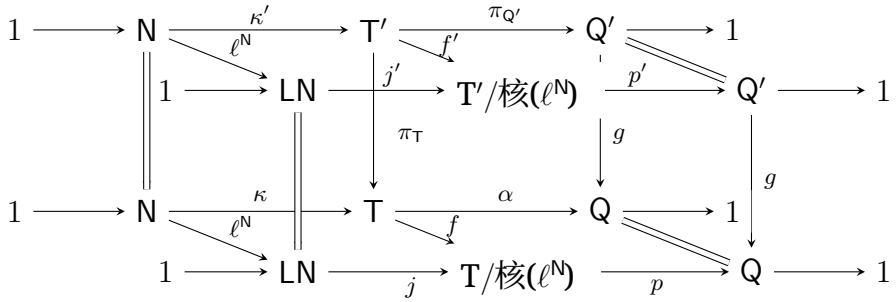
这个引理并非显然，因为正如我们在 [22, 定理 4.5]中所证明的，交叉模正合列的纤维逐点局部化并不总是存在。如果我们希望群和空间的策略也适用于交叉模条件平坦性的研究，就需要最后一个要素，即纤维逐点局部化与拉回运算的交换规则。

命题 2.7. 设有一个 L-平坦正合列，其中 L 是正则满态射局部化函子。那么，对其纤维逐点局部化取拉回，所得结果等于对其拉回取纤维逐点局部化。

证明. 设



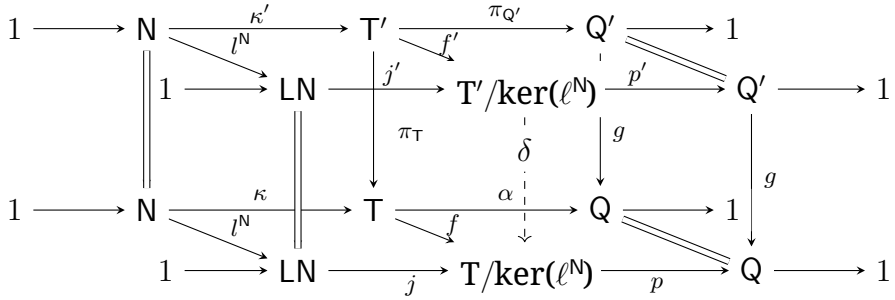
是一个 L-平坦正合列的拉回。接下来，我们通过商去局部化态射的核 ℓ^{N} 来构造这两个序列的纤维逐点局部化，如下所示。



我们利用余核的泛性质定义态射 δ: T′/ker(ℓ^{N}) → T/ker(ℓ^{N})，从而补全图表，因为 $f \circ \pi_{\mathsf{T}} \circ \kappa'|_{\ker(\ell^{\mathsf{N}})} = 1$，其中 $\kappa'|_{\ker(\ell^{\mathsf{N}})}$: ker($\ell^{\mathsf{N}}$) → T′ 是

ℓ^{N} 的核的包含映射。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \ker(\ell^{\mathsf{N}}) & \xrightarrow{\kappa'|_{\ker(\ell^{\mathsf{N}})}} & \mathsf{T}' & \xrightarrow{f'} & T'/\ker(\ell^{\mathsf{N}}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{T}}} & & \vdots{\scriptstyle \delta} & & \\
1 & \longrightarrow & \ker(\ell^{\mathsf{N}}) & \xrightarrow[\kappa|_{\ker(\ell^{\mathsf{N}})}]{} & \mathsf{T} & \xrightarrow[f]{} & T/\ker(\ell^{\mathsf{N}}) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$



我们可以验证， δ 使两个前面交换。事实上，分别利用 ℓ^{N} 和 f' 是满态射这一事实，可知右侧和左侧均交换。

上述图表的交换性以及命题 1.5 意味着

$$1 \longrightarrow \mathsf{LN} \xrightarrow{j'} \mathsf{T}'/\ker(\ell^{\mathsf{N}}) \xrightarrow{p'} \mathsf{Q}' \longrightarrow 1$$

是沿着 g的 T/ker(1 ⟶ j ⟶ ℓ^{N} p ⟶ ⟶ 1) Q LN 的拉回。 □

注 2.8。在 [14], 群范畴中，纤维逐点局部化的构造是函子性的，因此，由拉回列与序列本身之间的态射 T′ →T，我们可以直接得到拉回列的纤维逐点局部化与原序列的纤维逐点局部化之间的态射。换言之，映射 δ自然就有了；相比之下，在交叉模范畴中，我们必须显式构造映射δ 。

3. Conditional flatness and admissibility

本节借助上一节的结果，提出条件平坦性的一种更简单的刻画。我们引入正则满态射类的可容许性概念，并证明它等价于条件平坦性。利用这一等价关系，我们可以轻松证明给定的局部化函子具有条件平坦性。我们发现，局部化函子的某些性质（如右正合性）可直接推出其对正则满态射类的可容许性。

第一步使我们能够将条件平坦性的定义（定义 2.3）限于 L-平坦正合列的纤维逐点局部化（引理 3.1）。更确切地说，我们证明：一个 L-平坦正合列的拉回是 L-平坦的，当且仅当其纤维逐点局部化的拉回也是如此。

引理 3.1。 设 L 是一个正则满态射局部化函子。那么 L 是条件平坦的，当且仅当对于任意 L- 平坦正合列 T Q N 1 $\xrightarrow{\kappa}$ $\xrightarrow{\alpha}$ $\longrightarrow$ 1 ，其中 N 是一个 L- 局部交叉模，沿任意态射 Q′ →Q 的拉回列都是 L-平坦的。证明。 这是显然的，因为 f' 和 ℓ^{N} 在此图表中是 L-等价：

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow{\kappa'} & \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}'}} & \mathsf{Q}' & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \ell_{\mathsf{N}}} & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow[j']{} & \mathsf{T}'/\ker(\ell^{\mathsf{N}}) & \xrightarrow[p']{} & \mathsf{Q}' & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

因此，顶行是 L-平坦的，当且仅当底行也是如此，由命题 2.7 得证。□

前述引理使我们能够沿用 [14] 中提出的方法。为求完整，即使论证与群论情形类似，我们仍对以下结果给出明确证明。

命题 3.2. 设 L 是正则满态射局部化函子。那么，L 条件平坦，当且仅当任意 L-局部对象的正合列的拉回都是 L-平坦的。
证明。由前述引理，只需考虑具有 L-局部核的正合列。
LN。因此，考虑一个 L-平坦正合列 T Q LN1 $\longrightarrow$ $\xrightarrow{j}$ $\xrightarrow{p}$ $\longrightarrow$ 1 。
我们构造如下图表，其中 g: Q′ → Q 是任意一个交叉模态射，且 (1) 是一个拉回。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow{j'} & \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}'}} & \mathsf{Q}' & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{T}}} & (1) & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow[j]{} & \mathsf{T} & \xrightarrow[p]{} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \ell^{\mathsf{T}}} & (2) & \downarrow{\scriptstyle \ell^{\mathsf{Q}}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow[L(j)]{} & \mathsf{LT} & \xrightarrow[L(p)]{} & \mathsf{LQ} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

注意到，由于每一行都是正合的，根据命题 1.5，(2) 是一个拉回，因此 (1) + (2) 也是一个拉回。因此，顶行是沿映射 $\ell^{\mathsf{Q}} \circ g$ 对底部 L-局部对象的正合列取拉回所得，这就证明了该结论。□

定义 3.3. 若局部化函子 L 保持如下形式的任意拉回，则称其对正则满态射类是可容许的

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}}} & \mathsf{Q} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{LT}}} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^{\mathsf{Q}}} \\ \mathsf{LT} & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathsf{LQ} \end{array}$$

其中 α 是正则满态射。

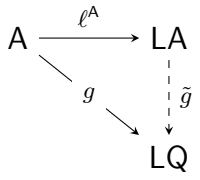
定理 3.4. 设 L 是一个正则满态射局部化函子。则以下陈述等价

(1) L 具有条件平坦性；(2) L 对正则满态射类是可容许的。

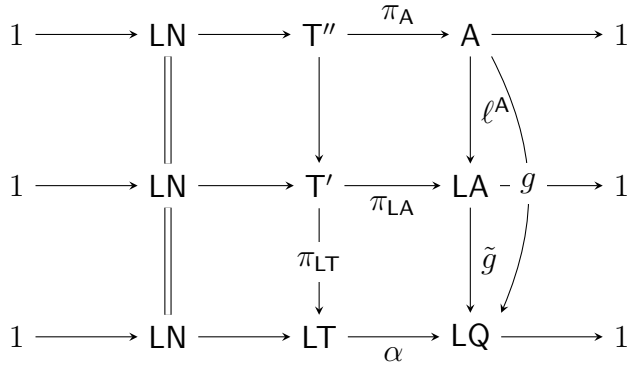
证明。蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的，因此我们证明 (2) $\Rightarrow$ (1)。考虑任意一个 L-局部对象的正合列

$$1 \longrightarrow \mathsf{LN} \longrightarrow \mathsf{LT} \xrightarrow{\alpha} \mathsf{LQ} \longrightarrow 1$$

以及任意态射 $g\colon \mathsf{A} \to \mathsf{LQ}$。根据命题 3.2，只要证明沿 g 对该正合列作拉回所得的序列是 L-平坦的，即可确立条件平坦性。我们先注意到，根据局部化的泛性质，该态射 g 可通过 LA 分解：



因此，我们可以先构造 LT LQ LN1 › ____› ____› ____› 1 沿$\tilde{g}$ 所得的拉回，然后再沿 ℓ^{A}对所得到的序列作拉回：



由于 L-局部对象范畴在拉回下封闭，T′ 是 L-局部的，因此我们可以应用条件 (2)，得出上方的行是 L-平坦的。这一观察表明，沿着 LT LQ LN1 › › $^{\alpha}$ › › 1 的 g 进行的拉回是一个 L-平坦序列，正如所需。□

上述定理给出了交叉模范畴中条件平坦性的一个更简便刻画。这一刻画将在本文后续部分发挥作用。

注 3.5。在半阿贝尔范畴的背景下，关于正则满态射类的可容许性研究见 [15]。对于那些具有函子性逐纤维局部化的局部化函子，也证明了类似结果。需要注意的是，他们的结果并不能推出定理 3.4，因为交叉模的局部化函子通常不具有函子性逐纤维局部化。不过，定理 3.4 中“(1) 推出 (2)”这一蕴含，即使对于不一定是正则满射局部化函子的情形也成立。

命题 3.6。若 L: 交叉模范畴 $\to$ 交叉模范畴 是交叉模范畴中的右正合局部化函子，则 L 对正则满态射类是可容许的。

证明。考虑交叉模的一个 L-平坦正合列沿态射 $g\colon \mathsf{Q}' \to \mathsf{Q}$ 的如下拉回。

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow{\kappa'} & \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{Q}'}} & \mathsf{Q}' & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{T}}} & (1) & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathsf{N} & \xrightarrow[\kappa]{} & \mathsf{T} & \xrightarrow[f]{} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

将 L 应用于此图表，我们得到（因为 L 是右正合的）如下图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathsf{LN} & \xrightarrow{\mathsf{L}(\kappa')} & \mathsf{LT}' & \xrightarrow{\mathsf{L}(\pi_{\mathsf{Q}'})} & \mathsf{LQ}' & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{L}(\pi_{\mathsf{T}})} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{L}(g)} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow[\mathsf{L}(\kappa)]{} & \mathsf{LT} & \xrightarrow[\mathsf{L}(f)]{} & \mathsf{LQ} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

由于 $\mathsf{L}(\kappa) = \mathsf{L}(\pi_{\mathsf{T}}) \circ \mathsf{L}(\kappa')$ 是一个（正规）单态射，我们得出 $\mathsf{L}(\kappa')$ 是一个单态射。由右正合性可知其正规性，结合定理 3.4 即得结论。□

请注意，此证明在任意半阿贝尔范畴中均成立。

推论 3.7。阿贝尔化函子 Ab: 交叉模范畴 $\to$ 交叉模范畴对于正则满态射类是可容许的。

证明。阿贝尔化函子 Ab: XMod $\to$ XMod 是右正合的。由于正合性可以逐分量验证，结论即得。□

有时，借助我们已有的群论知识来构造局部化函子的简单例子，并考察它们在交叉模上的行为，是很有用的。下面命题的证明基于一个来自群范畴的反例，该反例通过注 1.3 中定义的函子 X 得到。

命题 3.8. 存在一些正则满射局部化函子 L: XMod $\to$ XMod，它们对于正则满态射类并不可容许。

证明。我们通过 X: Grp $\to$ XMod，将群范畴中的一个局部化函子反例搬到交叉模范畴中；该函子对于正则满态射类并不可容许，见 [14, 定理 5.1] 。

令 L_ϕ 为由投影 $\phi\colon C_4 \to C_2$诱导的局部化函子，其中 C_n 表示阶为 n的循环群。它导出一个局部化函子 $\mathsf{L}^{\mathsf{X}_\phi}$: XMod $\to$ XMod。特别地，若将 X 应用于 [14], 中所考察的 L_ϕ-局部群扩张，我们便得到一个 $\mathsf{L}^{\mathsf{X}_\phi}$-局部交叉模的正合列：

$$1 \longrightarrow (1, \mathbb{Z}) \longrightarrow (1, \mathbb{Z}) \longrightarrow (1, C_2) \longrightarrow 1$$

沿着交叉模态射 X_ϕ 作拉回，我们得到以下正合列

$$1 \longrightarrow (1, \mathbb{Z}) \longrightarrow (1, \mathbb{Z} \times C_2) \longrightarrow (1, C_4) \longrightarrow 1$$

由 [22, 引理 1.4] 可知，该正合列不是 Lxϕ-平坦的。事实上，若情况如此，就会与 [14] 中的群论观察相矛盾。□

4. Admissibility and acyclicity

在群范畴和拓扑空间范畴中，局部化函子 L 是零化函子，当且仅当局部化态射的核是 L- 无圈的（也就是说，对于任意 M ∈ 交叉模范畴，Lker(ℓ^M) 是平凡的）。这一刻画特别意味着，任何零化函子对于正则满态射类都是可容许的。值得注意的是，尽管交叉模的零化函子并不具有无圈核，但在交叉模范畴中仍有类似的结果：局部化态射的核的 L-无环性意味着其可容许性。

命题 4.1. 设 L : 交叉模范畴 → 交叉模范畴是一个正则满射局部化函子，并且对于任意 M ∈ 交叉模范畴，ker(ℓ^M: M → LM) 都是 L-无圈的。那么 L 对正则满态射类是可容许的。

证明。 考虑 LT LQ LN1 ↠ $\overset{\kappa}{\underline{\quad}}$↠ $\overset{f}{\underline{\quad}}$↠ $\underline{\quad}$↠1 沿着 $\underline{\ell^Q}$: Q →LQ:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow{\kappa'} & \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_Q} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathsf{LT}}} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^{\mathsf{Q}}} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathsf{LN} & \xrightarrow[\kappa]{} & \mathsf{LT} & \xrightarrow[f]{} & \mathsf{LQ} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

我们需要证明 π_{LT} 是一个 L-等价。由于交叉模范畴 XMod 是一个带基点原模范畴，并且根据假设，ℓ^{Q} 是一个正则满态射，我们知道 π_{LT} 是 ker(ℓ^{Q}) ≅ker(π_{LT}) → T′ 的余核。设 Y 为一个局部对象，对于任意 g: T′ → Y，我们有如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} \ker(\ell^{\mathsf{Q}}) & \longrightarrow & \mathsf{T}' & \xrightarrow{\pi_{\mathsf{LT}}} & \mathsf{LT} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & \swarrow{\scriptstyle \tilde{g}} & \\ \mathsf{Lker}(\ell^{\mathsf{Q}}) = 1 & \xrightarrow{g'} & \mathsf{Y} & & \end{array}$$

根据局部化的泛性质，存在 g': 1 → Y 使左侧方块交换。因此，根据余核的泛性质，存在唯一的 $\tilde{g}$: LT → Y，使三角形交换，由此我们得出 π_{LT} 是一个 L-等价。□

然而，交叉模的局部化函子并不像群的局部化函子那样运作。如上所述，在群范畴（以及拓扑空间范畴）中，局部化态射的核是 L-无圈的，当且仅当 L 是一个零化函子[14]。在交叉模的情形下，我们没有对零化函子作出这样的刻画。

注 4.2. 由 [22, 命题 4.6] 可知，存在一些零化函子，例如例 1.14 中定义的 $\mathrm{P}_{\mathsf{X}\mathbb{Z}}$，其局部化态射的核一般并非无圈。不过，在下一个命题中，我们证明：若局部化态射的核是 L-无圈的，如命题 4.1 所述，那么局部化函子就是一个零化函子。

下一个证明中所选的基数，恰与 Bousfield 关于空间的 [5, 定理 4.4] 中所选的相同。

命题 4.3. 设 f: B $\to$ C 是一个交叉模态射，且 Lf : XMod $\to$ XMod 是一个正则满态射局部化函子。若局部化态射的核是 Lf-无圈的，则 Lf 是一个零化函子。

证明。我们的策略是构造一个交叉模 A，使我们能够通过自然变换 ψ 将函子 Lf 与零化函子 P_A （定义 1.10）进行比较。我们选取 κ 为大于 B 和 C 的所选生成元个数的最小无限序数，即群 B_1、 B_2、 C_1 和 C_2的生成元个数。我们构造交叉模 A := $\coprod$ A$_\alpha$，其中 A$_\alpha$ 是所有生成元少于 2^κ 个的 Lf-无圈交叉模，见[5,定理 4.4]。

该证明的第一步是说明，若交叉模 X 是 Lf-局部的，则它是 A-局部的。设 ϕ 是 Hom(A, X) 中的一个态射，并利用自然性构造如下交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{A} & \xrightarrow{\phi} & \mathsf{X} \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ 1 = \mathsf{L}_f\mathsf{A} & \xrightarrow[\mathsf{L}_f\phi]{} & \mathsf{L}_f\mathsf{X} \end{array}$$

根据假设，X 与 LfX 同构；根据 A 的构造，我们得到 LfA $= 1$。因此， ϕ经由零对象分解，从而 Hom(A, X) $= 1$，这等价于说 X 是 A-局部的。现在考虑 P_A-等价 p^T: T $\to$ P_A T 以及 Lf-局部对象 LfT。根据上述观察，LfT 是 A-局部的；由泛性质可得所需的态射 ψ_T

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{T} & \xrightarrow{p^\mathsf{T}} & \mathsf{P}_\mathsf{A}\mathsf{T} \\ & \searrow^{\ell^\mathsf{T}} & \downarrow \psi_\mathsf{T} \\ & & \mathsf{L}_f\mathsf{T} \end{array}$$

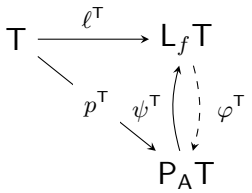
We 接下来构造如下正合序列的纤维逐点 A-空化 ce

$$1 \longrightarrow \ker(\ell^\mathsf{T}) \longrightarrow \mathsf{T} \xrightarrow{\ell^\mathsf{T}} \mathsf{L}_f\mathsf{T} \longrightarrow 1$$

根据假设，ker(ℓ^T) 是 Lf-无圈的，因此按照设计也是 P_A-无圈的。这意味着 ker$\Big(p^\mathsf{T}$: ker(ℓ^T) $\to$ P_A ker(ℓ^T)$\Big)$ 等于 ker(ℓ^T)。因此，该正合列满足定理 1.19 的条件 (5)，由此得到以下纤维逐点空化

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \ker(\ell^\mathsf{T}) & \longrightarrow & \mathsf{T} & \xrightarrow{\ell^\mathsf{T}} & \mathsf{L}_f\mathsf{T} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p^\mathsf{T}} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \mathsf{T}/\ker(\ell^\mathsf{T}) & \xrightarrow{\cong} & \mathsf{L}_f\mathsf{T} & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

由于 f 是 P_A-等价， ℓ^{T}也如此。因此，我们在以下交换图中得到一个态射 φ^{T} ：



根据泛性质，我们可以得出结论， ψ^{T} 与 φ^{T} 的两个复合分别同构于恒等映射，因此 $\mathsf{L}f\mathsf{T}$ $\cong \mathsf{P}_A\mathsf{T}$。类似的论证表明， ψ 和 φ 具有自然性，因此 $\mathsf{L}f$ 是一个零化函子，即 P_A。□

5. 零化函子与可容许性

在群范畴中，局部化态射的核是 L-无圈的这一事实，对于证明零化函子相对于正则满态射类是可容许的至关重要。正如 [22, 命题 46], 所示，对于交叉模范畴中的零化函子，这一事实一般并不成立。因此，自然会问零化函子是否可容许。本节最后将给出肯定答案，但我们先证明反例 $\mathsf{P}_{X\mathbb{Z}}$ 是可容许的。

命题5.1。零化函子 $\mathsf{P}_{X\mathbb{Z}}$ 对正则满态射类是可容许的。

证明。由 [15] 中的定理 5.1 可知，若 $\mathsf{P}_{X\mathbb{Z}}$-局部对象构成的反射子范畴是 Birkhoff 子范畴，即对正则商和子对象封闭，则 $\mathsf{P}_{X\mathbb{Z}}$ 是可容许的。这里，$\mathsf{P}_{X\mathbb{Z}}$-局部对象是形如 $A \to 1$ 的交叉模，其中 A 是任意阿贝尔群，且连接同态是平凡同态。因此，它显然对子对象封闭。此外，用正规子交叉模 $N \to 1$ 对 $A \to 1$ 取商，所得交叉模 $A/N \to 1$ 是 $\mathsf{P}_{X\mathbb{Z}}$-局部的。□

本节余下部分将证明，所有零化函子对于正则满态射类都是可容许的。考虑零化函子 P_A ，其中 $\mathsf{A} = (A_1, A_2, \partial)$ 是一个交叉模。为证明其可容许性，只需证明沿余增广映射拉回一个由 P_A-局部交叉模组成的正合列，所得对象是 P_A-平坦的。换言之，在下列交叉模交换图中，映射 f 是一个 P_A-等价

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathsf{P}_A\mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{W} & \xrightarrow{g} & \mathsf{Q} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle f} & (1) & \downarrow{\scriptstyle p^{\mathsf{Q}}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathsf{P}_A\mathsf{N} & \longrightarrow & \mathsf{P}_A\mathsf{T} & \xrightarrow[h]{} & \mathsf{P}_A\mathsf{Q} & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

其中 (1) 是一个拉回，且 g 和 h 是正则满态射。为此，我们逐步遵循 [22, 命题 2.8], 中给出的 $\mathsf{P}_A\mathsf{Q} = \mathrm{colim}\mathsf{Q}^{\beta}$ 的归纳构造，另见命题 1.11。对于每个后继序数 $\beta+1$ ，我们通过消去所有从 A 出发的态射，从 Q^{β} 得到 $\mathsf{Q}^{\beta+1}$ ，因此我们先从 $\mathsf{Q}_0 = \mathsf{Q}$ 构造 Q_1 。

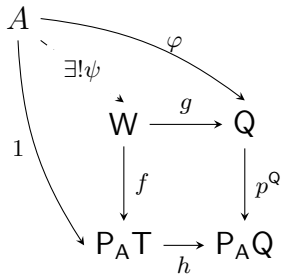
注 5.2。设 φ : A $\to$Q 是一个交叉模态射。交叉模 Q_1 是 Q 除以 Q 中像的正规闭包 K_Q 所得的商

$$ev\colon \coprod_{\varphi\in Hom(A,Q)} A = M \longrightarrow Q$$

其在由 φ 索引的 A 副本上由 φ 定义。我们接下来进行的构造，其思路是：为了构造扩张 W 的零化 P_AW，无需杀死从 A 到 W 的所有态射，只需处理那些经过 Q 分解的态射即可。请注意，给定一个扩张 N $\to$T $\to$ Q，其中 N 是 A-无圈交叉模，从 A 到 T 的所有态射一般而言并不都经过 Q 分解。

根据 p^Q 的定义，对于如下所示的复合 $p^Q\circ\varphi = 1 = h\circ 1$，我们有以下等式。因此，从 A 到 Q 的任意态射都会诱导出一个从 A 到 W 的态射：

(7)



我们将由 φ 确定的态射称为 ψ，现在考虑 K_W 是有意义的；它是 M $\to$W 的像在 W 中的正规闭包。

引理 5.3. Wi　　在注 5.2 中的相同记号下，我们有一个同构 $K_W \cong K_Q$.

证明。交叉模的极限逐层计算，因此拉回 W 由相容对 (x, q) 构成，它们分别属于 $x \in (P_A T)_i$ 和 $q \in Q_i$，对应于 $i = 1, 2$。根据 ψ 的构造，我们有$\psi(a) = (1, \varphi(a))$.

现在，我们计算 ev: M $\to$Q 和 $(1, ev)$: M $\to$W 的余核的核。核有以下两种描述。

$$K_Q = \Big(ev_1(M_1)_{Q_2}[ev_2(M_2)_{Q_2}, Q_1],\ ev_2(M_2)_{Q_2}, \partial\Big)$$

$$K_W = \Big((1, ev_1)(M_1)_{W_2}[(1, ev_2)(M_2)_{W_2}, W_1],\ (1, ev_2)(M_2)_{W_2}, \partial'\Big)$$

交叉模 K_W 的第二个群较容易处理：

$$\begin{aligned}(1, ev_2)(M_2)_{W_2} &= \{{}^{(t_2,q_2)}(1, ev_2(m_2)) \mid (t_2, q_2) \in W_2,\ m_2 \in M_2\}\\ &= \{(1,\ {}^{q_2}ev_2(m_2)) \mid q_2 \in Q_2,\ m_2 \in M_2\}\\ &= 1 \times ev_2(M_2)_{Q_2}.\end{aligned}$$

其中，第二个等式成立是因为 h 是满射。通过类似的计算，我们得到 $(1, ev_1)(M_1)_{W_1} = 1 \times ev_1(M_1)_{Q_1}$，因此我们只需证明

$$[(1, ev_2)(M_2)_{W_2}, W_1] = 1 \times [ev_2(M_2)_{Q_2}, Q_1]$$

我们通过以下等式来证明这一点：

$$\begin{aligned}[(1, ev_2)(M_2)_{_2}, W_1] &= [(1 \times ev_2(M_2)_{Q_2}), W_1] \\ &= \{{}^{(1,x_2)}(t_1, q_1)(t_1, q_1)^{-1} \mid x_2 \in ev_2(M_2)_{Q_2},\ (t_1, q_1) \in W_1\} \\ &= \{(1, {}^{x_2} q_1 q_1^{-1} \mid x_2 \in ev_2(M_2)_{Q_2},\ q_1 \in Q_1\} \\ &= 1 \times [(ev_2(M_2)_{Q_2}, Q_1]\end{aligned}$$

因此，最后我们可以得出结论： $K_{\mathsf{W}} = 1 \times K_{\mathsf{Q}}$，特别是 K_{W}和 K_{Q}，是同构的。 □

命题 5.4. 对任意序数 β，我们有如下交换图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{W} & \xrightarrow{f_\beta} & \mathsf{W}_\beta & \longrightarrow & \mathsf{P_A T} \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h_\beta} & (2) & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \mathsf{Q} & \xrightarrow{p^{\mathsf{Q}}_\beta} & \mathsf{Q}_\beta & \longrightarrow & \mathsf{P_A Q} \end{array}$$

其中 (2) 是一个拉回方块，映射 f_β: $\mathsf{W} \to \mathsf{W}_\beta$ 和 $p^{\mathsf{Q}}_\beta : \mathsf{Q} \to \mathsf{Q}_\beta$ 是 P_A-等价，且 h_β 是一个正则满态射。

证明。我们用归纳法证明。由于零化可能采用超限构造，我们必须先建立归纳基础；根据假设，情形 $\beta = 0$ 成立，接着验证该命题对后继序数和极限序数成立。

后继情形 假设对于某个序数 β，引理已经得证。接着，我们考察求值映射 $ev :$ $\coprod_{Hom(\mathsf{A},\mathsf{Q}^\beta)}\mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{Q}^\beta$ 和 $ev : \coprod_{Hom(\mathsf{A},\mathsf{Q}^\beta)}\mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{W}^\beta$ 的余核的核 $\mathsf{K}^{\mathsf{W}}_\beta$ 和 $\mathsf{K}^{\mathsf{Q}}_\beta$。它们构成如下正合行图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{K}^{\mathsf{W}}_\beta & \xrightarrow{i_{\mathsf{W}}} & \mathsf{W}_\beta & \xrightarrow{f_{(\beta\to\beta+1)}} & \mathsf{W}_{\beta+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle h_\beta} \ (2) & & \vdots{\scriptstyle \exists! h_{\beta+1}} \\ \mathsf{K}^{\mathsf{Q}}_\beta & \xrightarrow{i_{\mathsf{Q}}} & \mathsf{Q}_\beta & \xrightarrow{p^{\mathsf{Q}}_{(\beta\to\beta+1)}} & \mathsf{Q}_{\beta+1} \end{array}$$

引理 5.3 应用 于此，得到 $\mathsf{K}^{\mathsf{W}}_\beta$ 与 $\mathsf{K}^{\mathsf{Q}}_\beta$ 之间的同构。复合

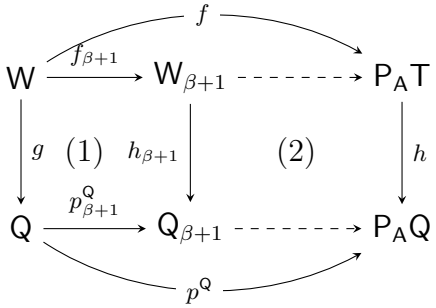
$$p^{\mathsf{Q}}_{(\beta\to\beta+1)} \circ h_\beta \circ i_{\mathsf{W}} : \mathsf{K}^{\mathsf{W}}_\beta \to \mathsf{Q}_{\beta+1}$$

由交换性可知其为零，根据余核的泛性质，得到态射$h_{\beta+1}$: $\mathsf{W}_{\beta+1} \to \mathsf{Q}^{\beta+1}$。核之间的同构表明 (2) 是一个拉回（见命题 1.5）。根据归纳假设， h_β 是一个正则满态射，而复合$p^{\mathsf{Q}}{}_{(\beta\to\beta+1)} \circ h_\beta$: $\mathsf{W}_\beta \to \mathsf{Q}^{\beta+1}$ 也为正则满态射，因此 $h_{\beta+1}$亦然。现在我们证明 $p^{\mathsf{Q}}{}_{(\beta\to\beta+1)}$ 和 $f_{(\beta\to\beta+1)}$ 是 $\mathsf{P_A}$-等价。

对于第一个 on e 我们将余核 $Q^{\beta+1}$ 写成沿求值态射的推出 :

$$\begin{array}{ccc} \coprod A & \xrightarrow{\varphi} & Q_\beta \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^Q_{(\beta\to\beta+1)}} \\ 1 & \xrightarrow[inc]{} & Q_{\beta+1} \end{array}$$

其中，余积取遍 Hom(A,Q)。平凡映射 $A \to 1$ 是一个 P_A-等价，因此推出 $p^Q{}_{(\beta\to\beta+1)}$: $Q_\beta \to Q^{\beta+1}$ 也是如此，这由引理 1.8 (1) 得出。将其与 P_A-等价 $Q \to Q^\beta$ 复合后，我们可知 $p^Q_{\beta+1}$: $Q \to Q_{\beta+1}$ 也是一个 P_A-等价。同样的论证表明， $f_{\beta+1} : W \to W^{\beta+1}$ 也是一个 P_A-等价。由局部化的泛性质，我们得到两个映射，一个从 $W^{\beta+1}$ 到 P_AT，另一个从 $Q^{\beta+1}$ 到 P_AQ，使得 (2) 交换:



由于 (1) 和外部矩形都是拉回，且 $h_{\beta+1}$ 是正则满态射，我们可由 [2]中的命题 4.1.4 得出 (2) 是一个拉回。

极限情形 要证明一般的超限归纳命题，我们还需要证明它对极限序数也成立。令 γ 为一个极限序数，并且

$$Q_\gamma = \mathrm{colim}_{\alpha<\gamma} Q_\alpha \qquad W_\gamma = \mathrm{colim}_{\alpha<\gamma} W_\alpha$$

我们已经证明，对于所有 $\alpha < \gamma$， $p^Q{}_{(\alpha-1\to\alpha)}$: $Q_{\alpha-1} \to Q_\alpha$ 是一个 P_A-等价。因此，复合 p^Q_α: $Q \to Q_\alpha$ 也是一个 P_A-等价，而由引理 1.8 (3)，可知 p^Q_γ: $Q \to Q^\gamma$ 是一个 P_A-等价。对 f_γ: $W \to W^\gamma$ 也可作同样的推理。映射 $f : W \to P_AT$ 和 $p^Q : Q \to P_AQ$ 的存在，为我们提供了两个映射 $W_\gamma \to P_AT$ 和 $Q_\gamma \to P_AQ$，如下方图表 (8) 所示。

零化 P_AQ 构造为 Q_α 的滤过余极限，见命题 1.11。滤过余极限与有限极限可交换，特别是与核可交换。因此

$$K^Q_\gamma := \ker(Q \to Q_\gamma) \cong \mathrm{colim}_{\alpha<\gamma} \ker(Q \to Q_\alpha)$$

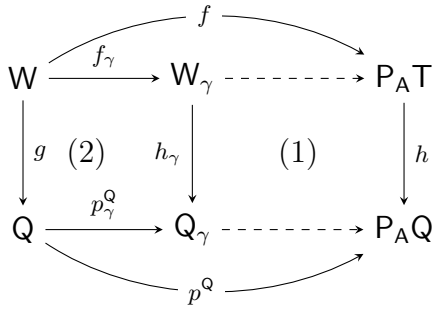
其中，ker(Q $\to Q_\alpha$) 记作 K^Q_α。范畴 XMod 是一个代数簇（也称为固定类型的代数范畴）。因此，根据 [21, 命题 IX.1.2], ，我们知道遗忘函子 $\mathcal{U}$: XMod $\to$ Set 创建滤过余极限。换言之，我们有:

$$\mathcal{U}(\mathrm{colim}_{\alpha<\gamma} K^Q_\alpha) = \mathrm{colim}_{\alpha<\gamma} \mathcal{U} K^Q_\alpha = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{U} K^Q_\alpha$$

其中，第一个项中的余极限属于交叉模范畴，而第二个余极限属于 Set 范畴。这意味着我们知道 $\mathrm{colim}^{\alpha<\gamma} K^Q_\alpha$ 的结构是一个

集合。现在，由于对于所有 $\alpha < \gamma$，$\mathsf{K}^{\mathsf{Q}}_{\alpha} \cong \mathsf{K}^{\mathsf{W}}_{\alpha}$，且 $\mathsf{K}^{\mathsf{Q}}_{\gamma}$ 可以写成 $\mathsf{K}^{\mathsf{Q}}_{\alpha}$ 的并（$\mathsf{K}^{\mathsf{W}}_{\gamma}$ 也一样），我们得出 $\mathsf{K}^{\mathsf{Q}}_{\gamma} \cong \mathsf{K}^{\mathsf{W}}_{\gamma}$。现在考虑如下图表：

(8)



由于 f_γ 和 p^{Q}_{γ} 的核同构，我们可推出 (2) 是一个拉回。正如我们已证明的，每个映射 $p^{\mathsf{Q}}{}_{(\alpha\to\alpha+1)}\colon \mathsf{Q}_\alpha \to \mathsf{Q}_{\alpha+1}$ 都是正则满态射，因此态射 $p^{\mathsf{Q}}_{\alpha}\colon \mathsf{Q} \to \mathsf{Q}_\alpha$ 也是正则满态射，因为它是正则范畴中正则满态射的复合。余极限函子作为左伴随函子，保持余极限，尤其是余核。在带基点原模范畴中，任意正则满态射都是余核，因此

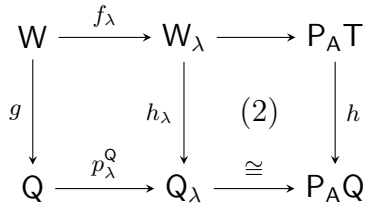
$$p^{\mathsf{Q}}_{\gamma}\colon \mathsf{Q} \to \mathsf{Q}_\gamma$$

是正则满态射。复合 $p^{\mathsf{Q}}_{\gamma} \circ g$ 也是正则满态射，因此我们得出 h_γ 也是如此。用与后继步骤相同的论证，我们得到 (1) 是一个拉回，由此完成归纳证明。□

现在我们可以给出本节的主要结果了。

定理 5.5. 设 A 是任意一个交叉模。零化函子 P_A 对正则满态射类是可容许的。

证明. 设 W 是正则满态射 $h\colon \mathsf{P}_\mathsf{A}\mathsf{T} \to \mathsf{P}_\mathsf{A}\mathsf{Q}$ 沿局部化态射 $p^{\mathsf{Q}}\colon \mathsf{Q} \to \mathsf{P}_\mathsf{A}\mathsf{Q}$ 的拉回，其中两个交叉模都是 P_A-局部的。设 λ 为满足 $\mathsf{Q}_\lambda \cong \mathsf{P}_\mathsf{A}\mathsf{Q}$ 的序数（见命题 1.11）。由命题 5.4，我们有如下图表：



其中外层矩形是一个拉回，态射 f_λ 和 p^{Q}_{λ} 是 P_A-等价，且 (2) 是一个拉回。由于同构在拉回下稳定，我们有一个同构 $\mathsf{W}_\lambda \cong \mathsf{P}_\mathsf{A}\mathsf{T}$。因此我们已经证明映射 $f\colon \mathsf{W} \to \mathsf{P}_\mathsf{A}\mathsf{T}$ 是一个 P_A-等价，这意味着函子 P_A 是可容许的。□

本文聚焦于正则满态射局部化函子，因为在研究群范畴、交叉模范畴或更一般的半阿贝尔范畴中的条件平坦性和可容许性时，这类函子会自然出现。我们在本节最后指出，条件平坦性的概念也可以针对非正则满射局部化函子来定义。下一个命题给出了这样一个条件平坦的局部化函子的例子。

需要强调的是，我们并不能先验地认为它与可容许性等价，而正则满态射局部化函子的情形则可由定理 3.4 得出这种等价。因此，在证明下一个命题时，我们必须验证定义 2.3 中给出的更一般的条件平坦性条件。

命题 5.6。存在一个非正则满射局部化函子，尽管如此，它是条件平坦的，因此对于正则满态射类而言是可容许的。

证明。考虑例 1.16 中定义的函子 I，它将任意交叉模 $(N_1, N_2, \partial^{\mathsf{N}})$ 映为 (N_2, N_2, Id_{N_2})。此函子不是正则满射局部化函子，因为若考虑连接态射非满射的交叉模，则局部化态射不是正则满态射。

现在证明 I 是条件平坦的。设 T Q N1 $\xrightarrow{\kappa}$ $\xrightarrow{\alpha}$ $\to 1$ 是交叉模的任意正合列。我们看到，$\mathrm{I}((N_1, N_2, \partial^{\mathsf{N}})) = (N_2, N_2, Id_{N_2})$ 是 $(T_2, T_2, Id_{T_2}) = \mathrm{I}((T_1, T_2, \partial^{\mathsf{T}})$ 的正规子交叉模，并且 $\mathrm{I}((Q_1, Q_2, \partial^{\mathsf{Q}})) = (Q_2, Q_2, Id_{Q_2})$ 是 κ: N $\to$ T 的余核。因此，任意交叉模的正合列都是 I-平坦的。特别地，沿任意交叉模态射对 I-平坦正合列作拉回，所得序列仍然是 I-平坦的，因此 I 是条件平坦的。□

References

[1] A. J. Berrick 和 E. Dror Farjoun：《纤维化与零化》。载于：《以色列数学杂志》135（2003），第 205–220 页。[2] F. Borceux 和 D. Bourn：《Mal'cev、原模范畴、同调范畴与半阿贝尔范畴》。第 566 卷。Springer Science & Business Media，2004。[3] D. Bourn：《正规化等价、核等价与仿射范畴》。2006，第 43–62 页。[4] A. K. Bousfield：《范畴中分解系统的构造》。载于：《纯粹与应用代数杂志》9.2（1976），第 207–220 页。[5] A. K. Bousfield：《空间的同伦局部化》。载于：《美国数学杂志》119.6（1997），第 1321–1354 页。ISSN: 0002-9327。URL: http://muse.jhu.edu/journals/american_journal_of_math

[6] R. Brown 和 P. Higgins。《关于某些相关空间的第二相对同伦群之间的联系》。载于：《伦敦数学会会刊》（1978），第 193–212 页。[7] R. Brown 和 C. Spencer。《G-群胚、交叉模与拓扑群的基本群胚》。载于：《数学探索》（论文集）79.4（1976），第 296–302 页。[8] C. Casacuberta。《从现代观点看 Anderson 局部化》。载于：《当代数学》181（1995），第 35–46 页。[9] C. Casacuberta。《群与同伦型的幂等变换所保持的结构》。载于：晶体群及其推广（科特赖克，1999）。第 262 卷。《当代数学》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000，第 39–68 页。[10] C. Casacuberta 和 A. Descheemaeker。《相对群完备化》。载于：《代数杂志》285.2（2005），第 451–469 页。[11] C. Cassidy、M. H´ebert 和 G. M. Kelly。《反射子范畴、局部化与分解系统》。载于：《澳大利亚数学会杂志》A辑 38.3（1985），第 287–329 页。[12] T. Everaert、M. Gran 和 T. Van der Linden。《通过伽罗瓦理论得到的同调高阶霍普夫公式》。载于：《数学进展》217（2008），第 2231–2267 页。

[13] E. Dror Farjoun。《胞腔空间、零空间与同伦局部化》。第 1622 卷。数学讲义。施普林格出版社，柏林，1996，第 xiv+199 页。[14] E. Dror Farjoun 和 J. Scherer。《空间与群上的条件平坦函子》。载于：《Collect. Math.》66.1（2015），第 149–160 页。[15] M. Gran 和 J. Scherer。《半阿贝尔范畴中反射子的条件平坦性与可容许性》。载于：预印本（2022），15 页。[16] Philip S. Hirschhorn。《模型范畴及其局部化》。第 99 卷。数学调查与专著。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003，第 xvi+457 页。[17] G. Janelidze 和 G. M. Kelly。《伽罗瓦理论与中心扩张的一般概念》。载于：《纯粹与应用代数杂志》97.2（1994），第 135–161 页。 ISSN：0022-4049。 DOI：10.1016/0022-4049(94)90057-4。 URL：https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)90057-4

[18] G. Janelidze、L. M´arki 和 W. Tholen。《半阿贝尔范畴》。载于：《纯粹与应用代数杂志》168（2002），第367–386页。[19] M. Ladra 和 A.R. Grandjean。《交叉模与同调》。载于：《纯粹与应用代数杂志》95.1（1994），第41–55页。[20] M. Ladra、M.P. L´opez L´opez 和 E. Rodeja。《交叉模的满态射》。载于：《东南亚数学通报》28（2004年1月）。[21] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。第2版。施普林格，1997年。[22] O. Monjon、J. Scherer 和 F. Sterck。《交叉模不存在纤维逐点局部化》。arXiv:2207.09702，即将在《以色列数学杂志》发表，2022年。[23] K. Norrie。《交叉模的作用与自同构》。载于：《法国数学会通报》118.2（1990），第129–146页。[24] K. Norrie。《交叉模与群定理的类似物》。博士论文。伦敦大学国王学院，1987年。[25] J. H. C. Whitehead。《组合同伦 II》。载于：《美国数学会通报》55（1949），第453–496页。

Mathematics, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL, Switzerland电子邮箱：olivia.monjon@gmail.com

Mathematics, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, EPFL, Switzerland电子邮箱：jerome.scherer@epfl.ch

Institut de Recherche en Mathématique et Physique, Universit é catholique de Louvain, Belgium
电子邮箱：florence.sterck@uclouvain.be