arXiv:2301.08694v1 [math.PR] 20 Jan 2023

条件期望的几乎处处连续性

Alberto Alonso *,a 和 Fernando Brambila-Paz †,a

a墨西哥国立自治大学理学院数学系，墨西哥

摘要

给出了关于子代数序列 $\{A_n\}_{n\in 自然数集}$ 的一个充要条件，该条件可确保条件期望几乎处处收敛。

关键词：

1. 引言

设 X 上的 σ-代数 A 配有概率测度 μ。给定 A 的一列 σ-子代数 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，研究条件期望几乎处处收敛的条件是一个自然的问题。在 [] 中，我们分析了序列在 L^p 中收敛的情形，并给出了这一收敛成立的充分必要条件。我们定义了两个 σ-子代数 A^μ 和 $A^\perp$，并证明当且仅当 $A^\mu = A^\perp$ 时，L^p 收敛成立。我们还建立了一条 σ-子代数链。

$$\underline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}_\mu \subset \mathfrak{A}^\perp \subset \overline{\mathfrak{A}}.$$

其中，$\underline{A}$ 和 $\overline{A}$ 分别是 σ-子代数序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的下极限和上极限。也就是说，$\underline{A} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$，且 $\overline{A} = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}$。作为推论，在特殊情形 $\underline{A} = \overline{A}$ 下，我们得到了 L^p 收敛；这一结果此前由 Fetter [] 得出。在那篇论文中，她提出疑问：如同 σ-代数的单调收敛情形，我们是否也有几乎处处收敛？然而， [] 通过构造一个反例给出了否定答案。本文将分析一族集合的链

$$\underline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}_{w.a.e.} \subset \mathfrak{A}_\mu \subset \mathfrak{A}^\perp \subset \mathfrak{A}^{\perp a.e.} \subset \overline{\mathfrak{A}}.$$

我们将证明，只要这两个集合是 σ-子代数，当且仅当 $A^{w.a.e.} = A^{\perp a.e.}$ 时，便有几乎处处收敛。

2. 前人工作

按照惯例，我们用 $E(f|A)$ 表示给定子代数 A 时 f 的条件期望。关于几乎处处收敛和L^p收敛（$1 \le p < \infty$）的一些众所周知的结果如下：

定理 2.1. (鞅)。若$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 σ子代数构成的单调递增序列，其中每个子代数都包含于$\mathfrak{A}$，也就是说，$\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}_{n+1}$ 对任意 n $\in$自然数集均成立，那么

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow[L^p]{a.e.} \mathcal{E}\left(f \middle| \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n\right),$$

*电子邮件地址：alonsoalber@gmail.com

†电子邮件地址：fernandobrambila@gmail.com

对每个$f \in L^p(\mathfrak{A})$，其中$\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$表示包含$\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$的最小 σ代数。 $\left($或者，若$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$单调递减，也就是说，$\mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_{n+1}$，那么$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)$几乎处处$\xrightarrow{L^p}\mathcal{E}\left(f\left|_{\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n}\right.\right)\right)$。

在 [1], Boylan引入了 σ-代数空间上的豪斯多夫度量。它揭示了 σ-子代数柯西序列与条件期望的L^p-收敛之间的关系。

定理 2.2. （*Boylan*，等收敛）。设$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 σ-代数空间中关于豪斯多夫度量的柯西序列，即

$$d(\mathfrak{A}_n,\mathfrak{A}_m)=\sup_{A\in\mathfrak{A}_n}\left(\inf_{B\in\mathfrak{A}_m}\mu(A\triangle B)\right)+\sup_{B\in\mathfrak{A}_n}\left(\inf_{A\in\mathfrak{A}_m}\mu(A\triangle B)\right),$$

此处 $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$。存在一个子代数$\mathfrak{D}$使得

$$\lim_{n\to\infty}d(\mathfrak{A}_n,\mathfrak{D})=0,$$

and

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\xrightarrow{L^p}\mathcal{E}(f|\mathfrak{D}),$$

对每个$f \in L^p(\mathfrak{A})$，$1\le p<\infty$ （见 *[2,3]*）。

Fetter（[]）提出了另一种方法。她证明，若一个 σ-代数序列的上极限与下极限重合，则该序列在L^p中收敛。事实上

定理 2.3. （*Fetter*）。若$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足$\underline{\mathfrak{A}}=\overline{\mathfrak{A}}$，其中

$$\underline{\mathfrak{A}}=\bigvee_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\mathfrak{A}_n\quad and\quad \overline{\mathfrak{A}}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigvee_{n=m}^{\infty}\mathfrak{A}_n,$$

then

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\xrightarrow[L^p]{}\mathcal{E}\left(f\left|\overline{\mathfrak{A}}\right.\right),$$

对每个$f \in L^p(\mathfrak{A})$，$1\le p<\infty$*(见 [1,4])*。

由于当我们有单调的 σ-代数序列时，上述定理的条件得以满足，因此 Fetter 的结果推出了在L^p 收敛情形下的鞅定理。不过，我们指出， [4] 中已证明，条件 A =A 并不意味着几乎处处收敛。

给定一个由 σ-代数构成的序列$\{\overline{\mathrm{A}}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$， []中定义了两个相关的 σ-代数：

$$\mathfrak{A}_\mu=\left\{A\in\mathfrak{A}\,:\,\exists A_n\in\mathfrak{A}_n,\ \lim_{n\to\infty}\mu(A_n\triangle A)=0\right\},$$

并且如果

$$W=\left\{g\in L^2(\mathfrak{A})\,:\exists A_{n_k}\in\mathfrak{A}_{n_k},\text{with }\chi_{A_{n_k}}\xrightarrow{weakly}g\right\}$$

$\mathrm{A}_\perp$ 被定义为最小的完备 σ代数，使得对于所有$g \in W$，g 都是 $\mathrm{A}_\perp$ 可测的。这些 σ代数的重要性可由以下定理看出：

定理 2.4. （*Alonso-Brambila*）。设$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：存在一个 σ子代数$\mathfrak{A}_\infty$，使得$\mathfrak{A}_n \mu\to \mathfrak{A}_\infty$且$\mathfrak{A}_n \overset{\perp}{\to}\mathfrak{A}_\infty$。当且仅当

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n) \overset{L^p(\mathfrak{A})}{\longrightarrow} \mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_\infty),$$

对于每个$f \in L^p$（$\mathfrak{A}$），$1 \le p < \infty$。

由于这些 σ-代数满足如下关系

$$\underline{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{A}_\mu \subseteq \mathfrak{A}_\perp \subseteq \overline{\mathfrak{A}}.$$

我们知道，如果$\underline{A} = \overline{A}$，Fetter´s 定理便成为一个直接推论。
最后我们指出，除了定理 2.1 以外，其他定理都没有处理收敛问题 .e.

3. 一个 σ-子代数

在 [5] 中，引入了如下概念：若对于每个 $D \in \mathrm{D}$，都存在 $A_n \in \mathrm{A}_n$，使得 $\mu(A_n \triangle D) \to 0$，则称一列 σ-子代数 $\{\mathrm{A}_n\}$ 以 μ 逼近一个 σ-子代数 D。已证明，当且仅当这种情况成立时，对于 $f \in L^p(\mathrm{D})$ $(1 \le p < \infty)$，有

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n) \overset{L^p}{\longrightarrow} \mathcal{E}(f|\mathfrak{D}) = f.$$

显然，若要得到几乎处处 收敛，就需要引入一个更强的概念，来描述 $\{\mathrm{A}_n\}$ 中的集合逼近 D 中集合的方式。

按照惯例，下文中 A^c 表示 $\mathrm{X}\setminus A$，χ_A 表示集合 A 的示性函数，$A \triangle B$ 表示集合 A 和 B 的对称差，而$A = B$ 几乎处处 表示 $\mu(A \triangle B) = 0$。
我们首先证明以下引理。

引理 3.1. 设$(\mathbb{X}, \mathfrak{A}, \mu)$是一个概率空间，其 σ-代数为 $\mathfrak{A}$，测度为 μ。若$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathfrak{A}$ 中的元素序列，且 $A \in \mathfrak{A}$，则以下陈述等价：

i) $\chi_{A_n} \xrightarrow[a.e]{} \chi_A$.

ii) $A = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\ge N} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\ge N} A_n$ *a.e.*

iii) $\lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n>N} (A_n \triangle A)\right) = 0.$

证明。注意，$\chi_{A_n} \to \chi_A$ 几乎处处 意味着，对于所有满足 $x \in \mathrm{X}\setminus M$ 的点，其中 M是一个零测集，存在一个 $N_x \in \mathrm{N}$，使得如果 $n > N_x$

$$\left|\chi_{A_n}(x) - \chi_A(x)\right| < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

为证明 *i)* $\to$ *ii)*，我们先来看看 $A\setminus M$ 中的元素。由于

$$\left|\chi_{A_n}(x) - \chi_A(x)\right| = \left|\chi_{A_n^c}(x) - \chi_{A^c}(x)\right|, \tag{2}$$

(1) 和 (??) 告诉我们，对于 $n >$ 自然数集$_x$ 且 $x \in A\setminus M$；$\chi_{A_n^c}(x) < 1/2$，因此 $x \in A_n$。因此

$$A \setminus M \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} A_n.$$

对 A^c 使用相同的论证，我们得到

$$A^c \setminus M \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} A_n^c.$$

Thus

$$A \cup M \supset \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} A_n.$$

由于

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} A_n \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} A_n,$$

我们有

$$\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} A_n \right) \cap M^c \subset A \cap M^c \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} A_n \subset \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} A_n.$$

So

$$\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} A_n \right) \cap M^c = \left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} A_n \right) \cap M^c = A \cap M^c.$$

因此 $i) \rightarrow ii)$。
现在证明 $iii) \rightarrow i)$。设

$$M = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} (A_n \triangle A).$$

那么，根据假设 $\mu(M) = 0$。现在，由于

$$M^c = \mathbb{X} \setminus M = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} (A_n \triangle A)^c.$$

若 $x \in \mathbf{X} \setminus M$，则存在一个 $N \in \mathbf{N}$，使得

$$x \in \bigcap_{n>N} (A_n \triangle A)^c,$$

因此，对于所有$n >$自然数集，都有$x \in (A_n \triangle A)^c$。也就是说

$$0 = \chi_{A_n \triangle A}(x) = \left| \chi_A(x) - \chi_{A_n}(x) \right| < \epsilon, \quad \text{for } n > N.$$

最后，为了证明$ii)$推出$iii)$，我们注意到：

$$\mu\left(\bigcup_{n>N} (A_n \triangle A) \right) = \mu\left(\left(\bigcup_{n>N} A_n \right) \cap A^c \right) + \mu\left(\left(\bigcup_{n>N} A_n^c \right) \cap A \right).$$

由于根据假设

$$0=\mu\left(A\triangle\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n>N}A_n\right)\geq\mu\left(A\setminus\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n>N}A_n\right)=\mu\left(A\cap\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n>N}A_n^c\right)=\lim_{N\to\infty}\mu\left(A\cap\bigcup_{n>N}A_n^c\right),$$

and

$$0=\mu\left(A\triangle\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n>N}A_n\right)\geq\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n>N}A_n\setminus A\right)=\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n>N}A_n\cap A^c\right),$$

我们得到

$$\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n>N}(A_n\triangle A)\right)=0$$

□

G给定 A 的一列 $_{m\in\mathbb{N}}$ 个 σ-子代数，我们将定义集合族 F 如下

$$\mathcal{F}=\left\{A\in\mathfrak{A}:\ A=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n>N}A_n=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n>N}A_n\ a.e.\ \text{for a sequence}\ \{A_n\}\ \text{such that}\ A_n\in\mathfrak{A}_n\right\}.$$

我们将证明 F 是一个 σ-代数。为此，我们需要以下引理。

引理 3.2. 如果对任意 $r>0$，存在一个序列 $\{A_n^r:\ A_n^r\in\mathfrak{A}_n\}$ 以及 $N_r\in\mathbb{N}$ 使得

$$\mu\left(\bigcup_{n>N_r}(A_n^r\triangle B)\right)<r,$$

那么 $B\in\mathcal{F}$。

证明。令 $S_m=1/2^m$，其中 $m\in\mathbb{N}$，且 $\{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是一个严格递增序列，满足 $Q_m\geq N_{S_m}$。由于 $Q_n\geq N_{S_m}$，我们有

$$\mu\left(\bigcup_{n>Q_m}(A_n^{S_m}\triangle B)\right)\leq\mu\left(\bigcup_{n>N_{S_m}}(A_n^{S_m}\triangle B)\right)<S_m.$$

对于$n>Q_1$，定义序列 $\{A_n\}$ 如下：

$$A_n=A_n^{S_k}\quad\text{if}\quad Q_k<n\leq Q_{k+1},$$

由于$A^{S_k}_n\in\mathfrak{A}_n$，因此$A_n$也是如此。我们有

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n>Q_m}(A_n\triangle B)\right)&=\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty}\bigcup_{Q_k<n\leq Q_{k+1}}(A_n^{S_k}\triangle B)\right)\leq\sum_{k=m}^{\infty}\mu\left(\bigcup_{Q_k<n\leq Q_{k+1}}(A_n^{S_k}\triangle B)\right)\\&\leq\sum_{k=m}^{\infty}\mu\left(\bigcup_{n>Q_k}(A_n^{S_k}\triangle B)\right)<\sum_{k=m}^{\infty}S_k=\frac{1}{2^{m-1}},\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n>N}(A_n\triangle B)\right)=0.$$

证明由引理 3.1 得出

□

现在我们可以证明$\mathcal{F}$是一个 σ-代数。

命题 3.3. $\mathcal{F}$ 是$\mathcal{A}$的 σ-子代数

证明。 显然， $\emptyset, \mathrm{X}$ 都是 F 的元素，因为对于所有$n\in\mathbb{N}$，我们可以取$A_n=\emptyset$； 或者对于所有$n\in\mathbb{N}$，取$A_n=\mathrm{X}$。
若$A\in\mathrm{F}$，根据命题 3.1，存在 $\{A_n\in\mathrm{A}_n\}$ 使得

$$\chi_{A_n}\longrightarrow\chi_A\ a.e.$$

由于$A_n^c\in\mathrm{A}_n$ 且

$$\chi_{A_n^c}=1-\chi_{A_n}\xrightarrow{a.e.}1-\chi_A=\chi_{A^c},$$

我们有$A^c\in\mathrm{F}$ 。
设$A,B\in\mathrm{F}$。根据命题 3.1，存在两个序列 $\{A_n\}$,$\{B_n\}$，其中对所有$n\in\mathbb{N}$，A_n,$B_n\in\mathrm{A}_n$，且满足$\chi_{A_n}\to\chi_A$几乎处处 以及 $\chi_{B_n}\to\chi_B$几乎处处 。由于$A_n\cap B_n\in\mathrm{A}_n$且$\chi_{A_n\cap B_n}=\chi_{A_n}\chi_{B_n}\xrightarrow[a.e.]{}\chi_A\chi_B=\chi_{A\cap B}$，我们有$A\cap B\in\mathrm{F}$。因此，F 是一个代数。

为证明其是一个 σ-代数，取$B=\mathrm{S}_{k=1}^{\infty}D_k$，其中$D_k\in\mathrm{F}$。由于 F 是代数，我们可以将集合 $\{D_k\}$ 视为不相交集合。

定义$E_M=\mathrm{S}_{k=1}^{M}D_k$，并令$r>0$。由于集合$D_k$两两不相交，存在一个$M_1\in$自然数集，使得

$$\mu\left(\bigcup_{k>M_1}^{\infty}D_k\right)<\frac{r}{2}.$$

另一方面，由于$E_{M1}\in\mathrm{F}$。存在一个序列 $\{A_n\in\mathrm{A}_n\}$，使得

$$\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n>N}(A_n\triangle E_{M_1})\right)=0.$$

因此，存在一个$N_1\in$自然数集，使得$\mu\left(\mathrm{S}_{n>N_1}(A_n\triangle E^{M_1})\right)<r/2$。

由于$E^{M_1}\subset B$，$A_n\setminus B\subset A_n\setminus E^{M_1}$。所以

$$\mu\left(\bigcup_{n>N_1}A_n\setminus B\right)\le\mu\left(\bigcup_{n>N_1}(A_n\setminus E_{M_1})\right)\le\mu\left(\bigcup_{n>N_1}(A_n\triangle E_{M_1})\right)<\frac{r}{2}.$$

此外，由于B 是由不相交集合E^{M_1} 和 $\mathrm{S}_{k>M_1}^{\infty}D_k$ 的并集，我们有

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n>N_1}(B\setminus A_n)\right)&=\mu\left(\bigcup_{n>N_1}(E_{M_1}\setminus A_n)\right)+\mu\left(\bigcup_{n>N_1}\left(\bigcup_{k>M_1}^{\infty}D_k\right)\setminus A_n\right)\\&\le\mu\left(\bigcup_{k>N_1}(E_{M_1}\triangle A_n)\right)+\mu\left(\bigcup_{k>M_1}^{\infty}D_k\right)<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}.\end{aligned}$$

因此 $\mu\left(\mathrm{S}_{n>\text{自然数集}_1}(A_n\triangle B)\right)<r$。

因此，根据引理 3.2，B 属于 F。

□

给定自然数集中 A 的一个 σ-子代数序列，我们找到了由以下方式定义的 σ-代数 A^{μ}

$$\mathfrak{A}_{\mu}=\left\{A\in\mathfrak{A}\,:\,\exists A_n\in\mathfrak{A}_n,\ \lim_{n\to\infty}\mu(A_n\triangle A)=0\right\},$$

这些关系

$$\bigvee_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\mathfrak{A}_n\equiv\underline{\mathfrak{A}}\ \subset\ \mathfrak{A}_{\mu}\ \subset\ \overline{\mathfrak{A}}\equiv\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigvee_{n=m}^{\infty}\mathfrak{A}_n.$$

根据定义，显然 $\mathrm{F}\ \subset\mathrm{A}^{\mu}$。现在，令 $A\in\mathrm{T}_{n=N}^{\infty}\mathrm{A}_n$，取 $A_n=A$，对 $n>N$，则显然有 $\chi_{A_n}\xrightarrow[a.e.]{}\chi_A$，因此 $A\in\mathrm{F}$。由于 F 是一个 σ-代数，我们有

$$\mathcal{F}\supset\bigvee_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\mathfrak{A}_n.$$

因此

$$\underline{\mathfrak{A}}\subset\mathcal{F}\subset\mathfrak{A}_{\mu}\subset\overline{\mathfrak{A}}.$$

我们证明了，给定一个 σ-代数序列 $\{\mathrm{A}_n\}$，如果 A 是 F-可测集，则存在 f_n 个函数 A_n 可测，使得 $f_n\to\chi_A$ 几乎处处。然而，这并不意味着即使条件期望在 $L^p\,(1\le p\ <\infty)$ 中收敛，$\mathrm{E}(\chi_A|\mathrm{A}_n)$ 也会几乎处处 收敛。

在 [4] 所示的例子中，我们有 $\mathrm{A}\ =\mathrm{A}$，因此 $\mathrm{A}\ =\mathrm{F}$；并且存在一个博雷尔集，使得其条件期望不几乎处处收敛到它的示性函数。让我们来看一个更简单的例子，其中 F 中某个示性函数的条件期望不几乎处处 收敛，但它们在 $L^p\,(1\le p\ <\infty)$ 中确实收敛。

令 $\mathrm{X}\ =[0,1]$，且 A 为勒贝格可测集。我们将定义一个序列 $\{A_n\}$，它们属于 $\mathrm{h}\,12\,,1\Big)$，并使得 $\chi_{A_n}\to\chi_{[\frac{1}{2},1]}$ 几乎处处 $\{J_k\}$ 将是一个属于 $\mathrm{h}\,12\,,1\Big)\backslash\,A_n$ 的序列，但其测度只有其大小的一半。具体来说

$$A_n=\left[\frac{1}{2},1-\frac{1}{2^n}\right),\quad J_n=\left[1-\frac{1}{2^{n+1}},1\right),\quad n\in\mathbb{N}.$$

在 $\mathrm{h}0,\frac{1}{2}\Big)$ 上定义一个区间序列，使其在该区间内来回移动，并且每次移动时都缩小其大小

$$I_{n,k}=\left[\frac{k}{4\cdot2^n},\frac{k+1}{4\cdot2^n}\right)\quad\text{with }0\le k<2\cdot2^n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

我们有，对于每个 $n\in$ 自然数集

$$\bigcup_{k=0}^{2\cdot2^n-1}I_{n,k}=\left[0,\frac{1}{2}\right).$$

令 $B_{n,k}=I_{n,k}\cup J_n$ 和 $C_{n,k}=$，$(A_n\cup B_{n,k})^c=A_n^c\cap B_{n,k}^c$。

考虑这列 σ-子代数

$$\mathfrak{A}_{n,k}=\{\emptyset,\mathbb{X},A_n,B_{n,k},C_{n,k}\},$$

由于

$$\mathcal{E}\left(\chi_{[\frac{1}{2},1)}\middle|\mathfrak{A}_{n,k}\right)=\frac{\langle\chi_{[\frac{1}{2},1)},\chi_{A_n}\rangle}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}+\frac{\langle\chi_{[\frac{1}{2},1)},\chi_{B_{n,k}}\rangle}{\mu(B_{n,k})}\chi_{B_{n,k}}+\frac{\langle\chi_{[\frac{1}{2},1)},\chi_{C_{n,k}}\rangle}{\mu(C_{n,k})}\chi_{C_{n,k}},$$

我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left(\chi_{[\frac{1}{2},1)}\middle|\mathfrak{A}_{n,k}\right)&=\chi_{A_n}+\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2}\frac{1}{2^{n+1}}}\chi_{B_{n,k}}+\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+2}}}\chi_{C_{n,k}}\\&=\chi_{A_n}+\frac{2}{3}\chi_{B_{n,k}}+\frac{2}{1+2^{n+1}}\chi_{C_{n,k}}\\&=\chi_{A_n}+\frac{2}{3}\chi_{I_{n,k}}+\frac{2}{3}\chi_{J_n}+\frac{2}{1+2^{n+1}}\chi_{C_{n,k}}.\end{aligned}$$

由于 $\chi_{A_n}\nrightarrow\chi_{[\frac{1}{2},1)}$ 几乎处处，$\frac{2}{3}\chi_{J_n}\to 0$ 几乎处处 且 $\frac{2}{1+2^{n+1}}\chi_{C_{n,k}}\to 0$ 几乎处处，但 $\frac{2}{3}\chi_{I_{n,k}}$ 并非几乎处处收敛。因此 h 12， 1)∈F 但 E $\left(\chi_{[\frac{1}{2},1)}\middle|\mathfrak{A}_{n,k}\right)\nrightarrow\chi_{[\frac{1}{2},1)}$ 几乎处处

4. 几乎处处收敛的充要条件。

4.1. 关于示性函数的几乎处处收敛 设 B 是 A 的一个 σ-子代数。

定义 4.1. 将半范数 $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ 定义为：对于 $f\in L^{\infty}(d\mu)$

$$\|f\|_{\mathfrak{B}}=\|\mathcal{E}(f|\mathfrak{B})\|_{\infty}.$$

下文中，我们将对任意集合 $A\in$ A 使用记号 kAk$_{\mathfrak{B}}$ =kχ_Ak$_{\mathfrak{B}}$。我们有如下性质：引理 4.2. 设 A 是 A 中的一个可测集，且 χ_A 是其示性函数。那么

$$\|A\|_{\mathfrak{B}}=\|\chi_A\|_{\mathfrak{B}}=\sup_{\substack{B\in\mathfrak{B}\\ \mu(B)>0}}\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}.$$

证明。 令 $B\in$B。于是我们有

$$\begin{aligned}\mu(A\cap B)&=\int\chi_{A\cap B}d\mu=\int\chi_A\chi_B d\mu\\&=\int\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})\chi_B d\mu\le\|\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})\|_{\infty}\mu(B).\end{aligned}$$

因此，对于任意满足$\mu(B)>0$的$B\in$B

$$\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\le\|\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})\|_{\infty}.$$

由于 kE(χ_A|B)k$_{\infty}=0$ 的情形显然成立，任取满足以下条件的 $\varepsilon>0$

$$\|\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})\|_{\infty}-\varepsilon>0.$$

根据定义，该集合

$$C = \{x : \mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B}) > \|\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})\|_\infty - \varepsilon\}$$

是 B-可测的，且

$$\int_C \mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})d\mu \geq (\|\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})\|_\infty - \varepsilon)\,\mu(C).$$

as

$$\int_C \mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})d\mu = \int \chi_C \mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})d\mu = \int \chi_C \chi_A d\mu = \mu(C \cap A),$$

于是我们有

$$\frac{\mu(C \cap A)}{\mu(C)} \geq \|\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{B})\|_\infty - \varepsilon.$$

□

定义 4.3. 我们称 $A \in \mathfrak{A}$ 被子代数序列 σ-一致覆盖，即存在一个序列$\{A_n \in \mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得

i) $A = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n\geq N} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n\geq N} A_n.$

ii) $\left\|\chi_{A\setminus A_n}\right\|_{\mathfrak{A}_n} \to 0 \quad as \quad n \to \infty.$

下面的引理表明，实际上我们可以稍微放宽条件*ii*)。

引理 4.4. A 被$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致覆盖，当且仅当对任意 $r > 0$，存在一个序列 $\{A_n^r\}_{n\in\mathbb{N}}$、$A_n^r \in \mathfrak{A}_n$ 以及 $M \in$自然数集 使得

i) $A = \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n>N} A_n^r = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} A_n^r\,.$

ii) $\|A \setminus A^r\|_{\mathfrak{A}_n} < r \quad if \quad n > M_r.$

证明. 由引理 3.1，条件*i*)意味着

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n>N} (A \triangle A_n^r)\right) = 0.$$

因此，对于$r = 1$，令$N_1 > M_1$ 且使得

$$\mu\left(\bigcup_{n>N_1} (A \triangle A_n^r)\right) < 1$$

.

一般而言，设$r_k = 2^{-k}$ 和 $\tilde{N}_k$ 满足

$$\mu\left(\bigcup_{n>\tilde{N}_k} (A \triangle A_n^k)\right) < r_k,$$

且N_k'满足

$$\left\|A \setminus A_n^{r_k}\right\|_{\mathfrak{A}_n} < r_k \quad \text{for } n > N_k'.$$

显然，我们可以定义一个严格递增的序列 N_k，使得 N_k >=max ($\tilde{}N_k, N_k$)。定义 $A_n \in$A$_n$ 为 $A^{r_k}{}_n$，若 $N_k \le n \le N_{k+1}$。那么

$$\|A \setminus A_n\|_{\mathfrak{A}_n} = \left\|A \setminus A_n^{r_k}\right\|_{\mathfrak{A}_n} < \frac{1}{2^k},$$

我们还得到

$$\mu\left(\bigcup_{n\ge\widetilde{N}_{k'}}(A \triangle A_n)\right) = \mu\left(\bigcup_{k=k'}^{\infty}\bigcup_{\widetilde{N}_k\le n<\widetilde{N}_{k+1}}(A \triangle A_n)\right) \le \sum_{k=k'}^{\infty}\mu\left(\bigcup_{\widetilde{N}_k\le n<\widetilde{N}_{k+1}} A \triangle A_n^{r_k}\right) < \sum_{k=k'}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k'-1}}.$$

因此，由于 μ(S $_{n>N}$ $A \triangle A_n$) 是单调的，

$$\lim_{N\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n\ge N} A \triangle A_n\right) = 0. \tag{3}$$

最终可得

$$\lim_{n\to\infty}\|A \setminus A_n\|_{\mathfrak{A}_n} = 0.$$

□

如果集合序列 {$A_n \in$A$_n$} 满足定义 XXX 中的条件 *i*) 和 *ii*)，我们就称其一致覆盖集合 $A \in$A。关于一致覆盖，有以下几个结果:

引理 4.5. 若 $\{A_n \in \mathfrak{A}_n\}$ 一致覆盖集合 $A \in \mathfrak{A}$，且 $\{A'_n \in \mathfrak{A}_n\}$ 满足对所有有 $n \in$ 自然数集 均有 $A_n \subset A'_n$，且 $\chi_{A'_n} \longrightarrow \chi_A$ 几乎处处，则它一致覆盖 A。

证明。 证明显然，因为对于 $0 \le f \le g$，且 B σ-子代数 E(f |B) $\le$ E(g|B)，因此，由于 $A \setminus A'_n \subset A \setminus A_n$,

$$\mathcal{E}(\chi_{A\setminus A'_n}|\mathfrak{A}_n) \le \mathcal{E}(\chi_{A\setminus A_n}|\mathfrak{A}_n)$$

□

Lemma 4.6. 若 A 和 B 是 $\mathfrak{A}$ 中被$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致覆盖的集合，则 $A \bigcup B$ 和 $A \bigcap B$ 也被一致覆盖.

证明。 设 $A_n \in$A$_n$和 $B_n \in$A$_n$是分别一致覆盖A和B的集合序列。先考虑序列 $C_n = A_n$T$B_n \in$A$_n$。根据一致覆盖定义的性质*i*)，我们有 χ_{A_n} 几乎处处$\longrightarrow \chi_A$ 和 χ_{B_n} 几乎处处$\longrightarrow \chi_B$:

$$\chi_{A_n\cap B_n} = \chi_{A_n}\chi_{B_n} \xrightarrow{a.e.} \chi_A\chi_B = \chi_{A\cap B}$$

我们还有

$$A \cap B \setminus (A_n \cap B_n) = A \cap B \cap ({A^c}_n \cup {B^c}_n) \subset (A \cap {A^c}_n) \cup (B \cap {B^c}_n)$$

因此

$$\|A \cap B \setminus (A_n \cap B_n)\|_{\mathfrak{A}_n} \le \|(A \cap {A^c}_n) \cup (B \cap {B^c}_n)\|_{\mathfrak{A}_n} \le \|A \cap {A^c}_n\|_{\mathfrak{A}_n} + \|B \cap {B^c}_n\|_{\mathfrak{A}_n} \longrightarrow 0 a.e.$$

对于两个集合的并集情形，我们有

$$\chi_{A_n\cup B_n} = \chi_{A_n} + \chi_{B_n} - \chi_{A_n}\chi_{B_n} \xrightarrow{a.e.} \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B = \chi_{A\cup B}$$

and

$$(A \cup B) \setminus (A_n \cup B_n) = (A \cup B) \cap ({A^c}_n \cap {B^c}_n) \subset (A \cap {A^c}_n) \cup (B \cap {B^c}_n)$$

□

引理 4.7。 如果 A 被 $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致覆盖。那么

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n))(x) \le \chi_A(x)\ a.e.$$

证明。 设 $\{A_n\}$ 是一个具有定义 4.8 所述性质的序列。那么

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) &= \mathcal{E}(\chi_A\chi_{A_n} + \chi_A\chi_{A_n^c}|\mathfrak{A}_n)\\ &= \chi_{A_n}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) + \mathcal{E}(\chi_{A\setminus A_n}|\mathfrak{A}_n)\\ &\le \chi_{A_n} + \left\|\chi_{A\setminus A_n}\right\|_{\mathfrak{A}_n}.\end{aligned}$$

由于A 被序列 $\{A_n\}$ 一致覆盖，因此定义 4.8 的$i)$ 蕴含

$$\chi_{A_n} \xrightarrow{a.e.} \chi_A.$$

So

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \le \chi_A\ a.e.$$

□

xxx222
鉴于证明过程，我们实际上可以适当放宽一致覆盖的条件，从而得到类似的结果。

引理 4.8。 设$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个由 σ-子代数组成的序列。若 $A \in \mathfrak{A}$ 满足存在一个序列$\{A_n \in\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得

i) $A = \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n\ge N} A_n = \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\ge N} A_n.$

ii) $\mathcal{E}(\chi_{A\setminus A_n}|\mathfrak{A}_n) \to 0\ a.e \quad as \quad n\to\infty.$

Then

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n))(x) \le \chi_A(x)\ a.e.$$

证明。 证明与上述引理的证明完全相同。

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) &= \mathcal{E}(\chi_A\chi_{A_n} + \chi_A\chi_{A_n^c}|\mathfrak{A}_n)\\ &= \chi_{A_n}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) + \mathcal{E}(\chi_{A\setminus A_n}|\mathfrak{A}_n)\\ &\le \chi_{A_n} + \mathcal{E}(\chi_{A\setminus A_n}|\mathfrak{A}_n).\end{aligned}$$

□

注意，如果 $\{A_n\}$ 一致覆盖 A，则满足引理 4.8xx 的条件。
有趣的情形是，A 和 A^c 均被 $\{A_n\}$ 一致覆盖，或满足上述引理的条件。

引理 4.9. 如果 $A \in \mathfrak{A}$ 满足 A 和 A^c 被$\{\mathfrak{A}_n\}$ 一致覆盖（或满足引理 *4.9x* 的条件），那么

$$\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \chi_A.$$

证明。

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(\chi_{A^c}|\mathfrak{A}_n) &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(1-\chi_A|\mathfrak{A}_n)\\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}}(1-\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n))\\ &= 1-\underline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n).\end{aligned}$$

由于A^c一致覆盖

$$\chi_{A^c} = 1-\chi_A \geq 1-\underline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n),$$

因此

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \geq \chi_A \ a.e.$$

最后，由于A一致覆盖

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \leq \chi_A \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \ a.e.$$

然后

$$\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \chi_A.$$

□

现在给出示性函数几乎处处收敛所需的引理。

引理 4.10. 设 $A \in \mathfrak{A}$ 和 $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σ-子代数满足

$$\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \chi_A.$$

那么，A 和 A^c 都被 $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致覆盖。

证明。 设 $0 < r < 1$。定义 $A_n \in \mathfrak{A}_n$ 如下:

$$A_n = \{x \in \mathbb{X} : \mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n)(x) \geq r\},$$

因为 $\mathrm{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \chi_A$。我们有

$$\chi_{A_n} \xrightarrow{a.e.} \chi_A,$$

因此

$$A = \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n>N} A_n = \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n>N} A_n.$$

显然还有

$$\begin{aligned}0 \leq &\mathcal{E}(\chi_{A\setminus A_n}|\mathfrak{A}_n) = \mathcal{E}(\chi_A\chi_{A_n^c}|\mathfrak{A}_n)\\ =&\chi_{A_n^c}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) < \chi_{A_n^c}r \leq r.\end{aligned}$$

因此 $\left\|\mathrm{E}(\chi_{A\setminus A_n}|\mathfrak{A}_n)\right\|_\infty \leq r$，根据上述引理，$A$ 是一致覆盖的。

由于 $\mathrm{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \chi_A$ 意味着 $\mathrm{E}(\chi_{A^c}|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \chi_{A^c}$，我们有$A^c$也一致覆盖 .

□

由引理 4.9 和引理 4.10 可得以下定理。

定理 4.11. 设$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 σ-代数序列，且 $A\in\mathfrak{A}$。那么

$$\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n)\xrightarrow{a.e.}\chi_A,$$

当且仅当 A 和 A^c 被$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$一致覆盖。

鉴于　　上述定理，显然有必要给出以下定义　　.

定义 4.12. 定义$\mathfrak{A}^{\mu.a.e.}$ 为

$$\mathfrak{A}_{\mu.a.e.}=\{A\in\mathfrak{A}:A\ and\ A^c\ are\ uniformly\ covered\ by\ \{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\}$$

继续之前，我们注意到，若 $\{A_n\in\mathfrak{A}_n\}$ 是一致覆盖 A 的集合序列，且 $\{C_n\in\mathfrak{A}_n\}$ 是一致覆盖 A^c 的集合序列，则序列 $A_n\mathrm{S}C_n$ 一致覆盖 A 和 A^c。

于是，$\mathfrak{A}^{\mu.a.e.}$ 是一个集合代数。XXXX不，实际上我们需要 acomplement 这个。如果是这样，那确实如此，但是为什么?

注意，若 $\mathfrak{A}^{\mu.a.e.}$ 是 σ-子代数，则

$$\underline{\mathfrak{A}}\subset\mathfrak{A}_{\mu.a.e.}\subset\mathcal{F}\subset\mathfrak{A}_\mu\subset\mathfrak{A}^\perp\subset\overline{\mathfrak{A}}.$$

引理 4.13. 若$\mathfrak{A}^{\mu.a.e.}$ 是 σ-子代数，则

i) 若 $f\in L^\infty\left(\mathfrak{A}_{\mu.a.e.}\right)$，则我们有

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\xrightarrow{a.e.}\mathcal{E}(f|\mathcal{A}_{\mu.a.e.})=f.$$

ii) 若存在一个 σ-子代数$\mathfrak{B}$，使得对所有 $f\in L^\infty\left(\mathfrak{A}_{\mu.a.e.}\right)$

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\xrightarrow{a.e.}\mathcal{E}(f|\mathfrak{B})\ then\ \mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}_{\mu.a.e.}.$$

证明. 令$\epsilon>0$。由于$f\in L^\infty\left(\mathrm{A}_{\mu.a.e.}\right)$，存在一个简单函数$g$，它是 $\mathrm{A}^{\mu.a.e.}$-可测的，且 $\mathrm{k}f-g\mathrm{k}_\infty<\epsilon/2$。显然，引理 4.10 蕴含 $\mathrm{E}(g|\mathrm{A}_n)$ 几乎处处 $\longrightarrow g$。因此

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)-f|(x)&\leq|\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)-\mathcal{E}(g|\mathfrak{A}_n)|(x)+|\mathcal{E}(g|\mathfrak{A}_n)-g|(x)+|g-f|(x)\\&\leq|\mathcal{E}(f-g|\mathfrak{A}_n)|(x)+|\mathcal{E}(g|\mathfrak{A}_n)-g|(x)+\|g-f\|_\infty\\&\leq\epsilon+|\mathcal{E}(g|\mathfrak{A}_n)-g|(x).\end{aligned}$$

因此，对于每个ϵ，$\lim_{n\to\infty}|\mathrm{E}(f|\mathrm{A}_n)-f|(x)\leq\varrho$ 几乎处处，从而 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(f|\mathrm{A}_n)=f$ 几乎处处

为了证明*ii*)，令$A\in\mathrm{B}$。根据假设，$\mathrm{E}(\chi_A|\mathrm{A}_n)\longrightarrow\chi_A$ 几乎处处。

对于 $0<\epsilon<1$，定义$A_n=\{x:\mathrm{E}(\chi_A|\mathrm{A}_n)>\epsilon\}\in\mathrm{A}_n$。

由于几乎所有满足 $\in\mathrm{A}$的x，都有$\mathrm{E}(\chi_A|\mathrm{A}_n)(\mathrm{x})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$，当n足够大时，$\mathrm{x}\in\mathrm{A}_n$。因此 $\chi_A(\mathrm{x})\chi_{A_n}(\mathrm{x})\longrightarrow\chi_A$几乎处处。关于$\mathrm{A}^c$ 的情形也类似。在这种情况下，对于几乎所有满足 $\notin\mathrm{A}$的x，都有$\mathrm{E}(\chi_A|\mathrm{A}_n)(\mathrm{x})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$。因此，当n足够大时，$\mathrm{x}\notin\mathrm{A}_n$。于是$\chi_{A^c}(\mathrm{x})\chi_{A_n}(\mathrm{x})\longrightarrow0$几乎处处。因此$\chi_{A_n}(\mathrm{x})\longrightarrow\chi_A(\mathrm{x})$几乎处处。

$$A=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n>N}A_n=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n>N}A_n.$$

我们还有

$$\|A\setminus A_n\|_{\mathfrak{A}_n}=\left\|\mathcal{E}(\chi_A\chi_{A_n^c}|\mathfrak{A}_n)\right\|_\infty=\left\|\chi_{A_n^c}\mathcal{E}(\chi_A|\mathfrak{A}_n)\right\|_\infty<\epsilon\left\|\chi_{A_n^c}\right\|_\infty<\epsilon.$$

因此，根据引理 3.2，A 被 $\{\mathrm{A}_n\}$ 一致覆盖。

□

我们可以通过考虑 L^p 中的函数来改进上述引理。

引理 4.14. 若$\mathfrak{A}^{\mu.a.e.}$是 σ-子代数且 $1 \le p < \infty$，那么对所有 $f \in L^2\left(\mathfrak{A}_{\mu.a.e.}\right)$，我们有

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \mathcal{E}(f|\mathcal{A}_{\mu.a.e.}) = f.$$

当 A_n 单调时，上述结果是什么样的？在这种情况下，我们有一个 σ-子代数的单调递减序列，显然 $\mathrm{A}_N = \mathrm{W}_{n=N}^{\infty}\mathrm{A}_n$，并且对任意自然数集，$\mathrm{T}_{n=N}^{\infty}\mathrm{A}_n = \mathrm{T}_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n$。因此

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n = \underline{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{F} \subset \overline{\mathfrak{A}} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{A}_n$$

因此，如果$A \in (F)$，序列$A_n = A \in \mathrm{A}_n$，并且显然一致覆盖A。

XXXXXX 缺少证明

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

4.2. 成立的充要条件

在 [4.x] 中，我们通过先考虑集合W来定义一个 σ-子代数 $\mathrm{A}^{\perp}$

$$W = \left\{ g \in L^2(\mathfrak{A}) \,:\, \exists A_{n_k} \in \mathfrak{A}_{n_k} \text{ with } \chi_{A_{n_k}} \overset{L^2-weakly}{\longrightarrow} g \right\},$$

$\mathrm{A}^{\perp}$ 被定义为由W生成的最小 σ代数。我们将做类似的事情。首先，我们注意到显而易见的事实$\chi_{A_n} = \mathrm{E}(\chi_{A_n}|\mathrm{A}_n)$。因此，给定一个$\{\mathrm{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σ-子代数序列，定义集合

$$C_N = \left\{ h \in L^1(\mu) : h = \mathrm{X}_{k\ge N}\mathrm{E}(\chi_{B_k}|\mathrm{A}_k), B_k \in \mathrm{A}, \text{两两不相交，且这类} B_k's \right\} \text{只有有限多个.}$$

注意，若$h \in C_N$

$$\|h\|_1 = \int \sum_{n\ge N} \mathcal{E}(\chi_{B_n}|\mathfrak{A}_n)d\mu = \sum_{n\ge N}\mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n\ge N} B_n\right) \le 1.$$

XXX”””XXX”””

我们将定义

定义 4.15。

$$W^{\perp a.e.} = \left\{ f \in L^{\infty}(\mu) \,:\, \textit{for every subsequence } \left\{h_{N_k}\right\},\ h_{N_k} \in C_{N_k},\ \left\langle f, h_{N_k}\right\rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}.$$

定理 4.16。如果$f \in L^{\infty}(\mu)$那么

$$\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} 0, \tag{4}$$

当且仅当 $f \in W^{\perp a.e.}$。

证明。 $\Rightarrow$) 设 $f \in L^{\infty}(\mu)$。不失一般性，我们可以假设 $\mathrm{k}f\mathrm{k}_{\infty} \le 1$。首先，注意到如果 $h \in C_N$，则有

$$\langle h, f\rangle = \sum_{n\ge N}\left\langle \mathcal{E}(\chi_{B_n}, \mathfrak{A}_n), f\right\rangle = \sum_{n\ge N}\left\langle \chi_{B_n}, \mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\right\rangle.$$

设 $\epsilon > 0$。由于 $\mathrm{E}(f,\mathrm{A}n)$ 几乎处处 $\longrightarrow 0$，埃戈罗夫定理意味着存在集合 $M\epsilon$ 和自然数集$_1 \in \mathbf{N}$，使得 $m \geq N$1

$$\mu(M_\epsilon^c) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{and} \quad \left\|\chi_{M_\epsilon}\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此，如果 自然数集
>自然数集1

$$\begin{aligned}
|\langle h_N, f\rangle| &= \left|\sum_{n\geq N}\left\langle \chi_{B_n}, \mathcal{E}(f,\mathfrak{A}_n)\right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{n\geq N}\left(\left|\left\langle \chi_{B_n}, \chi_{M_\epsilon}\mathcal{E}(f,\mathfrak{A}_n)\right\rangle\right| + \left|\left\langle \chi_{B_n}\chi_{M_\epsilon^c}, \mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\right\rangle\right|\right) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{n\geq N}\left\langle \chi_{B_n}, \chi_{M_\epsilon}\right\rangle + \sum_{n\geq N}\|\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\|_\infty \left\|\chi_{B_n}\chi_{M_\epsilon^c}\right\|_1 \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\mu(M_\epsilon) + \|f\|_\infty \mu(M_\epsilon^c) \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

因此 $\langle h_N,\ f\rangle \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$。

⇐) 为了证明定理的另一个方向，我们首先注意到，由于可以取 f 或 $-f$，不失一般性，我们可以假设存在一个 ϵ，使得

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geq N}\{x\in\mathbb{X}\ :\ \mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)(x)\geq\epsilon\}\right) > 0.$$

也就是说，存在一个 $r > 0$，使得对任意 自然数集，都存在一个 M，满足

$$\mu\left(\bigcup_{N\leq n\geq M}\{x\in\mathbb{X}\ :\ \mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)(x)\geq\epsilon\}\right) > r.$$

令 $A_n = \{x\ \in\mathbf{X}:\ |\mathrm{E}(f\ |\mathrm{A}n)(x)| > \epsilon\}$，并且照常

$$B_N = A_N, \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=N}^{k-1} B_j \ \text{ for } \ N < k < M, \tag{5}$$

$\{B_k\}$ 是一个不相交族，并且

$$\bigcup_{N\leq n<M} B_n = \bigcup_{N\leq n<M} A_n.$$

Let

$$h_N = \sum_{N\leq n<M}\mathcal{E}(\chi_{B_n}|\mathfrak{A}_n),$$

我们得到

$$\langle h_N, f\rangle = \sum_{N\leq n<M}\left\langle \chi_{B_n}|\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)\right\rangle > \epsilon\sum_{N\leq n<M}\mu(\chi_{B_n}) = \epsilon\mu\left(\bigcup_{N\leq n<M} B_n\right) > \epsilon r.$$

于是我们有 c 构造了一个序列 $\{h\ _N\}_{N\in\mathbb{N}}$，使得对所有 自然数集，$\langle h_N, f\rangle > \epsilon r$。因此 $f \notin W^{\perp}$几乎处处。

□

在 XXX 中，我们将由 D 诱导的正交条件期望定义为算子 $E^{\perp}{}_{\mathfrak{B}} = I - E_{\mathfrak{B}}$，它在$L^2(A)$ 中是正交投影 $E^{\perp}{}_{\mathfrak{B}} : L^2(A) \to L^2(B)^{\perp}$。令 D 为以下 σ-子代数族

$$\mathbb{D} = \left\{ \mathfrak{B} \in \mathfrak{A} : \mathcal{E}^{\perp}_{\mathfrak{B}} f \in W^{\perp a.e.} \text{ for all } f \in L^{\infty}(\mathfrak{A}) \right\}$$

显然，D 非空，因为它显然包含 A。
下面给出一个直接的性质。

命题 4.17。 设 $\mathfrak{C}$、$\mathfrak{B}$ 是两个 σ-子代数。若 $\mathfrak{C} \in \mathbb{D}$ 且 $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$，则 $\mathfrak{B} \in \mathbb{D}$

p证毕。 注意，在这种情况下，$E^{\perp}{}_{\mathfrak{B}} = E^{\perp}{}_{\mathfrak{C}} E^{\perp}{}_{\mathfrak{B}}$。因此，由于 f属于 L^{∞}，可知 $E^{\perp}{}_{\mathfrak{B}} f$也属于 L^{∞}，

$$\mathcal{E}^{\perp}_{\mathfrak{B}} f = \mathcal{E}^{\perp}_{\mathfrak{C}} (\mathcal{E}^{\perp}_{\mathfrak{B}} f) \in W^{\perp a.e.}$$

□

Defi定义 4.18。 $\mathfrak{A}_{min}$ 将是包含该集合的最小完备 σ-子代数

$$\tilde{W} = \left\{ g \in L^2(\mathfrak{A}) : \textit{there is } \left\{ h_{N_k} \right\}, h_{N_k} \in C_{N_k} \textit{ such that } h_{N_k} \longrightarrow g \textit{ weakly in } L^2 \right\}$$

引理 4.19. 若 $B \in D$ 则 $A_{min} \subset B$。

证明。 设$g \in \tilde{W}$ 且$h_N \in C_N$，使得$h_N \overset{w}{\longrightarrow} g$。由于 B 属于 D，我们有，对于所有$f$属于$L^p \cap L^{\infty}$

$$\langle f, \mathcal{E}(g|\mathfrak{B}) \rangle = \langle \mathcal{E}(f|\mathfrak{B}), g \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \mathcal{E}(f|\mathfrak{B}), h_N \rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle (I - \mathcal{E}^{\perp}_{\mathfrak{B}}) f, h_N \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\langle f, (I - \mathcal{E}^{\perp}_{\mathfrak{B}}) h_N \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle f, h_N \rangle = \langle f, g \rangle$$

因此g 几乎处处等于 E(g|B)，所以它是 B-可测的。根据定义，A_{min} 是使所有这类g 可测的最小σ-子代数，因此 $A_{min} \subset B$。
□

定义 4.20 定义。 若对所有 h_N属于 $C_N \sup \|h_N\|_2 < \infty$，则称序列$\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 2-有界。 .

引理 4.21。 若$\{\mathfrak{A}_n\}$ 是 2-有界的，且$\mathfrak{B}$ 是一个 σ-子代数，那么$\mathfrak{B} \in \mathbb{D}$ 当且仅当$\mathfrak{A}_{min} \subset \mathfrak{B}$。

证明。鉴于引理 xxx，我们只需按（⇐）的方向证明该断言。假设 $A_{min} \subset B$，并设 A_{min} 不属于 D。这意味着存在一个 $f \in L^{\infty}$，使得它关于 A_{min}的正交投影不属于 $W^{\perp}$几乎处处。也就是说，存在一个序列 $\{h_N \in C_N\}$，使得 $\langle f, h_N \rangle$不收敛于零。因此，存在一个 $\varrho > 0$和一个子序列 $\{h_{N_k}\}$，使得 $\left| E^{\perp}_{A_{min}} f, h_{N_k} \right| > \varrho$。根据假设， σ-子代数序列是 2-有界的，因此存在一个子序列（仍记为 h_{N_k}），它在 L^2中弱收敛于某个 h。根据定义，h 属于 $\tilde{W}$，因此是 A_{min}可测的。但这导致矛盾，因为 $0 < \varrho < \left| E^{\perp}_{A_{min}} f, h \right| =$

$\left| \left\langle f, \mathcal{E}^{\perp}_{\mathfrak{A}_{min}} h \right\rangle \right| = 0.$
Of 当然，2-有界条件是一项非常强的限制。接下来我们将说明，关键性质在于 D 有一个最小的 σ-子代数。在这种情况下，我们将这个最小子代数记为 $A_{\perp a.e.}$。当然，如果序列是 2-有界的，那么 $A_{\perp a.e.} = A_{min}$

□

HOOOOOOOOOOOOOOLA XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

4.3. 几乎处处收敛的充要条件

定理 4.22. 如果$\{\mathfrak{A}_n\}$ 是一个由 σ-子代数组成的序列，使得

i) ii)

对于所有 $f \in L^{\infty}$，若 $\mathcal{E}(f|\mathfrak{A}_n)$ 几乎处处收敛，则 $\mathfrak{A}^{\mu a.e.}$ 是一个 σ-子代数，$\mathbb{D}$ 有一个最小的 σ-子代数，且 $\mathfrak{A}^{\mu a.e.} = \mathfrak{A}_{\perp a.e.}$

证明。 根据定义 $\mathrm{A}^{\mu a.e.} = \{A \in \mathrm{A} | A$ 且 A^c 均被一致覆盖$\}$ 回顾一下，对于 xxx，$\mathrm{A}^{\mu a.e.}$ 是一个代数。因此，为了证明它是一个 $\sigma-$子代数，我们只需验证：若有一个由两两不交集组成的序列 $\{B_k\}$，且 $B_k \in \mathrm{A}^{\mu a.e.}$，那么 $\cup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathrm{A}^{\mu a.e.}$。

根据定理 4.11，我们需要证明 $\mathrm{E}(\chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} | \mathrm{A}_n) \overset{a.e.}{\longrightarrow} \chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k}$. 现在，由于 B_k 属于 $\mathrm{A}^{\mu a.e.}$，对于任意自然数 M，我们有

$$\mathcal{E}(\chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} | \mathfrak{A}_n) \geq \mathcal{E}(\chi_{\cup_{k=1}^{M} B_k} | \mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} \chi_{\cup_{k=1}^{M} B_k}$$

根据假设，对于任意 $f \in L^{\infty}$，条件期望几乎处处收敛。因此，存在 $g \in L^{\infty}$，使得

$$\mathcal{E}(\chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} | \mathfrak{A}_n) \xrightarrow{a.e.} g$$

因此 $g \geq \chi_{\cup_{k=1}^{M} B_k}$。由于这对任意 M 都成立，我们得出 $g \geq \chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k}$.利用控制收敛定理，我们有

$$0 \leq \left\langle 1, g - \chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} \right\rangle = \lim \left\langle 1, \mathcal{E}(\chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} | \mathfrak{A}_n) - \chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} \right\rangle = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) - \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$$

$$0 \leq \int g - \chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} \, d\mu = \lim \int \mathcal{E}(\chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} | \mathfrak{A}_n) - \chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} \, d\mu = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) - \mu(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$$

因此 $g = \chi_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k}$ 几乎处处。

□