arXiv:2301.08720v1 [math.RT] 20 Jan 2023

由某些超复系统诱导的算子

DANIEL ALPAY 和 ILWOO CHO

Abstract. 本文考察超复系统 $\{\mathbb{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的自然希尔伯特空间表示$\left\{\left(\mathbb{C}^2,\pi_t\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$，并研究超复数 $h\in\mathbb{H}_t$ 的实现$\pi_t(h)$，即作用于 $\mathbb{C}^2$ 上的 (2×2)-矩阵，尺度 $t\in\mathbb{R}$ 任意固定。本文还探讨它们在代数、算子理论、谱分析和自由概率方面的性质。

1. Introduction

本文通过构造一个环，研究复数 a 和 b 的超复数 (a,b) 的表示，

$$\mathbb{H}_t=\left(\mathbb{C}^2,\ +,\ \cdot_t\right),$$

由实数 $t\in\mathbb{R}$ 缩放，其中 $(+)$ 是二维向量空间 $\mathbb{C}^2$ 上通常的向量加法，而 $(\cdot_t)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上由 t 缩放的向量乘法，定义如下：

$$(a_1,b_1)\cdot_t(a_2,b_2)=\left(a_1a_2+tb_1\overline{b_2},\ a_1b_2+b_1\overline{a_2}\right),$$

其中，$\overline{z}$ 是 $\mathbb{C}$ 中 z 的共轭。

受 [2], [3] 和 [19], 中引入的四元数 $\mathbb{H}$ 的典范希尔伯特空间表示 $\left(\mathbb{C}^2,\pi\right)$ 启发，我们考虑其典范表示：

$$\Pi_t=\left(\mathbb{C}^2,\ \pi_t\right),$$

对于环 $\mathbb{H}_t$，并将其每个元素 $h=(a,b)$ 视为其实现：

$$\pi_t(h)\overset{\text{denote}}{=}[h]_t\overset{\text{def}}{=}\begin{pmatrix}a & tb\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\ \text{in}\ M_2(\mathbb{C}),$$

其中，$M_2(\mathbb{C})=B\left(\mathbb{C}^2\right)$ 是矩阵代数（或者说，是作用于 $\mathbb{C}^2$ 上的算子代数），由所有以 $\mathbb{C}$ 为元素的 (2×2) 矩阵（分别地，所有有界线性变换，或简称为作用于 $\mathbb{C}^2$ 上的算子）构成，对每个 $t\in\mathbb{R}$ 均如此。在我们的设定下，可以验证环 $\mathbb{H}_{-1}$ 无非是由所有四元数组成的非交换域 $\mathbb{H}$ （例如，[2], [3] 和 [19]），而环 $\mathbb{H}_1$ 是由所有双复数组成的环（例如，[1]）。

本文在典范表示 Π_t 下，考察并刻画了 $\mathbb{H}_t$ 的谱分析性质、算子论（或矩阵论）性质以及自由概率性质。具体而言，本文从代数和谱论的角度研究了 $\mathbb{H}_t$ 的某些分解性质，进而探讨这些性质如何影响 $\mathbb{H}_t$的超复数的谱分析性质、算子论性质和自由概率性质，其中 $t\in\mathbb{R}$。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 20G20, 46S10, 47S10.*Key words and phrases.* 缩放超复环、缩放超复幺半群、表示、缩放谱形式、缩放谱化、谱理论、自由概率。

1.1. 研究动机。四元数 $\mathbb{H}$ 不仅是纯数学中（例如 [5], [10], [11], [12], [13] [14], [17], [19], [23]）一个有趣的研究对象，在应用数学中（例如 [4], [7], [15], [16], [20] 和 [21]）也同样如此。另一方面，文献 [2] 和 [3], 在一种不同于文献 [13], [15]和 16[]所研究的四元数矩阵的通常四元数特征值问题的表示“在 $\mathbb{C}$上”之下，研究了 $\mathbb{H}$ 上的谱分析。

受所谓的 [1], 分裂四元数的四元数广义设置以及 [2] 和 [3], 的主要结果启发，我们研究一种由 $\mathbb{C}^2$的成对元素诱导的新型超复数。特别地，我们构造了缩放超复环 $\{\mathbb{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$系统，并在我们的典范希尔伯特空间表示 $\left\{\Pi_t = \left(\mathbb{C}^2, \pi_t\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$下，研究对于给定尺度 $t \in \mathbb{R}$，这些超复数如何作为2×2上的（ $\mathbb{C}$ ）-矩阵作用。对于 $t \in \mathbb{R}$，我们关注 Π_t下 $\mathbb{H}_t$ 的代数、算子理论、谱理论和自由概率性质。它们是否类似于 $\mathbb{H}_{-1} = \mathbb{H}$中的四元数的性质，而这些性质已在 [2] 和[3]中展示？这些问题的答案因具体情形而异，并取决于尺度（见下文）。

1.2. 概述。在第2节中，我们定义主要研究对象——缩放超复环 $\{\mathbb{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$及其典范希尔伯特空间表示 $\{\Pi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$。我们将 $\mathbb{H}_t$ 中的每个超复数理解为一个算子，即一个以 $\mathbb{C}$为底域的 (2×2) 阶矩阵。我们着重研究任意固定尺度 t下 $\mathbb{H}_t$的可逆性。研究表明，若 $t < 0$，则 $\mathbb{H}_t$ 构成一个类似于四元数$\mathbb{H} = \mathbb{H}_{-1}$的非交换域；然而，若 $t \geq 0$，则它成为一个含幺环，但不是非交换域。

第3节研究 $\mathbb{H}_t$ 在 $\mathbb{C}$上的谱理论（即其实现的谱理论）。求出超复数的谱后，我们定义所谓的 t-谱形式，其主对角线元素来自这些谱，非对角线元素均为 0。正如我们在 [2] 和 [3], 中所见，这类谱形式与 $\mathbb{H}_{-1}$中四元数的实现相似。然而，若尺度 $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ 任意选取，这种相似性通常并不成立。我们将详细研究这种相似性。

在第4节中，我们简要讨论通常伴随在 $M_2(\mathbb{C})$ 上的作用，该作用作用于 $\mathbf{M}_2(\mathbb{C})$ 的子结构 $\mathcal{H}_2^t$ ，其中包含尺度为 $t \in \mathbb{R}$ 的 $\mathbb{H}_t$ 的所有实现。与 [2] 和 [3], 的四元数情形不同，通常情况下，许多 $\mathcal{H}_2^t$ 矩阵的伴随（共轭转置）并不属于 $\mathcal{H}_2^t$，尤其是在 $t \neq -1$ 时。这表明，在 $M_2(\mathbb{C})$ 中，需要由 $\mathcal{H}_2^t$ 生成一个更大且在算子代数意义上更好的 $*$ 代数结构，以研究 $\mathcal{H}_2^t$ 上的算子论性质和自由概率性质。

在最后的第5节中，我们基于第4节的 C^* 代数结构，研究算子论性质和自由概率性质，涉及通常迹和归一化迹。

2. The Scaled Hypercomplex Systems $\{\mathbb{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$

本节中，我们定义一个超复数环 $\mathbb{H}_t$ ，并针对任意固定尺度 $t \in \mathbb{R}$，建立相应的典范希尔伯特空间表示 Π_t。在本节中，我们令

$$\mathbb{C}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{C}\}$$

为两个复数域 $\mathbb{C}$ 的笛卡尔积。可以将 $\mathbb{C}^2$ 理解为配备其典范正交归一基 $\{(1,0),(0,1)\}$. 的通常二维希尔伯特空间

2.1. 一个 t-缩放超复环 $\mathbb{H}_t$。本节中，我们固定实数域 $\mathbb{R}$中的任意实数 t 。在向量空间 $\mathbb{C}^2$ （在 $\mathbb{C}$上）上，定义t-缩放向量乘法 $(\cdot_t)$ 如下：

$$(a_1,b_1)\cdot_t(a_2,b_2)\overset{\text{def}}{=}\left(a_1a_2+tb_1\overline{b_2},\ a_1b_2+b_1\overline{a_2}\right), \tag{2.1.1}$$

当 $(a_l,b_l)\in\mathbb{C}^2$时，对所有 $l=1,\ 2,$ 其中$\overline{z}$是 $\mathbb{C}$中 z的共轭。不难验证，这种运算 $(\cdot_t)$ 在 $\mathbb{C}^2$上封闭。此外，它满足：

$$\begin{aligned}&((a_1,b_1)\cdot_t(a_2,b_2))\cdot_t(a_3,b_3)\\&\quad=\left(a_1a_2+tb_1\overline{b_2},\ a_1b_2+b_1\overline{a_2}\right)\cdot_t(a_3,b_3)\\&\quad=\left(a_1a_2a_3+t\left(b_1\overline{b_2}a_3+a_1b_2\overline{b_3}+b_1\overline{a_2}\,\overline{b_3}\right),\right.\\&\qquad\left.a_1a_2b_3+a_1b_2\overline{a_3}+b_1\overline{a_2a_3}+tb_1\overline{b_2}b_3\right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}&(a_1,b_1)\cdot_t((a_2,b_2)\cdot_t(a_3,b_3))\\&\quad=(a_1,b_1)\cdot_t\left(a_2a_3+tb_2\overline{b_3},\ a_2b_3+b_2\overline{a_3}\right)\\&\quad=\left(a_1\left(a_2a_3+tb_2\overline{b_3}\right)+tb_1\left(\overline{a_2}\,\overline{b_3}+\overline{b_2}a_3\right),\right.\\&\qquad\left.a_1\left(a_2b_3+b_2\overline{a_3}\right)+b_1\left(\overline{a_2a_3}+t\overline{b_2}b_3\right)\right),\end{aligned}$$

从而得到等式： (2.1.2)

$$((a_1,b_1)\cdot_t(a_2,b_2))\cdot_t(a_3,b_3)=(a_1,b_1)\cdot_t((a_2,b_2)\cdot_t(a_2,b_3)),$$

在 $\mathbb{C}^2$中，当 $(a_l,b_l)\in\mathbb{C}^2$时，对所有 $l=1,\ 2,\ 3$。

此外，若 $\vartheta=(1,0)\in\mathbb{C}^2$，则

$$\vartheta\cdot_t(a,b)=(a,b)=(a,b)\cdot_t\vartheta \tag{2.1.3}$$

根据 (2.1.1)，对所有 $(a,b)\in\mathbb{C}^2$，均有此结论。

根据 (2.1.2) 和 (2.1.3)，若

$$\mathbb{C}^{2\times}=\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\},$$

则数对 $\left(\mathbb{C}^{2\times},\cdot_t\right)$ 构成一个幺半群（即带有单位元 (1, 0) 的半群）。

引理1. 设 $\mathbb{C}^{2\times}=\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}$，且 $(\cdot_t)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上的闭运算 (2.1.1)。则代数结构 $\left(\mathbb{C}^{2\times},\cdot_t\right)$ 构成一个以 (1, 0) 为单位元的幺半群。

证明。由 (2.1.2) 和 (2.1.3) 即可得证。 ∎

因此，可以得到以下环结构。

命题 2. 代数三元组 $\left(\mathbb{C}^2,+,\cdot_t\right)$ 构成一个含单位元的环，其单位元（或乘法单位元）为 (1, 0)，其中 $(+)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上通常的向量加法，而 $(\cdot_t)$ 是向量乘法 (2.1.1)。

证明. 显然，代数对 $\left(\mathbb{C}^2,+\right)$ 在通常的加法 $(+)$ 下构成一个阿贝尔群，其 $(+)$-单位元为 $(0,0)$。另一方面，根据引理1，代数对 $\left(\mathbb{C}^{2\times},\cdot_t\right)$ 构成一个幺半群（因此也是一个半群）。现在注意到

$$\begin{aligned}
&(a_1,b_1)\cdot_t\left((a_2,b_2)+(a_3,b_3)\right)=(a_1,b_1)\cdot_t(a_2+a_3,b_2+b_3)\\
&=\left(a_1(a_2+a_3)+tb_1\left(\overline{b_2}+\overline{b_3}\right),\ a_1(b_2+b_3)+b_1\left(\overline{a_2}+\overline{a_3}\right)\right)\\
&=\left(a_1a_2+a_1a_3+tb_1\overline{b_2}+tb_1\overline{b_3},\ a_1b_2+a_1b_3+b_1\overline{a_2}+b_1\overline{a_3}\right)\\
&=\left(a_1a_2+tb_1\overline{b_2},\ a_1b_2+b_1\overline{a_2}\right)+\left(a_1a_3+tb_1\overline{b_3},\ a_1b_3+b_1\overline{a_3}\right)\\
&=(a_1,b_1)\cdot_t(a_2,b_2)+(a_1,b_1)\cdot_t(a_3,b_3),
\end{aligned}$$

并且，类似地，

$$\left((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\right)\cdot_t(a_3,b_3)=(a_1,b_1)\cdot_t(a_3,b_3)+(a_2,b_2)\cdot_t(a_3,b_3), \tag{2.1.4}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 中。因此，根据 (2.1.4)，运算 $(+)$ 和 $(\cdot_t)$ 满足左右分配律。

因此，代数三元组 $\left(\mathbb{C}^2,+,\cdot_t\right)$ 构成一个含单位元的环，其单位元为 $(1,0)$。

∎

上述命题刻画了在固定 $t\in\mathbb{R}$ 时，$\left(\mathbb{C}^2,+,\cdot_t\right)$ 作为一个定义良好的含单位元的环的代数结构。需要指出的是，由于尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中是任意的，事实上，我们得到含单位元的环 $\{\mathbb{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}^\circ}$

定义3. 对于固定的 $t\in\mathbb{R}$，环 $\left(\mathbb{C}^2,+,\cdot_t\right)$ 称为尺度为 t 的超复环（简称 t 缩放超复环）。我们用 $\mathbb{H}_t$ 表示 t 缩放超复环。

2.2. $\mathbb{H}_t$的典范表示 $\Pi_t=\left(\mathbb{C}^2,\ \pi_t\right)$。在本节中，我们固定 $t\in\mathbb{R}$以及相应的 t缩放超复环，

$$\mathbb{H}_t=\left(\mathbb{C}^2,\ +,\ \cdot_t\right),$$

其中 $(\cdot_t)$ 是向量乘法（2.1.1）。我们考虑 $\mathbb{H}_t$的一个自然的有限维希尔伯特空间表示 Π_t，并将每个超复数$h\in\mathbb{H}_t$ 理解为作用在由 Π_t确定的希尔伯特空间上的算子。特别地，与 [2], [3] 和 [19], 的四元数情形一样，超复环 $\mathbb{H}_t$ 的二维希尔伯特空间表示可以自然地建立起来。

现在定义一个态射，

$$\pi_t:\mathbb{H}_t\to B\left(\mathbb{C}^2\right)=M_2(\mathbb{C}),$$

by

$$\pi_t((a,b))=\begin{pmatrix} a & tb\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix},\ \forall\,(a,b)\in\mathbb{H}_t, \tag{2.2.1}$$

其中，B（H）是希尔伯特空间 H上所有有界（或连续线性）算子组成的算子代数，而 M_k（$\mathbb{C}$）是 $\mathbb{C}$上的所有（$k\times k$）阶矩阵构成的矩阵代数，并且对所有 $k\in\mathbb{N}$（例如 [8] 和 [9]），它与 $B\left(\mathbb{C}^k\right)$同构。

根据定义，(2.2.1) 中的函数 π_t 是从 $\mathbb{H}_t$ 到 $M_2(\mathbb{C})$ 的单射。事实上，如果

$$(a_1,b_1)\neq(a_2,b_2)\ \text{in}\ \mathbb{H}_t,$$

then

$$\pi_t((a_1,b_1))=\begin{pmatrix} a_1 & tb_1\\ \overline{b_1} & \overline{a_1}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} a_2 & tb_2\\ \overline{b_2} & \overline{a_2}\end{pmatrix}=\pi_t((a_2,b_2)), \tag{2.2.2}$$

属于 $M_2(\mathbb{C})$。此外，它满足

$$\pi_t\left((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\right)=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & t\left(b_1+b_2\right) \\ \overline{b_1+b_2} & \overline{a_1+a_2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & tb_1 \\ \overline{b_1} & \overline{b_2} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_2 & tb_2 \\ \overline{b_2} & \overline{a_2} \end{pmatrix}=\pi_t\left((a_1,b_1)\right)+\pi_t\left((a_2,b_2)\right). \tag{2.2.3}$$

此外，有

$$\pi_t\left((a_1,b_1)\cdot_t(a_2,b_2)\right)=\pi_t\left(\left(a_1a_2+tb_1\overline{b_2},\ a_1b_2+b_1\overline{a_2}\right)\right)$$

由 (2.1.1) 得

$$=\begin{pmatrix} a_1a_2+tb_1\overline{b_2} & t\left(a_1b_2+b_1\overline{a_2}\right) \\ \overline{a_1b_2+b_1\overline{a_2}} & \overline{a_1a_2+tb_1\overline{b_2}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & tb_1 \\ \overline{b_1} & \overline{a_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & tb_2 \\ \overline{b_2} & \overline{a_2} \end{pmatrix}=\pi_t\left((a_1,b_1)\right)\pi_t\left((a_2,b_2)\right), \tag{2.2.4}$$

其中，(2.2.4) 最右端的乘法 $(\cdot)$ 是 $M_2(\mathbb{C})$ 上的通常矩阵乘法。

由于我们的 t 缩放超复环 $\mathbb{H}_t=\left(\mathbb{C}^2,+,\cdot_t\right)$（作为集合）与二维空间 $\mathbb{C}^2$ 相认，因此对于任意 $t\in\mathbb{R}$，可以将此环 $\mathbb{H}_t$ 视为配备了 $\mathbb{C}^2$ 通常拓扑的拓扑环。下文中，我们将环 $\mathbb{H}_t$ 视为配备了 $\mathbb{C}^2$ 通常拓扑的拓扑含单位元环。

引理 4. 数对 $\left(\mathbb{C}^2,\pi_t\right)$ 是 t 缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 的单射希尔伯特空间表示，其中 π_t 是一个作用（2.2.1）。

证明. 根据（2.2.2），（2.2.1）中的态射 $\pi_t:\mathbb{H}_t\to M_2(\mathbb{C})$ 是定义良好的单射函数。此外，此映射 π_t 满足关系（2.2.3）和（2.2.4），因此它是 $\mathbb{H}_t$ 在二维向量空间 $\mathbb{C}^2$ 上的（代数）环作用。因此，数对 $\left(\mathbb{C}^2,\pi_t\right)$ 构成了 $\mathbb{H}_t$ 的代数表示。将 $\mathbb{H}_t$ 和 $M_2(\mathbb{C})$ 视为配备通常拓扑的拓扑空间后，不难验证环作用 π_t 是从 $\mathbb{H}_t$（作为拓扑空间与 $\mathbb{C}^2$ 同胚）到 $M_2(\mathbb{C})$（它与 C^*-代数 $B\left(\mathbb{C}^2\right)$ 是 $*$-同构的）的连续映射。因此，代数表示 $\left(\mathbb{C}^2,\pi_t\right)$ 构成了 $\mathbb{H}_t$ 通过 π_t 作用于 $\mathbb{C}^2$ 上的希尔伯特空间表示。

∎

上述引理表明，t-缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 可在矩阵代数 $M_2(\mathbb{C})$ 中实现，

$$\pi_t\left(\mathbb{H}_t\right)=\left\{\begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\in M_2\left(\mathbb{C}\right):(a,b)\in\mathbb{H}_t\right\},$$

作为嵌入于 $M_2(\mathbb{C})$ 中的拓扑环。

定义 5. 超复环 t 的 $\mathbb{H}_t$ 尺度实现 $\pi_t(\mathbb{H}_t)$ 称为 $\mathbb{H}_t$ 的 t 尺度（超复）实现（在 $M_2(\mathbb{C})$ 中），其中尺度为 $t\in\mathbb{R}$。并将 $\pi_t(\mathbb{H}_t)$ 记为 $\mathcal{H}_2^t$。即，

$$\mathcal{H}_2^t\overset{\text{denote}}{=}\pi_t\left(\mathbb{H}_t\right)=\left\{\begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}:(a,b)\in\mathbb{H}_t\right\}.$$

此外，对于所有 $\xi \in \mathbb{H}_t$，我们用 $[\xi]_t$ 表示 $\pi_t(\xi) \in \mathcal{H}_2^t$。

由上述引理和定义，我们得到以下结果。

定理 6. 对于 $t \in \mathbb{R}$，相应的 t-缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 与 $M_2(\mathbb{C})$ 中的 t-缩放实现 $\mathcal{H}_2^t$ 拓扑环同构。即，

$$\mathbb{H}_t \overset{T.R}{=} \mathcal{H}_2^t \quad \text{in} \quad M_2(\mathbb{C}), \tag{2.2.5}$$

其中，“$\overset{T.R}{=}$”表示“与.....拓扑环同构”。

证明. 关系 (2.2.5) 由引理 4 以及 π_t 的单射性 (2.2.2) 得证。 ∎

由上述定理可知，对于固定的 $t \in \mathbb{R}$，可以将 $\mathbb{H}_t$ 和 $\mathcal{H}_2^t$ 实现为同一个拓扑环。回顾一下，关系 (2.2.5) 仅在四元数情形 $t = -1$ 下，分别于 [2] 和 [3], 中得到证明。

2.3. 缩放超复幺半群。在本节中，我们固定一个尺度$t \in \mathbb{R}$，以及相应的 t-缩放超复环，

$$\mathbb{H}_t = \left(\mathbb{C}^2, +, \cdot_t\right),$$

它与 t-缩放实现同构，

$$\mathcal{H}_2^t = \left\{ \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : (a,b) \in \mathbb{H}_t \right\},$$

在 $M_2(\mathbb{C})$ 中。令

$$\mathbb{H}_t^\times \overset{\text{denote}}{=} \mathbb{H}_t \setminus \{(0,0)\},$$

作为集合，其中 (0,0) $\in \mathbb{H}_t$ 是阿贝尔群 $\left(\mathbb{C}^2, +\right)$ 的 (+)-单位元。因此，根据命题 2，该集合构成一个定义良好的半群，

$$\mathbb{H}_t^\times \overset{\text{denote}}{=} \left(\mathbb{H}_t^\times, \cdot_t\right),$$

它配备了其 ($\cdot_t$)-单位元 (1,0)，因此，数对 $\mathbb{H}_t^\times$是在 $\mathbb{H}_2^t$ 中嵌入的极大幺半群（相对于运算 ($\cdot_t$)）。

定义 7。嵌入于 t-缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 中的极大幺半群 $\mathbb{H}_t^\times = \left(\mathbb{H}_t^\times, \cdot_t\right)$，称为 t-缩放超复幺半群。

由（2.2.5）可知，显然：

推论 8。 t尺度的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$ 与幺半群 $\mathcal{H}_2^{t\times} \overset{denote}{=} \left(\mathcal{H}_2^{t\times}, \cdot\right)$ 幺半群同构，后者配备其单位元，

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \cdot 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [(1,0)]_t,$$

$M_2(\mathbb{C})$ 的（2×2）单位矩阵，其中（$\cdot$）是从 $M_2(\mathbb{C})$ 上的通常矩阵乘法继承而来的通常矩阵乘法。即，

$$\mathbb{H}_t^\times = \left(\mathbb{H}_t^\times, \cdot_t\right) \overset{Monoid}{=} \left(\mathcal{H}_2^{t\times}, \cdot\right) = \mathcal{H}_2^{t\times}, \tag{2.3.1}$$

其中“$\overset{Monoid}{=}$”表示“幺半群同构”。

证明。关系 (2.3.1) 的同构性由命题 2 的证明和定理 6 的证明得出。

∎

2.4. 在 $\mathbb{H}_t$ 上的可逆性。本节中，我们将我们的 t 缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 视为其同构实现 $\mathcal{H}_2^t$，并针对任意固定的 $t \in \mathbb{R}$，考察 $\mathbb{H}_t$ 中元素的可逆性。

首先注意，对于任意实现为 $[(a,b)]_t \in \mathcal{H}_2^t$ 的 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ realized

$$det\left([(a,b)]_t\right) = det\begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = |a|^2 - t|b|^2,$$

即，

$$det\left([(a,b)]_t\right) = |a|^2 - t|b|^2, \tag{2.4.1}$$

其中 $det:\ M_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ 是行列式，而 $|.|$ 是 $\mathbb{C}$ 上的模。

定理 9。设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$，实现为 $[(a,b)]_t \in \mathcal{H}_2^t$。
(2.4.2) $det\left([(a,b)]_t\right) = |a|^2 - t|b|^2$.
(2.4.3) 若 $|a|^2 \rhd t|b|^2$，或 $|a|^2 \lhd t|b|^2$，则 $[(a,b)]_t$ 在“$M_2(\mathbb{C})$ 中”可逆，其逆矩阵为：

$$[(a,b)]_t^{-1} = \frac{1}{|a|^2 - t|b|^2}\begin{pmatrix} \overline{a} & t(-b) \\ (-b) & a \end{pmatrix}.$$

(2.4.4) 若 $|a|^2 - t|b|^2 \neq 0$，则 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 可逆，其含义是存在唯一的 $(c,d) \in \mathbb{H}_t$，使得

$$(a,b) \cdot_t (c,d) = (1,0) = (c,d) \cdot_t (a,b).$$

特别地，有

$$(c,d) = \left(\frac{\overline{a}}{|a|^2 - t|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2 - t|b|^2}\right) \in \mathbb{C}^2$$

(2.4.5) 假设 (a,b) 按照 (2.4.4) 的含义在 $\mathbb{H}_t$ 中可逆。那么其逆也属于“$\mathbb{H}_t$ 中”。

证明。(2.4.2) 的结论由 (2.4.1) 得出。

注意并回忆一下，矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 在 $M_n(\mathbb{C})$ 中可逆，当且仅当$det(A) \neq 0$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。因此，

$$det\left([(a,b)]_t\right) \neq 0 \Longleftrightarrow [(a,b)]_t \text{ is invertible in } M_2(\mathbb{C}).$$

所以，根据（2.4.2），

$$|a|^2 - t|b|^2 \neq 0, \Longleftrightarrow [(a,b)]_t \text{ is invertible in } M_2(\mathbb{C}).$$

此外，$|a|^2 - t|b|^2 \neq 0$，当且仅当

$$[(a,b)]_t^{-1} = \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|a|^2 - t|b|^2}\begin{pmatrix} \overline{a} & -tb \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix},$$

在 $M_2(\mathbb{C})$ 中。因此，陈述（2.4.3）在 $M_2(\mathbb{C})$ 中成立。

由（2.4.3）可得 $det\left([(a,b)]_t\right) \neq 0$，当且仅当

$$[(a,b)]_t^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{a}}{|a|^2 - t|b|^2} & t\left(\frac{-b}{|a|^2 - t|b|^2}\right) \\ \overline{\left(\frac{-b}{|a|^2 - t|b|^2}\right)} & \frac{a}{|a|^2 - t|b|^2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}),$$

并且它实际上包含在“ $\mathcal{H}_2^t$”中，满足

$$\pi_t^{-1}\left(\begin{array}{cc} \frac{\overline{a}}{|a|^2-t|b|^2} & t\left(\frac{-b}{|a|^2-t|b|^2}\right) \\ \overline{\left(\frac{-b}{|a|^2-t|b|^2}\right)} & \frac{a}{|a|^2-t|b|^2} \end{array}\right) = \left(\frac{\overline{a}}{|a|^2-t\,|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2-t\,|b|^2}\right),$$

在 $\mathbb{H}_t$ 中，由于 π_t 的单射性。这表明 $[(a,b)]_t^{-1}$ 存在于 $M_2(\mathbb{C})$ 中，当且仅当它包含在“ $\mathcal{H}_2^t$ 中”。也就是说，如果 $[(a,b)]_t$ 可逆，那么它的逆也包含在 $\mathcal{H}_2^t$ 中，反之亦然。因此，陈述 (2.2.4) 和 (2.2.5) 成立。 ∎

上述定理不仅刻画了 t 尺度超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$ 中幺半群元素的可逆性，也证实其逆（若存在）包含在幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$ 中。也就是说，

$$(a,b)^{-1} \text{ exists}, \Longleftrightarrow (a,b)^{-1} = \left(\frac{\overline{a}}{|a|^2-t\,|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2-t\,|b|^2}\right),$$

“在 $\mathbb{H}_t^\times$中”，等价地，

$$\left[(a,b)^{-1}\right]_t = [(a,b)]_t^{-1} \text{ in } \mathcal{H}_2^\times.$$

推论10. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t^\times$。那么它可逆，当且仅当

$$\left[(a,b)^{-1}\right]_t = \left[\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2-t|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2-t|b|^2}\right)\right]_t = [(a,b)]_t^{-1}, \tag{2.4.6}$$

在 $\mathcal{H}_2^\times$ 中，其中 $[(a,b)]_t^{-1}$ 表示 $M_2(\mathbb{C})$ 中的矩阵逆。

证明。(2.4.6) 的证明可由 (2.4.3)、(2.4.4) 和 (2.4.5) 立即得到。 ∎

上述推论可重新表述为：如果 $\xi \in \mathbb{H}_t^\times$ 可逆，那么

$$\pi_t\left(\xi^{-1}\right) = \left(\pi_t(\xi)\right)^{-1} \text{ in } \mathcal{H}_2^{t\times}.$$

现在考虑

$$|a|^2 - t\,|b|^2 = 0 \Longleftrightarrow |a|^2 = t\,|b|^2, \tag{2.4.7}$$

$\mathbb{R}$ 中的情形。如上所述，对于 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$，条件 (2.4.7) 成立，当且仅当 (a,b) 在 $\mathbb{H}_t$ 中不可逆（因此，其实现 $[(a,b)]_t$ 在 $M_2(\mathbb{C})$ 中不可逆，进而在 $\mathcal{H}_2^t$ 中也不可逆）。显然，我们对 $\mathbb{H}_t$ 的 $(+)$-单位元 $(0,0)$ 自动满足条件 (2.4.7) 的情形不感兴趣。因此，不失一般性地，我们关注 t-尺度超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$ 中满足条件 (2.4.7) 的元素 (a,b)（或其实现$[(a,b)]_t$，即 $\mathcal{H}_2^{t\times}$ 的实现）。

回顾一下，代数三元组 $(X,+,\cdot)$ 是一个非交换域，当且仅当：(i) $(X,+)$ 是阿贝尔群；(ii) $(X^\times,\cdot)$ 构成非阿贝尔群；(iii) 运算 $(+)$ 和 $(\cdot)$ 满足左右分配律。例如，四元数 $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{-1}$ 是一个非交换域（例如，[2] 和 [3]）。

定理11。假设固定尺度 $t \in \mathbb{R}$ 为负，即 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$。那么 t尺度的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$中的“所有”元素（a，b）在 $\mathbb{H}_t$中均可逆，其逆元为，

$$\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2-t\,|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2-t\,|b|^2}\right) \in \mathbb{H}_t^\times.$$

即，　(2.4.8)

$$t<0 \text{ in } \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{H}_t \text{ is a noncommutative field.}$$

证明。假设尺度 $t\in\mathbb{R}$ 为负数。那么，对于任意的 $(a,b)\in\mathbb{H}_t^{\times}$，

$$|a|^2 \neq t\,|b|^2 \Longleftrightarrow |a|^2 - t\,|b|^2 > 0,$$

因为 $(a,b)\neq(0,0)$。也就是说，如果 $t<0$，那么每个元素 $(a,b)\in\mathbb{H}_t^{\times}$都“不”满足条件 (2.4.7)。这意味着，如果 $t<0$，那么根据 (2.4.4) 和 (2.4.5)，每个元素 $(a,b)\in\mathbb{H}_t^{\times}$ 在 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 中都是可逆的；其逆元在 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 中由 (2.4.6) 确定。因此，根据 (2.1.1) 和 (2.2.4)，这一对 $\mathbb{H}_t^{\times}=\left(\mathbb{H}_t^{\times},\cdot_t\right)$ 构成一个非阿贝尔群。

因此，若 $t<0$ 属于 $\mathbb{R}$，则 t 缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 成为非交换域，从而证明了命题 (2.4.8)。∎

上述定理表明，缩放超复环 $\{\mathbb{H}_t\}_{t<0}$ 的代数结构是非交换域。

定理12. 假设 $t=0$ 属于 $\mathbb{R}$。那么，0-缩放超复幺半群 $\mathbb{H}_0^{\times}$ 中的元素 (a,b) 在 $\mathbb{H}_0$ 中可逆，其逆元为

$$\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2},\ \frac{-b}{|a|^2}\right)\in\mathbb{H}_0^{\times},$$

当且仅当 $a\neq 0$ 属于 $\mathbb{C}$，当且仅当只有子集中的元素，

$$\left\{(a,b)\in\mathbb{H}_0^{\times} : a\neq 0\right\} \text{ of } \mathbb{H}_0^{\times} \qquad (2.4.9)$$

在 $\mathbb{H}_0^{\times}$ 中可逆，当且仅当对于所有 $b\in\mathbb{C}$，$(0,b)\in\mathbb{H}_0^{\times}$ 在 $\mathbb{H}_0^{\times}$ 中不可逆。

证明。假设尺度为零，即 $t=0$ 属于 $\mathbb{R}$。那么，根据 (2.4.7)，

$$|a|^2 = 0\cdot|b|^2 \Longleftrightarrow |a|^2=0 \Longleftrightarrow a=0 \text{ in } \mathbb{C},$$

当且仅当对于所有 $b\in\mathbb{C}$，$(0,b)\in\mathbb{H}_0^{\times}$在 $\mathbb{H}_0^{\times}$ 中不可逆；当且仅当包含在子集 (2.4.9) 中的所有元素 (a,b) 在 $\mathbb{H}_0^{\times}$ 中均可逆。

注意，(a,b) 属于 $\mathbb{H}_0^{\times}$ 的子集 (2.4.9)，当且仅当

$$[(a,b)]_0\left[\left(\tfrac{\overline{a}}{|a|^2},\ \tfrac{-b}{|a|^2}\right)\right]_0 = \begin{pmatrix} a & 0\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\overline{a}}{|a|^2} & 0\\ \frac{\overline{-b}}{|a|^2} & \frac{a}{|a|^2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\overline{a}}{|a|^2} & 0\\ \frac{\overline{-b}}{|a|^2} & \frac{a}{|a|^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}$$

$$=\left[\left(\tfrac{\overline{a}}{|a|^2},\ \tfrac{-b}{|a|^2}\right)\right]_0[(a,b)]_0,$$

在 $\mathbb{H}_0^{\times}$ 中。因此，若存在，$(a,b)^{-1}=\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2},\ \frac{-b}{|a|^2}\right)$ 属于 $\mathbb{H}_0^{\times}$。∎

上述定理表明，如果 $\mathbb{R}$ 中存在零尺度，那么我们的 0-缩放超复环 $\mathbb{H}_0$ 就不可能是非交换域。这直接说明，四元数上的代数 $\mathbb{H}=\mathbb{H}_{-1}$与缩放超复环上的代数 $\{\mathbb{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$ 通常可能有所不同，尤其是在 $t\geq 0$ 时。

定理 13. 假设尺度 $t \in \mathbb{R}$ 为正，即 $t > 0$ 属于 $\mathbb{R}$。那么元素 $(a, b) \in \mathbb{H}_t^\times$ 在 $\mathbb{H}_t^\times$ 中可逆，其逆元为，

$$\left(\frac{\overline{a}}{|a|^2 - t\,|b|^2}, \frac{-b}{|a|^2 - t\,|b|^2} \right) \in \mathbb{H}_t^\times,$$

当且仅当 $|a|^2 \neq t\,|b|^2$ 属于 $\mathbb{R}_0^+ = \{r \in \mathbb{R} : \ r \geq 0\}$，当且仅当 (a, b) 包含在该子集中，

$$\left\{ (a, b) : |a|^2 \neq t\,|b|^2 \text{ in } \mathbb{R}_0^+ \right\}, \tag{2.4.10}$$

$\mathbb{H}_t^\times$ 的。作为应用，若 $t > 0$ 属于 $\mathbb{R}$，则所有元素

$$\{(a, 0) \in \mathbb{H}_t : a \in \mathbb{C}^\times\} \cup \{(0, b) \in \mathbb{H}_t : b \in \mathbb{C}^\times\}, \tag{2.4.11}$$

在 $\mathbb{H}_t$ 中可逆，其中 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$。

证明。假设 $t > 0$ 属于 $\mathbb{R}$，且 $\mathbb{H}_t^\times$ 是相应的 t-尺度超复幺半群。那么 $(a, b) \in \mathbb{H}_t^\times$ 在 $\mathbb{H}_t^\times$ 中可逆，当且仅当条件 (2.4.7) 不成立，当且仅当

$$|a|^2 \neq t\,|b|^2 \Longleftrightarrow \text{either } |a|^2 > t\,|b|^2, \text{ or } |a|^2 < t\,|b|^2,$$

在 $\mathbb{R}_0^+$ 中，因为 $t > 0$。因此，若 $t > 0$ 属于 $\mathbb{R}$，则元素 (a, b) 在$\mathbb{H}_t^\times$ 中可逆，当且仅当

$$\text{either } |a|^2 > t\,|b|^2, \text{ or } |a|^2 < t\,|b|^2 \text{ in } \mathbb{R}_0^+,$$

当且仅当 (a, b) 包含于 $\mathbb{H}_t^\times$ 中的子集 (2.4.10) 内。

特别地，对于 $t > 0$ 属于 $\mathbb{R}$ 的情形，(i) 若 $(a, 0) \in \mathbb{H}_t^\times$且 $a \in \mathbb{C}^\times$，则 $|a|^2 > 0$; (ii) 若 $(0, b) \in \mathbb{H}_t^\times$且 $b \in \mathbb{C}^\times$，则 $0 < t\,|b|^2$。因此，只要 $t > 0$，子集 (2.4.11) 就真包含于 $\mathbb{H}_t^\times$ 中的子集 (2.4.10)。所以，所有由 $(a, 0)$ 或 $(0, b)$ 构成且满足 $a, b \in \mathbb{C}^\times$ 的元素，在 $\mathbb{H}_t^\times$ 中都是可逆的。 ∎

上述定理刻画了尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中为正时， t-尺度超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$ 中的可逆性。定理 11、12 和 13 按具体情形细化了定理 8。我们再次总结主要结果。

推论 14. 设 $\mathbb{H}_t^\times$ 为 t-尺度超复幺半群。若 $t < 0$，则 $\mathbb{H}_t^\times$ 的所有非零元素都是可逆的；若 $t = 0$，则

$$\left\{ (a, b) \in \mathbb{H}_0^\times : a \neq 0 \right\}$$

是 $\mathbb{H}_0^\times$ 的可逆真子集；若 $t > 0$，则

$$\left\{ (a, b) : |a|^2 \neq t\,|b|^2 \text{ in } \mathbb{R}_0^+ \right\}$$

是 $\mathbb{H}_t^\times$ 的可逆真子集，其中“ $\mathbb{H}_t^\times$ 的可逆子集”是指“包含所有可逆元的 $\mathbb{H}_t^\times$ 的子集”。

证明。这个推论不过是定理 11、12 和 13 的总结。 ∎

2.5. 非负缩放超复环的分解。在本节中，对于任意固定的“正”尺度 $t>0$，我们考察 t-缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 的一种特定分解，其中 $t>0\in\mathbb{R}$。回顾一下，正如我们在第2.4节中所见，由（2.4.8）可知，负缩放超复环 $\{\mathbb{H}_s\}_{s<0}$ 是非交换域，等价地说，负缩放超复幺半群 $\{\mathbb{H}_s^{\times}\}_{s<0}$ 是非阿贝尔群。然而，若 $t\geq 0$，则根据（2.4.9）和（2.4.10），一般而言 $\mathbb{H}_t$ 不能构成非交换域。我们在此着重讨论这类情形。

设 $t\geq 0$ 和 $\mathbb{H}_t$ 为相应的 t-缩放超复环。将 $\mathbb{H}_t$划分为

$$\mathbb{H}_t=\mathbb{H}_t^{inv}\sqcup\mathbb{H}_t^{sing}$$

with (2.5.1)

$$\mathbb{H}_t^{inv}=\left\{(a,b):|a|^2\neq t\,|b|^2\right\},$$

and

$$\mathbb{H}_t^{sing}=\left\{(a,b):|a|^2=t\,|b|^2\right\},$$

其中 $\sqcup$ 为不交并集。由 (2.4.9) 和 (2.4.10)，$(a,b)\in\mathbb{H}_t^{inv}$，当且仅当它可逆；等价地，$(a,b)\in\mathbb{H}_t^{sing}$，当且仅当它在 $\mathbb{H}_t$ 中不可逆。

回顾并注意，行列式是 $M_n(\mathbb{C})$ 上的乘法映射，对所有$n\in\mathbb{N}$，其意义如下：

$$det\left(AB\right)=det\left(A\right)det\left(B\right),\ \forall A,B\in M_n\left(\mathbb{C}\right). \tag{2.5.2}$$

因此，由 (2.5.2) 可得

$$\xi,\eta\in\mathbb{H}_t^{inv}\Rightarrow det\left(\left[\xi\cdot_t\eta\right]_t\right)=det\left(\left[\xi\right]_t\left[\eta\right]_t\right)\neq 0. \tag{2.5.3}$$

引理15。设 $t\geq 0$ 属于 $\mathbb{R}$。则 t尺度的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$的子集 $\mathbb{H}_t^{inv}\overset{denote}{=}\left(\mathbb{H}_t^{inv},\cdot_t\right)$ 构成一个非阿贝尔群。也就是说，$\mathbb{H}_t^{inv}$不仅是一个子幺半群，也是 $\mathbb{H}_t^{\times}$中的一个嵌入群。

证明。根据 (2.5.2)，若 $\xi,\eta\in\mathbb{H}_t^{inv}$，则 $\xi\cdot_t\eta\in\mathbb{H}_t^{inv}$也成立。也就是说，运算 $(\cdot_t)$ 在 $\mathbb{H}_t^{inv}$上封闭且满足结合律。此外，根据 (2.5.1)，$(\cdot_t)$-单位元 (1, 0) 属于 $\mathbb{H}_t^{inv}$。因此，子结构 $\left(\mathbb{H}_t^{inv},\cdot_t\right)$ 构成 $\mathbb{H}_t^{\times}$的一个子幺半群。但是，根据 (2.4.8) 和 (2.5.3)，每个元素 $\xi\in\mathbb{H}_t^{inv}$都有其 $(\cdot_t)$-逆元 ξ^{-1}，且该逆元包含于 $\mathbb{H}_t^{inv}$中。这表明 $\mathbb{H}_t^{inv}$在幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$中构成一个非阿贝尔群。

∎

根据划分（2.5.1）和乘法性（2.5.3），可以得到上述定理的如下等价结果。

引理16. 设 $t\geq 0$ 属于 $\mathbb{R}$。则这对

$$\mathbb{H}_t^{\times sing}\overset{denote}{=}\left(\mathbb{H}_t^{sing}\cap\mathbb{H}_t^{\times},\cdot_t\right)=\left(\mathbb{H}_t^{sing}\setminus\{(0,0)\},\cdot_t\right)$$

在 t 尺度超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 中构成一个没有单位元的半群。

证明. 根据（2.5.2）和（2.5.3），运算 $(\cdot_t)$ 在该集合上封闭且满足结合律，

$$\mathbb{H}_t^{\times sing}\overset{\text{def}}{=}\mathbb{H}_t^{\times}\cap\mathbb{H}_t^{sing}=\mathbb{H}_t^{sing}\setminus\{(0,0)\}.$$

然而，$(\cdot_t)$-单位元 (1, 0) 不属于 $\mathbb{H}_t^{\times sing}$，因为 $I_2=[(1,0)]_t$ 属于 $\mathbb{H}_t^{inv}$。因此，在幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 中，子结构 $\left(\mathbb{H}_t^{\times sing},\cdot_t\right)$ 构成一个半群（没有单位元）。

∎

上述引理明确包含这样一个事实：$\left(\mathbb{H}_t^{sing}, \cdot_t\right)$ 只是一个半群（没有单位元），它不是 $\mathbb{H}_t^{\times}$的子幺半群（因此也不是群）。

上述两个代数刻画表明，集合论分解 (2.5.1) 导出了 t-尺度超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 的代数分解，

$$\mathbb{H}_t^{\times} = \left(\mathbb{H}_t^{inv}, \cdot_t\right) \sqcup \left(\mathbb{H}_t^{\times sing}, \cdot_t\right), \tag{2.5.4}$$

其中

$$\mathbb{H}_t^{inv} = \left\{(a,b) \in \mathbb{H}_t^{\times} : |a|^2 \neq t\,|b|^2\right\},$$

and

$$\mathbb{H}_t^{\times sing} = \left\{(a,b) \in \mathbb{H}_t^{\times} : |a|^2 = t\,|b|^2\right\},$$

当且仅当 $t \geq 0$ 属于 $\mathbb{R}$ 时。

定理 17. 对于 $t \geq 0$ 属于 $\mathbb{R}$， t-尺度超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 可代数分解为

$$\mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^{inv} \sqcup \mathbb{H}_t^{\times sing},$$

其中 $\mathbb{H}_t^{inv}$ 是群， $\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 是 (2.5.4) 中不含单位元的半群。

证明。代数分解，

$$\mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^{inv} \sqcup \mathbb{H}_t^{\times sing},$$

由 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 的集合论分解 (2.5.1)、上述两个引理以及 (2.5.4)，可得到 t-尺度超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 的 ∎

根据上述定理，只要给定的尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中非负，就可以得到以下概念。

定义 18。设 $t \geq 0$ 属于 $\mathbb{R}$，且 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 为 t-尺度超复幺半群。代数块，

$$\mathbb{H}_t^{inv} = \left(\left\{(a,b) \in \mathbb{H}_t^{\times} : |a|^2 \neq t\,|b|^2\right\}, \cdot_t\right),$$

称为 $\mathbb{H}_t^{\times}$（或 $\mathbb{H}_t$）的群部分，而另一个代数块，

$$\mathbb{H}_t^{\times sing} = \left(\left\{(a,b) \in \mathbb{H}_t^{\times} : |a|^2 = t\,|b|^2\right\}, \cdot_t\right),$$

称为 $\mathbb{H}_t^{\times}$（或 $\mathbb{H}_t$）的半群部分。

根据上述定义，定理 17 可重新表述如下：如果尺度 t 在 $\mathbb{R}$中非负，那么 t 缩放的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$可分解为群部分 $\mathbb{H}_t^{inv}$和半群部分 $\mathbb{H}_t^{\times sing}$。

可以说，如果 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$，那么在 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 中，半群部分 $\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 为空。事实上，对于任意尺度 $t \in \mathbb{R}$， t 缩放的超复幺半群 $\mathbb{H}_t$ 可分解为 (2.5.4)。正如我们在本节所见，如果 $t \geq 0$，那么半群部分 $\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 非空；而正如我们在第2.4节所讨论的，如果 $t < 0$，那么半群部分 $\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 为空，等价地， t 缩放的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 与其群部分 $\mathbb{H}_t^{inv}$ 相同，即只要 $t < 0$，就有 $\mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^{inv}$属于 $\mathbb{H}_t$。

推论19. 对于每个 $t \in \mathbb{R}$， t 缩放的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 可划分为

$$\mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^{inv} \sqcup \mathbb{H}_t^{\times sing},$$

其中群部分 $\mathbb{H}_t^{inv}$和半群部分$\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 的含义如（2.5.4）所述。特别地，若 $t < 0$, 则

$$\mathbb{H}_t^{\times sing} = \emptyset \Longleftrightarrow \mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^{inv};$$

同时，若 $t \geq 0$，则$\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 是 $\mathbb{H}_t^{\times}$的一个非空真子集。

证明。上述段落的讨论从概念上证明了这一点。此外，参见定理11和17。

∎

3. Spectral Analysis on $\{\mathbb{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ Under $\left\{\left(\mathbb{C}^2, \pi_t\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$

在本节中，我们固定任意尺度 $t \in \mathbb{R}$，以及相应的 t-缩放超复环,

$$\mathbb{H}_t = \left(\mathbb{C}^2, +, \cdot_t\right),$$

该环包含其超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times} = \left(\mathbb{H}_t^{\times}, \cdot_t\right)$。在第2节中，我们证明，对于尺度 $t \in \mathbb{R}$, 幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 可划分为

$$\mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^{inv} \sqcup \mathbb{H}_t^{\times sing},$$

其中 $\mathbb{H}_t^{inv}$ 是群部分， $\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 是 $\mathbb{H}_t$ 的半群部分。特别地，若 $t < 0$, 则半群部分 $\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 在 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 中为空，等价地， $\mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^{inv}$ 在 $\mathbb{H}_t$ 中；而若 $t \geq 0$, 则 $\mathbb{H}_t^{\times sing}$ 是 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 的非空真子集。

受对 $\mathbb{H}_t$ 上可逆性的此类分析启发，我们在此考察 $\mathbb{H}_t$ 上的谱分析。

3.1 超复谱形式（定义于 $\mathbb{H}_t$）。对于 $t \in \mathbb{R}$，设 $\mathbb{H}_t$ 是实现为以下形式的 t-缩放超复环

$$\mathcal{H}_2^t = \pi_t\left(\mathbb{H}_t\right) = \left\{ \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in M_2\left(\mathbb{C}\right) : (a,b) \in \mathbb{H}_t \right\},$$

在 $\mathbb{H}_t$ 的希尔伯特空间表示 $\Pi_t = \left(\mathbb{C}^2, \pi_t\right)$ 下的 $M_2\left(\mathbb{C}\right)$ 中。

设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 为任意一个元素，满足

$$\pi_t\left(a,b\right) = \left[(a,b)\right]_t = \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^t.$$

那么，对于 $\mathbb{C}$ 上的变量 z ,

$$\begin{aligned} det\left(\left[(a,b)\right]_t - z\left[(1,0)\right]_t\right) &= det \begin{pmatrix} a-z & tb \\ \overline{b} & \overline{a}-z \end{pmatrix} \\ &= (a-z)\left(\overline{a}-z\right) - t\left|b\right|^2 \\ &= \left|a\right|^2 - az - \overline{a}z + z^2 - t\left|b\right|^2 \\ &= z^2 - \left(a+\overline{a}\right)z + \left(\left|a\right|^2 - t\left|b\right|^2\right) \\ &= z^2 - 2Re\left(a\right)z + det\left(\left[(a,b)\right]_t\right), \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

其中 $Re(a)$ 是 $\mathbb{C}$ 中 a 的实部，并且

$$det\left(\left[(a,b)\right]_t\right) = \left|a\right|^2 - t\left|b\right|^2,$$

由 (2.4.2) 可知。因此，方程，

$$det\left([(a,b)]_t - z\,[(1,0)]_t\right) = 0,$$

关于变量 z 在 $\mathbb{C}$上的问题，其解为，

$$z = \frac{2Re\,(a) \pm \sqrt{4Re\,(a)^2 - 4det\left([(a,b)]_t\right)}}{2},$$

$$\Longleftrightarrow \tag{3.1.2}$$

$$z = Re\,(a) \pm \sqrt{Re\,(a)^2 - det\left([(a,b)]_t\right)}.$$

回顾一下，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，矩阵 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 的谱为，

$$spec\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : det\,(A - \lambda I_n) = 0\},$$

等价地， (3.1.3)

$$spec\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \eta \in \mathbb{C}^n,\ s.t.,\ A\eta = \lambda\eta\},$$

当且仅当

$$spec\,(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I_n \text{ is not invertible in } M_n\,(\mathbb{C})\},$$

作为 $\mathbb{C}$ 的一个非空离散（紧）子集，其中 I_n 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的单位矩阵（例如 [8]）。更一般地，若 $T \in B\,(H)$ 是希尔伯特空间H上的一个算子，则 T 的谱 $\sigma\,(T)$ 定义为一个非空紧子集，

$$\sigma\,(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - zI_H \text{ is not invertible on } H\},$$

其中 I_H 是 $B\,(H)$ 的恒等算子。注意，若 H 是无限维的，则一般而言， $\sigma\,(T)$ 不是 $\mathbb{C}$ 中的离散子集，如 (3.1.3) 所示（例如 [9]）。

定理20. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 实现为 $[(a,b)]_t \in \mathcal{H}_{2\circ}^t$ 则

$$spec\left([(a,b)]_t\right) = \left\{Re\,(a) \pm \sqrt{Re\,(a)^2 - det\left([(a,b)]_t\right)}\right\},$$

在 $\mathbb{C}$中。更确切地说，若

$$a = x + yi,\ b = u + vi \in \mathbb{C},$$

其中 x、y、u、$v \in \mathbb{R}$ 和 $i = \sqrt{-1}$ 属于 $\mathbb{C}$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right) = \left\{x \pm i\sqrt{y^2 - tu^2 - tv^2}\right\} \text{ in } \mathbb{C}. \tag{3.1.4}$$

证明. 超复数 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 的实现 $[(a,b)]_t = \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^t$ 的谱为，

$$spec\left([(a,b)]_t\right) = \left\{Re\,(a) \pm \sqrt{Re\,(a)^2 - \left(|a|^2 - t\,|b|^2\right)}\right\},$$

在 $\mathbb{C}$中，由 (3.1.2) 和 (3.1.3) 可得。若

$$a = x + yi, \text{ and } b = u + vi \text{ in } \mathbb{C},$$

其中 x、y、u、$v \in \mathbb{R}$和 $i = \sqrt{-1}$属于 $\mathbb{C}$，于是

$$Re\,(a) = x,$$

and

$$|a|^2 - t\,|b|^2 = \left(x^2 + y^2\right) - t\left(u^2 + v^2\right),$$

在 $\mathbb{R}$中，因此，

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\pm\sqrt{-y^2+tu^2+tv^2}\right\},$$

当且仅当

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\pm i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\right\},$$

在 $\mathbb{C}$ 中。因此，集合相等式 (3.1.4) 成立。 ∎

从下文起，为了便于讨论，我们令

$$a=x+yi \text{ and } b=u+vi \text{ in } \mathbb{C},$$

with (3.1.5)

$$x,y,u,v\in\mathbb{R}, \text{ and } i=\sqrt{-1}.$$

上述定理可由以下结果进一步细化。

推论 21. 设 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$，可表示为 $[(a,b)]_t\in\mathcal{H}_2^t$，并满足 (3.1.5)。

(3.1.6) 若 $Im(a)^2=t\left|b\right|^2$属于 $\mathbb{R}$，其中 $Im(a)$ 是 a 属于 $\mathbb{C}$的虚部，则

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\{x\}=\{Re\left(a\right)\} \text{ in } \mathbb{R}.$$

(3.1.7) 若 $Im\left(a\right)^2<t\left|b\right|^2$属于 $\mathbb{R}$，则

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\pm\sqrt{tu^2+tv^2-y^2}\right\} \text{ in } \mathbb{R}.$$

(3.1.8) 若 $Im\left(a\right)^2>t\left|b\right|^2$属于 $\mathbb{R}$，则

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\pm i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\right\} \text{ in } \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

证明. 对于满足 (3.1.5) 的 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$，有

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\pm i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\right\},$$

根据 (3.1.4)。因此，可以验证：(i) 若 $y^2-tu^2-tv^2=0$，等价地，若

$$Im\left(a\right)^2=t\left|b\right|^2 \text{ in } \mathbb{R},$$

则 $spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\pm i\sqrt{0}\right\}=\{x\}$属于 $\mathbb{R}$；(ii) 若 $y^2-tu^2-tv^2<0$，等价地，若

$$Im\left(a\right)^2<t\left|b\right|^2 \text{ in } \mathbb{R},$$

then

$$x\pm i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}=x\pm i\sqrt{-\left|y^2-tu^2-tv^2\right|},$$

这意味着

$$x\pm i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}=x\pm i^2\sqrt{tu^2+tv^2-y^2},$$

因此，

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\mp\sqrt{tu^2+tv^2-y^2}\right\} \text{ in } \mathbb{R};$$

最后，(iii) 若 $y^2-tu^2-tv^2>0$，等价地，若

$$Im\left(a\right)^2>t\left|b\right|^2 \text{ in } \mathbb{R},$$

then

$$spec\left(\left[(a,b)\right]_t\right)=\left\{x\pm i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\right\},$$

包含于 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 中。

因此，关于 $[(a,b)]_t$ 的谱 (3.1.4) 的精化表述 (3.1.6)、(3.1.7) 和 (3.1.8) 成立。 ∎

根据上述推论，可以立即得到以下结果。

推论 22. 假设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$。若 $Im(a)^2 \leq t|b|^2$，则

$$spec([(a,b)]_t) \subset \mathbb{R};$$

同时，若 $Im(b)^2 > t|b|^2$，则

$$spec([(a,b)]_t) \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}), \text{ in } \mathbb{C}.$$

证明。由 (3.1.6)、(3.1.7) 和 (3.1.8) 可得。 ∎

此外，我们还有以下结果。

定理 23. 假设固定尺度 $t \in \mathbb{R}$ 为负，即 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$。若

$$(a,b) \in \mathbb{H}_t, \text{ with } b \neq 0 \text{ in } \mathbb{C},$$

then

$$spec([(a,b)]_t) \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \text{ in } \mathbb{C}. \tag{3.1.9}$$

与此同时，若对于 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$，$b = 0$ 属于 $\mathbb{C}$，则

$$a \in \mathbb{R} \Longrightarrow spec([(a,0)]_t) = \{a\} \ in \ \mathbb{R},$$

and (3.1.10)

$$a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Longrightarrow spec([(a,0)]_t) = \{a, \overline{a}\} \text{ in } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

证明。假设在 $\mathbb{R}$中，尺度 t 为负。于是，对于任意 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$，立即可得

$$Im(a)^2 \geq t|b|^2,$$

因为左边 $Im(a)^2$, 非负，而由于 t为负，右边 $t|b|^2$在 $\mathbb{R}$ 中非正。

设 $b \neq 0$ 属于 $\mathbb{C}$，等价地，$|b|^2 > 0$，这意味着 $t|b|^2 < 0$ 属于 $\mathbb{R}$。于是

$$Im(a)^2 > t|b|^2 \text{ in } \mathbb{R}.$$

因此，根据 (3.1.8)，对于带有 $b \neq 0$ 的 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$，其实现 $[(a,b)]_t$ 的谱 $spec([(a,b)]_t)$ 包含于 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 中。这证明了关系 (3.1.9)。

同时，如果 $a = Re(a)$，且 $b = 0$ 属于 $\mathbb{C}$，那么

$$0 = Im(a)^2 \leq 0 = t \cdot 0 \text{ in } \mathbb{R},$$

这意味着

$$spec([(a,0)]_t) \subset \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{C},$$

根据（3.1.6）。然而，如果 $Im(a) \neq 0$，且 $b = 0$，那么

$$Im(a)^2 > 0 = t \cdot 0 \text{ in } \mathbb{R},$$

因此，

$$spec([(a,0)]_t) \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \text{ in } \mathbb{C}.$$

所以，关系（3.1.10）得证。 ∎

根据 (3.1.9) 和 (3.1.10)，上述定理给出了 $t < 0$ in $\mathbb{R}$ 时定理19的情形。

定理24。假设 $t=0$ in $\mathbb{R}$。若 $(a,b)\in\mathbb{H}_0$ with $Im(a)\neq 0$ in $\mathbb{C}$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right)\subset(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}) \text{ in } \mathbb{C}. \tag{3.1.11}$$

同时，若 $Im(a)=0$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right)\subset\mathbb{R} \text{ in } \mathbb{C}. \tag{3.1.12}$$

证明。假设固定尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中为零。那么，对于任意超复数 $(a,b)\in\mathbb{H}_0$，有

$$[(a,b)]_0=\begin{pmatrix} a & 0 \\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\in\mathcal{H}_2^0,$$

因此，

$$Im(a)^2\geq 0=0\cdot|b|^2 \text{ in } \mathbb{R}.$$

特别地，若在 $\mathbb{C}$ 中 $Im(a)\neq 0$，则上述不等式变为

$$Im(a)^2>0 \text{ in } \mathbb{R},$$

这意味着

$$spec\left([(a,b)]_t\right)\subset(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}) \text{ in } \mathbb{C},$$

根据（3.1.8），也就是说，对于所有的 $(a,b)\in\mathbb{H}_0$，其中 $a\in\mathbb{C}$ with $Im(a)\neq 0$，且 $b\in\mathbb{C}$ 任意，此类 (a,b) 的实现的谱包含于 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 中。这表明关系（3.1.11）成立。

同时，如果 $Im(a)=0$ 属于 $\mathbb{C}$，则有

$$Im(a)^2=0\geq 0=0\cdot|b|^2 \text{ in } \mathbb{R}.$$

因此，由（3.1.6）可得

$$spec\left([(a,b)]_t\right)\subset\mathbb{R} \text{ in } \mathbb{C}.$$

因此，关系（3.1.12）也成立。 ∎

上述定理借助（3.1.11）和（3.1.12），阐明了尺度 t 在$\mathbb{R}$中为零时的定理19。

定理25。假设固定尺度 t 在 $\mathbb{R}$中为正。那么， t-缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 可分解为

$$\mathbb{H}_t=\mathbb{H}_t^{+}\sqcup\mathbb{H}_t^{-0},$$

with *(3.1.13)*

$$\mathbb{H}_t^{+}=\left\{(a,b)\in\mathbb{H}_t : Im(a)^2>t|b|^2\right\},$$

and

$$\mathbb{H}_t^{-0}=\left\{(a,b)\in\mathbb{H}_t : Im(a)^2\leq t|b|^2\right\},$$

其中 $\sqcup$ 为不交并集。此外，如果 $(a,b)\in\mathbb{H}_t^{+}$，那么

$$spec\left([(a,b)]_t\right)\subset(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}); \tag{3.1.14}$$

同时，如果 $(a,b)\in\mathbb{H}_t^{-0}$，那么

$$spec\left([(a,b)]_t\right)\subset\mathbb{R} \text{ in } \mathbb{C}. \tag{3.1.15}$$

证明。假设 $t>0$ 属于 $\mathbb{R}$。那么可以将 t缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 分解为

$$\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^+ \sqcup \mathbb{H}_t^{-0},$$

with (3.1.16)

$$\mathbb{H}_t^+ = \left\{(a,b) \in \mathbb{H}_t : Im\,(a)^2 > t\,|b|^2\right\},$$

and

$$\mathbb{H}_t^{-0} = \left\{(a,b) \in \mathbb{H}_t : Im\,(a)^2 \leq t\,|b|^2\right\},$$

在集合论意义下。因此，由 (3.1.16) 可知，划分 (3.1.13) 成立。

根据定理19和推论20，若 $(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right) \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}),$$

与此同时，若 $(a,b) \in \mathbb{H}_t^{-0}$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right) \subset \mathbb{R}, \text{ in } \mathbb{C}.$$

因此，关系 (3.1.14) 和 (3.1.15) 得证。 ∎

上述定理根据 (3.1.14) 和 (3.1.15)，在分解 (3.1.13) 的意义下，给出了定理19在固定尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中为正的情形。

事实上，可以发现，对于“所有” $t \in \mathbb{R}$，相应的 t 尺度超复环 $\mathbb{H}_t$ 被划分为

$$\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^+ \sqcup \mathbb{H}_t^{-0},$$

其中，$\mathbb{H}_t^+$和 $\mathbb{H}_t^{-0}$的含义如(3.1.13)所示。特别地，定理 22、23 和 24 基于定理19和推论20，逐一刻画了上述分解情形。因此，我们得到关于 $\mathbb{H}_t$的以下普适谱性质。

推论20。设 $t \in \mathbb{R}$ 是 $\mathbb{H}_t$的任意固定尺度。则

$$\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^+ \sqcup \mathbb{H}_t^{-0}, \textit{ set-theoretically,}$$

其中，$\left\{\mathbb{H}_t^+, \mathbb{H}_t^{-0}\right\}$ 是关于 t的一个划分，其含义如(3.1.13)所示。此外，如果$(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right) \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}),$$

同时，如果$(a,b) \in \mathbb{H}_t^{-0}$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right) \subset \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{C}.$$

特别地，如果 $t<0$，则 $\mathbb{H}_t^{-0} = \{(0,0)\}$，等价地，$\mathbb{H}_t^{\times} = \mathbb{H}_t^+$。

证明。这个推论不过是对定理 22、23 和 24 的总结。 ∎

不难验证，推论 25 中各陈述的逆命题也成立。

定理 27. 设 $\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^+ \sqcup \mathbb{H}_t^{-0}$是 $t \in \mathbb{R}$的固定 t-缩放超复环。(3.1.17) $(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$，当且仅当 $spec\left([(a,b)]_t\right) \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$。(3.1.18) $(a,b) \in \mathbb{H}_t^{-0}$，当且仅当 $spec\left([(a,b)]_t\right) \subset \mathbb{R}$。

证明。首先，假设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$属于 $\mathbb{H}_t$。那么，根据推论 25,

$$spec\left([a,b]_t\right) \subset \left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right).$$

现在，假设

$$spec\left([a,b]_t\right) \subset \mathbb{R} \text{ in } \mathbb{C},$$

并假设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$。那么，(a,b) 包含于 $\mathbb{H}_t^{-0}$ 中；等价地，根据 (3.1.6)、(3.1.7)、(3.1.10)、(3.1.12) 和 (3.1.15)，它不能是 $\mathbb{H}_t^+$ 的元素。这与我们的假设矛盾。因此,

$$(a,b) \in \mathbb{H}_t^+ \Longleftrightarrow spec\left([(a,b)]_t\right) \subset \left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right).$$

因此，命题 (3.1.17) 成立。

由分解 (3.1.13)，根据 (3.1.17)，命题 (3.1.18) 成立。 ∎

由上述定理，我们得到以下结果。

推论28. 设 $\mathbb{H}_t$ 是任意 $t \in \mathbb{R}$ 的 t 缩放超复环，并假设它可分解为

$$\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^+ \sqcup \mathbb{H}_t^{-0},$$

如 (3.1.13) 所示。设给定元素 (a,b) 满足条件 (3.1.5)。则

(3.1.19) $(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$，当且仅当

$$spec\left([(a,b)]_t\right) = \left\{x \pm i\sqrt{y^2 - tu^2 - tv^2}\right\} \subset \left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right).$$

(3.1.20) $(a,b) \in \mathbb{H}_t^{-0}$，当且仅当以下情况之一成立

$$spec\left([(a,b)]_t\right) = \begin{cases} \{x\} & \text{if } Im\left(a\right)^2 = t\left|b\right|^2 \\ \left\{x \pm \sqrt{tu^2 + tv^2 - y^2}\right\} & \text{if } Im\left(a\right)^2 < t\left|b\right|^2, \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}$ 中。

证明。由 (3.1.9) 和 (3.1.17) 可得，陈述 (3.1.19) 成立。同时，由 (3.1.10) 和 (3.1.18) 可得，陈述 (3.1.20) 成立。 ∎

回顾一下，希尔伯特空间算子 $T \in B\left(H\right)$ 是自伴的，当且仅当 $T^* = T$in $B\left(H\right)$，其中 T^* 是 T 的伴随（见下文第5节）。众所周知，当且仅当 T 的谱包含于 $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ 时， T 是自伴的。因此得到以下结果。

命题 29. 超复数 $(a,b) \in \mathbb{H}_t^{-0}$in $\mathbb{H}_t$，当且仅当实现 $[(a,b)]_t \in \mathcal{H}_2^t$ 在“ $M_2\left(\mathbb{C}\right)$”中是自伴的。

证明。($\Rightarrow$) 假设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t^{-0}$in $\mathbb{H}_t$。那么 $spec\left([(a,b)]_t\right) \subset \mathbb{R}$in $\mathbb{C}$，这意味着 $[(a,b)]_t$ 在 $M_2\left(\mathbb{C}\right)$ 中是自伴的。

($\Leftarrow$) 假设 $[(a,b)]_t \in \mathcal{H}_2^t$ 在 $M_2\left(\mathbb{C}\right)$ 中是自伴的，并假设 $(a,b) \notin \mathbb{H}_t^{-0}$，等价地，$(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$ 属于 $\mathbb{H}_t$。那么,

$$spec\left([(a,b)]_t\right) \subset \left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right) \text{ in } \mathbb{C},$$

因此， $[(a,b)]_t$ 在 $M_2\left(\mathbb{C}\right)$中不是自伴的。这与其为自伴的假设相矛盾。

∎

与上述命题等价的是，可以得出：当且仅当 $[(a,b)]_t$ 在 $M_2(\mathbb{C})$中不是自伴的时，$(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$属于 $\mathbb{H}_t$。超复数实现的自伴性将在第5节中进一步详细讨论。

3.2. 缩放谱化 $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}^\circ}$。本节中，我们固定任意尺度 $t \in \mathbb{R}$，以及相应的超复环 $\mathbb{H}_t$，它包含 t-缩放超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times = (\mathbb{H}_t \setminus \{(0,0)\}, \cdot_t)$。回想一下，$\mathbb{H}_t^\times$在代数上分解为

$$\mathbb{H}_t^\times = \mathbb{H}_t^{inv} \sqcup \mathbb{H}_t^{\times sing},$$

with (3.2.1)

$$\mathbb{H}_t^{inv} = \left\{(a,b) : |a|^2 \neq t\,|b|^2\right\}, \text{ the group-part},$$

and

$$\mathbb{H}_t^{\times sing} = \left\{(a,b) : |a|^2 = t\,|b|^2\right\}, \text{ the semigroup-part},$$

如 (2.5.4) 所示。因此，t-缩放超复环按集合分解为

$$\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^{inv} \sqcup \{(0,0)\} \sqcup \mathbb{H}_t^{\times sing} = \mathbb{H}_t^{inv} \sqcup \mathbb{H}_t^{sing}, \tag{3.2.2}$$

根据 (3.2.1)，其中

$$\mathbb{H}_t^{sing} \overset{\text{denote}}{=} \{(0,0)\} \sqcup \mathbb{H}_t^{\times sing} \text{ in (3.2.2)}.$$

此外，环 $\mathbb{H}_t$ 谱分解为

$$\mathbb{H}_t = \mathbb{H}_t^+ \sqcup \mathbb{H}_t^{-0},$$

with (3.2.3)

$$\mathbb{H}_t^+ = \left\{(a,b) : Im(a)^2 > t\,|b|^2\right\},$$

and

$$\mathbb{H}_t^{-0} = \left\{(a,b) : Im(a)^2 \leq t\,|b|^2\right\},$$

满足：$(a,b) \in \mathbb{H}_t^+$当且仅当 $spec([(a,b)]_t) \subset (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$；同时，$(a,b) \in \mathbb{H}_t^{-0}$当且仅当 $spec([(a,b)]_t) \subset \mathbb{R}$，根据 (3.1.19) 和 (3.1.20)。

推论30. 设 $\mathbb{H}_t$ 是 $t \in \mathbb{R}$的 t缩放超复环。那么它在集合论意义下分解为

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_t = \quad & \left(\mathbb{H}_t^{inv} \cap \mathbb{H}_t^+\right) \sqcup \left(\mathbb{H}_t^{inv} \cap \mathbb{H}_t^{-0}\right) \\ & \left(\mathbb{H}_t^{sing} \cap \mathbb{H}_t^+\right) \sqcup \left(\mathbb{H}_t^{sing} \cap \mathbb{H}_t^{-0}\right),\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

按集合论方式。

证明. 由(3.2.2)和(3.2.3)可证。 ∎

现在注意，若$(a,0) \in \mathbb{H}_t$，则

$$[(a,0)]_t = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \text{ in } \mathcal{H}_2^t,$$

满足 (3.2.5)

$$spec([(a,0)]_t) = \{a, \overline{a}\} \text{ in } \mathbb{C}.$$

事实上，由（3.1.4）可知，若 $(a,0)\in\mathbb{H}_t$ 满足 $a=x+yi\in\mathbb{C}$ 且 $x,y\in\mathbb{R}$，则

$$spec\left([(a,b)]_t\right)=\left\{x\pm i\sqrt{y^2}\right\}=\{x\pm|y|\,i\}=\{x\pm yi\},$$

这意味着（3.2.5），其中 $|y|$ 是 $\mathbb{R}$中 y 的绝对值。

受（3.2.3）、（3.2.4）和（3.2.5）的启发，我们定义一个取值于 $\mathbb{C}$的函数σ_t，其定义域为 $\mathbb{H}_t$。定义函数，

$$\sigma_t:\mathbb{H}_t\to\mathbb{C},$$

by (3.2.6)

$$\sigma_t\left((a,b)\right)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}a=x+yi & \text{if } b=0 \text{ in } \mathbb{C}\\ x+i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2} & \text{if } b\neq 0 \text{ in } \mathbb{C},\end{cases}$$

对于满足条件（3.1.5）的所有（a，b）$\in\mathbb{H}_t$：

$$a=x+yi \text{ and } b=u+vi \text{ in } \mathbb{C},$$

其中 x、y、u、$v\in\mathbb{R}$ 和$i=\sqrt{-1}$。

注意，这样的态射 σ_t 确实是一个定义良好的函数，它将 $\mathbb{H}_t$ 中的所有超复数映射到 $\mathbb{C}$中的复数。此外，根据定义（3.2.6），它是满射，但肯定不是单射。例如，尽管

$$\xi=(1+3i,\ -1+i) \text{ and } \eta=(1-3\mathrm{i},\ 1-\mathrm{i})$$

在 $\mathbb{H}_t$中彼此不同，但有

$$\sigma_t\left(\xi\right)=1+i\sqrt{9-2t}=\sigma_t\left(\eta\right),$$

由（3.2.6）可得。

定义31.（3.2.6）中的满射 $\sigma_t:\mathbb{H}_t\to\mathbb{C}$ 称为 $\mathbb{H}_t$上的 t（尺度）谱化。像 $\{\sigma_t(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{H}_t}$ 称为 t（尺度）谱值。根据下文，我们还将超复数 $\xi\in\mathbb{H}_t$的每个 t-谱值 $\sigma_t(\xi)\in\mathbb{C}$ 视为 $\mathbb{H}_t$中的超复数（$\sigma_t(\xi)$，0）。也就是说，由 ξ 的 t-谱值 $\sigma_t(\xi)$所赋予的超复数（$\sigma_t(\xi)$，0），也称为 ξ的 t-谱值。

根据定义，所有 t-谱值不仅是许多具有相同特征值实现的 $\mathbb{H}_t$ 超复数的 $\mathbb{C}$-量，而且也是 $\mathbb{H}_t$的超复数，其第一坐标为该值，第二坐标为 0。

定义32. 设 $\xi\in\mathbb{H}_t$ 是一个超复数，它诱导其 t-谱值w 表示$=$ $\sigma_t(\xi)\in\mathbb{C}$，也可理解为 $\eta=(w,0)\in\mathbb{H}_t$。相应的实现，

$$[\eta]_t=\begin{pmatrix}w & t\cdot 0\\ 0 & \overline{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_t(\xi) & 0\\ 0 & \overline{\sigma_t(\xi)}\end{pmatrix}\in\mathcal{H}_2^t$$

称为 ξ 的 t（-尺度）谱形式。用 $\Sigma_t(\xi)$ 表示 $\xi\in\mathbb{H}_t$ 的 t-谱形式。

注意，定义30中的共轭记号是符号性的，其含义是：若 $t > 0$，且

$$\sigma_t(\xi) = 1 + i\sqrt{1-5t} = 1 - \sqrt{5t-1},$$

（因此， σ_t（ξ） $\in \mathbb{R}$），那么该符号，

$$\overline{\sigma_t(\xi)} \overset{\text{means}}{=} 1 - i\sqrt{1-5t} = 1 + \sqrt{5t-1},$$

在 $\mathbb{R}$ 中。也就是说，定义30中的共轭记号具有一种符号意义，其中不仅包含在 $\mathbb{C}$ 上通常的共轭，也包含上述在 $\mathbb{R}$ 上的计算意义。

注记与假设3.2.1。（以下简称 RA 3.2.1）定义30中的共轭记号是逐种情况定义的符号。若 t-谱值 σ_t（ξ）属于 $\mathbb{C}$，则σ_t（ξ）表示通常的共轭。另一方面，若 t-谱值

$$\sigma_t(\xi) = x + \sqrt{tu^2 + tv^2 - y^2},$$

with

$$tu^2 + tv^2 - y^2 \geq 0, \text{ in } \mathbb{R},$$

then

$$\overline{\sigma_t(\xi)} = x - \sqrt{tu^2 + tv^2 - y^2} \text{ in } \mathbb{R},$$

其中 $\xi \in \mathbb{H}_t$ 满足条件（3.1.5）。 □

例如，若 $\xi_1 =$ （$-2-i, 0$） $\in \mathbb{H}_t$，则 t-谱值为

$$\sigma_t(\xi_1) = -2 - i \text{ in } \mathbb{C},$$

诱导出 t-谱形式，

$$\Sigma_t(\xi_1) = \begin{pmatrix} -2-i & 0 \\ 0 & -2+i \end{pmatrix} \text{ in } \mathcal{H}_2^t;$$

同时，若 $\xi_2 =$ $(-2-i,\ 1+3i)$ $\in \mathbb{H}_t$，则 t-谱值为

$$w \overset{\text{denote}}{=} \sigma_t(\xi_2) = -2 + i\sqrt{1-10t},$$

诱导出 t-谱形式，

$$\Sigma_t(\xi_2) = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+i\sqrt{1-10t} & 0 \\ 0 & -2-i\sqrt{1-10t} \end{pmatrix},$$

其中 $\overline{w}$ 在 RA 3.2.1 的意义下是符号型的；若 $t \leq 0$，则

$$\Sigma_t(\xi_2) = \begin{pmatrix} -2+i\sqrt{1-10t} & 0 \\ 0 & -2-i\sqrt{1-10t} \end{pmatrix},$$

同时，若 $t > 0$，则

$$\Sigma_t(\xi_2) = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{10t-1} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{10t-1} \end{pmatrix},$$

在 $\mathcal{H}_2^t$
中。

定义33. 若两个超复数 $\xi,\eta\in\mathbb{H}_t$ 满足以下条件，则称它们是 t（-尺度）谱相关的:

$$\sigma_t(\xi)=\sigma_t(\eta)\ \text{ in }\ \mathbb{C},$$

等价地,

$$\Sigma_t(\xi)=\Sigma_t(\eta)\ \text{ in }\ \mathcal{H}_2^t.$$

在 t-超复环 $\mathbb{H}_t$上，定义31中的 t-谱关系是一个等价关系。事实上,

$$\sigma_t(\xi)=\sigma_t(\xi),\ \forall\xi\in\mathbb{H}_t;$$

并且若 ξ 和 η 在 $\mathbb{H}_t$中满足 t-谱关系，则

$$\sigma_t(\xi)=\sigma_t(\eta)\Longleftrightarrow\sigma_t(\eta)=\sigma_t(\xi),$$

因此， η 和 ξ 在 $\mathbb{H}_t$中满足 t-谱关系；并且若 ξ_1 和 ξ_2 满足 t-谱关系，且若 ξ_2 和 ξ_3 满足 t-谱关系，则

$$\sigma_t(\xi_1)=\sigma_t(\xi_2)=\sigma_t(\xi_3)\ \text{in}\ \mathbb{C},$$

因此， ξ_1 和 ξ_3 是 t-谱相关的。

命题 34。 $\mathbb{H}_t$ 上的 t-谱关系是一种等价关系。

证明。根据前一段的讨论， $\mathbb{H}_t$上的 t-谱关系具有自反性、对称性和传递性。

∎

由于 t-谱关系是一种等价关系， $\mathbb{H}_t$ 中的每个元素 ξ 都有其等价类,

$$\widetilde{\xi}\overset{\text{def}}{=}\{\eta\in\mathbb{H}_t:\eta\text{ is }t\text{-related to }\xi\},$$

因此，相应的商集

$$\widetilde{\mathbb{H}_t}\overset{\text{def}}{=}\left\{\widetilde{\xi}:\xi\in\mathbb{H}_t\right\},\tag{3.2.7}$$

被良好定义为所有等价类的集合。

定理 35. 设 $\mathbb{H}_t$ 为由 t 在 $\mathbb{H}_t$ 上诱导的谱关系所确定的商集 (3.2.7)。那么

$$\widetilde{\mathbb{H}_t}\text{ and }\mathbb{C}\text{ are equipotent.}\tag{3.2.8}$$

证明. 不难验证，对于任意 $z\in\mathbb{C}$，由于 t-谱化 σ_t 的满射性，存在 $\xi\in\mathbb{H}_t$，使得 $z=\sigma_t(\xi)$。这意味着存在 $(z,0)\in\mathbb{H}_t$，使得

$$\widetilde{(z,0)}=\widetilde{\xi}\text{ in }\widetilde{\mathbb{H}_t},\ \text{whenever}\ z=\sigma_t(\xi).$$

因此，从集合论的角度看，我们有

$$\widetilde{\mathbb{H}_t}=\left\{\widetilde{(z,0)}:z\in\mathbb{C}\right\}\overset{\text{equip}}{=}\mathbb{C},$$

其中，“$\overset{\text{equip}}{=}$”表示“与.....等势（或双射）”。因此，关系 (3.2.8) 成立。

∎

上述商集 $\mathbb{H}_t$ （3.2.7）与复数 $\mathbb{C}$ 之间的等势关系（3.2.8）表明，集合 $\mathbb{C}$ 在“每个” $t\in\mathbb{R}$下，按照 t-谱关系对 $\mathbb{H}_t$进行分类。

3.3. $M_2(\mathbb{C})$上的相似与 $\mathbb{H}_t$上的 t-缩放谱关系。在第 3.2 节中，我们针对固定尺度 $t\in\mathbb{R}$，定义了 t- 缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 上的 t- 谱化 σ_t，它在 $\mathcal{H}_2^t$ 中诱导出 t- 谱形式 $\{\Sigma_t(\xi)\}_{\xi\in\mathbb{H}_t}$，这些形式是复对角矩阵，其主对角线上的元素是在符号理解 RA 3.2.1 下实现 $\{[\xi]_t\}_{\xi\in\mathbb{H}_t}$的特征值。此外，$\sigma_t$根据（3.2.8），使集合 $\mathbb{C}$ 在 t-谱关系下对 $\mathbb{H}_t$ 进行分类。

我们分别在 [2] 和 [3] 中证明：在四元数 $\mathbb{H}=\mathbb{H}_{-1}$上，称为 [2] 和 [3], 中的四元数谱关系的（-1）谱关系，与“$\mathcal{H}_2^{-1}$上”的相似关系作为等价关系是等价的。这里，“$\mathcal{H}_2^{-1}$上”的相似是指：如果存在“ $\mathcal{H}_2^{-1}$中”的可逆元 U，使得两个四元数 q_1、$q_2\in\mathbb{H}_{-1}$ 的实现 $[q_1]_{-1}$ 和 $[q_2]_{-1}$ “在 $\mathcal{H}_2^{-1}$中”相似，那么

$$[q_2]_{-1}=U^{-1}[q_1]_{-1}U \text{ in } \mathcal{H}_2^{-1}.$$

这里，我们考虑任意尺度 $t\in\mathbb{R}$下的这类性质。回想一下，我们在 [2] 和 [3] 中证明了：对于“所有”属于（-1）缩放超复数 $\eta\in\mathbb{H}_{-1}=\mathbb{H}$的四元数，（$-1$）谱形式 $\Sigma_{-1}(\eta)$与实现 $[\eta]_{-1}$“在 $\mathcal{H}_2^{-1}$中”相似。 $\mathbb{H}_t$ 上的 t谱关系与 $\mathcal{H}_2^t$上的相似关系是否作为等价关系相同？总之，一般而言，答案是否定的。

对于任意 $n\in\mathbb{N}$，如果存在一个可逆矩阵 $U\in M_n(\mathbb{C})$，使得 A 和 B 这两个 $M_n(\mathbb{C})$ 矩阵满足

$$B=U^{-1}AU \text{ in } M_n(\mathbb{C}).$$

请记住，如果两个矩阵 A 和 B 相似，那么（i）它们具有相同的特征值，（ii）它们具有相同的迹，并且（iii）它们的行列式相同（例如，[8] 和 [9]）。这里我们着重关注事实（iii）：矩阵相似意味着它们的行列式相同；等价地，如果

$$det(A)\neq det(B),$$

那么 A 和 B 在 $M_n(\mathbb{C})$ 中不相似。

定义36. 设 $A,B\in\mathcal{H}_2^t$ 是 $\mathbb{H}_t$ 中某些超复数的实现，其中 $t\in\mathbb{R}$。如果存在一个可逆$U\in\mathcal{H}_2^t$，使得

$$B=U^{-1}AU \text{ in } \mathcal{H}_2^t.$$

滥用记号，若两个超复数 ξ 和 η 的实现 $[\xi]_t$ 和 $[\eta]_t$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似，我们就称它们在 $\mathbb{H}_t$ 中相似。

设 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 是满足条件 (3.1.5) 的超复数，且 $(a,b)\neq(0,0)$。那么它具有

$$[(a,b)]_t=\begin{pmatrix} a & tb\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\in\mathcal{H}_2^t,$$

$$\sigma_t((a,b))=x+i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\overset{\text{let}}{=}w\in\mathbb{C},$$

and (3.3.1)

$$\Sigma_t((a,b))=\begin{pmatrix} w & 0\\ 0 & \overline{w}\end{pmatrix}\in\mathcal{H}_2^t,$$

其中，$\overline{w}$ 在 RA 3.2.1 中是符号的。注意，

$$det([(a,b)]_t)=|a|^2-t|b|^2=\left(x^2+y^2\right)-t\left(u^2+v^2\right),$$

and (3.3.2)

$$det\left(\Sigma_t\left((a,b)\right)\right)=|w|^2=x^2+\left|y^2-tu^2-tv^2\right|,$$

由 (3.3.1) 得出。(3.3.2) 中的这些计算表明，一般而言，$[(a,b)]_t$ 和$\Sigma_t\left((a,b)\right)$作为 $M_2(\mathbb{C})$的矩阵并不相似，因此在$\mathcal{H}_2^t$中也不相似。事实上，例如，若

$$t>0,\text{ and }|a|^2<t|b|^2,$$

那么 $det\left([(a,b)]_t\right)<0$，但根据 (3.3.2)，$det\left(\Sigma_t\left((a,b)\right)\right)>0$属于 $\mathbb{R}$，这意味着

$$det\left([(a,b)]_t\right)\neq det\left(\Sigma_t\left((a,b)\right)\right)\text{ in general,}$$

这表明 $[(a,b)]_t$和 $\Sigma_t\left((a,b)\right)$ 在 $M_2(\mathbb{C})$ 中不相似，因此一般而言，它们在 $\mathcal{H}_2^t$ 中也不相似。

命题37. 设 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 是满足$|a|^2<t|b|^2$且属于 $\mathbb{R}$的“非零”超复数。那么，实现 $[(a,b)]_t$ 与 t- 谱形式 $\Sigma_t\left((a,b)\right)$“ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中 ” 不相似。

证明. 假设 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$满足 $(a,b)\neq(0,0)$ 和 $|a|^2<t|b|^2$，其中 $t>0$。并假设 $[(a,b)]_t$与 $\Sigma_t\left((a,b)\right)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。既然假定它们相似，它们的行列式就恒等相同。然而，

$$det\left([(a,b)]_t\right)<0\text{ and }det\left(\Sigma_t\left((a,b)\right)\right)>0,$$

根据（3.3.2）。这与它们在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似这一假设相矛盾。 ∎

上述命题证实，一般而言，t-缩放超复数的实现及其对应的 t-谱形式在 $\mathcal{H}_2^t$ 中并不相似。

注意，在四元数 $\mathbb{H}=\mathbb{H}_{-1}$ 中，由于尺度为 $t=-1<0$，且 $\mathbb{R}$ 中，

$$det\left([\xi]_{-1}\right)=det\left(\Sigma_{-1}\left(\xi\right)\right)\geq 0,\ \forall\xi\in\mathbb{H}_{-1},$$

并且已证明，对于 [2] 中的“所有” $\xi\in\mathbb{H}_{-1}$ 以及 [3],，$[\xi]_{-1}$ 和 $\Sigma_{-1}(\xi)$ 在 $\mathcal{H}_2^{-1}$ 中确实相似，这引出了一个问题：如果尺度 $t<0$ 属于 $\mathbb{R}$，那么

$$det\left([\eta]_t\right)=det\left(\Sigma_t\left(\eta\right)\right)\geq 0,\ \forall\eta\in\mathbb{H}_t,$$

根据（3.3.2）；那么，像 $t=-1$ 的情形一样，实现 $[\eta]_t$ 与对应的 t-谱形式 $\Sigma_t(\eta)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似吗?

首先，我们需要回顾：如果 $t<0$，那么 t-缩放超复环$\mathbb{H}_t$ 构成一个非交换域，因为根据（2.4.8），t-缩放超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$ 是一个非阿贝尔群。这使我们能够采用与 [2] 和 [3]类似的技巧。

假设。在本节其余部分中，默认给定的尺度 $t\in\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{R}$中为负。□

假设 $(a,0)\in\mathbb{H}_t$，其中 $t<0$。那么

$$[(a,0)]_t=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \overline{a}\end{pmatrix}=\Sigma_t\left((a,0)\right),$$

在 $\mathcal{H}_2^t$ 中，由于 $\sigma_t\left((a,0)\right)=a$ 属于 $\mathbb{C}$。因此，显然，$[(a,0)]_t$ 和 $\Sigma_t\left((a,0)\right)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似，因为它们在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相等。事实上，存在实数项非零的对角矩阵，

$$X=[(x,0)]_t\in\mathcal{H}_2^t,\text{ with }x=x+0i\in\mathbb{C},\ x\neq 0,$$

使得

$$[(a,0)]_t = X^{-1}\left(\Sigma_t\left(a,0\right)\right)X \text{ in } \mathcal{H}_2^t.$$

因此，我们关注满足条件 $\in \mathbb{H}_t$ with $b \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的情形，其中 (a,b)。

引理 38. 设 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$，且 $(a,0) \in \mathbb{H}_t$，是一个超复数。那么，实现 $[(a,0)]_t$ 与 t-谱形式 $\Sigma_t((a,0))$ 在$\mathcal{H}_2^t$中完全相同，因此它们在 $\mathcal{H}_2^t$中相似。（请注意，事实上，此处的尺度 t 在 $\mathbb{R}$中不一定为负。）

证明. 由上一段的讨论即可证明。事实上，有

$$[(a,0)]_t = \Sigma_t\left((a,0)\right) \text{ in } \mathcal{H}_2^t,$$

因为 $\sigma_t((a,0)) = a$ 属于 $\mathbb{C}$。∎

设 $h = (a,b) \in \mathbb{H}_t$，满足 $b \in \mathbb{C}^\times$，并满足条件 (3.1.5)，其中 $t < 0$具有其实现，

$$[h]_t = \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+yi & t(u+vi) \\ u-vi & x-yi \end{pmatrix},$$

及其 t-谱形式，

$$\Sigma_t(h) = \begin{pmatrix} x+i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2} & 0 \\ 0 & x-i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2} \end{pmatrix} \overset{\text{let}}{=} \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix},$$

在 $\mathcal{H}_2^t$ 中。由于 $t<0$ 和 $b \neq 0$ （根据假设）， t-谱值 $w = \sigma_t(h)$ 是一个$\mathbb{C}$-量，其共轭为 $\overline{w}$。现在定义一个矩阵，

$$Q_h \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & t\left(\overline{\frac{w-a}{tb}}\right) \\ \frac{w-a}{tb} & 1 \end{pmatrix} \text{ in } M_2(\mathbb{C}).$$

注意，根据 $t<0$ 和 $b \neq 0$ 的假设，该矩阵是良定义的。此外，我们可以立即看出 $Q_h \in \mathcal{H}_2^t$。即，

$$Q_h = \left[\left(1, \overline{\left(\frac{w-a}{tb}\right)}\right)\right]_t \in \mathcal{H}_2^t. \tag{3.3.3}$$

由此可知，根据我们的负尺度假设，(3.3.3) 中的元素 $Q_h \in \mathcal{H}_2^t$ 确实可逆，因为

$$det(Q_h) = 1 - t\left|\frac{w-a}{tb}\right|^2 \geq 1, \text{ since } t<0,$$

这意味着

$$det(Q_h) \neq 0 \Longleftrightarrow Q_h \text{ is invertible in } \mathcal{H}_2^t.$$

现在注意到

$$Q_h\Sigma_t(h) = \begin{pmatrix} w & t\left(\overline{\frac{w^2-aw}{tb}}\right) \\ \frac{w^2-aw}{tb} & \overline{w} \end{pmatrix}$$

and (3.3.4)

$$[h]_t Q_h = \begin{pmatrix} w & t\left(a\left(\overline{\frac{w-a}{tb}}\right)+b\right) \\ \overline{a\left(\frac{w-a}{tb}\right)+b} & \overline{w} \end{pmatrix},$$

在 $\mathcal{H}_2^t$ 中。现在，让我们比较（3.3.4）中所得矩阵的（1，2）项。元素 $Q_h\Sigma_t(h)$ 的（1，2）项为

$$\begin{aligned} t\left(\overline{\frac{w^2-aw}{tb}}\right) &= \overline{\frac{w(w-a)}{b}} = \overline{\frac{\left(x+i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\right)\left(i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}-yi\right)}{u+vi}} \\ &= \overline{\frac{ix\sqrt{R}-xyi-R+y\sqrt{R}}{u+vi}}, \end{aligned}$$

其中 (3.3.5)

$$R \overset{\text{denote}}{=} y^2-tu^2-tv^2 \text{ in } \mathbb{R},$$

且矩阵 $[h]_t Q_h$ 的 (1, 2) 项为

$$\begin{aligned} & t\left(a\left(\overline{\frac{w-a}{tb}}\right)+b\right) = t\left(\overline{a}\left(\frac{w-a}{tb}\right)+\overline{b}\right) \\ &= t\overline{\left(\frac{\overline{a}w-|a|^2+t|b|^2}{tb}\right)} = \overline{\frac{\overline{a}w-|a|^2+t|b|^2}{b}} \\ &= \overline{\frac{(x-yi)\left(x+i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\right)-(x^2+y^2)-t(u^2+v^2)}{u+vi}} \\ &= \overline{\frac{x^2+ix\sqrt{R}-xyi+y\sqrt{R}-x^2-y^2-tu^2-tv^2}{u+vi}} = \overline{\frac{x^2+ix\sqrt{R}-xyi+y\sqrt{R}-x^2-R}{u+vi}} \\ &= \overline{\frac{ix\sqrt{R}-xyi-R+y\sqrt{R}}{u+vi}}, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

其中， $\mathbb{R}$-量 R 的含义见 (3.3.5)。从 (3.3.5) 和 (3.3.6) 可以看出， $[h]_t Q_h$ 和 $Q_h\Sigma_t$ （h）的 (1, 2) 项完全相同，即

$$Q_h\Sigma_t(h) = [h]_t Q_h \text{ in } \mathcal{H}_2^t, \tag{3.3.7}$$

其中，矩阵 $Q_h \in \mathcal{H}_2^t$ 的含义见 (3.3.3)。

引理 39. 设 $t<0$ 属于 $\mathbb{R}$，并设 $h=(a,b) \in \mathbb{H}_t$ ，且满足 $b \in \mathbb{C}^{\times}$。那么，实现 $[h]_t$ 与 t-谱形式 $\Sigma_t(h)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。特别地，存在

$$q_h = \left(1,\ t\left(\overline{\frac{w-a}{tb}}\right)\right) \in \mathbb{H}_t,$$

具有其实现，

$$Q_h = [q_h]_t = \begin{pmatrix} 1 & t\left(\overline{\frac{w-a}{tb}}\right) \\ \frac{w-a}{tb} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^t,$$

使得 *(3.3.8)*

$$\Sigma_t(h) = Q_h^{-1}[h]_t Q_h \text{ in } \mathcal{H}_2^t.$$

证明。在该假设下，可得

$$Q_h \Sigma_t(h) = [h]_t Q_b \text{ in } \mathcal{H}_2^t,$$

由 (3.3.7) 得。由 Q_h 的可逆性，我们有

$$\Sigma_t(h) = Q_h^{-1} [h]_t Q_h \text{ in } \mathcal{H}_2^t,$$

这意味着关系 (3.3.8)。 ∎

上述引理表明，若尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中为负，则只要 $h = (a, b) \in \mathbb{H}_t$ 满足$b \neq 0$ 于 $\mathbb{C}$ 中，实现 $[h]_t$ 与 t- 谱形式 $\Sigma_t(h)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。

定理 40. 若 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$，则每个超复数 $h \in \mathbb{H}_t$ 都与其 t-谱值 $(\sigma_t(h), 0) \in \mathbb{H}_t$ 相似，具体而言：

$$[h]_t \text{ and } \Sigma_t(h) \text{ are similar in } \mathcal{H}_2^t. \tag{3.3.9}$$

证明。令 $h = (a, b) \in \mathbb{H}_t$，其中 $t < 0$。若 $b = 0$ 属于 $\mathbb{C}$，则根据引理 38，$[(a, 0)]_t$ 与 $\Sigma_t((a, 0))$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。事实上，若 $b = 0$，则这些矩阵在 $\mathcal{H}_2^t$ 中完全相同。另一方面，若 $b \neq 0$ 属于 $\mathbb{C}$，则根据引理 39，$[h]_t$ 与 $\Sigma_t(h)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。特别地，若 $b \neq 0$，则存在

$$q_h = \left(1, \frac{\overline{w - a}}{tb}\right) \in \mathbb{H}_t,$$

使得

$$\Sigma_t(h) = [q_h]_t^{-1} [h]_t [q_h]_t,$$

在 $\mathcal{H}_2^t$ 中，根据 (3.3.8)。因此，若 $t < 0$，则 $[h]_t$ 和 $\Sigma_t(h)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似；等价地，对于所有$h \in \mathbb{H}_t$，两个超复数 h 和 $(\sigma_t(h), 0)$ 在 $\mathbb{H}_t$ 中相似。 ∎

上述定理保证，超复数上的负尺度条件意味着它们的实现和缩放谱形式相似，这与四元数情形（其尺度为 -1）相同，如 [2] 和 [3] 所示。

定理 41. 若 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$，则 $\mathbb{H}_t$ 上的 t-谱关系与 $\mathbb{H}_t$ 上的相似关系在 $\mathbb{H}_t$ 上作为等价关系是相同的。即，

$$t < 0 \Longrightarrow t\text{-spectral relation} \overset{equi}{=} \text{similarity on } \mathbb{H}_t, \tag{3.3.10}$$

其中“$\overset{equi}{=}$”表示“作为等价关系彼此等价”。

证明. 设负尺度 $t < 0$ 固定，并令 $\mathbb{H}_t$ 为相应的t-缩放超环。假设两个超复数 h_1 和 h_2是 t-谱相关的。那么它们的 t-谱值在 $\mathbb{C}$ 中相同，即，

$$\sigma_t(h_1) = \sigma_t(h_2) \overset{\text{let}}{=} w \text{ in } \mathbb{C}.$$

因此，实现 $[h_1]_t$ 和 $[h_2]_t$ 相似于

$$\Sigma_t(h_1) = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} = \Sigma_t(h_2) \overset{\text{let}}{=} W,$$

在 $\mathcal{H}_2^t$ 中，由 (3.3.9) 可知。也就是说，存在 q_1、$q_2 \in \mathbb{H}_t$ 使得

$$[q_1]_t^{-1} [h_1]_t [q_1]_t = W = [q_2]_t^{-1} [h_2]_t [q_2]_t,$$

在 $\mathcal{H}_2^t$中。因此，得到

$$[h_1]_t = \left([q_1]_t [q_2]_t^{-1}\right) [h_2]_t \left([q_2]_t [q_1]_t^{-1}\right),$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$[h_1]_t = \left([q_2]_t [q_1]_t^{-1}\right)^{-1} [h_2]_t \left([q_2]_t [q_1]_t^{-1}\right),$$

在 $\mathcal{H}_2^t$ 中，这意味着 $[h_1]_t$ 和 $[h_2]_t$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。因此，若 h_1 和 h_2 是 t-谱相关的，则它们在 $\mathbb{H}_t$ 中相似。

反过来，设 $T_1 \overset{\text{表示}}{=} [h_1]_t$，且 $T_2 \overset{\text{表示}}{=} [h_2]_t$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。那么存在 $U \in \mathcal{H}_2^t$，使得

$$T_1 = U^{-1} T_2 U \text{ in } \mathcal{H}_2^t.$$

由于实现 T_l 与相应的 t-谱形式 $S_l \overset{\text{表示}}{=} \Sigma_t(h_l)$ 根据 (3.3.9) 相似，例如，

$$T_l = V_l^{-1} S_l V_l \text{ in } \mathcal{H}_2^t, \text{ for some } V_l \in \mathcal{H}_2^t,$$

对所有 $l = 1, 2$。因此，

$$T_1 = U^{-1} T_2 U = U^{-1} \left(V_2^{-1} S_2 V_2\right) U,$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$V_1 S_1 V_1^{-1} = T_1 = (V_2 U)^{-1} S_2 (V_2 U),$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$S_1 = V_1^{-1} (V_2 U)^{-1} S_2 (V_2 U) V_1,$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$S_1 = (V_2 U V_1)^{-1} S_2 (V_2 U V_1),$$

因此，矩阵 S_1 和 S_2 在 $\mathcal{H}_2^t$中相似。这意味着 S_1 和 S_2具有相同的特征值。因此，它要么是

$$S_1 = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} = S_2,$$

对于某个 $w \in \mathbb{C}$，要么是

$$S_1 = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix}, \text{ and } S_2 = \begin{pmatrix} \overline{w} & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix},$$

在 $\mathcal{H}_2^t$中。然而，根据假设 $t < 0$，我们有

$$S_1 = S_2 \text{ in } \mathcal{H}_2^t,$$

根据（3.1.8）。这表明，如果实现 T_1 和 T_2 相似，那么 t-谱形式 S_1 和 S_2 在 $\mathcal{H}_2^t$中完全相同，这意味着

$$\sigma_t(h_1) = \sigma_t(h_2) \text{ in } \mathbb{C},$$

因此，h_1 和 h_2 在 $\mathbb{H}_t$中是 t-谱相关的。

因此，只要 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$，t-谱关系与在 $\mathbb{H}_t$ 上的相似性之间的等价关系 (3.3.10) 就成立。 ∎

上述定理推广了四元数谱关系（即 (-1)-谱关系）与四元数$\mathbb{H}_{-1}=\mathbb{H}$ 上的相似性之间的等价关系（例如， [2] 和 [3]）。

讨论。给定尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中为非负数的情形如何，即 $t\geq 0$? 可能需要考虑 t 的分解 (3.2.4),

$$\mathbb{H}_t = \left(\mathbb{H}_t^{inv}\cap\mathbb{H}_t^{+}\right)\sqcup\left(\mathbb{H}_t^{inv}\cap\mathbb{H}_t^{-0}\right)$$

$$\left(\mathbb{H}_t^{sing}\cap\mathbb{H}_t^{+}\right)\sqcup\left(\mathbb{H}_t^{sing}\cap\mathbb{H}_t^{-0}\right),$$

对于 $t\geq 0$, 逐块地，其中

$$\mathbb{H}_t^{inv}=\left\{(a,b):|a|^2\neq t\,|b|^2\right\},$$

$$\mathbb{H}_t^{sing}=\left\{(a,b):|a|^2=t\,|b|^2\right\},$$

$$\mathbb{H}_t^{+}=\left\{(a,b):Im\,(a)^2>t\,|b|^2\right\},$$

and

$$\mathbb{H}_t^{-0}=\left\{(a,b):Im\,(a)^2\leq t\,|b|^2\right\},$$

逐块地。特别是，如果

$$h\in\mathbb{H}_t^{inv}\cap\mathbb{H}_t^{+},$$

那么 $[h]_t$ 的实现与 $\mathcal{H}_2^t$ 中的 t-谱形式 $\Sigma_t(h)$“似乎”是相似的。证明“可能”与上述关于负尺度的证明类似。我们将这个问题留待未来项目研究。□

3.4. t-谱映射定理。本节中，我们令尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中任意取值，并令 $\mathbb{H}_t$ 为 t-缩放超复环。令 $h=(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 满足条件 (3.1.5)，并假设它具有其 t-谱值,

$$\sigma_t(h)=x+i\sqrt{y^2-tu^2-tv^2}\overset{\text{let}}{=}w,$$

因此，其 t-谱形式

$$\Sigma_t(h)=\begin{pmatrix} w & 0\\ 0 & \overline{w}\end{pmatrix}\ \text{ in }\ \mathcal{H}_2^t,$$

满足 NA 3.2.1。

现在回顾一下，若 $n\in\mathbb{N}$ 且 $A\in M_n(\mathbb{C})$，并且若

$$f\in\mathbb{C}[z]\overset{\text{def}}{=}\left\{g:\begin{array}{c} g=\sum_{k=0}^{m}z_kz^k,\ \text{with}\\ z_1,...,z_m\in\mathbb{C},\ \text{for}\ m\in\mathbb{N}\end{array}\right\},$$

then (3.4.1)

$$spec\,(f(A))=\{f(w):w\in spec\,(A)\},$$

在 $\mathbb{C}$ 中，其中 $\mathbb{C}[z]$ 是 $\mathbb{C}$上的变量 z 的多项式环，由所有系数取自 $\mathbb{C}$的 z 多项式构成，并且

$$f(A)=\sum_{k=0}^{N}s_kA^k,\ \text{with}\ A^0=I_n,$$

每当

$$f(z)=\sum_{k=0}^{N}s_kz^k\in\mathbb{C}[z],\text{ with }s_1,...,s_N\in\mathbb{C},$$

其中 I_n 是 $M_n(\mathbb{C})$的单位矩阵。根据谱映射定理（例如，[8] 和 [9]），由（3.4.1）可知，若 $\mathbb{R}[x]$ 是实数域 $\mathbb{R}$上关于变量 x 的多项式环，则

$$spec(g(A))=\{g(w):w\in spec(A)\}\text{ in }\mathbb{C},\tag{3.4.2}$$

对所有 $g\in\mathbb{R}[x]$均成立，因为若将 x 与 z视为相同，则 $\mathbb{R}[z]$ 是 $\mathbb{C}[z]$ 的子环。

[2] 和 [3] 中证明了，对于 $f\in\mathbb{C}[z]$,

$$spec\left(f\left([\xi]_{-1}\right)\right)=\left\{f(\sigma_{-1}(\xi)),\ f\left(\overline{\sigma_{-1}(\xi)}\right)\right\}$$

在 $\mathbb{C}$中，由（3.4.1）可得，但是

$$f\left(\overline{\sigma_{-1}(\xi)}\right)\neq\overline{f(\sigma_{-1}(\xi))},\text{ in general,}$$

因此，尽管谱映射定理（3.4.1）对 $[\xi]_{-1}\in\mathcal{H}_2^{-1}$而言在“ $M_2(\mathbb{C})$上”成立，但一般而言，它并不在“ $\mathcal{H}_2^{-1}$上”成立。这表明，类似地，谱映射定理（3.4.1）在“ $M_2(\mathbb{C})$上”成立，但对 $t\in\mathbb{R}$而言，它并不在“ $\mathbb{H}_t$的 t尺度实现 $\mathcal{H}_2^t$ 上”成立，因为超复数的谱满足

$$spec([\eta]_t)=\{w,\overline{w}\},\text{ with }w=\sigma_t(\eta),$$

根据（3.1.4），对于 RA 3.2.1 下的所有 $\eta\in\mathbb{H}_t$，这与 [2] 和[3]的四元数情形相同。

观察。对于任意尺度 $t\in\mathbb{R}$，谱映射定理（3.4.1）并不“在 $\mathcal{H}_2^t$上”成立。□

然而，在 [2] 和 [3], 中已证明，对于所有 $g\in\mathbb{R}[x]$，均有

$$spec\left(g\left([\xi]_{-1}\right)\right)=\left\{g(\sigma_t(\xi)),\ \overline{g(\sigma_t(\xi))}\right\},$$

在 $\mathbb{C}$中，由(3.4.2)，因为

$$g\in\mathbb{R}[x]\Longrightarrow g(\overline{w})=\overline{g(w)},\ \forall w\in\mathbb{C}.$$

这意味着，(3.4.2)中的“受限”谱映射定理在“四元数 $\mathbb{H}_{-1}$的实现 $\mathcal{H}_2^{-1}$上”成立。类似地，我们得到以下结果。

定理42. 设 $\xi\in\mathbb{H}_t$实现为 $[\xi]_t\in\mathcal{H}_2^t$。那么，对于任意 $g\in\mathbb{R}[x]$,

$$spec(g([\xi]_t))=\left\{g(\sigma_t(\xi)),\ \overline{g(\sigma_t(\xi))}\right\},$$

即，

$$spec(g([\xi]_t))=\{g(w):w\in spec([\xi]_t)\}\text{ in }\mathbb{C},\ \forall t\in\mathbb{R}.\tag{3.4.3}$$

证明. 由(3.1.4)和(3.2.6)，若 $\xi\in\mathbb{H}_t$，则

$$spec([\xi]_t)=\{w,\overline{w}\},\text{ with }w=\sigma_t(\xi),$$

$_N$在 $\mathbb{C}$ 中（按照 RA 3.2.1 的符号化理解）。对于任意满足 s_1的 $g=\sum s_kx^k\in\mathbb{R}[x]$、$_{k=1}$，.....，$s_N\in\mathbb{R}$，以及 $N\in\mathbb{N}$，有

$$g\left(\overline{w}\right)=\sum_{k-1}^{N}s_k\overline{w}^k=\sum_{k=1}^{N}\overline{s_kw^k}=\overline{\sum_{k=1}^{N}s_kw^k}=\overline{g\left(w\right)},\tag{3.4.4}$$

在 $\mathbb{C}$中。这意味着

$$spec\left(g\left(\left[\xi\right]_t\right)\right)=\left\{g\left(w\right),g\left(\overline{w}\right)\right\}=\left\{g\left(w\right),\overline{g\left(w\right)}\right\},$$

在 $\mathbb{C}$ 中，由 (3.4.2) 和 (3.4.4) 可知。因此，关系 (3.4.3) 成立。 ∎

由于关系 (3.4.3) 对所有尺度 $t\in\mathbb{R}$ 都成立，因此可以将其称为超复谱映射定理。

4. The Usual Adjoint on $\mathcal{H}_2^t$ in $M_2(\mathbb{C})$

本节中，我们考察 $M_2(\mathbb{C})$ 上的通常伴随 $=B\left(\mathbb{C}^2\right)$ 如何作用于 t尺度超复数在 $\mathcal{H}_2^t$ 中的 t尺度实现。整个本节中，我们固定一个任意尺度 $t\in\mathbb{R}$，并将相应的 t 尺度超复环 $\mathbb{H}_t$ 在 $M_2\left(\mathbb{C}\right)$ 中通过表示 $\Pi_t=\left(\mathbb{C}^2,\pi_t\right)$实现为 $\mathcal{H}_2^t$。回顾一下，每个作用于希尔伯特空间 H 的希尔伯特空间算子 T 在 H上都有唯一的伴随 T^*。特别地，若对于 $n\in\mathbb{N}$， $T\in M_n\left(\mathbb{C}\right)=B\left(\mathbb{C}^n\right)$ 是一个作用于 $\mathbb{C}^n$上的矩阵算子，则其伴随 T^* 被定义为 $M_n(\mathbb{C})$ 中 T 的共轭转置。例如，

$$T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in M_2\left(\mathbb{C}\right)\Longleftrightarrow T^*=\begin{pmatrix}\overline{a_{11}}&\overline{a_{21}}\\\overline{a_{12}}&\overline{a_{22}}\end{pmatrix}\in M_2\left(\mathbb{C}\right).$$

这表明，若将我们的 t 尺度实现 $\mathcal{H}_2^t$ 理解为 $M_2\left(\mathbb{C}\right)$ 的子结构，那么每个超复数 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 都会唯一地赋予该实现 $\left[(a,b)\right]_t$ 的一个伴随$\left[(a,b)\right]_t^*$，“属于 $M_2\left(\mathbb{C}\right)$”。

令 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 实现为

$$\left[(a,b)\right]_t=\begin{pmatrix}a&tb\\\overline{b}&\overline{a}\end{pmatrix}\in\mathcal{H}_2^t.$$

那么，作为 $M_2(\mathbb{C})$ 中的一个矩阵，该实现有其伴随，

$$\left[(a,b)\right]_t^*=\begin{pmatrix}\overline{a}&b\\t\overline{b}&a\end{pmatrix}\text{ in }M_2\left(\mathbb{C}\right).$$

这表明，一般而言， $\left[(a,b)\right]_t$ 的通常伴随（共轭转置）并不包含在“ $\mathcal{H}_2^t$ 中”。特别地，若

$$t^2\neq1\Longleftrightarrow\text{either }t\neq1\text{ or }t\neq-1,\text{ in }\mathbb{R},$$

then

$$\left[(a,b)\right]_t\notin\mathcal{H}_2^t\text{ in general.}$$

定理 43. 尺度 $t\in\mathbb{R}$ 满足： $t^2=1$ 属于 $\mathbb{R}$，当且仅当每个超复数 $\mathbb{H}_t$ 的实现的伴随都包含在 $\mathcal{H}_2^t$ 中。即，

$$either\ t=1,\ or\ t=-1\Longleftrightarrow\left[\xi\right]_t^*\in\mathcal{H}_2^t,\ \forall\xi\in\mathbb{H}_t.\tag{4.1}$$

证明。对于任意尺度 $t\in\mathbb{R}$，如果 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$，那么

$$\left[(a,b)\right]_t^*=\begin{pmatrix}\overline{a}&b\\t\overline{b}&a\end{pmatrix}\text{ in }M_2\left(\mathbb{C}\right).$$

(⇒) 假设 $t=1$ 或 $t=-1$ 成立，等价地，设 $t^2=1$ 属于 $\mathbb{R}$。那么

$$[(a,b)]_t^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ t\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & t\left(\frac{b}{t}\right) \\ t^2\overline{\left(\frac{b}{t}\right)} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & t\left(\frac{b}{t}\right) \\ \overline{\left(\frac{b}{t}\right)} & a \end{pmatrix},$$

包含于 $\mathcal{H}_2^t$ 中。因此，若 $t=1$ 或 $t=-1$，则对于所有 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$，有 $[(a,b)]_t^*\in\mathcal{H}_2^t$。此外，在这种情况下，

$$[(a,b)]_t^* = \left[\left(\overline{a},\ \tfrac{b}{t}\right)\right]_t \text{ in } \mathcal{H}_2^t. \tag{4.2}$$

(⇐) 现在假设 $t^2\neq 1$ 属于 $\mathbb{R}$。那么，$[(a,b)]_t$ 的伴随 $[(a,b)]_t^*$ 与下列矩阵相同，

$$[(a,b)]_t^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ t\overline{b} & a \end{pmatrix} \text{ in } M_2(\mathbb{C}),$$

它“可以”是

$$\begin{pmatrix} \overline{a} & t\left(\frac{b}{t}\right) \\ t^2\left(\frac{b}{t}\right) & a \end{pmatrix} \text{ in } \mathcal{H}_2^t.$$

然而，根据 $t^2\neq 1$ 这一假设，$[(a,b)]_t^*$ 的伴随通常不包含于 $\mathcal{H}_2^t$ 中。特别地，若 $b\neq 0$ 属于 $\mathbb{C}$，则伴随 $[(a,b)]_t^*\notin\mathcal{H}_2^t$ 属于 $M_2(\mathbb{C})$，即，

$$t^2\neq 1 \text{ and } b\neq 0 \text{ in } \mathbb{C} \Longrightarrow [(a,b)]_t^* \in \left(M_2(\mathbb{C})\setminus\mathcal{H}_2^t\right). \tag{4.3}$$

因此，由 (4.2) 和 (4.3) 可得刻画 (4.1) 成立。 ∎

注意，若 $t=-1$，则 $\mathbb{H}_{-1}$ 是四元数；若 $t=1$，则 $\mathbb{H}_1$ 是双复数。上述定理表明，只有当缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 是四元数 $\mathbb{H}_{-1}$或双复数 $\mathbb{H}_1$时，通常伴随 $(*)$ 才能作为定义良好的一元运算，在 $\mathcal{H}_2^t$上封闭，这由 (4.1) 可知。

5. Free Probability on $\mathbb{H}_t$

本节中，对于“任意”尺度 $t\in\mathbb{R}$，我们在 t 缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 上建立一个普适自由概率模型。首先回顾，在 $M_2(\mathbb{C})$ 上，我们有通常迹 tr，其定义为

$$tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11}+a_{22},$$

对所有 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ 均成立；归一化迹 τ，

$$\tau = \frac{1}{2}tr \text{ on } M_2(\mathbb{C}).$$

也就是说，我们有两种典型的自由概率模型，

$$\left(M_2(\mathbb{C}),\ tr\right) \text{ and } \left(M_2(\mathbb{C}),\ \tau\right).$$

5.1. 自由概率。关于自由概率论的更多内容，参见例如 [19] and[22]。设 A 是 $\mathbb{C}$ 上的一个非交换代数，且 $\varphi: A \to \mathbb{C}$ 是 A上的一个线性泛函。那么，(A,φ)称为一个（非交换）自由概率空间。根据定义，自由概率空间是经典测度空间 (X,μ) 的非交换版本，后者由集合 X 以及定义在 X 的 σ- 代数上的测度 μ 构成。与测度论中一样，(A,φ)上的（非交换）自由概率由线性泛函 φ决定。与此同时，若 (A,φ) 是含幺的，即（i） A 的单位元 1_A 存在，且（ii） $\varphi(1_A) = 1$，则称其为含幺自由概率空间。这些含幺自由概率空间是经典概率空间 (Y,ρ) 的非交换类比，其中给定的测度 ρ 是满足 $\rho(Y) = 1$ 的概率测度。

如果 A 是拓扑代数，且 φ 有界（因此在满足线性的条件下连续），那么相应的自由概率空间 (A,φ) 称为拓扑自由概率空间。类似地，如果 A 是配备伴随 $(*)$ 的拓扑 $*$-代数，那么拓扑自由概率空间 (A,φ) 称为拓扑（自由） $*$-概率空间。具体而言，如果 A 是 C^*-代数、冯·诺依曼代数或巴拿赫 $*$-代数，我们分别将 (A,φ) 称为 C^*-概率空间、 W^*-概率空间或巴拿赫 $*$-概率空间，等等。出于本文的主要目的，我们从下文开始聚焦于 C^*-概率空间。

如果 (A,φ) 是一个 C^*-概率空间，且 $a \in A$，那么代数元素 a 称为 (A,φ) 中的自由随机变量。对于任意固定的自由随机变量 $a_1, ..., a_s \in (A,\varphi)$，其中 $s \in \mathbb{N}$，可以得到 $a_1, ..., a_s$ 的相应自由分布，其由联合自由矩刻画，

$$\varphi\left(\prod_{l=1}^{n} a_{i_l}^{r_i}\right) = \varphi\left(a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} ... a_{i_n}^{r_n}\right),$$

对所有 $(i_1, ..., i_n) \in \{1, ..., s\}^n$ 和 $(r_1, ..., r_n) \in \{1, *\}^n$，对所有 $n \in \mathbb{N}$，其中 a_l^* 是 a_l的伴随；对所有 $l = 1,..., s$。例如，若 $a \in (A,\varphi)$是自由随机变量，则 a 的自由分布完全由 $\{a, a^*\}$的联合自由矩刻画，

$$\varphi\left(\prod_{l=1}^{n} a^{r_l}\right) = \varphi\left(a^{r_1} a^{r_2} ... a^{r_n}\right),$$

对所有 $(r_1,..., r_n) \in \{1, *\}^n$，对所有 $n \in \mathbb{N}$（例如， [19] 和 [22]）。因此，若自由随机变量 $a \in (A,\varphi)$是自伴的，即： $a^* = a$ 属于 A，那么 a 的自由分布由自由矩序列确定，

$$\left(\varphi\left(a^n\right)\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\varphi(a), \varphi\left(a^2\right), \varphi\left(a^3\right), ...\right)$$

（例如， [19] 和 [22]）。

5.2. 由 $\mathbb{H}_t$ 诱导的自由概率模型。通过将 t 缩放超复环 $\mathbb{H}_t$ 与其实现 $\mathcal{H}_2^t$ 视为同一个环，我们将 t 缩放超复幺半群 $\mathbb{H}_t^\times$ 与其实现 $\mathcal{H}_2^{t\times}$ 视为同一个幺半群。作为 $M_2(\mathbb{C})$ 中的一个子集，我们定义子集，

$$\mathcal{H}_2^{t\times}(*) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{[\xi]_t^* \in M_2(\mathbb{C}) : \xi \in \mathbb{H}_t^\times\right\},$$

即,

$$\mathcal{H}_2^{t\times}(*)=\left\{\left(\begin{array}{cc}\overline{a} & b\\ t\overline{b} & a\end{array}\right)\in M_2(\mathbb{C}):(a,b)\in\mathbb{H}_t^{\times}\right\},\tag{5.2.1}$$

$\mathcal{H}_2^{\times t}$中所有实现的伴随所构成的子集。事实上,

$$[(a,b)]_t^*=\left(\begin{array}{cc}a & tb\\ \overline{b} & \overline{a}\end{array}\right)^*=\left(\begin{array}{cc}\overline{a} & b\\ t\overline{b} & a\end{array}\right)\text{ in }M_2(\mathbb{C}).$$

正如我们在第4节中所见，通常而言，伴随在 $\mathcal{H}_2^t$ 下并不封闭，因此,

$$\mathcal{H}_2^{t\times}(*)\neq\mathcal{H}_2^{t\times}\text{ in }M_2(\mathbb{C}),$$

通常成立。特别地，根据（4.1），尺度 t 在 $\mathbb{R}$中满足 $t^2\neq1$ ，当且仅当上述不等式在 $M_2(\mathbb{C})$中成立。现在，令

$$\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)\overset{\text{denote}}{=}\mathcal{H}_2^{t\times}\cup\mathcal{H}_2^{t\times}(*),$$

即,

$$\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)=\left\{\left(\begin{array}{cc}a & tb\\ \overline{b} & \overline{a}\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}\overline{a} & b\\ t\overline{b} & a\end{array}\right):(a,b)\in\mathbb{H}_t^{\times}\right\},\tag{5.2.2}$$

在 $M_2(\mathbb{C})$ 中，按集合论意义而言。由 (4.1)、(5.2.1) 和 (5.2.2),

$$\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)\supsetneqq\mathcal{H}_2^{t\times}\text{ in }M_2(\mathbb{C}),\text{ in general.}$$

现在将 $\mathfrak{H}_2^t$ 定义为由 (5.2.2) 中的集合 $\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)$ 生成的 $M_2(\mathbb{C})$ 的 C^*-子代数，即,

$$\mathfrak{H}_2^t\overset{\text{denote}}{=}C^*\left(\mathcal{H}_2^{t\times}\right)\overset{\text{def}}{=}\overline{\mathbb{C}\left[\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)\right]},\tag{5.2.3}$$

在 $M_2(\mathbb{C})$ 中，其中 $C^*(Z)$ 表示由子集 Z 及其伴随生成的 $B\left(\mathbb{C}^2\right)$ 的 C^*-子代数，$\mathbb{C}[X]$ 表示由 $M_2(\mathbb{C})$ 的子集 X 生成的（纯代数）代数（在 $\mathbb{C}$ 上），而 $\overline{Y}$ 表示算子代数 $M_2(\mathbb{C})=B\left(\mathbb{C}^2\right)$中子集 Y 在算子范数拓扑下的闭包；该算子代数是 $\mathbb{C}$ 上的 C^*-代数。

定义44. 由 t缩放的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 幺半群$=$ $\mathcal{H}_2^{t\times}$生成的式（5.2.3）中的 C^*-代数 $\mathfrak{H}_2^t$ ，称为 $\mathbb{H}_t^{\times}$（或 $\mathbb{H}_t$）的 t缩放（超复）幺半代数C^*。

显然，根据定义（5.2.3）， t缩放幺半代数 C^* $\mathfrak{H}_2^t$ 在 M_2（$\mathbb{C}$）中是良好确定的。因此，M_2（$\mathbb{C}$）上的通常迹 tr 和归一化迹 τ 在 $\mathfrak{H}_2^t$上定义良好。也就是说，我们有 $\mathfrak{H}_2^t$的两个平凡自由概率模型,

$$\left(\mathfrak{H}_2^t,\,tr\right)\text{ and }\left(\mathfrak{H}_2^t,\,\tau\right),$$

作为 C^*-概率空间（例如，参见第5.1节）。注意，这类自由概率结构与尺度 $t\in\mathbb{R}$的选择无关。

注意，如果 $\left(\begin{array}{cc}\overline{a_l} & b_l\\ t\overline{b_l} & a_l\end{array}\right)\in\mathcal{H}_2^{t\times}(*)$ 属于 $\mathfrak{H}_2^t$，对于 $l=1,\ 2$，则

$$\left(\begin{array}{cc}\overline{a_1} & b_1\\ t\overline{b_1} & a_1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}\overline{a_2} & b_2\\ t\overline{b_2} & a_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\overline{a_1a_2}+tb_1\overline{b_2} & \overline{a_1}b_2+b_1a_2\\ t\left(\overline{b_1a_2}+a_1\overline{b_2}\right) & t\overline{b_1}b_2+a_1a_2\end{array}\right),$$

将其认定为 (5.2.4)

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1a_2+t\overline{b_1}b_2} & b_1a_2+\overline{a_1}b_2 \\ t\left(\overline{b_1a_2+\overline{a_1}b_2}\right) & a_1a_2+t\overline{b_1}b_2 \end{pmatrix} \text{ in } \mathfrak{H}_2^t.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} \overline{a_1} & b_1 \\ t\overline{b_1} & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a_2} & b_2 \\ t\overline{b_2} & a_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^{t\times}(*), \text{ too.}$$

即，根据 (5.2.4)，矩阵乘法在 (5.2.2) 的集合 $\mathcal{H}_2^{t\times}(*)$ 上是封闭的。事实上，在满足闭性 (5.2.4) 的情况下，代数对

$$\mathcal{H}_2^{t\times}(*) \overset{\text{denote}}{=} \left(\mathcal{H}_2^{t\times}(*),\ \cdot\right),$$

构成一个幺半群，其单位元为 I_2。因此， t-尺度幺半群 C^*-代数 $\mathfrak{H}_2^t$ 的生成集 $\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)$ 是两个幺半群 $\mathcal{H}_2^{t\times}$ 和 $\mathcal{H}_2^{t\times}(*)$ 在集合论意义下的并，并采用矩阵乘法。不过需要注意的是，矩阵乘法在 (5.2.2) 的生成集 $\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)$ 上并不封闭。事实上，若

$$\begin{pmatrix} a_1 & tb_1 \\ \overline{b_1} & \overline{a_1} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^{t\times},\ \begin{pmatrix} \overline{a_2} & b_2 \\ t\overline{b_2} & a_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^{t\times}(*)$$

在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中，则

$$\begin{pmatrix} a_1 & tb_1 \\ \overline{b_1} & \overline{a_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a_2} & b_2 \\ t\overline{b_2} & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\overline{a_2}+t^2b_1\overline{b_2} & a_1b_2+ta_2b_1 \\ \overline{a_2b_1}+t\overline{a_1b_2} & \overline{b_1}b_2+\overline{a_1}a_2 \end{pmatrix},$$

and (5.2.5)

$$\begin{pmatrix} \overline{a_2} & b_2 \\ t\overline{b_2} & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & tb_1 \\ \overline{b_1} & \overline{a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\overline{a_2}+\overline{b_1}b_2 & tb_1\overline{a_2}+\overline{a_1}b_2 \\ ta_1\overline{b_2}+\overline{b_1}a_2 & t^2b_1\overline{b_2}+\overline{a_1}a_2 \end{pmatrix},$$

在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中。然而，(5.2.5) 的结果乘积属于 $\mathfrak{H}_2^t$，但通常不属于 $\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)$。

观察。根据（5.2.4）和（5.2.5），可以发现：一般而言，(i) 如果 A、$B \in \mathcal{H}_2^{t\times}$，那么 $AB \in \mathcal{H}_2^{t\times}$；(ii) 如果 C、$D \in \mathcal{H}_2^{t\times}(*)$，那么 $CD \in \mathcal{H}_2^{t\times}(*)$；(iii) 如果 T、$S \in \mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)$，那么 $TS \notin \mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)$；它们都是 t-尺度幺半群 C^*-代数$\mathfrak{H}_2^t$中的元素。尽管非闭合规则 (iii) 至少在“ $\mathcal{H}_2^t(1,*)$ 上”成立，但我们在“C*-代数 $\mathfrak{H}_2^t$ 中”仍有乘法规则（5.2.5）。□

假设 $[(a,b)]_t \in \mathcal{H}_2^{t\times}$属于 $\mathfrak{H}_2^t$。那么

$$tr\left([(a,b)]_t\right) = a+\overline{a} = 2Re\left(a\right),$$

and (5.2.6)

$$\tau\left([(a,b)]_t\right) = \frac{1}{2}tr\left([(a,b)]_t\right) = Re\left(a\right),$$

其中， $Re(a)$ 是 a 在 $\mathbb{C}$ 中的实部。类似地，如果 $[(a,b)]_t^* \in \mathcal{H}_2^{t\times}(*)$ 属于 $\mathfrak{H}_2^t$，那么我们有

$$tr\left([(a,b)]_t^*\right) = tr\begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ t\overline{b} & a \end{pmatrix} = \overline{a}+a = 2Re\left(a\right),$$

and (5.2.7)

$$\tau\left(\left[(a,b)\right]_t^*\right)=\frac{1}{2}\left(2Re\left(a\right)\right)=Re\left(a\right).$$

注意，由于 tr 和 τ 是定义在 C^*-代数 $\mathfrak{H}_2^t$ 上的良定义线性泛函，它们满足

$$tr\left(T^*\right)=\overline{tr\left(T\right)},\text{ and }\tau\left(T^*\right)=\overline{\tau\left(T\right)},$$

对所有 $T\in\mathfrak{H}_2^t$ 均成立。因此，关系 (5.2.7) 也得到了验证。

此外，若在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中 $\left[(a_1,b_1)\right]_t$，$\left[(a_2,b_2)\right]_t^*\in\mathcal{H}_2^{t\times}(1,*)$，则

$$tr\left(\left[(a_1,b_1)\right]_t\left[(a_2,b_2)\right]_t^*\right)=tr\left(\begin{pmatrix}a_1\overline{a_2}+t^2b_1\overline{b_2} & a_1b_2+ta_2b_1\\ \overline{a_2b_1}+t\overline{a_1b_2} & \overline{b_1}b_2+\overline{a_1}a_2\end{pmatrix}\right)$$

由 (5.2.5)

$$\begin{aligned}&=a_1\overline{a_2}+t^2b_1\overline{b_2}+\overline{b_1}b_2+\overline{a_1}a_2\\&=2Re\left(a_1\overline{a_2}\right)+t^2b_1\overline{b_2}+\overline{b_1}b_2,\end{aligned}$$

类似地， (5.2.8)

$$tr\left(\left[(a_1,b_1)\right]_t^*\left[(a_2,b_2)\right]_t\right)=2Re\left(\overline{a_1}a_2\right)+t^2\overline{b_1}b_2+b_1\overline{b_2},$$

因此，

$$\tau\left(\left[(a_1,b_1)\right]_t\left[(a_2,b_2)\right]_t^*\right)=Re\left(a_1\overline{a_2}\right)+\frac{t^2b_1\overline{b_2}+\overline{b_1}b_2}{2},$$

and (5.2.9)

$$\tau\left(\left[(a_1,b_1)\right]_t^*\left[(a_2,b_2)\right]_t\right)=Re\left(\overline{a_1}a_2\right)+\frac{t^2\overline{b_1}b_2+b_1\overline{b_2}}{2},$$

由（5.2.8）可得。

命题45. 设 (a,b)、$(a_l,b_l)\in\mathbb{H}_t$，其中 $l=1$、2，并设 $A=\left[(a,b)\right]_t$ 和 $A_l=\left[(a_l,b_l)\right]_t$ 为 $\mathcal{H}_2^t$ 的相应实现，将其视为t-尺度幺半群 C^*-代数 $\mathfrak{H}_2^t$的元素。那么

$$\tau\left(A\right)=\frac{1}{2}tr\left(A\right)=Re\left(a\right)=\frac{1}{2}tr\left(A^*\right)=\tau\left(A^*\right),$$

and *(5.2.10)*

$$\tau\left(A_1A_2^*\right)=\frac{1}{2}tr\left(A_1A_2^*\right)=Re\left(a_1\overline{a_2}\right)+\frac{t^2b_1\overline{b_2}+\overline{b_1}b_2}{2},$$

and

$$\tau\left(A_1^*A_2\right)=\frac{1}{2}tr\left(A_1^*A_2\right)=Re\left(\overline{a_1}a_2\right)+\frac{t^2\overline{b_1}b_2+b_1\overline{b_2}}{2}.$$

证明. （5.2.10）中的联合自由矩由（5.2.6）、（5.2.7）、（5.2.8）和（5.2.9）证明。 ∎

上面在 (5.2.10) 中的计算提供了一种计算自由分布数据的一般方法，特别是计算 t 标度的幺半群 C^* 代数 $\mathfrak{H}_2^t$ 中矩阵的联合自由矩，关于迹 tr 以及关于归一化迹 τ。此外，这些计算表明，计算此类自由分布数据并不容易。因此，我们将研究范围限定在某个特定情形。

5.3. $(\mathfrak{H}_2^t, tr)$ 上的自由概率。本节中，我们固定一个尺度 $t \in \mathbb{R}$，以及由 t 标度的超复幺半群 $\mathbb{H}_t^{\times}$ 生成的相应 t 标度幺半群 C^* 代数 $\mathfrak{H}_2^t$ 。令 $(\mathfrak{H}_2^t, tr)$ 为关于 $\mathfrak{H}_2^t$ 上通常迹 tr 的 C^* 概率空间。

回想一下，如果尺度 t 为负，那么根据 (3.3.9)，对于所有 $\xi \in \mathbb{H}_t$，实现 $[\xi]_t$ 与 t-谱形式$\Sigma_t(\xi)$在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。这意味着，根据 (3.3.10)，在 $\mathcal{H}_2^t$上的相似等价于 $\mathbb{H}_t$ 上的 t-谱关系。此外，回想一下，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，如果两个矩阵 A 和 B 在 $M_n(\mathbb{C})$ 中相似，

$$tr(A) = tr(B).$$

因此，如果实现 $[\xi]_t$ 与 t-谱形式 $\Sigma_t(\xi)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似，那么自由矩计算将比 (5.2.10) 中的计算简单得多。再次注意，如果 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足条件 (3.1.5)，那么

$$tr([(a,b)]_t) = 2Re(a) = 2x = \left(x + i\sqrt{R}\right) + \left(x - i\sqrt{R}\right) = tr(\Sigma_t(a,b)),$$

其中 (5.3.1)

$$R = y^2 - tu^2 - tv^2 \text{ in } \mathbb{R},$$

在 RA 3.2.1 条件下。尽管 (5.3.1) 中的结果也完全相同（不涉及相似），但如果 $[(a,b)]_t$ 与 $\Sigma_t(a,b)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中不相似，那么

$$tr([(a,b)]_t^n) \neq tr((\Sigma_t(a,b))^n),$$

对于某个 $n \in \mathbb{N}$，由 (5.2.5) 可知。这意味着，$[(a,b)]_t$与 $\Sigma_t(a,b)$ 的某些（联合）自由矩并不相同，因此它们的自由分布也不同。

引理 46. 假设实现 $[(a,b)]_t$ 与 t-谱形式 $\Sigma_t(a,b)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中关于 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 相似。那么

$$tr([(a,b)]_t^n) = 2Re(\sigma_t(a,b)^n) = tr\left(\left([(a,b)]_t^*\right)^n\right) \tag{5.3.2}$$

对于所有 $n \in \mathbb{N}$，其中 $\sigma_t(a,b)$ 是 (a,b) 的 t-谱值。

证明. 假设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足条件 (3.1.5)。那么

$$[(a,b)]_t = \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \text{ and } \Sigma_t((a,b)) = \begin{pmatrix} \sigma_t(a,b) & 0 \\ 0 & \overline{\sigma_t(a,b)} \end{pmatrix},$$

在 $\mathcal{H}_2^t$中，其中

$$\sigma_t(a,b) = x + i\sqrt{y^2 - tu^2 - tv^2},$$

在 RA 3.2.1 下。设 $[(a,b)]_t$ 与 $\Sigma_t((a,b))$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。那么对于所有 $n \in \mathbb{N}$，矩阵 $[(a,b)]_t^n$ 与 $\Sigma_t((a,b))^n$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。事实上，若两个元素 A 和 B 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似，且满足 $B = U^{-1}AU$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中，其中 $U \in \mathcal{H}_2^t$ 是可逆元，那么

$$B^n = \left(U^{-1}AU\right)^n = U^{-1}A^nU \text{ in } \mathcal{H}_2^t,$$

这意味着 A^n 与 B^n相似，其中 $n \in \mathbb{N}$。因此，

$$tr([(a,b)]_t^n) = tr(\Sigma_t((a,b))^n),$$

and

$$tr(\Sigma_t((a,b))^n) = tr\left(\begin{pmatrix} \sigma_t(a,b)^n & 0 \\ 0 & \overline{\sigma_t(a,b)^n} \end{pmatrix}\right),$$

这意味着

$$tr\left(\left[(a,b)\right]_t^n\right)=tr\left(\Sigma_t\left((a,b)\right)^n\right)=2Re\left(\sigma_t\left(a,b\right)^n\right),$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。因此，(5.3.2) 中的第一个等式成立。

由于 tr 是 C^*-代数 $\mathfrak{H}_2^t$ 上定义良好的线性泛函，因此有

$$tr\left(A^*\right)=\overline{tr\left(A\right)},\text{ for all }A\in\mathfrak{H}_2^t.$$

由于

$$tr\left(\left(\left[(a,b)\right]_t^*\right)^n\right)=tr\left(\left(\left[(a,b)\right]_t^n\right)^*\right)=\overline{tr\left(\left[(a,b)\right]_t^n\right)},$$

有

$$tr\left(\left(\left[(a,b)\right]_t^*\right)^n\right)=\overline{2Re\left(\sigma_t\left(a,b\right)^n\right)}=2Re\left(\sigma_t\left(a,b\right)^n\right),$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。因此，(5.3.2) 中的第二个等式也成立。∎

注意，在实现的相似性假设和 t-谱形式下，公式 (5.3.2) 成立。

注意，每个复数 $w\in\mathbb{C}$ 都可作极分解，得到

$$w=\left|w\right|w_o\text{ with }w_o\in\mathbb{T},$$

且分解唯一，其中 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:\left|z\right|=1\}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的单位圆。因此，我们所有的 t-谱值 $\sigma_t(\xi)$ 都可作极分解，得到

$$\sigma_t\left(\xi\right)=\left|\sigma_t\left(\xi\right)\right|\sigma_t\left(\xi\right)_o\text{ with }\sigma_t\left(\xi\right)_o\in\mathbb{T},$$

对所有 $\xi\in\mathbb{H}_t$ 均成立。在此意义下，我们有

$$tr\left(\left[\xi\right]_t^n\right)=2\left|\sigma_t\left(\xi\right)\right|^nRe\left(\sigma_t\left(\xi\right)_o^n\right),$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$，由 (5.3.2) 得出。

推论 47. 假设实现 $\left[\xi\right]_t$ 与 $\mathcal{H}_2^t$ 中的 $\xi\in\mathbb{H}_t$ 的 t-谱形式 $\Sigma_t(\xi)$ 相似。那么

$$tr\left(\left[\xi\right]_t^n\right)=2\left|\sigma_t\left(\xi\right)\right|^nRe\left(\sigma_t\left(\xi\right)_o^n\right)=tr\left(\left(\left[\xi\right]_t^*\right)^n\right),\tag{5.3.3}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$，其中 $\sigma_t\left(\xi\right)=\left|\sigma_t\left(\xi\right)\right|\sigma_t\left(\xi\right)_o$ 是 $\sigma_t\left(\xi\right)$ 的极分解，且 $\sigma_t(\xi)_o\in\mathbb{T}$。

证明. 自由分布数据 (5.3.3) 可由 (5.3.2) 立即得到，其中对 $\mathbb{C}$ 中的 t-谱值 $\sigma_t(\xi)$ 进行极分解。∎

再次假设超复数 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 满足我们的相似性假设，即 $T\overset{表示}{=}\left[(a,b)\right]_t$ 且 $S\overset{表示}{=}\Sigma_t\left((a,b)\right)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。那么，对于任意

$$\left(r_1,...,r_n\right)\in\left\{1,*\right\}^n,\text{ for }n\in\mathbb{N},$$

n n 矩阵 $\prod_{l=1}^{n}T^{r_l}$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中与 $\prod_{l=1}^{n}S^{r_l}$ 相似（因此在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中也相似）。

定理 48. 设 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 满足相似性假设：$T\overset{denote}{=}\left[(a,b)\right]_t$ 和 $S\overset{denote}{=}\Sigma_t\left((a,b)\right)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$中相似。如果

$$\sigma_t\left(a,b\right)=rw_o,\ polar\ decomposition,$$

with

$$r=\left|\sigma_t\left(a,b\right)\right|\text{ and }w_o\in\mathbb{T},\tag{5.3.4}$$

then

$$tr\left(\prod_{l=1}^{n}T^{r_l}\right)=2r^nRe\left(w_o^{\sum_{l=1}^{n}e_l}\right), \tag{5.3.5}$$

对所有 $(r_1,...,r_n)\in\{1,*\}^n$，以及所有 $n\in\mathbb{N}$，其中

$$e_l=\begin{cases}1 & \text{if } r_l=1\\ -1 & \text{if } r_l=*,\end{cases}$$

对所有 $l=1,...,n$。

证明。由于假设实现 T 与 t-谱形式 S 在 $\mathcal{H}_2^t$中相似，它们的伴随 T^* 和 S^* 在 $\mathcal{H}_2^{t\times}(*)\cup\{[(0,0)]_t\}$中相似；因此，$n$ n矩阵 $\prod T^{r_l}$ 和 $\prod S^{r_l}$“在 $\mathfrak{H}_2^t$中”相似。考虑$l=1$ $l=1$

$$S=\begin{pmatrix}\sigma_t(a,b) & 0\\ 0 & \overline{\sigma_t(a,b)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rw_o & 0\\ 0 & r\overline{w_o}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}w_o & 0\\ 0 & w_o^{-1}\end{pmatrix},$$

在这些假设下，因为 $\overline{z}=\frac{1}{z}=z^{-1}$ 属于 $\mathbb{T}$，只要 $z\in\mathbb{T}$ 属于 $\mathbb{C}$便成立。这表明

$$S^j=r^j\begin{pmatrix}w_o^j & 0\\ 0 & w_o^{-j}\end{pmatrix},\ \text{for all } j\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

and

$$S^*=\overline{r}\begin{pmatrix}\overline{w_o} & 0\\ 0 & w_o\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}w_o^{-1} & 0\\ 0 & w_o\end{pmatrix},$$

满足该条件的是

$$(S^*)^j=\left(S^j\right)^*,\ \text{for all } j\in\mathbb{N}.$$

这意味着，对于任意 $(r_1,...,r_n)\in\{1,*\}^n$，给定 $n\in\mathbb{N}$，存在 $(e_1,...,e_n)\in\{\pm1\}^n$，使得

$$e_l=\begin{cases}1 & \text{if } r_l=1\\ -1 & \text{if } r_l=*,\end{cases}$$

对所有 $l=1,...,n$，以及 (5.3.6)

$$\prod_{l=1}^{n}S^{r_l}=r^n\begin{pmatrix}w_o^{\sum_{l=1}^{n}e_l} & 0\\ 0 & w_o^{-\left(\sum_{l=1}^{n}e_l\right)}\end{pmatrix},$$

属于 $\mathfrak{H}_{2^\circ}^t$。因此，在我们的相似性假设下，

$$tr\left(\prod_{l=1}^{n}T^{r_l}\right)=tr\left(\prod_{l=1}^{n}S^{r_l}\right)=r^n\left(w_o^{\sum_{l=1}^{n}e_l}+w_o^{-\left(\sum_{l=1}^{n}e_l\right)}\right),$$

这意味着

$$tr\left(\prod_{l=1}^{n}T^{r_l}\right)=r^n\left(2Re\left(w_o^{\sum_{l=1}^{n}e_l}\right)\right),$$

对所有 $(r_1,...,r_n)\in\{1,*\}^n$，以及对所有 $n\in\mathbb{N}$，其中 $(e_1,...,e_n)\in\{\pm1\}^n$ 满足 (5.3.6)。

因此，在我们的相似性假设和极分解（5.3.4）下，自由分布数据（5.3.5）成立。

∎

由上述定理可立即得到以下结果。

推论 49。设（a，b）$\in \mathbb{H}_t$ 满足以下相似性假设：$T \overset{denote}{=} [\,(a,\ b)\,]_t$ 与 $S \overset{denote}{=} \Sigma_t\ (\,(a,\ b)\,)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$中相似。如果

$$\sigma_t(a,b) = rw_o,\ polar\ decomposition,$$

with *(5.3.7)*

$$r = |\sigma_t(a,b)| \text{ and } w_o \in \mathbb{T},$$

then

$$\tau\left(\prod_{l=1}^{n} T^{r_l}\right) = r^n Re\left(w_o^{\sum_{l=1}^{n} e_l}\right), \tag{5.3.8}$$

对所有（r_1，...，r_n）$\in \{1,*\}^n$，以及所有 $n \in \mathbb{N}$，其中

$$e_l = \begin{cases} 1 & \text{if } r_l = 1 \\ -1 & \text{if } r_l = *, \end{cases}$$

对所有 $l = 1$，...，n。

证明。根据（5.3.5），在（5.3.7）条件下，自由分布数据（5.3.8）在 $\mathfrak{H}_2^t$上的归一化迹 $\tau = \frac{1}{2}tr$ 范围内成立。∎

在相似性假设及条件 (5.3.7) 下，自由分布数据 (5.3.8) 完全刻画了 $[(a,b)]_t \in \mathcal{H}_2^t$ 在 C^*-概率空间 $(\mathfrak{H}_2^t,\ \tau)$ 中的自由分布。

推论50. 假设给定的尺度 t 在 $\mathbb{R}$ 中为负。设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$，并设 $T \overset{denote}{=} [(a,b)]_t$ 和 $S \overset{denote}{=} \Sigma_t((a,b))$ 属于 $\mathcal{H}_2^t$。如果

$$\sigma_t(a,b) = rw_o,\ polar\ decomposition,$$

with *(5.3.9)*

$$r = |\sigma_t(a,b)| \text{ and } w_o \in \mathbb{T},$$

then

$$tr\left(\prod_{l=1}^{n} T^{r_l}\right) = 2r^n Re\left(w_o^{\sum_{l=1}^{n} e_l}\right) = 2\tau\left(\prod_{l=1}^{n} T^{r_l}\right), \tag{5.3.10}$$

对所有 $(r_1,...,r_n) \in \{1,*\}^n$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}$，其中

$$e_l = \begin{cases} 1 & \text{if } r_l = 1 \\ -1 & \text{if } r_l = *, \end{cases}$$

对所有 $l = 1,...,n$。

证明。在定理 48 和推论 49 中，我们分别通过 (5.3.5) 和 (5.3.8) 证明了：若 T 与 S 在$\mathcal{H}_2^t$中相似，则在满足条件 (5.3.9) 时，自由分布数据 (5.3.10) 成立。因此，只需证明实现 T 和 t-谱形式 S 在 $\mathcal{H}_2^t$中相似。然而，由于 $t < 0$ 在 $\mathbb{R}$中，矩阵 T 和 S 根据 (3.3.9) 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似。∎

上述推论表明，若给定的尺度 t 在 $\mathbb{R}$中为负，则自由分布数据 (5.3.10) 完全刻画了 t-缩放幺半群 C^*-代数 $\mathfrak{H}_2^t$ 中实现 $[\xi]_t$ 的自由分布，且在通常迹 tr和归一化迹 τ意义下，对“所有” $\xi \in \mathbb{H}_t$均成立。换言之，它说明，若 $t < 0$在 $\mathbb{R}$中，则 C^*-概率空间上的自由分布数据，

$$\left(\mathfrak{H}_2^t,\, tr\right) \text{ and } \left(\mathfrak{H}_2^t,\, \tau\right),$$

由 $\mathbb{H}_t$ 中超复数的谱完全刻画，并由 (5.3.10) 得出。 (5.3.9)

但是，若 $t \geq 0$，因此，存在一些属于 $\mathbb{H}_t$ 的超复数 η，其实现和谱形式在 $\mathcal{H}_2^t$ 中并不相似，那么在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中计算 $[\eta]_t$ 的联合自由矩就不容易，例如参见 (5.2.10)。

5.4. 关于 $t < 0$ 的 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 的更多自由分布数据。本节中，自动假设固定尺度 t 为负，即 $t < 0$ 属于 $\mathbb{R}$。此时，我们强调，本节的大多数主要结果即使在 $\mathbb{R}$ 中 t 不为负时仍然成立。不过，为方便起见，我们假设给定的尺度 t 为负（例如参见 (5.3.10)）。令 $\mathfrak{H}_2^t$ 为诱导出 C^* 概率空间 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 的 t-尺度幺半群 C^*-代数，其中 τ 是 $\mathfrak{H}_2^t$ 上的归一化迹。由于假设 t 在 $\mathbb{R}$ 中为负，根据 (3.3.9)，实现 $T = [\eta]_t$ 与 t- 谱形式 $S = \Sigma_t(\eta)$ 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中相似，因此，

$$\tau\left(\prod_{l=1}^{n} T^{r_l}\right) = r^n Re\left(w_o^{\sum_{l=1}^{n} e_l}\right) = \tau\left(\prod_{l=1}^{n} S^{r_l}\right),$$

由 (5.3.5)，其中 (5.4.1)

$$\sigma_t(\eta) = r w_o \in \mathbb{C}, \text{ polar decomposition},$$

其中 $r = |\sigma_t(\eta)|$ 和 $w_o \in \mathbb{T}$，对所有 $(r_1, ..., r_n) \in \{1, *\}^n$，其中 $(e_1, ..., e_n) \in \{\pm 1\}^n$满足 (5.3.6)，对所有 $n \in \mathbb{N}$，对“所有” $\eta \in \mathbb{H}_t$。并且，自由分布数据 (5.4.1) 完全刻画了 $[\eta]_t \in (\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 的自由分布，对所有 $\eta \in \mathbb{H}_t$。

在本节中，我们针对 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 中元素的算子论性质，逐种情形细化 (5.4.1)。

定义 51. 设 $\mathcal{A}$ 是一个带有单位元 $1_{\mathcal{A}}$的幺 C^*-代数，并且设 $T \in \mathcal{A}$，以及 $T^* \in \mathcal{A}$，即 T的伴随。
(1) 若 $T^* = T$属于 $\mathcal{A}$，则称 T 为自伴。(2) 若 $T^* = T = T^2$属于 $\mathcal{A}$，则称 T 为投影。(3) 若 $T^*T = TT^*$属于 $\mathcal{A}$，则称 T 为正规。(4) 若 $T^*T = 1_{\mathcal{A}} = TT^*$属于 $\mathcal{A}$，则称 T 为酉元。

设 $(a, b) \in \mathbb{H}_t$，满足条件 (3.1.5)，并令 $T \overset{\text{表示}}{=} [(a, b)]_t \in \mathcal{H}_2^t$，作为 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 的一个元素。那么它的伴随为，

$$T^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ t\overline{b} & a \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^t(*),$$

在 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 中定义良好，且相应的 t-谱形式，

$$S \overset{\text{denote}}{=} \Sigma_t((a, b)) = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & \overline{w} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^t,$$

包含在 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 中，其中 $\overline{w}$ 由 RA 3.2.1 确定，并且

$$w = \sigma_t(a,b) = x + i\sqrt{y^2 - tu^2 - tv^2}$$

是 t-谱值，且其极分解唯一为

$$w = rw_o \text{ with } r = |\sigma_t(a,b)| \text{ and } w_o \in \mathbb{T}.$$

假设与记号 5.4.1。（以下简称 AN 5.4.1）从现在起，如果我们说"给定的超复数 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1"，那么这意味着它的实现记为 T，其 t-谱形式记为 S，由记为 w 的 t-谱值确定，并按上文所述作极分解为 $w = rw_o$。□

设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1。那么，实现 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的自伴性表明

$$T^* = T \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ t\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix},$$

当且仅当

$$\overline{a} = a \text{ and } tb = b \text{ in } \mathbb{C},$$

当且仅当 (5.4.2)

$$a \in \mathbb{R} \text{ and } b = 0.$$

特别地，(5.4.2) 中的等式 $b = 0$ 是由我们的负尺度假设 $t < 0 \in \mathbb{R}$ 得到的。

命题 52. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1。那么，实现 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中是自伴的，当且仅当

$$a \in \mathbb{R} \text{ and } b = 0 \Longleftrightarrow (a,b) = (Re(a), 0) \text{ in } \mathbb{H}_t. \tag{5.4.3}$$

证明. 自伴性 (5.4.3) 由 (5.4.2) 得证。 ∎

自伴性 (5.4.3) 表明，$(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 的自伴生成元 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 具有如下形式，

$$T = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^t(1, *) \text{ with } x \in \mathbb{R}.$$

评注与观察。上述自伴性刻画 (5.4.3) 是针对 $t < 0$ in $\mathbb{R}$ 的情形得到的。其他情形如何？一般而言，T 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中是自伴的，当且仅当

$$\overline{a} = a \text{ and } tb = b,$$

类似于 (5.4.2)。因此可以验证：(i) 若 $t = 0$，则 T 是自伴的，当且仅当 $a \in \mathbb{R}$ 和 $b = 0$，与 (5.4.3) 类似；(ii) 若 $t > 0$ 和 $t \neq 1$，则 T 是自伴的，当且仅当 $a \in \mathbb{R}$ 和 $b = 0$，与 (5.4.3) 类似；同时，(iii) 若 $t = 1$（等价地，若 (a,b) 是 $\mathbb{H}_1$ 的一个双复数），则 T 在 $\mathfrak{H}_2^1$ 中是自伴的，当且仅当 $a \in \mathbb{R}$，当且仅当 $(a,b) = (Re(a)\ b)$ 在 $\mathbb{H}_1$ 中。综上，

$$T \text{ is self-adjoint in } \mathfrak{H}_2^t \Longleftrightarrow (a,b) = (Re(a), 0) \text{ in } \mathbb{H}_t,$$

与 (5.4.3) 类似，每当 $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 时，同时，

$$T \text{ is self-adjoint in } \mathfrak{H}_2^1 \Longleftrightarrow (a,b) = (Re(a), b) \in \mathbb{H}_1.$$

□

现在，设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 在 AN 5.4.1 和我们的负尺度假设下满足自伴性 (5.4.3)，即它实际上是 $(a,0)$，其中 $a \in \mathbb{R}$。那么

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = S \text{ in } \mathcal{H}_2^t(1,*),$$

作为 $\mathfrak{H}_2^t$的一个元素。

定理 53. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1，并假设实现 T在 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 中是自伴的。那么

$$\tau\left(\prod_{l=1}^{n} T^{r_l}\right) = \tau(T^n) = a^n \quad in \quad \mathbb{R}, \tag{5.4.4}$$

对于所有 $(r_1,...,r_n) \in \{1,*\}^n$，对于所有 $n \in \mathbb{N}$。

证明。由 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$的实现 T 的自伴性 (5.4.3)，可得 $(a,b) = (a,0)$ 属于 $\mathbb{H}_t$，其中 $a \in \mathbb{R}$，并且

$$T = S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = S^* = T^* \text{ in } \mathfrak{H}_2^t.$$

So,

$$\tau\left(\prod_{l=1}^{n} T^{r_l}\right) = \tau(T^n) = \tau(S^n) = \tau\left(\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\right),$$

对于所有 $(r_1,...,r_n) \in \{1,*\}^n$，对于所有 $n \in \mathbb{N}$。因此，自由分布数据 (5.4.4) 成立。

观察。与上述定理类似，可以验证：如果 $t \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$，那么对于（$a,0$）的自伴实现 $T \in (\mathfrak{H}_2^t, \tau) \in \mathbb{H}_t$ with $a \in \mathbb{R}$，自由分布数据 (5.4.4) 成立。□

根据 (5.4.3)，超复数 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 的实现 T 满足 AN 5.4.1，当且仅当它是自伴的，即 $(a,b) = (a,0)$ with $a \in \mathbb{R}$。并且，根据定义，这样的自伴矩阵 T 是投影，当且仅当它满足幂等条件：

$$T^2 = T \text{ in } \mathfrak{H}_2^t.$$

注意，自伴实现 T 满足上述幂等条件，当且仅当

$$T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = T,$$

当且仅当 (5.4.5)

$$a^2 = a \Longleftrightarrow a = 0, \text{ or } a = 1, \text{ in } \mathbb{R}.$$

命题 54. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1。那么，实现 T 是投影，当且仅当

$$\text{either } T = I_2, \text{ or } T = O_2 \text{ in } \mathcal{H}_2^t, \tag{5.4.6}$$

其中 $I_2 = [(1,0)]_t$ 是单位矩阵，而 $O_2 = [(0,0)]_t$ 是$\mathfrak{H}_2^t$的零矩阵。

证明。由 (5.4.5) 可知，算子等式 (5.4.6) 在 $\mathcal{H}_2^t$ （因此也在 $\mathfrak{H}_2^t$）中成立。 ∎

观察。与上述命题类似，可以得出：若 $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$，则实现 T 是 $\mathfrak{H}_2^t$中的一个投影，当且仅当它是单位矩阵 I_2或零矩阵 O_2 。对于 $\mathfrak{H}_2^t$ 的情形又如何呢? 如上所述， $T \in \mathfrak{H}_2^1$是自伴的，当且仅当 $(a,b) = (Re(a)\ b)$ 属于 $\mathbb{H}_1$，当且仅当

$$T = \begin{pmatrix} x & b \\ \overline{b} & x \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^1, \text{ and } S = \begin{pmatrix} x + i\sqrt{-u^2 - v^2} & 0 \\ 0 & x - i\sqrt{-u^2 - v^2} \end{pmatrix},$$

这意味着

$$S = \begin{pmatrix} x - |b| & 0 \\ 0 & x + |b| \end{pmatrix} \text{ in } \mathfrak{H}_2^1,$$

在 AN 5.4.1 下。这样的自伴 T 是一个投影，当且仅当 $T^2 = T$ 属于 $\mathfrak{H}_2^1$，当且仅当

$$x^2 + |b|^2 = x \text{ and } 2xb = b.$$

因此，若 $b = 0$，则 $x \in \{0, 1\}$；与此同时，若 $b \neq 0$，则

$$x^2 + |b|^2 = x \text{ and } x = \frac{1}{2},$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ and } \frac{1}{4} + |b|^2 = \frac{1}{2},$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad |b|^2 = \frac{1}{4},$$

当且仅当

$$(a,b) = \left(\frac{1}{2}, b\right) \text{ with } |b|^2 = \frac{1}{4}.$$

这意味着 T 是 $\mathfrak{H}_2^1$中的一个投影，当且仅当

$$(a,b) = (0,0), \text{ or } (a,b) = (1,0),$$

or

$$(a,b) = \left(\frac{1}{2}, b\right) \text{ with } |b|^2 = \frac{1}{4},$$

在 $\mathbb{H}_1$中。

□

上述命题表明，在我们的负尺度假设下，由 $\mathbb{H}_t$ 中的超复数所诱导的 $\mathfrak{H}_2^t$ 的投影仅有单位元 $I_2 = [(1,0)]_t$和零元 $O_2 = [(0,0)]_t$ 。对于任意含单位元的C^*-概率空间 $(\mathcal{A}, \varphi)$，单位元 $1_{\mathcal{A}}$ 的自由分布由其自由矩序列刻画，

$$(\varphi(1_{\mathcal{A}}^n) = \varphi(1_{\mathcal{A}}))_{n=1}^{\infty} = (1,1,1,1,1,...);$$

而零元 $0_{\mathcal{A}}$ 的自由分布不过是零自由分布，它由自由矩序列刻画，

$$(\varphi(0_{\mathcal{A}}^n) = \varphi(0_{\mathcal{A}}))_{n=1}^{\infty} = (0,0,0,0,...).$$

定理 55. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1，其实现为 $T \in \mathcal{H}_2^t$，这是 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的一个“非零”投影。那么

$$\tau\left(T^n\right) = 1, \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

（事实上，这个结果对所有 $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 都成立。）

证明。在假设下，当且仅当（a,b）$=(1,0)$，或在 $\mathbb{H}_t$ 中为 $(0,0)$ 时，实现 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 是 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的一个投影，由 (5.4.6) 可知。由于假设 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 是 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的一个非零投影，我们有

$$(a,b) = (1,0) \text{ in } \mathbb{H}_{\mathfrak{t}}, \Longleftrightarrow T = I_2 = S \text{ in } \mathfrak{H}_2^t.$$

因此，

$$\tau\left(T^n\right) = \tau\left(I_2^n\right) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

（注意，这对所有 $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 都成立。） ∎

设（a,b） $\in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1，并设 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 是 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的实现。注意，

$$T^*T = \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ t\overline{b} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & (t+1)\,\overline{a}b \\ (t+1)\,a\overline{b} & t^2\,|b|^2 + |a|^2 \end{pmatrix},$$

and (5.4.7)

$$TT^* = \begin{pmatrix} a & tb \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ t\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + t^2\,|b|^2 & (t+1)\,ab \\ (t+1)\,\overline{ab} & |b|^2 + |a|^2 \end{pmatrix},$$

在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中。因此，(a,b) 的实现 T 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中正规，当且仅当

$$|a|^2 + t^2\,|b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \text{ and } (t+1)\,\overline{a}b = (t+1)\,ab, \tag{5.4.8}$$

在 $\mathbb{C}$中，由 (5.4.7) 得。

命题 56. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1。那么，实现 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中正规，当且仅当

$$t^2\,|b|^2 = |b|^2 \text{ and } (t+1)\,\overline{a}b = (t+1)\,ab, \tag{5.4.9}$$

在 $\mathbb{C}$ 中。特别地，若 $t=-1$ （等价地，若 $(a,b) \in \mathbb{H}_{-1}$ 是四元数），则T 在$\mathfrak{H}_2^{-1}$中正规；若 $t=1$（等价地，若 $(a,b) \in \mathbb{H}_1$ 是双复数），则 T 在 $\mathfrak{H}_2^1$中正规，当且仅当

$$either\ (a,b) = (Re\,(a)\,,b)\ or\ (a,b) = (a,0)\ in\ \mathbb{H}_1; \tag{5.4.10}$$

同时，若 $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$，则 T 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中正规，当且仅当

$$b = 0 \text{ in } \mathbb{C} \Longleftrightarrow (a,b) = (a,0) \in \mathbb{H}_t. \tag{5.4.11}$$

证明. 由 (5.4.8)，正规性刻画 (5.4.9) 成立。

根据（5.4.9），若 $t=-1$ 属于 $\mathbb{R}$，因此，若（a， b） $\in \mathbb{H}_{-1}$ 是一个四元数，则条件（5.4.9）可表述为

$$|b|^2 = |b|^2\,, \text{ and } 0 = 0,$$

它们是 $\mathbb{C}$ 上的恒等式。这些恒等式表明，每个四元数的实现自动在 $\mathfrak{H}_2^{-1}$ 中是正规的。

假设 $t=1$ 属于 $\mathbb{R}$。那么条件 (5.4.9) 等价于

$$|b|^2=|b|^2 \text{ and } 2\overline{a}b=2ab,$$

当且仅当以下两种情况之一成立

$$\overline{a}=a \text{ in } \mathbb{C} \Longleftrightarrow (a,b)=(Re\,(a),b)\in \mathbb{H}_1 \text{ (if } b\neq 0),$$

or

$$(a,b)=(a,0)\in \mathbb{H}_1 \quad (\text{if } b=0).$$

因此，若 $t=1$，则 T 是正规算子，当且仅当条件 (5.4.10) 成立。

现在假设 $t\neq 1$ 和 $t\neq -1$ 均成立，即设 $t^2\neq 1$ 属于 $\mathbb{R}$。因此，(5.4.9) 的第一个条件可写为

$$t^2|b|^2=|b|^2 \Longleftrightarrow b=0 \text{ in } \mathbb{C}.$$

因此，(5.4.9) 的第二个条件自动成立，因为

$$(t+1)\,\overline{a}\cdot 0=(t+1)\,a\cdot 0 \Longleftrightarrow 0=0.$$

因此，当且仅当 $a,b=(a,0)$ 在 $\mathbb{H}_t$ 中（只要 $t\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$）时，$(a,b)$ 的实现 $T\in\mathcal{H}_2^t\in\mathbb{H}_t$ 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中是正规的。也就是说，正规性 (5.4.11) 成立。 ∎

上述命题表明：(i) “所有”四元数的实现都在 $\mathfrak{H}_2^{-1}$ 中是正规的；(ii) 当且仅当 $(a,b)=(Re\,(a)\ b)$，或根据 (5.4.10)，$(a,b)=(a,0)$ 在 $\mathbb{H}_1$ 中时，双复数的实现都在 $\mathfrak{H}_2^1$ 中是正规的；(iii) 根据 (5.4.11)，只要 $t\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$，唯一的实现 $[(a,0)]_t$ 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中是正规的。

定理57. 设 $(a,b)\in\mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1。
(5.4.12) 假设 $t=-1$。那么 T 在$\mathfrak{H}_2^{-1}$中是正规的，且其自由分布由公式 (5.3.10) 刻画。

(5.4.13) 设 $t\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$。若 T在 $\mathfrak{H}_2^t$中是“非零”的正规元素，则

$$\tau\left(\prod_{l=1}^{n}T^{r_l}\right)=R^nRe\left(W_o^{\sum_{l=1}^{n}e_l}\right),$$

with *(5.4.14)*

$$R=|a| \text{ and } W_o=\frac{a}{|a|}\in\mathbb{T},$$

其中

$$e_l=\begin{cases}1 & \text{if } r_l=1\\ -1 & \text{if } r_l=*,\end{cases}$$

对于 $l=1,...,n$，对于所有 $(r_1,...,r_n)\in\{1,*\}^n$，以及对于所有 $n\in\mathbb{N}$。

证明。由 (5.3.10) 可得陈述 (5.4.12)。

当然，如果 $t<0$，且如果 $T\in\mathcal{H}_2^t$，那么根据 (5.3.10)，自由分布数据 (5.4.14) 成立，因为 T 与 t-谱形式 S 在 $\mathcal{H}_2^t$ 中作为 $(\mathfrak{H}_2^t,\tau)$ 的元素相似。然而，在陈述 (5.4.13) 中，正规性对所有尺度$t\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$都成立。假设实现 T是$\mathfrak{H}_2^t$中的一个“非零”“正规”元素。那么

$$(a,b)=(a,0)\in\mathbb{H}_t, \text{ with } a\neq 0,$$

由 (5.4.11) 可知。因此，

$$T=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \overline{a}\end{pmatrix}=S,$$

因为 $\sigma_t(a,0) = a$ 属于 $\mathbb{C}$。也就是说，实现 T 与 t-谱形式 S 在 $\mathfrak{H}_2^t$中相同，这意味着它们相似。因此，根据 AN 5.4.1，

$$a = w \overset{\text{denote}}{=} \sigma_t(a,0),$$

极分解为

$$w = a = |a| \left(\frac{a}{|a|} \right) \in \mathbb{C},$$

即，在 AN5.4.1 下为 $r = |a|$ 和 $w_o = \frac{a}{|a|}$。因此，与（5.3.10）类似，自由分布数据（5.4.14）成立。 ∎

请注意，在陈述（5.4.13）的证明中，对于 $t < 0$ 但 $t \neq -1$ 的情形，我们并未使用负尺度假设。事实上，即使 $t \geq 0$ 但 $t \neq 1$，正规性（5.4.11）表明，实现 T 是一个不受尺度 t 影响的对角矩阵。因此，无论在 $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ 中给定何种尺度 t，在正规性条件下，自由分布数据（5.4.14）都在（$\mathfrak{H}_2^t$, τ）中成立。那么，对于 $t = 1$ 的情形又如何呢？回顾一下，如果 $t = 1$，则（a, b）的实现 T 在 $\mathfrak{H}_2^1$ 中是正规的，当且仅当以下任一条件成立：

$$(a,b) = (Re(a), b), \text{ if } b \neq 0,$$

or

$$(a,b) = (a,0), \text{ if } b = 0,$$

在 $\mathbb{H}_1$ 中，由 (5.4.10) 可知。因此，若 $(a,b) = (a,0)$ 属于 $\mathbb{H}_1$，则 T 的联合自由矩也可根据公式 (5.4.14) 类似地确定，这是因为 T 与 S 相同（因而相似）（在 AN 5.4.1 下）。然而，若 $(a,b) = (Re(a)\ b)$ 且满足 $b \neq 0$，那么我们需要比 (5.2.10) 更好的工具来计算相应的自由分布数据，因为这里无法使用我们的相似性技巧（定理 48 中的技巧）。

根据酉性的定义，若 U 是一个 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的元素且为酉元，那么它必然是正规元。也就是说，酉性蕴含正规性。设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1，其实现 $T \in \mathcal{H}_2^t$ 位于 $(\mathfrak{H}_2^t, \tau)$ 中，并且它在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中是酉元。根据假设，T 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中是酉元，因此它是正规元。

首先假设 $t = -1$ 属于 $\mathbb{R}$，因此，$(a,b) \in \mathbb{H}_{-1}$ 是一个四元数。那么，根据（5.4.12），实现 T 在 $\mathfrak{H}_2^t$ 中自动是正规的。事实上，在这种情况下，

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \text{ with } T^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = [(\overline{a}, -b)]_{-1},$$

在 $\mathcal{H}_2^{-1}$中，作为$\mathfrak{H}_2^{-1}$. 的元素。因此，正规性得到了保证；

$$T^*T = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix} = TT^*,$$

在 $\mathcal{H}_2^{-1}$中，作为 $\mathfrak{H}_2^{-1}$的元素。这表明，T 是 $\mathfrak{H}_2^{-1}$中的一个酉元，当且仅当

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{5.4.15}$$

同时，若 $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ 属于 $\mathbb{R}$，则 T是正规元，当且仅当根据 (5.4.11)，$(a,b) = (a,0)$ 属于 $\mathbb{H}_t$，当且仅当

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2^t,$$

它与 $\mathfrak{H}_2^t$ 中 $(a,0)$ 的 t-谱形式 S 相同（因而相似）。这个正规元 T 在 $\mathfrak{H}_2^t$中是酉元，当且仅当

$$T^*T = I_2 = TT^* \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

当且仅当 (5.4.16)

$$|a|^2 = 1 \quad \text{in} \quad \mathbb{C}.$$

命题 58. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1。

(5.4.17) 设 $t = -1$。则 T 是 $\mathfrak{H}_2^t$中的酉元，当且仅当 $|a|^2 + |b|^2 = 1$。

(5.4.18) 设 $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$。则 T 是$\mathfrak{H}_2^t$中的酉元，当且仅当 $|a|^2 = 1$ 和$b = 0$。

证明。(5.4.17) 和 (5.4.18) 分别由 (5.4.15) 和 (5.4.16) 得出，因为 (a,b) 的酉实现 T 自动满足正规性 (5.4.9)。

观察。现在，假设 $t = 1$，并令 $(a,b) \in \mathbb{H}_1$ 为一个满足 AN 5.4.1 的双复数。根据 (5.4.10)，当且仅当以下条件之一成立时，实现 $T \in \mathcal{H}_2^1$ 在 $\mathfrak{H}_2^1$中正规：

$$(a,b) = (Re\,(a), b), \text{ or } (a,b) = (a,0),$$

在 $\mathbb{H}_1$中。因此，若 $(a,b) = (a,0)$ 在 $\mathbb{H}_1$中，则可得酉性： T在 $\mathfrak{H}_2^1$中是酉元，当且仅当 $|a|^2 = 1$，与 (5.4.18) 类似。然而，若

$$(a,b) = (Re\,(a), b) = (x,b) \text{ in } \mathbb{H}_1,$$

其中 $b \neq 0$ 属于 $\mathbb{C}$，则 T 在 $\mathfrak{H}_2^1$中是酉元，当且仅当

$$\begin{pmatrix} x & \overline{b} \\ b & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & b \\ \overline{b} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + \overline{b^2} & 2xRe\,(b) \\ 2xRe\,(b) & x^2 + b^2 \end{pmatrix} = I_2,$$

and

$$\begin{pmatrix} x & b \\ \overline{b} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \overline{b} \\ b & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + b^2 & 2xRe\,(b) \\ 2xRe\,(b) & x^2 + \overline{b^2} \end{pmatrix} = I_2,$$

在 $\mathfrak{H}_2^1$中，当且仅当

$$x^2 + \overline{b^2} = x^2 + b^2 = 1 \text{ and } 2xRe\,(b) = 0,$$

当且仅当

$$b^2 = \overline{b^2} = 1 - x^2 \text{ and } 2xRe\,(b) = 0,$$

当且仅当

$$b^2 = 1 - x^2 \in \mathbb{R} \text{ and } x = 0,$$

因为假设 $\mathbb{C}$ 中的 b 不为零，当且仅当

$$x = 0 \text{ and } b = \pm 1 \quad \text{in} \quad \mathbb{R},$$

当且仅当

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ or } T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ in } \mathcal{H}_2^1,$$

当且仅当

$$(a,b) = (0,1), \text{ or } (a,b) = (0,-1) \text{ in } \mathbb{H}_1.$$

即，若 $(a,b) = (Re(a)\ b)$ 属于 $\mathbb{H}_1$，则 T是 $\mathfrak{H}_2^1$中的一个酉元，当且仅当

$$(a,b) = (0,1)\,,\ \text{or}\ \ (a,b) = (0,-1)\,,$$

在 $\mathbb{H}_1$ 中。总之，双复数 (a,b) 的实现 $T \in \mathcal{H}_2^1 \in \mathbb{H}_1$ 是 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的酉元，当且仅当以下条件之一成立：

$$(a,b) = (a,0) \ \ \text{with} \ \ |a|^2 = 1,$$

or

$$(a,b) = (0,1)\,,\ \text{or}\ \ (a,b) = (0,-1)\,,$$

在 $\mathbb{H}_1$
中。 □

由酉性 (5.4.17) 和 (5.4.18)，可得以下结果。

定理 59. 设 $(a,b) \in \mathbb{H}_t$ 满足 AN 5.4.1。

(5.4.19) 假设 $t = -1$。若 T 是 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的酉元，则其自由分布由公式 (5.3.10)（其中 $r = 1$）刻画。

(5.4.20) 设 $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$。若 T 是 $\mathfrak{H}_2^t$ 中的酉元，则

$$\tau\left(\prod_{l=1}^{n} T^{r_l}\right) = Re\left(a^{\sum_{l=1}^{n} e_l}\right),\ \text{with}\ a \in \mathbb{T}\ \text{in}\ \mathbb{C},$$

其中 *(5.4.21)*

$$e_l = \begin{cases} 1 & \text{if } r_l = 1 \\ -1 & \text{if } r_l = *, \end{cases}$$

对于 $l = 1, ..., n$，对所有 $(r_1, ..., r_n) \in \{1, *\}^n$，以及对所有 $n \in \mathbb{N}$。

证明。(5.3.11) 表明命题 (5.4.19) 成立。特别地，由酉性的刻画 (5.4.17), (5.3.11) 中的自由分布数据必定满足 $r = 1$，因为

$$|\sigma_t\,(a,b)| = |w| \overset{\text{denote}}{=} r = 1,$$

根据 (5.4.17)，在 T 和 S 相似的情况下，

由 (5.4.13)，若 $t \neq \pm 1$，则由 (5.4.14) 可知自由分布数据 (5.4.21) 成立。事实上，在 T 为酉元的情况下，公式 (5.4.14) 满足

$$R = |a| = 1 \text{ and } W_o = a \in \mathbb{T}.$$

因此，联合自由矩（5.4.21）成立。 ∎

上述定理刻画了由 $\mathbb{H}_t$ 诱导的（$\mathfrak{H}_2^t$，τ）中酉元的自由分布，其中 $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$。

设 $t = 1$，且（a，b）$\in \mathbb{H}_1$ 满足 AN 5.4.1。在上述观察中，我们证明了（a，b）的实现 $T \in \mathcal{H}_2^1$ 是酉元，当且仅当以下任一条件成立：

$$(a,b) = (a,0)\ \text{with}\ a \in \mathbb{T},$$

or

$$(a,b) = (0,1)\,,\ \text{or}\ \ (a,b) = (0,-1)\,,$$

在 $\mathbb{H}_1$中，等价地，二者之一

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \ \ \text{with} \ \ a \in \mathbb{T},$$

or

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{or}\ T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

在 $\mathcal{H}_2^1$ 中（作为 $\mathfrak{H}_2^1$的一个元素）。因此，如果$(a,b) = (a,0) \in \mathbb{H}_1$ 且 $|a|^2 = 1$，那么 T 的自由分布也可用公式 (5.4.21) 类似地刻画。与此同时，如果 $T = [(0,1)]_1$, ，那么

$$T^* = T \in \mathcal{H}_2^1 \subset \mathcal{H}_2^1 (1,*) \text{ in } \mathfrak{H}_2^1,$$

and

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

属于 $\mathfrak{H}_2^1$，满足 (5.4.22)

$$(T^n)_{n=1}^{\infty} = (T, I_2, T, I_2, T, I_2, ...);$$

并且，若 $T = [(0,-1)]_1$, 则

$$T^* = T \in \mathcal{H}_2^1 \subset \mathcal{H}_2^1 (1,*) \text{ in } \mathfrak{H}_2^1,$$

and

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

属于 $\mathfrak{H}_2^1$，满足 (5.4.23)

$$(T^n)_{n=1}^{\infty} = (T, I_2, T, I_2 T, I_2, ...).$$

因此，除定理 59 外，还可得到以下结果。

定理60。设 $(a,b) \in \mathbb{H}_1$ 是满足 AN 5.4.1 的双复数。那么，实现 T是 $\left(\mathfrak{H}_2^1, \tau\right)$ 中的酉元，当且仅当以下情况之一成立：

$$(a,b) = (a,0), \text{ with } |a|^2 = 1,$$

or *(5.4.24)*

$$(a,b) = (0,1), \text{ or } (a,b) = (0,-1) \text{ in } \mathbb{H}_1.$$

(5.4.25) 若 $(a,b) = (a,0)$，且 $|a|^2 = 1$ 在 $\mathbb{H}_1$ 中，则 T 的自由分布由公式 (5.4.21) 刻画。

(5.4.26) 若 $(a,b) = (0,1)$，或 $(a,b) = (0,-1)$ 在 $\mathbb{H}_1$ 中，则酉实现 T 的自由分布完全由自由矩序列刻画，

$$(\tau(T^n))_{n=1}^{\infty} = (0,1,0,1,0,1,0,1,...). \quad (5.4.27)$$

证明。根据命题 58 之后的上述观察，可以证明
双复数 $(a,b) \in \mathbb{H}_1$ 的实现 $T \in \mathcal{H}_2^1$ 是 $\mathfrak{H}_2^1$ 中的酉元，当且
当且仅当条件 (5.4.24) 成立时。

通过类似于证明陈述 (5.4.20) 的方法，可以证明陈述 (5.4.25)。因此，自由分布数据 (5.4.21) 成立。

现在，如果 $T = [(0,1)]_1$, 或 $T = [(0,-1)]_1$ 属于 $\mathcal{H}_2^1$，那么它不仅是一个酉元，而且还是 $\left(\mathfrak{H}_2^1, \tau\right)$ 的自伴元，因此， T 的自由分布完全由自由矩序列 $(\tau(T^n))_{n=1}^{\infty}$ 确定。然而，根据 (5.4.22) 和 (5.4.23)，可以立即得到自由矩序列 (5.4.27)。因此，陈述 (5.4.26) 成立。 ∎

上述定理完全刻画了由 $\mathbb{H}_1$的双复数诱导的$\left(\mathfrak{H}_2^1, \tau\right)$ 的酉元的自由分布。

References

[1] D. Alpay、M. E. Luna-Elizarraras、M. Shapiro 和 D. Struppa，《格里森问题、有理函数与左正则函数空间：分裂四元数情形》，《以色列数学杂志》，226，（2018）319 - 349。[2] I.Cho 和 P. E. T. Jorgensen，《四元数方程的谱分析》，国际随机过程与代数结构：从理论到应用会议论文集（SPAS 2019），瑞典韦斯特罗斯，（2021）即将发表。[3] I.Cho 和 P. E. T. Jorgensen，《多变量四元数谱分析》，《数学小品》，41，第3期，（2021）335 - 379。[4] C. J. L. Doran，《物理学家的几何代数》，ISBN: 978-0-521-48022-2，（2003）由剑桥大学出版社出版。[5] F. O. Farid、Q. Wang 和 F. Zhang，《关于四元数矩阵的特征值》，《线性与多重线性代数》，第4期，（2011），451 - 473。[6] C. Flaut，《二阶四元数矩阵的特征值与特征向量》，《奥维迪乌斯康斯坦察大学年刊》，第10卷，第2期，（2002）39 - 44。[7] P. R. Girard，《爱因斯坦方程与克利福德代数》，《克利福德代数进展与应用》，9，第2期，（1999）225 - 230。[8] P. R. Halmos，《线性代数习题集》，ISBN: 978-0-88385-322-1，（1995）由美国数学协会出版。[9] P. R. Halmos，《希尔伯特空间习题集》，ISBN: 978-038-790685-0，（1982）由施普林格出版社（纽约）出版。[10] W, R. Hamilton，《四元数讲义》，可在 http://books.google.com 查阅，（1853）由剑桥大学出版社出版。[11] I. L. Kantor 和 A. S. Solodnikov，《超复数：代数入门》，ISBN: 0-387-96980-2，（1989）由施普林格出版社（纽约）出版。[12] V. Kravchenko，《应用四元数分析》，ISBN: 3-88538-228-8，（2003）由海德曼出版社出版。[13] N. Mackey，《哈密顿与雅可比再度相遇：四元数与特征值问题》，《工业与应用数学学会矩阵分析与应用杂志》，16，第2期，（1995）421 - 435。[14] S. Qaisar 和 L. Zou，《四元数矩阵标准特征值的分布》，《国际数学论坛》，第7卷，第17期，（2012）831 - 838。[15] S. D. Leo、G. Scolarici 和 L. Solombrino，《四元数特征值问题》，《数学物理杂志》，43，（2002）5815 - 5829。[16] L. Rodman，《四元数线性代数专题》，ISBN:978-0-691-16185-3，（2014）由普林斯顿大学出版社（新泽西州）出版。[17] B. A. Rozenfeld，《非欧几何史：几何空间概念的演变》，ISBN: 978-038-796458-4，（1988）由施普林格出版社出版。[18] R. Speicher，《合并自由积的组合理论与算子值自由概率论》，美国数学会，回忆录，ISBN:978-0-8218-0693-7，（1998）由美国数学会出版。[19] A. Sudbery，《四元数分析》，DOI: 10.1017/s0305004100053638，《剑桥哲学学会数学会刊》，（1998）[20] L. Taosheng，《四元数矩阵的特征值与特征向量》，《华中师范大学学报》，29，第4期，（1995）407 - 411。[21] J. A. Vince，《计算机图形学的几何代数》，ISBN: 978-1-84628-996-5，（2008）由施普林格出版社出版。[22] D.V. Voiculescu、K. J. Dykema 和 A. Nica，《自由随机变量》，ISBN:978-0-8218-1140-5，（1992）由美国数学会出版。[23] J. Voight，《四元数代数》，可在 http://math.dartmouth.edu/~jvoight/quat-book.p 查阅。

df,

（2019年）数学系，达特茅斯大学。

Chapman Univ. Dept. of Math. 1 University Dr. Orange CA 92866 U. S. A. / , St. Ambrose Univ. Dept. of Math. and Stat. 421 Ambrose Hall 518 W. Locust St.

, , „ , , , , ,Davenport, Iowa, 52803, U. S. A.*Email address*: alpay@chapman.edu / choilwoo@sau.edu